

シュミット理論の計算式

海上技術安全研究所 平田宏一

E-mail: khirata@nmri.go.jp

http://www.nmri.go.jp/env/khirata/

スターリングエンジンの解析に用いられるシュミット理論とは、高温・低温等のそれぞれの空間のガス温度が時間に無関係に一樣であり、ピストンの変位が正弦波状であると仮定した計算手法である。すなわち、膨張空間、圧縮空間などの各空間は1サイクル中、常に同一の温度に保たれるということである。

1. シュミット理論の仮定

エンジンの基本性能は、P-V 線図により求めることができる。エンジン内容積 V はエンジン形状により比較的簡単に求めることができる。また、理想ガスの状態式

$$PV = mRT \quad (1)$$

よりガスの容積 V 、質量 m 及びガス温度 T を設定することで、圧力 P を求めることができる。すなわち、以下の仮定に基づくことによりおおそのエンジン内圧力を算出することができる。

- (1) 熱交換器（加熱器、再生器、冷却器）での圧力損失は無視し、エンジン内の圧力は場所に寄らず一様とする。
 - (2) 圧縮過程、膨張過程は等温変化とする。
 - (3) 作動ガスは理想ガスの状態式に従い、エンジン外部への漏れはないものとする。
 - (4) 完全な再生熱交換を行う。
 - (5) 膨張空間及びそれに付随した無効空間は膨張空間ガス温度 T_E に保たれ、圧縮空間及びそれに付随した無効空間は圧縮空間ガス温度 T_C に保たれる。
 - (6) 全ての無効空間ガス温度 T_R は膨張空間ガス温度 T_E と圧縮空間ガス温度 T_C との平均温度に保たれる。
 - (7) 膨張及び圧縮空間の容積は正弦波状に変動する。
- シュミット理論に用いる記号は表 1 に示す通りである。

2. α 形スターリングエンジン

α 形スターリングエンジンを例にとり、シュミット理論に基づく計算式を説明する。図 1 に α 形スターリングエンジンの計算モデルを示す。

まず、 α 形スターリングエンジンにおける各空間

表 1 使用する記号と単位

名 称	記 号	単 位
圧力	P	Pa
膨張側ピストン行程容積または ディスプレイサピストン行程容積	V_{SE}	m^3
圧縮側ピストン行程容積または パワーピストン行程容積	V_{SC}	m^3
膨張空間無効容積	V_{DE}	m^3
再生器容積	V_R	m^3
圧縮空間無効容積	V_{DC}	m^3
膨張空間瞬時容積	V_E	m^3
圧縮空間瞬時容積	V_C	m^3
瞬時全容積	V	m^3
エンジン内ガス質量	m	kg
ガス定数	R	J/(kgK)
膨張空間ガス温度	T_E	K
圧縮空間ガス温度	T_C	K
再生器空間ガス温度	T_R	K
位相角	α	deg
エンジン回転数	N	rpm
膨張空間図示仕事	W_E	J
圧縮空間図示仕事	W_C	J
図示仕事	W_i	J
膨張空間図示出力	L_E	W
圧縮空間図示出力	L_C	W
図示出力	L_i	W
図示熱効率	η	

の瞬時容積を求める。瞬時容積はクランク角 θ の関数で表され、膨張側ピストンの上死点をクランク角 $\theta = 0^\circ$ とすると、仮定(7)より、膨張空間瞬時容積 V_E は、膨張側ピストンの行程容積 V_{SE} (ピストン断面積 $\times$ ストローク) を用いて次式で表される。

$$V_E = \frac{V_{SE}}{2} (1 - \cos q) \quad (2)$$

同様に圧縮空間瞬時容積 V_C は圧縮側ピストンの行程容積 V_{SC} 、圧縮空間無効容積 V_{DC} 及び膨張ピストンからのピストン位相差 α を用いて次式で表される。

$$V_C = \frac{V_{SC}}{2} \{1 - \cos(q - \alpha)\} \quad (3)$$

よってエンジン内瞬時全容積 V は

$$V = V_E + V_{DE} + V_R + V_{DC} + V_C \quad (4)$$

となる。ここで、 V_{DE} は膨張空間無効容積、 V_{DC} は圧縮空間無効容積、 V_R は再生器容積である。

仮定(1), (2), (3)よりエンジン内ガスの全質量 m は膨張空間、圧縮空間及び無効空間のガス圧力、各ガス温度、各容積及びガス定数 R を用いて次のように示される。

$$m = \frac{PV_E}{RT_E} + \frac{P(V_{DE} + V_R + V_{DC})}{RT_R} + \frac{PV_C}{RT_C} \quad (5)$$

