

Table 7: Principal dimensions of the model and full-scale structure

	模型 (1/25)	(実機換算)	実機
L	1.2 m	30.0 m	30.0 m
B	0.8 m	20.0 m	20.0 m
D	0.54 m	13.5 m	13.5 m
d	0.22 m	5.5 m	5.5 m
$\Delta$	32,936cm <sup>3</sup>	514.63m <sup>3</sup>	514.63m <sup>3</sup>
KG	27.2 cm	6.79 m	6.48 m
K <sub>xx</sub>	39.9 cm	9.98 m	9.81 m
K <sub>yy</sub>	53.1 cm	13.28 m	12.86 m
K <sub>zz</sub>	59.4 cm	14.85 m	(14.85 m)
水深	166.4 cm	41.6 m	41.6 m

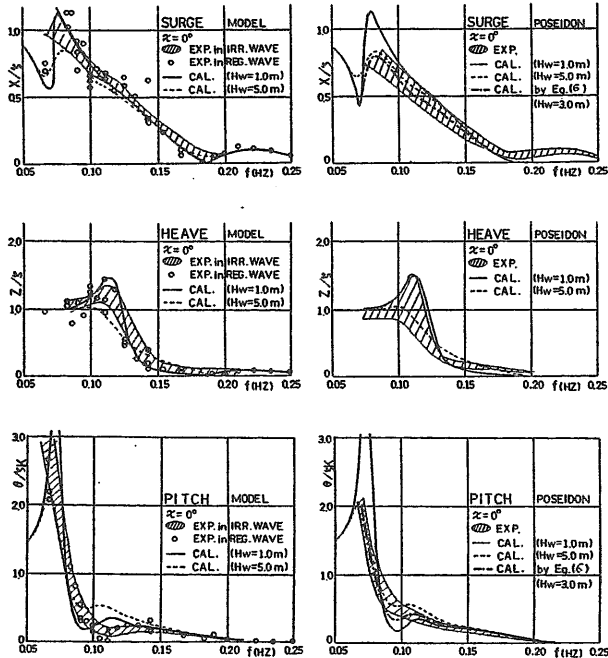


Fig. 56: Amplitudes of response functions of surge, heave and pitch

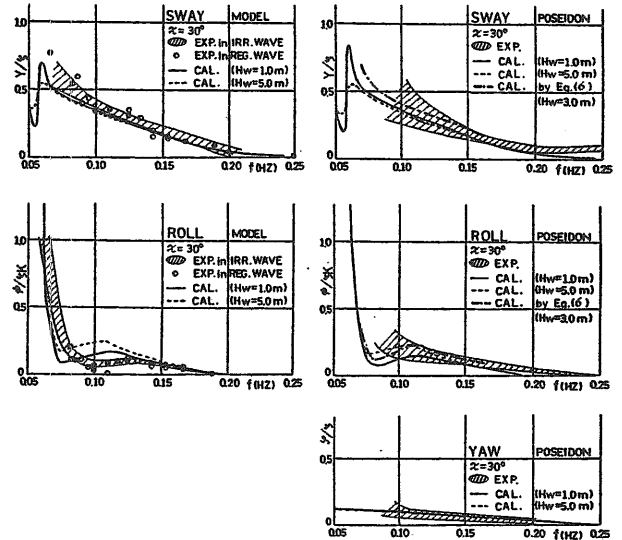


Fig. 57: Amplitudes of response functions of sway, roll and yaw

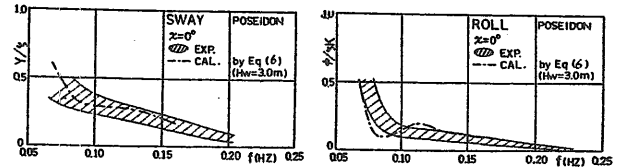


Fig. 58: Amplitudes of response functions of sway, roll in head sea

わち、波の方向分散性を考慮すると真の応答関数の振幅は

$$\bar{G}_k(\omega) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |G_k^{(1)}(\omega, \chi)|^2 D(\omega, \chi) d\chi} \quad (135)$$

で与えられる。上式より推算した値が Fig. 57 に一点鎖線で示されている。ここでは方向分布関数として光易型として  $s_{max} = 10$  を使用した。一方向波と仮定した場合よりも実測値により近いことがわかる。さらに主方向が船首方向の時の sway, roll の応答関数の振幅を Fig. 58 に示す。実測値の傾向を良く表している。

### 動揺シミュレーション

シミュレーションモデル 最終的なシミュレーション方程式 (yaw は考慮しない) は以下の通りである。

$$\begin{aligned} & \sum_i^5 (M_{ki} + m_{ki}(\infty)) \ddot{X}_i + \int_{-\infty}^t K_{ki}(t-\tau) \dot{X}_i(\tau) d\tau \\ & + N_{ki}^{(1)} \dot{X}_i + N_{ki}^{(2)} \dot{X}_i |\dot{X}_i| + (a_{ki} + b_{ki}) X_i \\ & = F_k^{(1)}(t) + F_k^{(2)}(t) + F_k^w(t) \end{aligned} \quad (136)$$

ただし、 $M_{ki}$  は浮体の質量行列、 $m_{ki}(\infty)$  は付加質量行列、 $K_{ki}$  はメモリー影響関数、 $N_{ki}^{(1)}$  及び  $N_{ki}^{(2)}$  は粘性流体力係数行列で自由動揺試験から得られたものを使用する。 $a_{ki}$  及び  $b_{ki}$  は静水圧及び係留ラインによる復原力係数行列、surge

