

線形計画の双対問題の導出とその応用 — 列生成のための —

小林和博

2010年8月19日

1 最大化の線形計画問題

最大化の線形計画問題を以下のように書く。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i \in I) \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in E) \\ & x_j \geq 0 \quad (j \in R) \end{aligned} \tag{1}$$

制約式の線形結合をとると、

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i \tag{2}$$

ここで、 y_1, y_2, \dots, y_m は、 $y_i \geq 0$ $y_i \in I$ を満たす数とする。ここで、 y_1, y_2, \dots, y_m を、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &\geq c_j \quad j \in R \\ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i &= c_j \quad j \in F. \end{aligned} \tag{3}$$

を満たすようにとれば、最初の問題の任意の実行可能解 x_1, x_2, \dots, x_n に対して、

$$c_j x_j \leq \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j$$

がなりたつ。したがってまた、

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j \tag{4}$$

がなりたつ. x_1, x_2, \dots, x_n が、6, 8 の両方を満たすならば、

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^m b_j y_j.$$

2 最小化の場合

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i \in I) \\ & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i \in E) \\ & x_j \geq 0 \quad (j \in R) \end{aligned} \tag{5}$$

制約式の線形結合をとると、

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j \geq \sum_{i=1}^m b_i y_i \tag{6}$$

ここで、 y_1, y_2, \dots, y_m は、 $y_i \geq 0 \quad i \in I$ を満たす数とする。ここで、 y_1, y_2, \dots, y_m を、

$$\begin{aligned} c_j &\geq \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \quad j \in R \\ c_j &= \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \quad j \in F. \end{aligned} \tag{7}$$

を満たすようにとれば、最初の問題の任意の実行可能解 x_1, x_2, \dots, x_n に対して、

$$c_j x_j \geq \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j$$

がなりたつ。したがってまた、

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j \tag{8}$$

がなりたつ. x_1, x_2, \dots, x_n が、6, 8 の両方を満たすならば、

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \geq \sum_{j=1}^m b_j y_j.$$

3 Vehicle Routing の場合

$$\begin{aligned}
& \min && \sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} c_p^k y_p^k \\
& \text{subject to} && \sum_{p \in P^k} (-y_p^k) \geq -1 \quad k \in K \\
& && \sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} a_{ip}^k y_p^k = 1 \quad i \in C \\
& && y_p^k \geq 0 \quad \forall k \in K, \forall p \in P_k
\end{aligned} \tag{9}$$

最初の制約式に対する双対変数を $z_k \geq 0$, 2 番目の制約式 (等式) に対する双対変数を $\lambda_i \in R$ とする。制約式の線形結合をとると、

$$\sum_{v \in V} \sum_{p \in P^v} z_k (-y_p^k) + \sum_{i \in C} \left(\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} a_{ip}^k y_p^k \right) \lambda_i \geq \sum_{k \in K} (-z_k) + \sum_{i \in C} \lambda_i \tag{10}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} \left(-z_k + \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \right) y_p^k \geq \sum_{k \in K} (-z_k) + \sum_{i \in C} \lambda_i \tag{11}$$

ただし、 $z_k \geq 0$ ($k \in K$), $\lambda_i \in R$ ($i \in C$) である。このとき、 $z_1, z_2, \dots, z_{|K|}, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{|C|}$ を、

$$c_p^k \geq -z_k + \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \tag{12}$$

となるようにとると、問題 (9) の任意の実行可能解 y_k^p は、次の関係式を満たす

$$c_p^k y_p^k \geq \left(-z_k + \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \right) y_p^k \tag{13}$$

したがって、次の関係式も満たす

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} c_p^k y_p^k \geq \sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} \left(-z_k + \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \right) y_p^k \tag{14}$$

さらに、次の関係式も満たす

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} c_p^k y_p^k \geq \sum_{k \in K} (-z_k) + \sum_{i \in C} \lambda_i \tag{15}$$

(13) を書き換えると、

$$\left(c_p^k - \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i + z_k \right) y_p^k \geq 0 \tag{16}$$

となる。 $y_p^k > 0$ となる運搬車 k の実行可能パス p については、

$$c_p^k - \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i + z_k \geq 0$$

がなりたつ、ということである。

(12) の条件の元で、(14) の右辺を最大化する問題

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k \in K} (-z_k) + \sum_{i \in C} \lambda_i \\ \text{s.t.} \quad & c_p^k \geq -z_k + \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \quad k \in K, p \in P^k \end{aligned} \quad (17)$$