また、温度比 τ 、行程容積比 κ 及び全無効容積比 X を次式で定義する。

$$t = \frac{T_C}{T_E} \quad (6)$$

$$k = \frac{V_{SC}}{V_{SE}} \quad (7)$$

$$X = \frac{V_{DE} + V_R + V_{DC}}{V_{SE}} \quad (8)$$

仮定(6)より無効空間ガス温度 T_R は次式になる。

$$T_R = \frac{T_E + T_C}{2} \quad (9)$$

式(5)は式(6)～(9)を代入して整理すると、次式になる。

$$m = \frac{P}{RT_C} \left\{ tV_E + \frac{2t(V_{DE} + V_R + V_{DC})}{1+t} + V_C \right\} \quad (10)$$

式(10)は式(2), (3)を代入して次式になる。

$$m = \frac{PV_{SE}}{2RT_C} \{S - B \cos(q - f)\} \quad (11)$$

ただし、

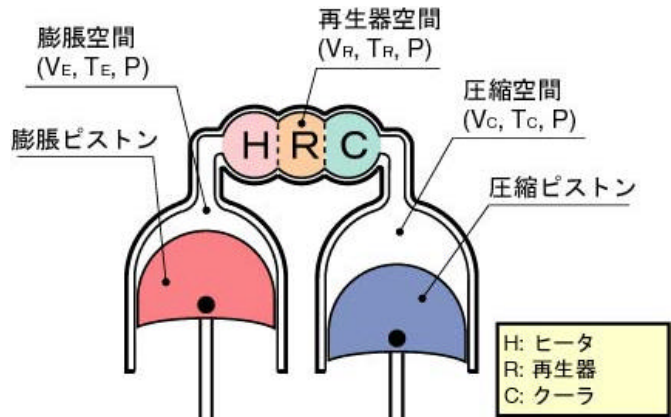


図1 α形スターリングエンジン

$$f = \tan^{-1} \frac{k \sin a}{t + k \cos a} \quad (12)$$

$$S = t + \frac{4tX}{1+t} + k \quad (13)$$

$$B = \sqrt{t^2 + 2tk \cos a + k^2} \quad (14)$$

式(11)を P について解くと次式となる。

$$P = \frac{2mRT_C}{V_{SE} \{S - B \cos(q - f)\}} \quad (15)$$

ここで平均圧力 P_{mean} は次式で表される。

$$P_{mean} = \frac{1}{2p} \oint P dq = \frac{2mRT_C}{V_{SE} \sqrt{S^2 - B^2}} \quad (16)$$

また,

$$d = \frac{B}{S} \quad (17)$$

とすると, 平均圧力を基準とした圧力変化は次式で表される。

$$P = \frac{P_{mean} \sqrt{S^2 - B^2}}{S - B \cos(q - f)} = \frac{P_{mean} \sqrt{1 - d^2}}{1 - d \cos(q - f)} \quad (18)$$

また, 式(15)において, $\cos(\theta - \phi) = -1$ のとき最小圧力 P_{min} となり,

$$P_{min} = \frac{2mRT_C}{V_{SE} (S + B)} \quad (19)$$

と表される。したがって, 最小圧力を基準とした圧力は次式で表される。

$$P = \frac{P_{min} (S + B)}{S - B \cos(q - f)} = \frac{P_{min} (1 + d)}{1 - d \cos(q - f)} \quad (20)$$

