

浮体の弾性変形を考慮した波浪中動揺の非線形計算法

船舶技術研究所

谷澤克治 (TANIZAWA Katsuji)[†]

1 緒言

船舶や海洋構造物は実際には弾性体であるが、耐航性理論では単純化して剛体として取り扱われるのが一般的である。このような単純化は船舶や海洋構造物の大きさが波長と比較して小さいときには理にかなったものである。しかし、船舶や海洋構造物のサイズが大きくなるに連れて相対的に剛性が低くなるため、弾性影響が無視できなくなる。浮体式海上空港等の VLFS (Vert Large Floating Structure) のラディエーション、ディフラクション問題は良い例であり、この例では弾性変形は剛体運動より重要である。また、たとえこれほど巨大な構造物でなくても、波浪荷重が非常に大きい場合には、弾性応答は無視できない。スラミング等による波浪衝撃は、弾性影響を考慮すべき問題の典型である。これら以外にも、弾性影響を考慮することが望ましい問題が数多く存在すると考えられる。例えば、荒天海域を航走する VLCC (Very Large Crude Carrier) では、船体の弾性変形がかなり顕著であるが、船体に作用する波浪荷重の推定には弾性影響は無視されている。波浪と弾性体との相互作用の計算が可能な非線形数値計算法があれば、船舶や海洋構造物の安全設計に大いに役立つのではなかろうか。

本研究ではこのような強力なツールを開発するための基礎として、流体 - 弾性体間の非線形相互作用を時間領域でシミュレートするための理論的定式化を行った。また、この定式化を検証するため 2 次元のシミュレーションプログラムを試作し、無限流体中での両端単純支持梁の自由振動の計算を行った。これらの結果についてその概要を示す。

2 理想流体と弾性体との相互作用の定式化

本報の定式化では流体は非粘性、非圧縮、流れは非回転であると仮定し、流体の速度ならびに加速度は、速度ポテンシャル ϕ と加速度ポテンシャル $\Phi = \partial\phi/\partial t + (\nabla\phi)^2/2$ の勾配で与えられるものとする^{3, 4)}。また弾性体の運動は剛体モードの運動 (以下では剛体運動と書く) に弾性振動が重畳したものとして扱い、剛体運動と弾性振動との相互作用は無視する。

2.1 物体表面での流体の速度および加速度

まず準備として、物体表面に沿って運動する流体の速度と加速度の表示式を示す。本報では Fig.1 に示す空間固定座標系 $O - XYZ$ と物体固定座標系 $o - xyz$ を用いる。物体固定座標系の原点 o は重心に位置している。図中の P は流体に固定された点、 R, R_o はそれぞれ空間固定座標系の原点から P および o を指す位置ベクトルであり、 r は o から P の相対位置を指す位置ベクトルである。これらの位置ベクトルを用いると点 P の位置、速度、加速度はそれぞれ

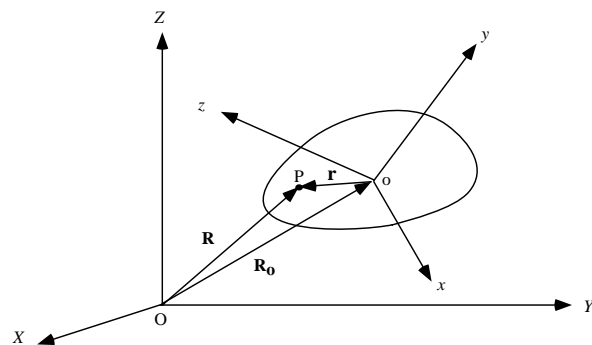


Fig.1: Frame of reference

[†] E-mail tanizawa@srilot.go.jp

URL <http://www.srilot.go.jp/dyn/member/tanizawa.html>

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_o + \mathbf{r} \quad (1)$$

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_o + \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + [\dot{\mathbf{r}}] \quad (2)$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}}_o + \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + [\ddot{\mathbf{r}}] + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times [\dot{\mathbf{r}}] \quad (3)$$

と書ける。ここで、 $\dot{\mathbf{R}}_o$ と $\boldsymbol{\omega}$ は重心の速度および角速度、 $[\dot{\mathbf{r}}]$ と $[\ddot{\mathbf{r}}]$ は物体固定座標系で観測した点 P の速度と加速度である。

2.2 境界値問題の定式化

次に点 P の速度と加速度の表示式を用いて、弾性体表面での幾何学的境界条件を求める。理想流体を仮定し流体の運動を速度ポテンシャル ϕ と加速度ポテンシャル Φ で記述すると、これらのポテンシャルに対する弾性体表面での幾何学的境界条件は

$$\phi_n = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{R}} \quad (4)$$

$$\Phi_n = \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{R}} \quad (5)$$