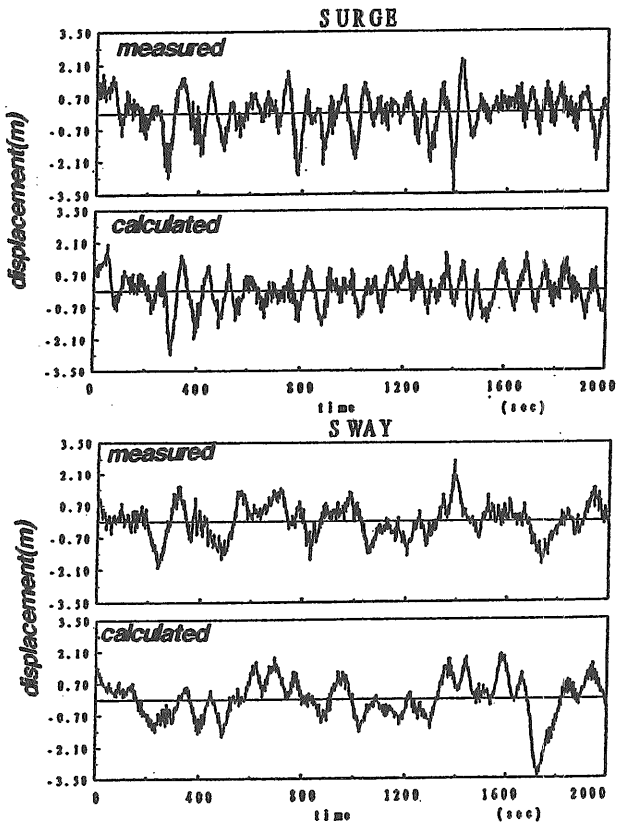


Fig. 59: Comparison between measured time series and simulation

及び sway に対しては自由動揺試験結果を使用する。 $F_k^{(1)}$  は線形波力行列、 $F_k^{(2)}$  は二次の波力行列で surge, heave 及び pitch のみ考慮する。時系列を求めるためには二次元逆 FFT が必要になるが、これは 2 重和を行って求めた。 $F_k^w$  は風による荷重で、surge 及び sway のみ考慮する。波力に関しては、方向分散性を仮定しなければならないが、本シミュレーションの目的が、実機自由動揺試験及びポテンシャル理論で得られる係数から、一方向からの波及び風による surge 及び sway の長周期運動を含む運動の時系列を安全サイドでシミュレートできるか、また、浮体係留システムの安全性評価の点から何を考慮しなければならないかであり、ここでは、波の方向分散性を考慮しない。なお、自然環境条件としては Fig. 48 を使用する。従って、波の主方向は  $15^\circ$  左舷方向であり、風向は正面である。

運動モードとしては surge, sway, heave, roll 及び pitch を考え、yaw は無視する。

シミュレーション結果との比較 (136) 式でシミュレートした結果と実測結果の比較を Fig. 59 に示す。surge 及び sway とともに長周期の運動は両者とも良く一致している。この結果だけでは、wave drift damping の影響はなさそうであるが、有義波高が 3m とかなり低いので wave drift damping を考慮しなくても良いとは断言できない。この図はまた、sway の長周期運動が平均流方向に直角な横方向の変動風によって生じていることを良く表している。Fig. 60 にスペクトル解析の結果を示す。surge, sway とともに両者ほぼ良く一致しているが、0.1Hz 付近ではシミュレーション結果が実測

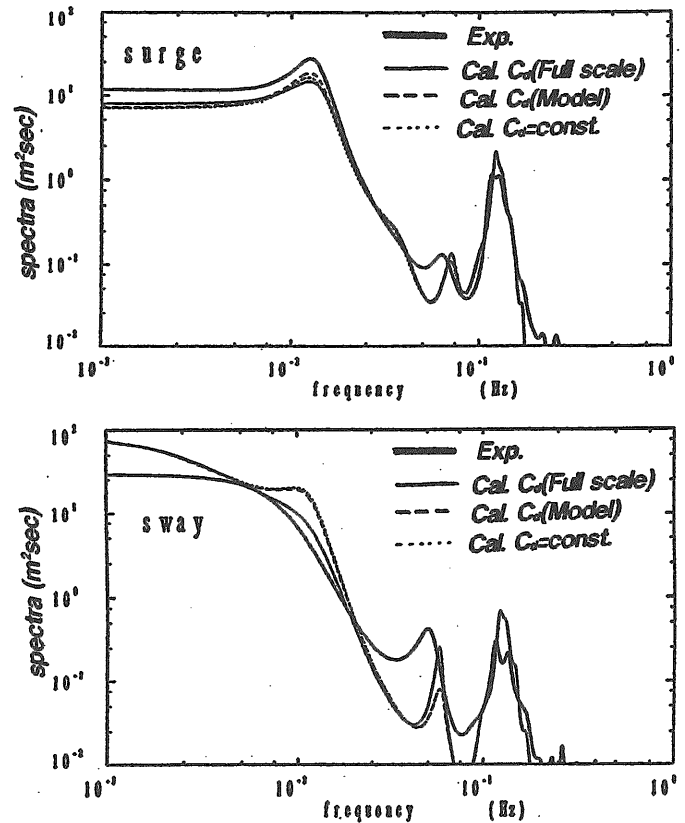


Fig. 60: Comparison of spectra of measured time series and simulations

値よりも大きくなっており、これは波の方向分散性によるものであると考えられる。なお図中の細線、破線等は、粘性減衰力係数として、実機の自由動揺試験結果の  $C_d$  を使用したもの（細線）、模型の自由動揺試験結果を使用したもの（破線）、実機  $C_d$  を定係数として近似したもの（点線）を使用してシミュレーションしたものである。それぞれによる差はほとんど無く、定係数の  $C_d$  を使用しても良い考えられる。以上一方向波と仮定してもシミュレーション結果と実機計測結果とほぼ良く一致するが、精度を向上させるには方向波の影響を考慮しなければならないと思われる。また、wave drift damping の影響については実海域では確認されていない。

補: wave drift damping 等の影響 実機のデータ解析では、wave drift damping 等の影響が顕著に現れなかった。この影響が、どの波の状態で有意になるか模型試験により検討する。