同様に, 式(15)において, $\cos(\theta - \phi) = 1$ のとき最大圧力 P_{max} となり, 最大圧力を基準とした圧力は次式で表される。

$$P = \frac{P_{max} (S - B)}{S - B \cos(q - f)} = \frac{P_{max} (1 - d)}{1 - d \cos(q - f)} \quad (21)$$

以上により求められた容積変化と圧力変化の式を用いて, α 形スターリングエンジンの P - V 線図を作成することができる。さらに, 式(46)～(53)により, 図示出力を求めることができる。

3. β 形スターリングエンジン

β 形スターリングエンジンのシュミット理論に基づく計算式を説明する。図 2 に β 形スターリングエンジンの計算モデルを示す。ディスプレイサの上死点をクランク角 $\theta = 0^\circ$ とすると, 膨張空間瞬時容積 V_E 及び圧縮空間瞬時容積 V_C は次式で表される。

$$V_E = \frac{V_{SE}}{2}(1 - \cos q) \quad (22)$$

$$V_C = \frac{V_{SE}}{2}(1 + \cos q) + \frac{V_{SC}}{2}\{1 - \cos(q - a)\} - V_B \quad (23)$$

ただし、 V_{SE} はディスプレイサの行程容積、 V_{SC} はパワーピストンの行程容積、 a はディスプレイサとパワーピストンとの位相角である。

また、 β 形スターリングエンジンではディスプレイサとパワーピストンとが同一シリンダにあるため、それらの空間が重なる空間を設けることができ、作動空間をより有効に用いることができる。式(23)において V_B はディスプレイサとパワーピストンとが重なる容積（オーバーラップ容積）であり、次式で求めることができる。

$$V_B = \frac{V_{SE} + V_{SC}}{2} - \sqrt{\frac{V_{SE}^2 + V_{SC}^2}{4} - \frac{V_{SE}V_{SC}}{2}\cos a} \quad (24)$$

なお、エンジン内瞬時全容積 V は次のようになる。

$$V = V_E + V_{DE} + V_R + V_{DC} + V_C \quad (25)$$

α 形スターリングエンジンと同様に、平均圧力 P_{mean} 、最低圧力 P_{min} 及び最高圧力 P_{max} を基準としたエンジン内瞬時圧力 P はそれぞれ次式で表される。

$$P = \frac{P_{mean}\sqrt{1-d^2}}{1-d\cos(q-f)} \quad (28a)$$

$$= \frac{P_{min}(1+d)}{1-d\cos(q-f)} \quad (26b)$$

$$= \frac{P_{max}(1-d)}{1-d\cos(q-f)} \quad (26c)$$

ただし、

$$t = \frac{T_C}{T_E} \quad (27)$$

$$k = \frac{V_{SC}}{V_{SE}} \quad (28)$$

$$X_B = \frac{V_B}{V_{SE}} \quad (29)$$

$$X = \frac{V_{DE} + V_R + V_{DC}}{V_{SE}} \quad (30)$$

$$f = \tan^{-1} \frac{k \sin a}{t + k \cos a - 1} \quad (31)$$

$$S = t + \frac{4tX}{1+t} + k + 1 - 2X_B \quad (32)$$

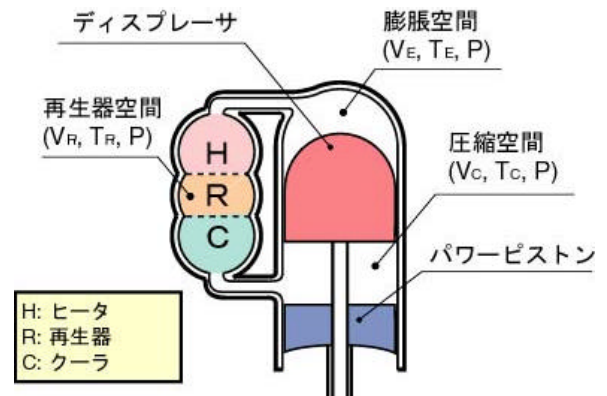


図2 β 形スターリングエンジン

$$B = \sqrt{t^2 + 2k(t-1)\cos a + k^2 - 2t + 1} \quad (33)$$

$$d = \frac{B}{S} \quad (34)$$

以上により求められた容積変化と圧力変化の各式を用いて、 β 形スターリングエンジンの P-V 線図を作成することができる。さらに、式(46)～(53)により、図示出力を求めることができる。