が、問題 (9) の双対問題である。

問題 (9) において、実行可能解の集合 P_k を、その部分集合 \hat{P}_k でおきかえた問題が限定主問題にあたる。限定主問題の双対問題は、

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k \in K} (-z_k) + \sum_{i \in C} \lambda_i \\ \text{s.t.} \quad & c_p^k \geq -z_k + \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \quad k \in K, p \in \hat{P}^k \end{aligned} \quad (18)$$

となり、元の問題 (17) よりも制約式の数少なく、目的関数は同じである。したがって、(17) の緩和問題になっている。

一般に、緩和問題の最適解が、元の問題の制約式を全て満たしていれば、元の問題の最適解になっている（「世界記録保持者は日本記録保持者の定理」）。17 の制約式を全て満たしているかどうかを調べるために、17 の制約式をつぎのように変形する

$$c_p^k - \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \geq -z_k \quad k \in K, p \in P^k.$$

これは、どのような $p \in P^k$ に対して計算した左辺の値も、 $-z_k$ よりも小さくない、という関係式である。通常、 P^k の要素数は非常に大きいので、全ての要素で上記の関係を確認するのではなく、 P^k の要素の中で、 $c_p^k - \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i$ を最も小さくするものだけについて確認する。

$$\begin{aligned} \min \quad & c_p^k - \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \\ \text{subject to} \quad & p \in P^k \end{aligned} \quad (19)$$

この最適値が、 $-z_k$ よりも大きければ、(18) の最適解は、(17) の最適解になっていることがわかる。

4 Multi-commodity flow problem の場合

多品種フロー問題は、以下の線形計画問題として書ける。

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^k \left(\sum_{a \in \delta^+(s_i)} x_a^i - \sum_{a \in \delta^-(s_i)} x_a^i \right) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{a \in \delta^+(v)} x_a^i - \sum_{a \in \delta^-(v)} x_a^i = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s_i, t_i\} \quad i \in [k] \\ & \sum_{i=1}^k x_a^i \leq u_a \quad \forall a \in A \\ & x_a^i \geq 0 \quad \forall a \in A, i \in [k] \end{aligned} \quad (20)$$

これは、edge formulation と呼ばれるものである。これ以外に、path formulation とよばれるものがある。 P_{st} を、単純 (simple) な $(s - t)$ パスの集合とし、 $P = P_{s_1, t_1} \cup \dots \cup P_{s_k, t_k}$ と定義する。各パス $p \in P_{s_i, t_i}$ について、次の最適化問題を定義する

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{p \in P} f_p \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{p \in P_a} f_p \leq u_a \quad \forall a \in A \\ & f_p \geq 0 \quad \forall p \in P \end{aligned} \quad (21)$$

$P' \subseteq P$ を、(21) の集合 P の部分集合とする。 P' についての限定主問題を、次で定義する

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{p \in P'} f_p \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{p \in P'_a} f_p \leq u_a \quad \forall a \in A \\ & f_p \geq 0 \quad \forall p \in P' \end{aligned} \quad (22)$$

(22) の実行可能解は、(21) の実行可能解になり、さらに、(22) の最適解は、(21) の最適値よりも大きくはならない。もし、(22) の最適解が (21) の最適解になっているか否かの判定のために、次の双対問題を定義する。

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{a \in A} u_a \mu_a \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{a \in P} \mu_a \geq 1 \quad \forall p \in P' \\ & \mu_a \geq 0 \quad \forall a \in A \end{aligned} \quad (23)$$

(23) の最適解を μ とする。全ての $p \in P$ (P' ではない) で、制約式

$$\sum_{a \in P} \mu_a \geq 1$$

満たされていたとすると、このときの最適値は、(??) の最適値と一致する。この制約式を満たさないパス $p \in P$ があったとすると、このパスに対応する変数を (22) に追加する。

(22) から (23) を導出することは容易である。(22) の制約 $\sum_{p \in P'_a} f_p \leq u_a$ に対して、変数 $\mu_a \geq 0$ を定義する。この制約式の線形結合によって、次の式を得る

$$\sum_{a \in A} \sum_{p \in P'_a} \mu_a f_p \leq \sum_{a \in A} u_a \mu_a$$

ここで、 μ_a を、

$$1 \leq \sum_{a \in P} \mu_a$$

となるようにとると、(22) の任意の実行可能解について

$$f_p \leq \sum_{a \in A} \mu_a f_a$$

が成り立つ。したがってまた、

$$\sum_{p \in P'} f_p \leq \sum_{p \in P'} \sum_{a \in A} \mu_a f_p \leq \sum_{a \in A} u_a \mu_a \quad (24)$$

も成り立つ。制約

$$1 \leq \sum_{a \in P'} \mu_a$$

のもとで、(24)の最後の線形関数を最小化するのが双対問題であるから、(23)が得られる。