模型試験 模型試験は、当所の三鷹第二船舶試験水槽（長さ 400m、幅 18m、水深 8m、フラップ式油圧駆動造波装置）に於て実施した。係留ラインとしては、実機の水平面のバネ定数とほぼ同じ 2 本の線形ばねを用いた。ばね定数は  $1.683 \text{ kg/m}$ （実機換算で  $0.663 \text{ ton/m}$ ）である。

長時間の不規則波を発生させるために、次のような方法で長時間不規則波を造波した。まず、市販のランダムノイズ発生器からの白色雑音信号を  $24\text{dB/oct}$  の特性を有するバンドパスフィルターを通して有色雑音とし、この信号を造

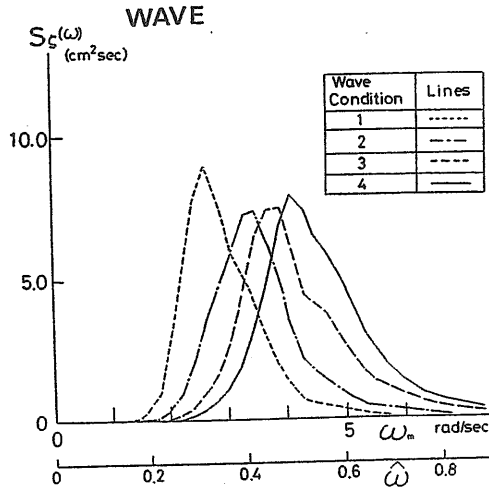


Fig. 61: Wave spectra used for model experiments

Table 8: Statistical values of irregular waves at model experiments

WAVE COND. No.	STATISTICAL			SPECTRAL			DURATION
	Variance (m²)	H <sub>1/3</sub> (m)	T <sub>ser</sub> (sec)	m <sub>0</sub> (m²)	√m <sub>0</sub> (m)	T <sub>01</sub> (sec)	TIME (hour)
1	0.2527 (0.00124)	1.954 (0.1366)	7.888 (2.086)	0.2396 (0.00172)	1.958 (0.1369)	8.038 (2.126)	2.84 (0.75)
2	0.2311 (0.00113)	1.869 (0.1307)	6.562 (1.735)	0.238 (0.00116)	1.952 (0.1365)	6.628 (1.753)	2.84 (0.75)
3	0.2502 (0.00122)	1.957 (0.1368)	5.477 (1.448)	0.2568 (0.00126)	2.027 (0.1417)	5.606 (1.482)	2.84 (0.75)
4	0.3047 (0.00149)	2.219 (0.1552)	5.006 (1.324)	0.3104 (0.00152)	2.229 (0.1559)	5.045 (1.334)	5.67 (1.5)

( ) in Model Scale

波機駆動用信号として造波した。造波した不規則波はバンドパスフィルターの中心周波数が、0.4, 0.5, 0.6 及び 0.7 Hz の4種類、造波時間は0.7Hz の場合が90分間で、その他が45分間である。不規則波中の試験時における波との出会角は総て180°の正面波だけである。今回の模型試験に使用した4種類の不規則波のスペクトルを Fig. 61に、それぞれの波の統計量を Table 8に示す。

波浪中に於ける長周期運動の流体力係数の変化の推定 次のような方法で、波浪中における長周期運動時の流体力係数の変化を定量的に調べる。

まず、前後揺れの2次の応答関数を G<sub>2</sub>、定常及び変動漂流力の応答関数を G<sub>2</sub><sup>f</sup>、外力に対する浮体の応答関数を H<sub>L</sub> と置き、瞬時々の波エネルギー-ζ(t)<sup>2</sup> に対する長周期運動の応答関数 Λ(ω) を導入する。

$$\Lambda(\omega) = \frac{S_{x\zeta^2}/S_{\zeta^2}}{\int S_{\zeta}(\omega-\nu)S_{\zeta}(\nu)G_2^*(\omega-\nu,\nu)d\nu} \quad (137)$$

ここで、S<sub>xζ<sup>2</sup></sub>はζ<sup>2</sup>と前後揺れ x とのクロススペクトル、S<sub>ζ<sup>2</sup></sub>はζ<sup>2</sup>のオートスペクトルである。もし G<sub>2</sub><sup>f</sup>に Newman 近似が適用できるのであれば、波浪中に於ける外力に対する長

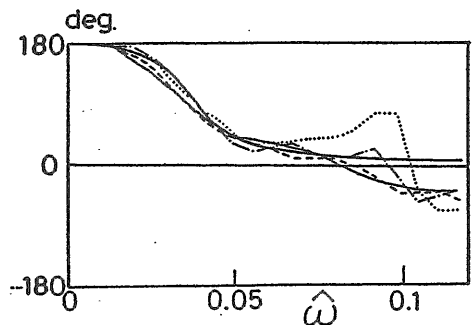
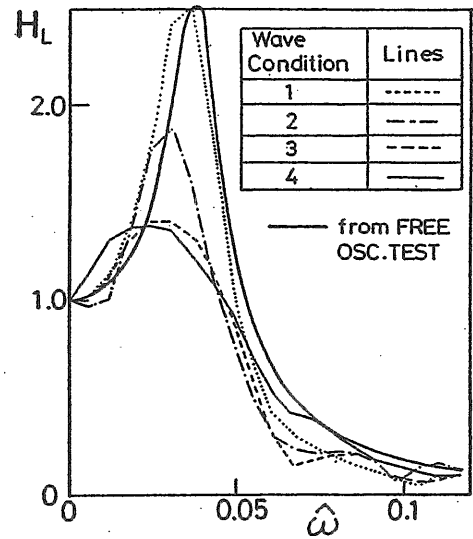


Fig. 62: Linearized transfer function of surge to external forces

周期運動の応答関数 H<sub>L</sub>は次式で表される。

$$H_L = \Lambda(\omega)/\Lambda(0) \quad (138)$$

Fig. 62に (138) 式の関係式から求めた H<sub>L</sub>と静水中自由動揺実験から得られる付加質量と等価線形減衰力から求めた  $\hat{H}_L$

$$\hat{H}_L = \frac{K}{[K - (M + m_{11})\omega^2 + i\omega N_{11}^e]} \quad (139)$$