4. γ 形スターリングエンジン

図3に γ 形スターリングエンジンの計算モデルを示す。 α 、 β 形エンジンと同様にして、 γ 形スターリングエンジンのシュミット理論に基づく計算式を説明する。ディスプレイサの上死点をクランク角 $\theta = 0^\circ$ とすると、膨張空間瞬時容積 V_E 及び圧縮空間瞬時容積 V_C は次式になる。

$$V_E = \frac{V_{SE}}{2}(1 - \cos q) \quad (35)$$

$$V_C = \frac{V_{SE}}{2}(1 + \cos q) + \frac{V_{SC}}{2}\{1 - \cos(q - a)\} \quad (36)$$

ただし、 V_{SE} はディスプレイサの行程容積、 V_{SC} はパワーピストンの行程容積、 a はディスプレイサとパワーピストンとの位相角である。

よってエンジン内瞬時全容積 V は次式になる。

$$V = V_E + V_{DE} + V_R + V_{DC} + V_C \quad (37)$$

α 形スターリングエンジンと同様に、平均圧力 P_{mean} 、最低圧力 P_{min} 及び最高圧力 P_{max} を基準としたエンジン内瞬時圧力 P はそれぞれ次式で表される。

$$P = \frac{P_{mean} \sqrt{1-d^2}}{1-d \cos(q-f)} \quad (38a)$$

$$= \frac{P_{min}(1+d)}{1-d \cos(q-f)} \quad (38b)$$

$$= \frac{P_{max}(1-d)}{1-d \cos(q-f)} \quad (38c)$$

ただし、

$$t = \frac{T_C}{T_E} \quad (39)$$

$$k = \frac{V_{SC}}{V_{SE}} \quad (40)$$

$$X = \frac{V_{DE} + V_R + V_{DC}}{V_{SE}} \quad (41)$$

$$f = \tan^{-1} \frac{k \sin a}{t + k \cos a - 1} \quad (42)$$

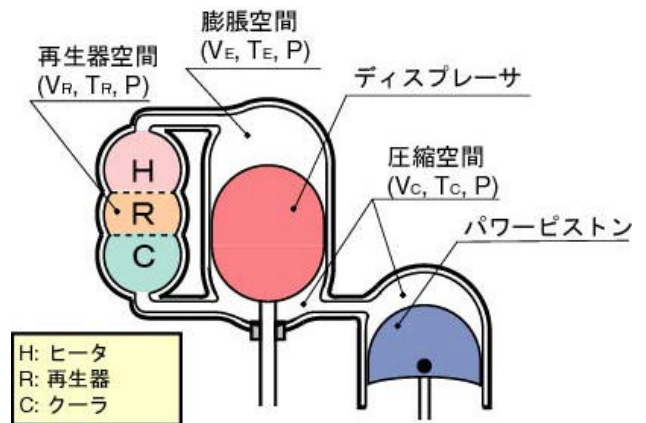


図3 γ 形スターリングエンジン

$$S = t + \frac{4tX}{1+t} + k + 1 \quad (43)$$

$$B = \sqrt{t^2 + 2k(t-1)\cos a + k^2 - 2t + 1} \quad (44)$$

$$d = \frac{B}{S} \quad (45)$$

以上により求められた容積変化と圧力変化の各式を用いて、 γ 形スターリングエンジンの P-V 線図を作成することができる。さらに、式(46)～(53)により、図示出力を求めることができる。