と書ける。ここで、 $\phi_n = \partial\phi/\partial n$ 、 $\Phi_n = \partial\Phi/\partial n$ であり、 \mathbf{n} は弾性体表面の法線方向単位ベクトルである。(2) 式を (4) 式に、また (3) 式を (5) 式に代入すると、境界条件

$$\phi_n = v_n + \mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{r}}] \quad (6)$$

$$\Phi_n = a_n + \mathbf{n} \cdot [\ddot{\mathbf{r}}] + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{n} \cdot 2\boldsymbol{\omega} \times [\dot{\mathbf{r}}] \quad (7)$$

が得られる。ここで v_n と a_n は剛体運動による弾性体表面の法線方向速度 (法速度) および法線方向加速度 (法加速度) であり、それぞれ

$$v_n = \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{R}}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (8)$$

$$a_n = \mathbf{n} \cdot (\ddot{\mathbf{R}}_o + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}) \quad (9)$$

である。弾性振動が無い場合は (6) 式の項 $\mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{r}}]$ は \mathbf{n} と $[\dot{\mathbf{r}}]$ の直交性により零になる。しかし、弾性振動を考慮する場合は $[\dot{\mathbf{r}}]$ には振動による法線方向成分が存在するため零にならない。弾性体振動による法線方向の変位を u とすると、弾性体振動による法速度 $u_t = \partial u/\partial t$ と法加速度を $u_{tt} = \partial^2 u/\partial t^2$ を用いて

$$\mathbf{n} \cdot [\dot{\mathbf{r}}] = u_t \quad (10)$$

$$\mathbf{n} \cdot [\ddot{\mathbf{r}}] = u_{tt} - k_n [\dot{\mathbf{r}}]^2 \quad (11)$$

が得られる。ここで k_n は、弾性体表面の法曲率である。(11) 式に法曲率に比例する求心加速度項が現れるのは、 $[\dot{\mathbf{r}}]$ が表面を滑動する流体の物体固定座標系から観測した加速度であり、物体表面に固定された点の加速度ではないからである。これらの関係式を考慮すると、弾性体表面での陽な幾何学的境界条件式

$$\{\phi_n\} = \{v_n\} + \{u_t\} \quad (12)$$

$$\{\Phi_n\} = \{a_n\} + \{u_{tt}\} + \{q\} \quad (13)$$

が導かれる。ここで

$$q = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{n} \cdot 2\boldsymbol{\omega} \times [\dot{\mathbf{r}}] - k_n [\dot{\mathbf{r}}]^2 \quad (14)$$

は流体の速度場から加速度場への寄与であり、速度場の解から陽に計算することができる項をまとめたものである。(12) 式と (13) 式で変数を中括弧 $\{array formula\}$ の中に入れたのは、この式を数値計算に用いる際に、弾性体接水表面上の全ての節点にこの式を境界条件として用いることを示すためである。

2.3 加速度ポテンシャルに関する弾性体表面での陰境界条件

さて、(13) 式で与えられた幾何学的境界条件には法加速度 a_n と u_{tt} が含まれているが、これらは未知数であるため (13) 式を陽に用いることはできない。その理由は、弾性体表面の法加速度は流体と弾性体との動的な力の釣合により定まるものであり、流体と弾性体との連成運動を解いて初めて決定できるからである。実際に加速度場を解くには (13) 式をそのまま用いるのではなく、弾性体の運動方程式を用いて (13) 式から法加速度を消去して得られる陰境界条件を用いる。そこで次に、弾性体の運動方程式から得られる法加速度の表示式を用いて、陰境界条件式を導く。

2.3.1 剛体運動による弾性体表面の法加速度

剛体運動の一般化運動方程式は

$$\mathcal{M} \cdot \alpha + \beta = F \quad (15)$$

と書ける。ここで、 \mathcal{M} と α は慣性テンソルならびに剛体運動の一般化加速度、 F は一般化外力、 β はジャイロモーメントである。一般化法線方向ベクトル N を導入し一般化流体力を接水表面 s 上での圧力積分

$$F_f = \int_s p N ds = \int_s (-\Phi - Z) N ds \quad (16)$$

で書き表し、他の重力や推力等の外力を F_g と書くと、全外力は

$$F = F_f + F_g = \int_s (-\Phi - Z) N ds + F_g \quad (17)$$

となる。これらの式を用いると剛体運動による弾性体の表面の法加速度の表示式

$$a_n = N \cdot \alpha = N \mathcal{M}^{-1} \left\{ \int_s (-\Phi - Z) N ds + F_g + \beta \right\} \quad (18)$$