との比較を示す。図中の細線等は H<sub>L</sub>の結果、実線は  $\hat{H}_L$ の結果を表している。なお、H<sub>L</sub>の推定に使用した Λ(0) の値は、次のようにして求めた。

$$\Lambda(0) = \frac{\sigma_{\zeta}^2}{KF^{(2)}} \quad (140)$$

この図から H<sub>L</sub>は  $\hat{H}_L$ と傾向的には良く一致するが、長周期運動時の値は静水中自由動揺時の値に対して固有周期が長周期側につれ、減衰力が大きくなっていることが判る。そこで、定量的に波浪中に於ける長周期運動の流体力の変化を調べるため、Fig. 62の H<sub>L</sub>が (138) 式と等価であると仮定し、最小自乗近似法によって m<sub>11</sub>と N<sub>11</sub><sup>e</sup>を求めた。その結果を Table 9に示す。この表から、明らかに波浪中の減衰力増加が生じていることが判る。その量は、静水中の値の1.6~1.7倍である。また、見かけ質量が10%程度減少することも判る。

Table 9: Comparison of hydrodynamic coefficients in still water and in slow drift oscillation

Wave cond.	$M_1 + m_{11}/M_1 + m_{11}$	$N_{11}^e/N_{11}^e$
2	1.0	1.39
3	0.89	1.67
4	0.87	1.65

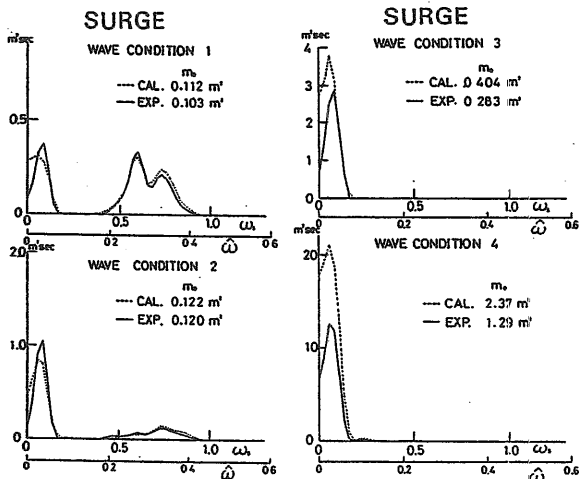


Fig. 63: Comparison of simulated surge spectra and experimental ones

シミュレーション結果と模型実験結果の比較 各 Wave Condition に対する surge のシミュレーション時系列のスペクトルと計測スペクトルの比較を Fig. 63 に示す。なお、計算の刻み幅は計測データのサンプリング時間と同じにした。この図から wave drift damping 等の影響は、波高にも依存するが、波スペクトルのピーク周波数にも依存することがわかる。つまり、波スペクトルのピーク周波数が高くなると長周期運動が波周期の運動に比べて顕著になり、wave drift damping 等の影響が大きくなるが、長周期運動があまり卓越しなければその影響は無視できる。実機の場合は、有義波周期が 7sec であり、wave condition 2 に近いので、wave drift damping 等の影響が大きく現れなかった。

### 3.7 係留力

係留浮体システムに働く最大係留力を精度良く推定することは、設計上最も重要なテーマである。したがって、係留システムの張力特性については従来から多くの理論的・実験的研究がなされている。特に、深海域用の係留として用いられる索・鎖の係留ラインに対しては、ラインの動揺によって生じる流体力等の動的影響を考慮した張力の推定法や張力が浮体の運動に及ぼす影響など数多く研究が行われているが、実海域で計測された実機データを用いて行った考察例はほとんどない。そこで、以下にポセイドン号によ

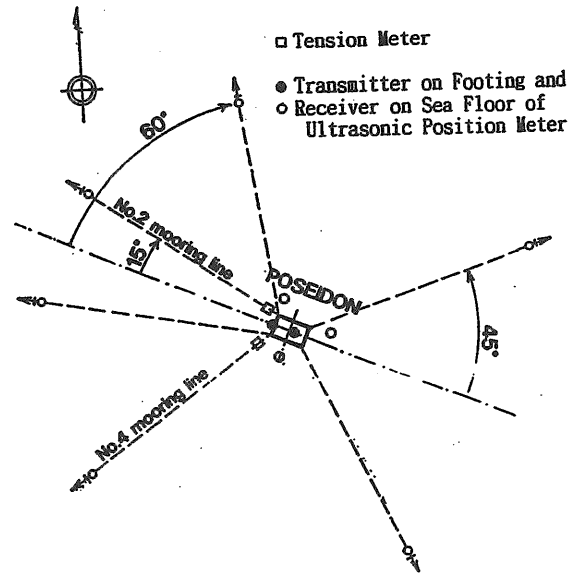


Fig. 64: Arrangement of mooring lines, tension meter

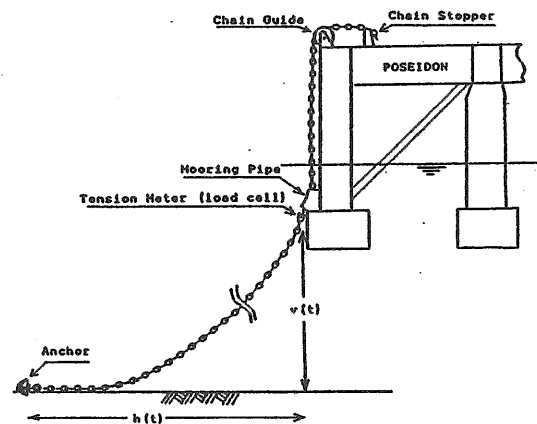


Fig. 65: Mooring system

り取得されたデータを基に係留ラインに働く張力特性について考察する。

実機の係留力の時系列シミュレーション まず、実測値を用いて時系列シミュレーションを行い、計測された張力と比較することで調査する。シミュレーション手法としては、係留ラインに働く流体力として、付加質量及び抗力を考慮して動的張力を計算する場合、普通ランプドマス法等の数値計算法が使用される。しかし、この方法は非常に長い計算時間を必要とし、実用的ではない [45]。係留ラインの動的影響を考慮した簡易計算法として小寺山 [46]、島田等 [47] 及び著者等 [48] の方法がある。(以後単に簡易計算法と呼ぶ) なお、Fig. 64 に係留ラインの配置を、また Fig. 65 に張力計の設置状況を示す。ここではまず、静的カテナリー理論及び簡易計算法によって時系列シミュレーションを試みる。次にその計算法の改良を小寺山等が示した方法にて行う。