5. 図示仕事、図示出力及び図示熱効率

各形式のエンジンにおける容積変化と圧力変化の式を用いて、各空間の図示仕事は解析的に求めることができる。平均圧力 P_{mean} 、最低圧力 P_{min} 及び最高圧力 P_{max} を基準とした膨張空間図示仕事 W_E はそれぞれ次式で算出することができる。

$$\begin{aligned} W_E &= \oint P dV_E \\ &= \frac{P_{mean} V_{SE} p d \sin f}{1 + \sqrt{1-d^2}} \end{aligned} \quad (46a)$$

$$= \frac{P_{min} V_{SE} p d \sin f}{1 + \sqrt{1-d^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+d}}{\sqrt{1-d}} \quad (46b)$$

$$= \frac{P_{max} V_{SE} p d \sin f}{1 + \sqrt{1-d^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-d}}{\sqrt{1+d}} \quad (46c)$$

また、圧縮空間の図示仕事 W_C は次式で表される。

$$\begin{aligned} W_C &= \oint P dV_C \\ &= - \frac{P_{mean} V_{SE} p d t \sin f}{1 + \sqrt{1-d^2}} \end{aligned} \quad (47a)$$

$$= - \frac{P_{min} V_{SE} p d t \sin f}{1 + \sqrt{1-d^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+d}}{\sqrt{1-d}} \quad (47b)$$

$$= - \frac{P_{max} V_{SE} p d t \sin f}{1 + \sqrt{1-d^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-d}}{\sqrt{1+d}} \quad (47c)$$

したがって、このエンジンの1サイクル当たりの図示仕事 W_i は次式で求まる。

$$\begin{aligned} W_i &= W_E + W_C \\ &= \frac{P_{mean} V_{SE} p d (1-t) \sin f}{1 + \sqrt{1-d^2}} \end{aligned} \quad (48a)$$

$$= \frac{P_{\min} V_{SE} p d (1-t) \sin f}{1 + \sqrt{1-d^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+d}}{\sqrt{1-d}} \quad (48b)$$

$$= \frac{P_{\max} V_{SE} p d (1-t) \sin f}{1 + \sqrt{1-d^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-d}}{\sqrt{1+d}} \quad (48c)$$

ここで、 P_{mean} と $P_{\min}$ 及び $P_{\max}$ との関係は次式の通りである。

$$\frac{P_{\min}}{P_{mean}} = \sqrt{\frac{1-d}{1+d}} \quad (49)$$

$$\frac{P_{\max}}{P_{mean}} = \sqrt{\frac{1+d}{1-d}} \quad (50)$$

また、図示仕事 W_i にエンジン回転数 $N(\text{rpm})$ を乗ずることにより、膨張空間図示出力 L_E 、圧縮空間図示出力 L_C 及び図示出力 L_i は次式で表される。

$$L_E = W_E \cdot \frac{N}{60} \quad (51)$$

$$L_C = W_C \cdot \frac{N}{60} \quad (52)$$

$$L_i = W_i \cdot \frac{N}{60} \quad (53)$$

また、式(46)で求まる膨張空間図示仕事 W_E はこのサイクルが1サイクルあたりに供給される熱量（入熱量）であり、式(47)で求まる圧縮空間図示仕事 W_C はこのサイクルが1サイクルあたりに放出する熱量（冷却熱量）である。すなわち、このサイクルの図示熱効率 η は次式で表される。

$$h = \frac{W_i}{W_E} = 1 - t \quad (54)$$

上式はカルノーサイクルの図示熱効率と等しく、温度比のみの関数で表されることがわかる。

6. 計算例

シュミット理論による計算式を用いて P-V 線図の作成及び図示出力の計算を行う。

例題：

膨張空間行程容積 0.628cm^3 、圧縮空間行程容積 0.628cm^3 、全無効容積 1.500cm^3 、位相角 90° 、平均圧力 129kPa 、膨張空間ガス温度 400°C 、圧縮空間ガス温度 50°C の α 形スターリングエンジンの P-V 線図を作成し、エンジン回転数 1970rpm における図示出力を求めよ（表2）。

