

## PS-4 船体構造に生じる von-Mises 応力の実用的な統計予測計算法

構造・産業システム系 \* 松井 貞興

### 1. はじめに

船体構造強度評価では、船舶の全就航期間において船体構造に生じる応力の極大値の超過確率分布を推定する必要がある。福田によって提唱された線形の短期・長期予測法<sup>1)</sup>は、応力関数と波浪発現頻度表を元に応力の極値分布を容易に計算することができるため、広く用いられている。一方、von-Mises 応力などに代表される非線形量の統計予測は、その重要性に反し、設計に対して実用的な計算法が確立されていないのが現状である。Mises 応力の超過確率の計算法は Madsen によって二重積分の形で示されている<sup>2)</sup>が、長期予測計算に適用するにはあらゆる短期海象下における複数の確率レベルの計算が必要になることを考えると、数値積分を用いない計算法がロバスト性・計算速度の観点から望ましい。

そこで本研究では、Madsen の示した二重積分形を基に変数変換、漸近展開ならびに種々の近似を適用することで、数値積分を要しない Mises 応力の超過確率の実用的計算法を示した。提案した手法は、全船荷重構造解析の結果を用いて、船体構造設計におけるいずれのケースでも厳密な積分法と同等の結果が得られることを検証した。

### 2. Mises 応力の超過確率の計算法

ある短期海象中における応力  $X_1, X_2, X_3$  が定常過程であるとき、ベクトル過程  $\{X\} (= \{X_1, X_2, X_3\}^T)$  およびその時間導関数  $\{\dot{X}\}$  に関する共分散行列  $[\Sigma_{XX}], [\Sigma_{\dot{X}\dot{X}}], [\Sigma_{X\dot{X}}], [\Sigma_{\dot{X}X}]$  が得られたとき、 $X_1, X_2, X_3$  空間上のあるクライテリア  $\partial B$  を外向きに通過する単位時間あたりの期待値  $v^+$  (アップクロス率) は次式によって計算できる<sup>3)</sup>。

$$v^+ = \int_{\partial B} f_X(\mathbf{x}) \int_0^\infty \dot{x}_N f_{\dot{x}_N|X=\mathbf{x}}(\dot{x}_N|\mathbf{x}) d\dot{x}_N dS \quad (1)$$

ここに  $f_X(\mathbf{x})$  は確率密度関数、 $\dot{x}_N$  は面  $\partial B$  の外向き法線速度 ( $:= \{\dot{x}\}^T \{n\}$ )、 $f_{\dot{x}_N|X=\mathbf{x}}(\dot{x}_N|\mathbf{x})$  は位置  $\{X\} = \{\mathbf{x}\}$  における  $\dot{x}_N$  の条件付き確率密度関数である。ガウス過程のとき  $f_X(\mathbf{x})$  は

$$f_X(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} |\det[\Sigma_{XX}]|^{1/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\{\mathbf{x}\} - \{\mu_X\})^T [\Sigma_{XX}]^{-1} (\{\mathbf{x}\} - \{\mu_X\}) \right] \quad (2)$$

となる。ここで  $\{\mu_X\}$  は  $\{X\}$  の平均値、 $\{\mathbf{x}\}$  は  $\{X\}$  の実現値、 $\{n\}$  は  $\partial B$  の外向き法線ベクトル、 $\dot{x}_N := \{\dot{x}\}^T \{n\}$  である。

Madsen は von-Mises 応力に対して式(1)を具体的に極座標系の二重積分で与えた<sup>2)</sup>。しかし、確率密度関数  $f_X(\mathbf{x})$  の分布は非常に変化が激しくなるため数値積分の刻みには注意を要する。

### 3. 実用的な超過確率計算法の提案

Mises 応力の二乗を  $Z$  とすると、これは

$$Z = X_1^2 + X_2^2 - X_1 X_2 + 3X_3^2 \quad (3)$$

と書けるので、 $Z$  の等値面は  $\{X\}$  空間上での楕円体になる。まず応力成分  $\{X\}$  を扱いやすいように線形変換する：

$$\{Y\} = [R]^T [B]^T \{X\} \quad (4)$$

ここで

$$[B] = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (5)$$

であり、 $[R]$  は  $[B]^T [\Sigma_{XX}] [B]$  を対角化させる直交行列である：

$$[R]^T [B]^T [\Sigma_{XX}] [B] [R] = \text{diag}(\sigma_{Y_1}^2, \sigma_{Y_2}^2, \sigma_{Y_3}^2) \quad (6)$$