が得られる。また境界要素法を用いて (18) 式の積分を離散化すると

$$\{a_n\} = [A]\{\Phi\} + \{B\} \quad (19)$$

が得られる⁴⁾。

2.3.2 弾性振動による弾性体表面の法加速度

任意の弾性体の振動方程式を記述することは容易ではないが、離散化振動方程式であれば、一般的に

$$[M]\{u_{tt}\} + [K]\{u\} = [F]\{p\} \quad (20)$$

の形に書き表せることが知られている。ここで $[M]$ は質量マトリックス、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $\{p\}$ は圧力、 $[F]$ は圧力を各節点に作用する等価な集中荷重に変換するための変換行列である。一般に、この離散化方程式は仮想仕事の原理から導くことができ²⁾、有限要素法による動的構造解析に良く用いられる。この方程式を u_{tt} に関して解くと、

$$\{u_{tt}\} = -[M]^{-1}[K]\{u\} + [M]^{-1}[F]\{p\} \quad (21)$$

が得られ、さらに $p = -\Phi - Z$ の関係を考慮すると、振動による弾性体表面の法加速度と加速度ポテンシャルの関係式

$$\{u_{tt}\} = [C]\{\Phi\} + \{D\} \quad (22)$$

を得る。ここで $[C]$ と $\{D\}$ は

$$[C] = -[M]^{-1}[F] \quad (23)$$

$$\{D\} = -[M]^{-1}[K]\{u\} + [C]\{Z\} \quad (24)$$

である。

2.3.3 弾性体表面での陰境界条件

(19) 式と (22) 式を境界条件式 (13) 式に代入することで、未知数である法加速度 a_n と u_{tt} を消去し、陰境界条件

$$\{\Phi_n\} = [A + C]\{\Phi\} + \{B + D + q\} \quad (25)$$

が導かれる。この陰境界条件式は幾何学的境界条件式と弾性体の運動方程式ならびに振動方程式から導かれた幾何学的かつ力学的境界条件式であり、弾性体表面での加速度ポテンシャル Φ とその流束 Φ_n との関係を表している。この陰境界条件式を用いることで、振動モード分解に依らず時間領域において弾性体と流体との非線形連成運動をシミュレートすることができる。

3 簡単なシミュレーションによる定式化の検証

以上の定式化に基づくシミュレーションプログラムを試作し、無限流体中に置かれた一様梁の接水振動を時間領域でシミュレートした。この計算では梁の両端の境界条件を単純支持とし、剛体運動は省略した。計算に用いた梁の分割数は 20 である。梁の振動は初期変位

$$u(x)_{at\ t=0} = u_o \sin n\pi x, \quad [0 \leq x \leq 1] \quad (26)$$

を与えて励起した。ここで x 軸は梁の中性軸、 n は振動モード数、 u_o は初期変位の振幅で梁の長さの 0.1% とした。計算は梁の長さ L 、梁の曲げ剛性 EI 、梁の厚さ h と梁の密度 ρ_b の積で定義される梁の線密度 $h\rho_b$ を単位として無次元化して実施した。

Fig.2 に最も低次の振動モード ($n = 1$) の梁中央での変位の時間波形を示す。図から流体の密度 ρ_w が大きくなるに連れて振動周期が長くなっている様子が読みとれる。本シミュレーションで得られた振動周波数の流体密度依存性を Fig.3 に示す。横軸は流体と弾性体との密度比であり、縦軸は梁の流体中での固有振動数 ω_w を真空中での固有周波数 ω_v で正規化したものである。図中の実線は鬼頭¹⁾が求めた理論値

$$\frac{\omega_w}{\omega_v} = \sqrt{\frac{1}{1 + \varepsilon}}, \quad \varepsilon = \frac{2\rho_w}{n\pi h\rho_b} \quad (27)$$

である。これは無限長の梁の接水振動周波数の理論値であるため、本計算結果との厳密な比較はできないが、丸印で示す計算値は理論値と定性的に良く一致している。最後に、高次振動の固有周波数の計算結果を理論値と比較して Table 1 に示す。 $\rho_w/\rho_b = 0$ の場合、すなわち真空中での計算結果は梁理論から求められる理論値に極めて良く一致しており、9 次のモードでも誤差は僅かである。一方 $\rho_w/\rho_b = 0.1$ の接水振動の計算も定性的には鬼頭の理論値と良く一致している。接水振動の計算で定量的な一致度が悪いのは、無限長梁の接水振動の理論値では端部影響が考慮されていないためと考えられる。参考のため、Fig.4 に 5 次モードの計算で得られた変動圧の分布を示しておく。