式(6)～(8)を用いて温度比 τ 、行程容積比 κ 及び全無効容積比 X を求める。

$$t = \frac{50 + 273}{400 + 273} = 0.48$$

$$k = \frac{0.628 \times 10^{-6}}{0.628 \times 10^{-6}} = 1$$

$$X = \frac{1.500 \times 10^{-6}}{0.628 \times 10^{-6}} = 2.39$$

式(12)～(14)及び式(17)を用いて各係数を計算する。

$$f = \tan^{-1} \frac{1 \times \sin 90^\circ}{0.48 + \cos 90^\circ} = 64.4^\circ$$

$$S = 0.48 + \frac{4 \times 0.48 \times 2.389}{1 + 0.48} + 1 = 4.600$$

$$B = \sqrt{0.480^2 + 2 \times 0.480 \times 1 \times \cos 90^\circ + 1} = 1.109$$

$$d = \frac{1.109}{4.600} = 0.241$$

式(15)を用いて圧力 P を算出する。クランク角 $\theta = 0^\circ$ のとき

$$P = \frac{129 \times 10^3 \sqrt{1 - 0.241^2}}{1 - 0.241 \cos(0^\circ - 64.4^\circ)}$$

$$= 135.634 \times 10^3 (Pa)$$

$$= 135.634 (kPa)$$

同様に $\theta = 10^\circ$ のとき

$$P = 141339 (kPa)$$

$\theta = 20^\circ$ のとき

$$P = 146.785 (kPa)$$

...

次に式(2)及び式(3)を用いて各空間の容積を求める。クランク角 $\theta = 0^\circ$ のとき

$$V_E = \frac{0.628 \times 10^{-6}}{2} (1 - \cos 0^\circ)$$

$$= 0 (m^3)$$

$$V_C = \frac{0.628 \times 10^{-6}}{2} \{1 - \cos(0^\circ - 90^\circ)\}$$

$$= 0.314 \times 10^{-6} (m^3)$$

$$= 0.314 (cm^3)$$

式(4)より瞬時全容積は

$$V = 0 + 1.500 + 0.314 = 1.814 (cm^3)$$

同様に $\theta = 10^\circ$ のとき

$$V = 1.764 (cm^3)$$

$\theta = 20^\circ$ のとき

表 2 計算条件

膨張空間行程容積	0.628 cm ³
圧縮空間行程容積	0.628 cm ³
全無効容積	1.500 cm ³
位相角	90 °
平均圧力	129 kPa
膨張空間ガス温度	400°C
圧縮空間ガス温度	50°C

$$V = 1.723(\text{cm}^3)$$

...

以上の計算を1サイクル分繰り返し、横軸に瞬間全容積 V 、縦軸に圧力 P をプロットすることで図4に示す P-V 線図を作成することができる。

式(48a)より、このエンジンの1サイクルあたりの図示仕事は次式のように求まる。

$$W_i = \frac{129 \times 10^{-3} \times 0.628 \times 10^{-6} \times p \times 0.241(1 - 0.48) \sin 64.4^\circ}{1 + \sqrt{1 - 0.241^2}}$$

$$= 1.48 \times 10^{-2} (J)$$

よって、図示出力は式(53)より次のようになる。

$$L_i = \frac{1.48 \times 10^{-2} \times 1970}{60} = 0.486 (W)$$

すなわち、このエンジンの図示出力は 0.486W である。

参考文献

- (1) 岩本昭一，浜口和洋，平田宏一，松尾政弘，戸田富士夫，模型スターリングエンジン，山海堂(1997)。

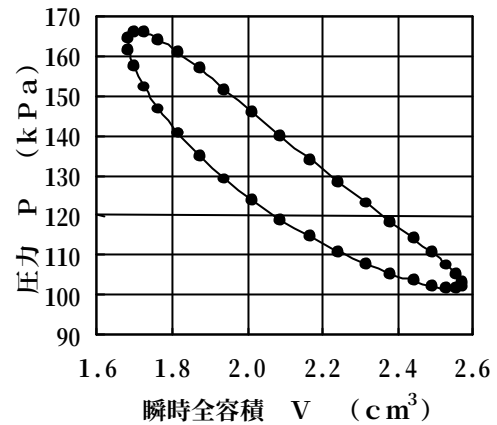


図4 P-V 線図の作成例