静的カテナリー理論によるシミュレーション まず、係留点の運動の時系列により、係留点とアンカー点との水

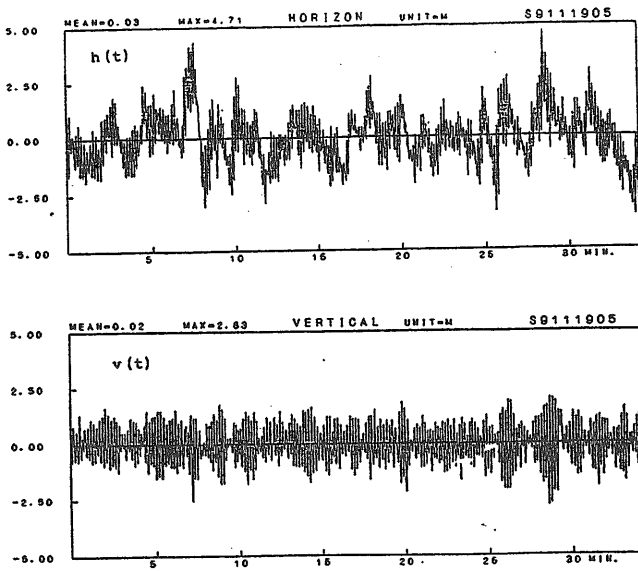


Fig. 66: Vertical and horizontal displacements at No.4 mooring point

平距離  $h(t)$  及び垂直距離  $v(t)$  の時系列を求める。これらの値及び係留ラインの長さ単位長さ当たりの水中重量から静的カタナリ理論により時々刻々の張力が計算される。こうして求めた張力の時系列を長周期成分(周期40秒以上)と短周期成分(40秒以下)に分離し、実測された時系列のそれぞれと比較した。その結果、長周期成分は静的カタナリ計算で十分精度良くシミュレートできるが、短周期成分は実測値と一致せず、位相ずれがあり、実測値には係留ラインの動的影響が含まれる可能性がある。

簡易計算法によるシミュレーション 簡易計算法とは、係留ラインの運動を微小振幅の準静的運動と仮定して係留ラインに働く流体力や慣性力を求めるもので、張力は次のように表される。

$$T(t) = \sqrt{T_h^2(t) + T_v^2(t)} \quad (141)$$

ここで、

$$\begin{aligned} T_h(t) = & A_{hh}\ddot{h}(t) + A_{hv}\ddot{v}(t) \\ & + B_{hh}\dot{h}(t)|\dot{h}(t)| + B_{hv}\dot{v}(t)|\dot{v}(t)| \\ & + C_{hh}h(t) + C_{hv}v(t) + D_h \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} T_v(t) = & A_{vh}\ddot{h}(t) + A_{vv}\ddot{v}(t) \\ & + B_{vh}\dot{h}(t)|\dot{h}(t)| + B_{vv}\dot{v}(t)|\dot{v}(t)| \\ & + C_{vh}h(t) + C_{vv}v(t) + D_v \end{aligned} \quad (143)$$

上式の右辺第1, 2項は慣性力の項、第3, 4項は抗力成分の項、第5, 6項は復原力、第7項は定常力を表す。各微係数  $A_i, B_i, C_i$  は準静的計算、すなわち、係留点での微小変位による係留ライン各点での変位を静的に求め、それに流体の付加質量係数及び抗力係数を乗じ係留ラインにそって積分する。こうして水平及び垂直方向の微小変位による水平及び垂直方向の張力の微係数が得られる。なお、係留ラインに対し法線方向及び接線方向の質量力係数を1.87、抗力