このように定義された  $\{Y\}$  は、 $Z = \sum_i Y_i^2$  すなわち等値面が球面となり、かつ軸  $Y_1, Y_2, Y_3$  が確率密度関数の等値楕円体のそれぞれ第 1, 第 2, 第 3 主軸に一致する (図 1 参照) 標準偏差は  $\sigma_{Y_1} \geq \sigma_{Y_2} \geq \sigma_{Y_3}$  となるよう並べれば、多くの場合  $\sigma_{Y_3} \ll \sigma_{Y_1}$  が成り立つち、積分は  $y_3 = \mu_{Y_3}$  の平面  $P$  上での寄与が主要となる。これを利用すると、 $Z = z$  のアップクロス率は次のように平面  $P$  上の円上の積分で近似できる。

$$v_z^+(z) \cong \int_0^{2\pi} \zeta \sqrt{\sigma_{Y_1}^2 \cos^2 \phi + \sigma_{Y_2}^2 \sin^2 \phi} \quad (7)$$

$$\times \exp \left[ -\frac{(\zeta \cos \phi - \mu_{Y_1})^2}{2\sigma_{Y_1}^2} - \frac{(\zeta \sin \phi - \mu_{Y_2})^2}{2\sigma_{Y_2}^2} \right] d\phi$$

$$\text{where, } \zeta := \sqrt{z - \mu_{Y_3}^2} \quad (8)$$

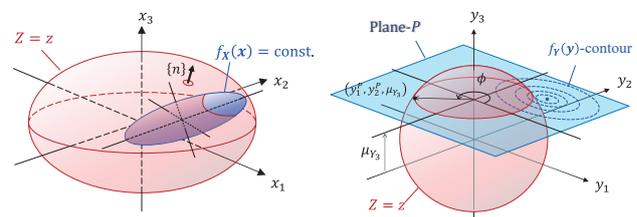


図-1 左： $\{X\}$ 、右： $\{Y\}$ における von-Mises 応力  $Z$  の等値面と確率密度関数の等値面

式(7)右辺は Laplace 積分であるため、Laplace の方法による漸近展開が適用可能である。すなわち、 $Z = z$  上で  $f_Y(\mathbf{y})$  が極大値をとる座標  $(\pm y_1^M, y_2^M)$  まわりでテイラー展開に次近似とガウスの積分公式を適用することで、積分を用いない次式によって精度よく近似される。

$$v_z^+(z) \cong \frac{\sigma_{Y_1}}{2\pi\sigma_{Y_1}} \sqrt{\frac{c_{21}c_{31}}{1 - c_{12}|\mu_{Y_1}|/y_1^M}} \exp\left[-\frac{(y_2^M - \mu_{Y_2})^2}{2\sigma_{Y_2}^2}\right] \times \left\{ \exp\left[-\frac{(y_1^M + \mu_{Y_1})^2}{2\sigma_{Y_1}^2}\right] + \exp\left[-\frac{(y_1^M - \mu_{Y_1})^2}{2\sigma_{Y_1}^2}\right] \right\} \quad (9)$$

where,  $y_2^M \cong \frac{\mu_{Y_2}}{2\alpha} \left\{ \zeta - c_{12}|\mu_{Y_1}| + \alpha c_{21} - \sqrt{(\zeta - c_{12}|\mu_{Y_1}| + \alpha c_{21})^2 - 4\alpha c_{21}\zeta} \right\}$  (10)

$$y_1^M = \sqrt{\zeta^2 - y_2^{M2}} \quad (11)$$

$$\alpha := \sqrt{\mu_{Y_1}^2 + \mu_{Y_2}^2} - |\mu_{Y_1}| \quad (12)$$

$$c_{ij} := \left\{ 1 - (\sigma_{Y_i}^2/\sigma_{Y_j}^2) \right\}^{-1} \quad (13)$$

ここに、 $y_2^M$ の式(10)は本来四次関数の解であるが、解の公式を適用すると極めて煩雑になるため近似式を与えた。

#### 4. 数値的検討

Mises 応力の超過確率分布の検証として、 $L = 280\text{m}$ の満載積付状態 (full) および隔倉積付状態 (alt.) のばら積み船を対象に、DLSA-Basic システム<sup>4)</sup>によって得たシェル要素の応力の応答関数を用いる。Full/alt. 状態それぞれに対し、最悪短期海象の波向きが $0^\circ, 30^\circ, \dots, 180^\circ$ となる各要素グループについて上位 100 要素の計 700 個の要素をピックアップした (図-2)。

