LP, SDP, SOCP の問題例を乱数で作る方法

小林和博

2010 年 7 月 30 日

標準形

LP, SDP, SOCP が実行可能内点をもつような問題のつくり方をのべる．実行可能内点をもつので主双対内点法を用いたソルバでは安定して解けることが期待される．

主問題:

$$\begin{array}{ll} \min & \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle \\ \text{subject to} & \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \\ & \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{1}$$

双対問題:

$$\begin{array}{ll} \max & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{subject to} & \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i y_i \\ & \boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{2}$$

LP, SOCP の場合は $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}$ はベクトルであり SDP の場合は行列である．$\langle , \rangle$ は内積を表し $\boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{0}$ は変数 x が錐に入っていることをあらわす．たとえば LP の場合は非負象限にあることを表す．作成する手順は以下のとおり．簡単のため $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}_i$ はベクトルとして説明する．ベクトル $\boldsymbol{c}$ の k 番目の要素を $\boldsymbol{c}[k]$, $\boldsymbol{a}_i$ の k 番目の要素を $\boldsymbol{a}_i[k]$ と表す. SDP の場合は適宜行列に読みかえるとよい.

1. $\boldsymbol{a}_i$ の各要素を乱数で発生させる．どのような実数でもよい.
2. $\boldsymbol{s}_0 \succeq \boldsymbol{0}$ をみたす点 $\boldsymbol{s}_0$ を決める．たとえば $\boldsymbol{s}_0 = \alpha \boldsymbol{e}$ とする．ここで $\boldsymbol{e}$ は単位元で LP では $\boldsymbol{e} = (1, 1, \ldots, 1)$, SOCP では $\boldsymbol{e} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, SDP では $\boldsymbol{e} =$ 単位行列である．α は正の実数.
3. 変数ベクトル $\boldsymbol{y}$ の各要素を乱数で発生させる. これもどのような実数でもよい.
4. $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{s}_0 + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i y_i$ として $\boldsymbol{c}$ を決める. この時点で $\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{y}$ の組は双対問題の実行可能解（$\boldsymbol{s}_0$ は内点）になっている．あとは主問題が実行可能解をもつように b_i の値を決めればよい.
5. $\boldsymbol{x}_0 \succeq \boldsymbol{0}$ をみたす点 $\boldsymbol{x}_0$ を決める.
6. $b_i := \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle$ により b_i の値を決める．これで $\boldsymbol{x}_0$ が主問題の実行可能解（$\boldsymbol{x}_0$ は内点）になっている

以上が実行可能内点をもつ LP, SOCP, SDP の問題例の作り方である.

自由変数をもつ場合

自由変数をもつ問題の標準形は以下のとおりである

主問題:

$$\begin{array}{lll} \min & \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x} \rangle + \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{z} & \\ \text{subject to} & \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x} \rangle + \boldsymbol{d}_i^T \boldsymbol{z} = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) & \\ & \boldsymbol{x} \succeq \boldsymbol{0} & \end{array} \tag{3}$$

双対問題:

$$\begin{array}{ll} \max & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \\ \text{subject to} & \boldsymbol{s} = \boldsymbol{c} - \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i y_i \\ & \boldsymbol{f} = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{d}_i \\ & \boldsymbol{s} \succeq \boldsymbol{0} \end{array} \tag{4}$$

ただし、$\boldsymbol{d}_i (i = 1, 2, \ldots, m), \boldsymbol{f}$ は p 次元の実数ベクトル、$\boldsymbol{z}$ は p 次元の自由変数ベクトルとする。

この問題の問題例をつくる方法は以下のとおり。

1. $\boldsymbol{a}_i$ の各要素を乱数で発生させる．どのような実数でもよい．
2. $\boldsymbol{x}_0 \succeq \boldsymbol{0}$ をみたす点 $\boldsymbol{x}_0$ を決める．たとえば $\boldsymbol{x}_0 = \alpha \boldsymbol{e}$ とする．ここで $\boldsymbol{e}$ は単位元で LP では $\boldsymbol{e} = (1, 1, \ldots, 1)$, SOCP では $\boldsymbol{e} = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, SDP では $\boldsymbol{e} =$ 単位行列である．α は正の実数.
3. $\boldsymbol{z}$ を生成する．これは自由変数なのでどんな実数でもよい。
4. $\boldsymbol{d}_i$ を生成する。これもどんな実数でもよい.
5. $b_i := \langle \boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{x}_0 \rangle + \boldsymbol{d}_i^T \boldsymbol{z}$ で b_i を決める．これで主問題は実行可能解をもつようになる。
6. $\boldsymbol{s}_0 \succeq \boldsymbol{0}$ をみたす点 $\boldsymbol{s}_0$ を決める
7. $\boldsymbol{y}$ を生成する。これはどのような実数でもよい。
8. $\boldsymbol{c} := \boldsymbol{s}_0 + \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a}_i y_i$ により $\boldsymbol{c}$ を決める
9. $\boldsymbol{f} := \sum_{i=1}^{m} y_i \boldsymbol{d}_i$ により $\boldsymbol{f}$ を決める.

以上が自由変数をもつ LP, SOCP, SDP の問題例の作り方である.

実装

自由変数をもつ LP+SOCP の問題を、SeDuMi フォーマットで生成する matlab の手順は、以下のとおりである。ただし、 二次錐は 1 つの場合である。複数ある場合は、該当する部分の変更が必要である。

```
>>m=3
>>K.q=[5]
>>K.l=2
>>K.f=3
>>p=K.f;
>>n=sum(K.q+K.l)
>>a=zeros(n,m)
>>for i=1:m
a(:,i) = rand(n,1)
```

```
end
>>alpha=10
>>x0(1:K.l,1)=alpha*ones(K.l,1)
>> tmp_x = zeros(K.q,1)
>> tmp_x(1)=alpha
>>x0=[x0;tmp_x]
>> z0 = rand(p,1)
>> d=zeros(p,m)
>>for i=1:m
   d(:,i) = rand(p,1)
end
>> b=zeros(1,m);
>> for i = 1:m
b(i) = a(1:K.l,1)'*x0(1:K.l)+a(K.l+1:n,1)'*x0(K.l+1:n) +  d(:,i)'*z0
    end
>> s0=x0;
>> y=rand(m,1)
>> c=s0+ a*y
>>f=d*y
>>c=[f;c]
>>A=[d;a]
```

こうして生成した A,b,c,K をもちいて

```
>>sedumi(A,b,c,K)
```

とすれば、問題を解くことができる。