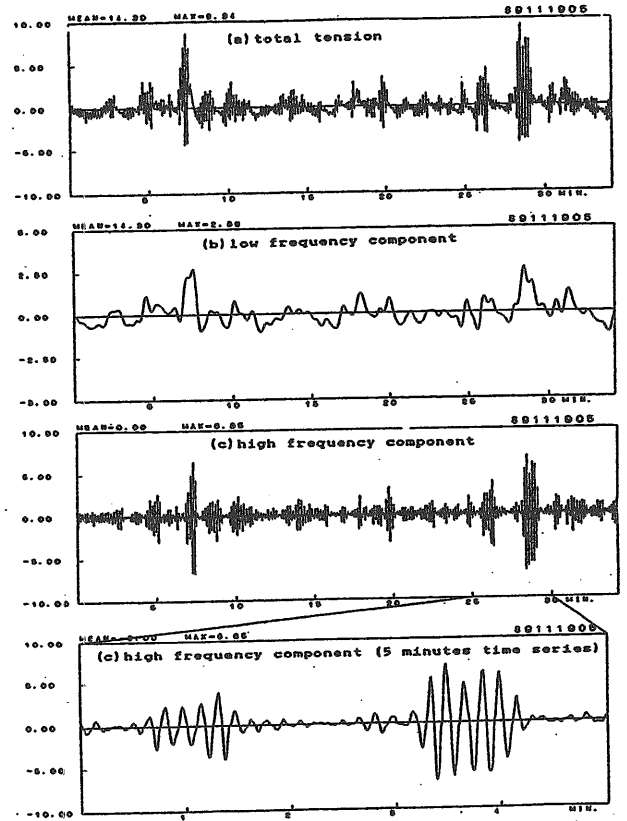


Fig. 67: Measured No.4 line tension

係数をそれぞれの方向にたいし2.20, 0.27とした。これらの値は安藤[49]による水槽試験結果を参考にして決めた。

この方法によるシミュレーションの結果について長周期成分、短周期成分に分離し、実測値と比較した。Fig. 67に計測値、Fig. 68に計算値を示す。この場合、静的カタナリ計算の場合と同様に長周期成分力に関して両者は良く一致するが、短周期成分力に関しては位相は一致しているが、振幅は小さい。そこで、上記方法の改良を試みる。(142)及び(143)式の係数  $A_i, B_i, C_i$  は  $h(t)$  の平均値、 $v(t)$  の平均値、係留ラインの初期長さ、単位当たりの水中重量等で決まる定数として取り扱われている。しかし、 $h(t)$  は浮体の長周期運動の影響で、長周期の変動に波周期の変動が重ね合わされたものになっているため、微係数を定数として取り扱うのは無理があるように思われる。そこで、 $h(t)$  を長周期成分  $h_L(t)$  と短周期成分  $h_s(t)$  に分離し、 $h(t)$  の長周期成分と  $v(t)$  の平均値  $\bar{v}$  に応じて微係数を時々刻々求めることにする。すなわち(142)式及び(143)式を以下のように修正する。

$$\begin{aligned} T_h(t) = & A_{hh}(h_L(t), \bar{v})\ddot{h}_s(t) + A_{hv}(h_L(t), \bar{v})\ddot{v}(t) \\ & + B_{hh}(h_L(t), \bar{v})\dot{h}_s(t)|\dot{h}_s(t)| + B_{hv}(h_L(t), \bar{v})\dot{v}(t)|\dot{v}(t)| \\ & + C_{hh}(h_L(t), \bar{v})h(t) + C_{hv}(h_L(t), \bar{v})v(t) + D_h(h_L(t)) \end{aligned} \quad (144)$$

$$\begin{aligned} T_v(t) = & A_{vh}(h_L(t), \bar{v})\ddot{h}(t) + A_{vv}(h_L(t), \bar{v})\ddot{v}(t) \\ & + B_{vh}(h_L(t), \bar{v})\dot{h}(t)|\dot{h}(t)| + B_{vv}(h_L(t), \bar{v})\dot{v}(t)|\dot{v}(t)| \\ & + C_{vh}(h_L(t), \bar{v})h(t) + C_{vv}(h_L(t), \bar{v})v(t) + D_v(h_L(t)) \end{aligned} \quad (145)$$

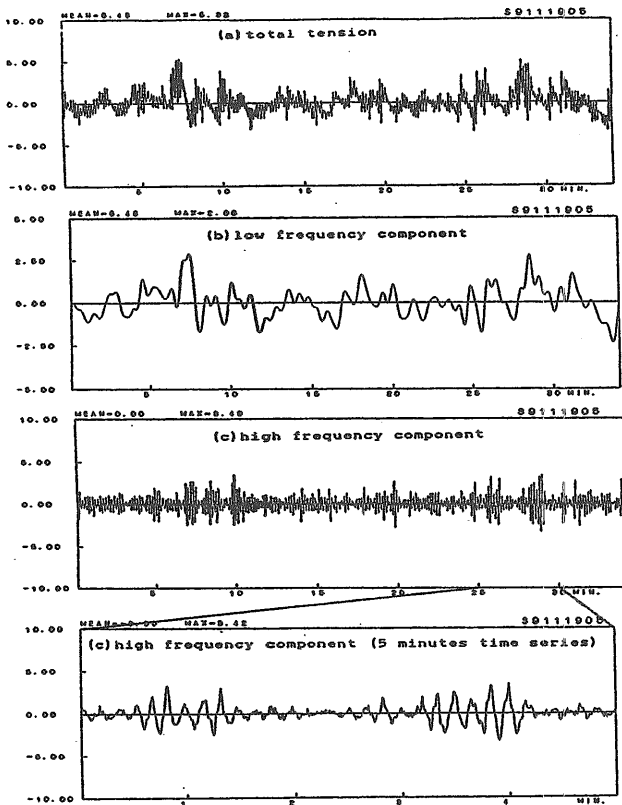


Fig. 68: No.4 line tension simulated by approximate calculation method

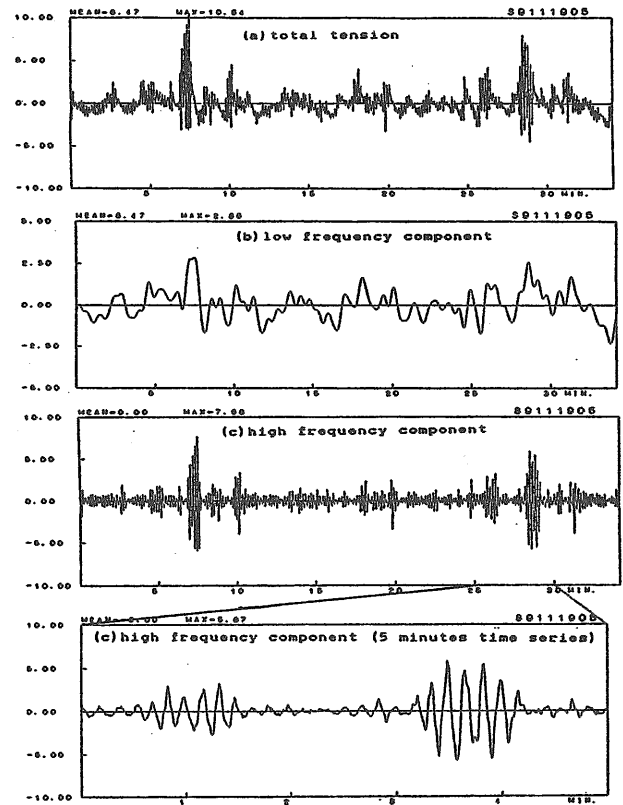


Fig. 69: No.4 line tension simulated by modified approximate calculation method

上記表現が可能であるためには  $h(t)$  が長周期成分  $h_L(t)$  と短周期成分  $h_s(t)$  に分離できることが必要であるが、Fig. 71 に示すように  $h(t)$  は周期 15 秒から 40 秒の間でほとんど有意なパワーを持たないため、十分に分離可能である。本計算では分離周期を 40 秒とした。微係数を時々刻々求める方法として、始めに  $h_L$  の変動範囲を考慮して 10 数点計算しておき、それを使用して時々刻々補間して求めた。