4 結言

この研究では流体と弾性体との連成運動を時間領域でシミュレートするための流力弾性問題の定式化を行い、以下の結論を得た。

1. 速度ポテンシャル ϕ と加速度ポテンシャル Φ の弾性体表面での幾何学的境界条件を導いた。
2. 加速度ポテンシャル Φ と弾性振動による物体表面法加速度 u_{tt} との関係式を導いた
3. 加速度ポテンシャル Φ の弾性体表面での陰境界条件を導いた。
4. これらの定式化に基づくシミュレーションプログラムを試作し、無限流体中での両端単純支持梁の接水振動をシミュレートした。
5. 計算結果は定性的に鬼頭の理論値と良く一致した。

References

- 1) 鬼頭史城：Principles of hydro-elasticity, 養賢堂, pp1-129, (1970)
- 2) 川井忠彦：マトリックス法振動および応答, 培風館, pp1-235, (1970)
- 3) 谷澤克治：A Nonlinear Simulation Method of 3-D body Motions in Waves, 日本造船学会論文集, vol.178, pp179-191, (1995)
- 4) 谷澤克治：加速度ポテンシャルによる波浪中浮体運動の非線形理論と数値解法の研究学位論文, 大阪大学, pp1-127, (1997)

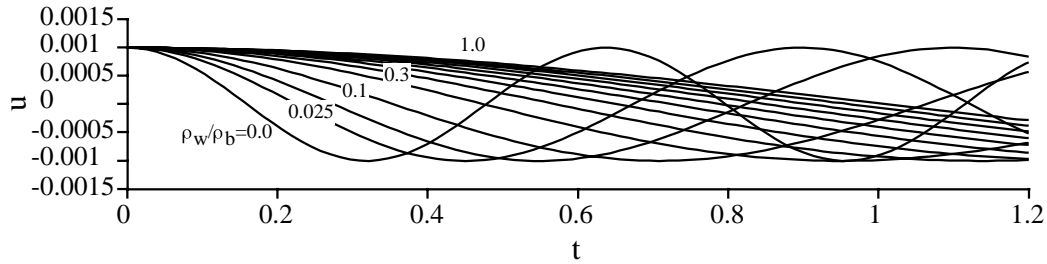


Fig.2: Simulated hydro-elastic vibration of a hinged beam : u at the center of beam

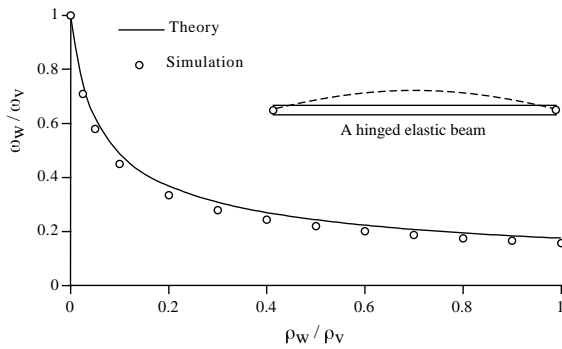


Fig.3: Natural frequency of the lowest mode vibration of the beam in unbounded fluid

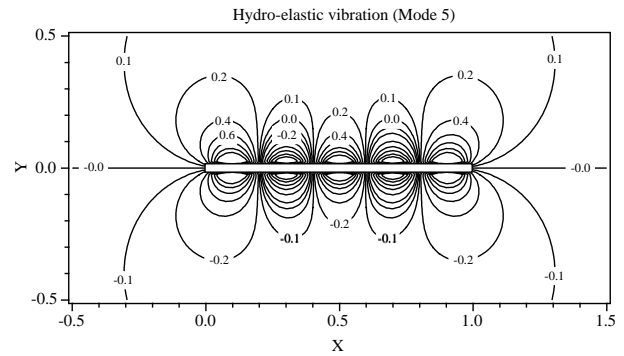


Fig.4 Hydrodynamic pressure distribution (Mode 5)

Table 1: Natural frequencies of the beam vibration in vacuum and in unbounded fluid

Mode n	$\omega_{vn}/\omega_{v1(Theory)}$			$\omega_{wn}/\omega_{w1(Theory)}$		
	$\rho_w/\rho_b = 0$			$\rho_w/\rho_b = 0.1$		
	Theory	Simulation	Error (%)	Theory	Simulation	Error (%)
1	1	0.999	-0.06	1.000	0.949	-8.03
2	4	4.000	0.00	5.082	5.211	-0.74
3	9	9.000	0.00	12.822	13.425	1.42
4	16	16.002	0.01	24.420	25.876	2.48
5	25	25.006	0.03	39.968	42.672	3.25
6	36	36.019	0.05	59.516	63.941	3.85
7	49	59.048	0.10	83.091	89.727	4.30
8	64	64.106	0.17	110.712	120.014	4.68
9	81	81.212	0.26	142.389	154.859	5.02