まず特徴的な要素として、静水中応力(平均値 $\{\mu_X\}$ )の小さい要素および大きい要素を対象とし、提案手法と、Madsen による式を直接数値積分して得た極値分布と、Mises 応力の時系列を生成して得た極値分布を図-3に比較する。図-3より、超過確率分布は静水中応力の大きさによって異なるが、提案手法はどちらに対しても良好な推定法となっていることがわかる。図-4にはピックアップした700要素について、最悪

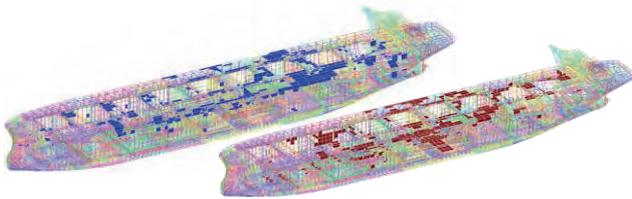


図-2 ピックアップした700要素 (左: full, 右: alt.)

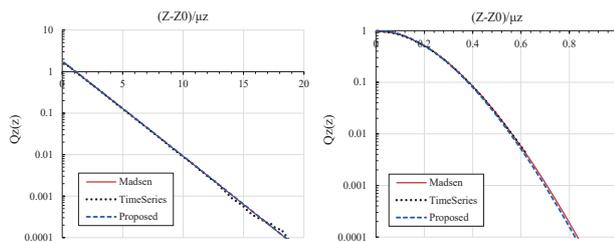


図-3 静水中応力の小さい要素 (左) と大きい要素 (右) における超過確率分布の比較

短期海象中における Mises 応力の 1/1000 最大期待値を提案手法と Madsen の直接数値積分とで求めた値を比較した図である。提案手法は漸近展開を始め種々の近似が施されているが、いずれの要素においても極めて良い近似手法となっていることが理解できる。

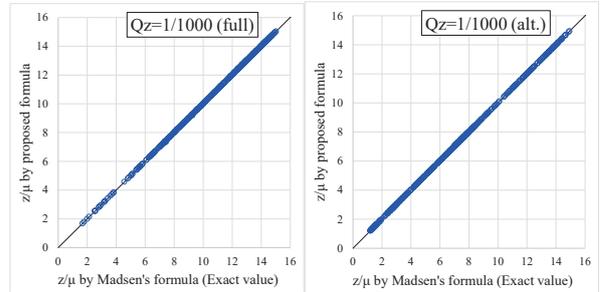


図-4 700 要素に対する Mises 応力の 1/1000 最大期待値の提案手法と Madsen の積分法との比較

#### 5. まとめ

本研究では、船舶の構造設計に用いることのできる、von-Mises 応力の実用的な統計予測計算法を提案した。Mises 応力の超過確率は Madsen によって厳密な計算方法が示されているが、同計算法は2重積分が必要かつその数値安定性に難を持つ些か非実用的な計算式である。これに対し、まず Mises 応力を互いに独立なガウス過程の二乗和の形式に変換し、積分を簡略化した。さらに、Laplace の方法による漸近展開を適用し、積分が不要かつロバストな極値分布の近似式を示した。漸近展開における参照点 (指数が最大となる点) は四次関数の解で与えられるが、その近似曲線を与えることで実用的な式とした。

提案した超過確率分布の計算法の妥当性の検証のため、2積付状態のばら積み船の全船 FEM モデルを用いて波浪中構造解析を実施し、時系列から得られる超過確率分布および Madsen による方法と比較を通じて、これらの手法と同等の結果が得られることを確認した。

#### 参考文献

- 1) 福田淳一: 船体応答の統計的予測, 耐航性に関するシンポジウム, 日本造船学会, (1969)
- 2) Madsen, H.: Extreme-value statistics for nonlinear stress combination, Journal of Engineering Mechanics, Vol.111, (1985), pp.1121-1129
- 3) Veneziano, D., Cornell, C. A., and Grigoriu, M.: Vector-Process Models for System Reliability, Journal of Engineering Mechanics-asce, Vol.103(1977), pp.441-460,
- 4) 松井貞興, 村上睦尚, 林原仁志, 笛木隆太郎: 船体構造設計のための全船荷重構造解析ならびに強度評価システム DLSA-Basic, 海上技術安全研究所報告, Vol.19, (2019), pp.373-393