こうして求めた張力の時系列の結果を Fig. 69 に示す。実測結果である Fig. 67 と比較すると両者は非常に良く一致する。

**変動張力のスペクトル** 前節において改良された簡易計算法 (MAM) の結果と実測値は良く一致することが確かめられた。このことは、計算法の妥当性と同時にポセイダ号の運動及び張力が精度良く計測されていることを意味している。そこで、以下において、変動張力に対し係留ラインの動的効果及び浮体の長周期運動がどのように影響するかをスペクトル解析及び統計解析を行って調べることにする。対象とするデータは 1989 年 11 月 19 日に計測された 3 時間の連続データである。このときの有義波高は約 4.5m であった。まず、長周期運動が張力にどのような影響を及ぼすかを調べるために、 $h(t)$  から長周期成分を除いた  $h_s(t)$  と  $v(t)$  を用いて、静的計算、単純簡易法による動的計算及び改良された簡易法によるシミュレーションを行った。Fig. 70 はその結果を示す。この図から長周期運動がなくなると短周期の変動張力の振幅も若干小さくなることがわかる。Fig. 71 はシミュレーション結果も含めた変動張力

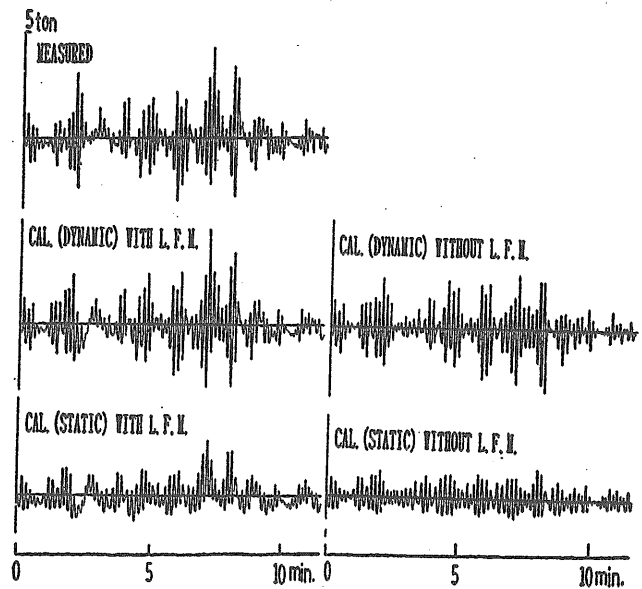


Fig. 70: Time series of measured and simulated tensions

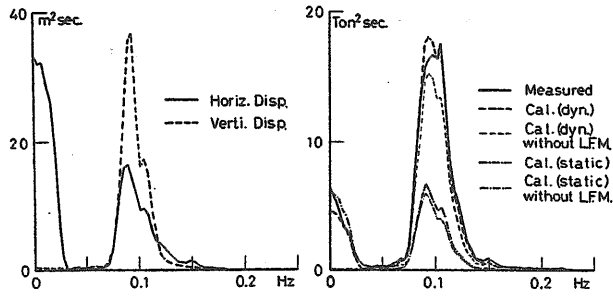


Fig. 71: Spectra of  $h(t)$ ,  $v(t)$  and No.4 line tension

のスペクトルを示す。この図から以下のことがわかる。

- (1) 動的計算による結果と実測値は、長周期成分、短周期成分ともに良く一致する。
- (2) 水平距離変動  $h(t)$  の長周期成分は短周期成分とほぼ同等のパワーを有しているが、張力の長周期成分のパワーは短周期成分のそれより小さい。
- (3) しかし、静的計算ではそれらは同等である。
- (4) 長周期成分を除いた計算では短周期成分のパワーも若干小さくなる。

## 4 非線形確率統計予測法

確率論的方法では、*Cartwright-Longuet-Higgins* [31] が線形応答についての極値の確率密度を求める式を誘導し、応答の分散と応答スペクトルのバンド幅パラメータによって確率密度が表せることを示している。従って、線形応答の場合は、入射波に対する応答の周波数応答関数さえ求めれば、極値の各種統計量は求められる。しかしながら、長周期運動のような波に対する2次の非線形応答を含む場合にはこの方法は適用できず、過小評価することが知られている [50]。このような2次の非線形応答の予測の問題に対し、最初に確率予測法を適用したのは *Neal* [51] である。彼は *Kac-Siegert* [52] が電気工学の分野で開発した方法を使用してその応答の特性関数の closed form solution を見いだした。*Kac-Siegert* が開発した理論は、応答過程が任意の正規過程を入力とする2項までのボルテラ汎関数級数で表されるとすると、応答過程は標準正規型確率変数列の2次形式の和で表されることに基づいている。従って、2次形式の和で表される応答過程の特性関数を求める問題は、積分方程式の固有値及び固有関数を求める問題に帰着できる。特性関数と確率密度関数はフーリエ変換対を成すため、*Neal* の方法は有用であるが、しかし、そのままでは解析的に求めることができないばかりか、数値的にも、複素変数の平方根を含む積分を有するために評価できない。

*Naess* [53,54,55] は長周期応答の確率予測の問題に対し、slow drift approximation を導入した。すなわち、2次の波力の QTF に対し2成分波の和の周波数応答を無視すると、特性関数を求める積分方程式の固有値は2重固有値となり、応答の確率密度関数は、レイリー過程列の自乗和で表されることを示した。しかしながら、この方法では線形応答を無視しておりそのままでは使用することはできない。

*Vinje* [56,57] 及び日根野 [58] はキュムラントの Taylor 展開から、線形応答が2次の長周期応答に比べて大きい場

合の応答及び極値の確率密度関数を求めている。この方法は、基本的にはガウス分布を基底として確率分布を展開する *Gram-Charlier* 展開と等価であり、もし有限項で打ち切ると負の確率密度が発生する等物理的に不合理である。

*Winterstein* [59,60] は、確率密度関数を展開するのではなく、確率変数を理想確率変数(正規確率変数)で展開する方法によって非線形応答の確率密度関数及び極値予測を行う方法を開発している。この方法は、一般に *Wiener-Hermite* 展開と呼ばれるものの3項までで打ち切ったものに対応する。応答自身の統計量は既知であるが、応答が多変数の入力の非線形相互作用で起こっている場合に有効な手法であると言われている。しかしながら、応答自身を現象とはまったく異なる理想確率変数(正規確率変数)で表すために、入力と出力の関係がまったく判らないため完全な予測理論ではない。つまり、応答自身の統計量がある程度シミュレーション等から見いださなければならない。

一方、著者の一人 [61] は、線形応答と長周期の2次の応答を含む全2次応答の確率予測に関し、ガンマ分布近似法を提案した。この方法は、純2次応答や弱非線形応答を仮定しない一般の場合に適用できるもので、ガンマ分布を基底とする確率分布関数の *Laguerre* 展開と等価である。この級数は *Gram-Charlier* 展開と比べて一樣収束性が保証されていること、負の確率密度が発生しないこと等がこの方法の優れている点である。この方法の有効性を木下 [62] らは、模型実験との比較から示している。

また、極値統計量を推定するためには応答変位及び応答速度の結合確率密度関数を必要とする。これを求めることは非常に難しくさまざまな近似がなされる。しかしながら、応答速度と応答変位は独立であると仮定して求める手法が、工学的には良く用いられる。

まず、本章では外力に対する係留浮体の一般の2次の非線形応答の理論をおさらいし、極値統計予測法についてまとめる。つぎに、ガンマ分布近似法を波と風がある場合の応答予測理論に拡張し、その予測結果と実海域による実機データとの比較から非線形応答の極値予測法を検討する。

最後に、係留力の統計予測に関しては、先のシミュレーションのところで示したように、変動張力が、多変数の入力成分から決定されることから、*Winterstein* の予測法を試みる。

### 4.1 係留浮体の全2次応答の確率密度関数の推定

(1) 厳密理論 入射波が、ゼロ平均のガウス確率過程とするとき構造物の非線形応答は入射波の2次のオーダーまで考慮するとつぎのような2項ボルテラ級数で展開される。

$$X(t) = X^{(1)} + X^{(2)} \quad (146)$$

ここで、右辺第1項は線形項で次式で与えられる。

$$X^{(1)} = \int_{\tau} g_1(\tau) \zeta(t - \tau) d\tau \quad (147)$$

また、右辺第2項は2次の非線形応答を表し次式で与えられる。

$$X^{(2)} = \int_{\tau_1} \int_{\tau_2} g_2(\tau_1, \tau_2) \zeta(t - \tau_1) \zeta(t - \tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (148)$$

(147) 及び (148) 式中の  $\zeta(t)$  は、ゼロ平均ガウス確率過程である水面上昇量を表す。核関数  $g_1$  は線形インパルス応答関数であり、核関数  $g_2$  は、線形インパルス応答関数の類似から2次のインパルス応答関数と呼ばれる。

これらのインパルス応答関数が連続で絶対可積分であると仮定すれば、フーリエ変換が可能であり、前の章で示したようなフーリエ変換対を持つ。

Kac - Siegert に従うと2次までの非線形応答  $X$  は、つぎのように、同一の確率分布に従う確率変数  $\{W_j\}$  の2次形式の和で表示可能である。

$$X(t) = \sum_j c_j W_j(t) + \sum_j \lambda_j W_j^2(t) \quad (149)$$

ここで、 $W_j$  は標準正規型確率変数列 (ゼロ平均、分散1で互いに独立) である。 $\lambda_j$  は、つぎの積分方程式

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\omega_1, \omega_2) \Psi_j(\omega_2) d\omega_2 = \lambda_j \Psi_j(\omega_1) \quad (150)$$

を満たす固有値であり、 $c_j$  は、線形応答を表すパラメータで、次式から求められる。

$$c_j = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(\omega) \sqrt{S_\zeta(\omega)} \Psi_j^*(\omega) d\omega \quad (151)$$

ここで、\* は複素共役を意味し、 $S_\zeta$  は two-sided 型の波スペクトルである。方程式 (150) の  $\Psi_j$  は、次式を満たす直交固有関数列である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_j(\omega) \Psi_k^*(\omega) d\omega = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases} \quad (152)$$

また、核関数  $K(\omega_1, \omega_2)$  は次式で定義され、Hermite 性を有する。

$$K(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{S_\zeta(\omega_1) S_\zeta(\omega_2)} G_2(\omega_1, \omega_2) \quad (153)$$

固有値  $\lambda_j$  とパラメータ  $c_j$  が既知のとき、確率密度関数は次式で与えられる。

$$p_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixs) \phi_X(s) ds \quad (154)$$

ここで、 $\phi_X$  は特性関数を表し次式で与えられる。

$$\phi_X(s) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 2i\lambda_j s}} \exp\left[-\frac{c_j^2 s^2}{2(1 - 2i\lambda_j s)}\right] \quad (155)$$

(154) 式から、平均、分散及び高次キュムラント等の統計量は

$$\begin{aligned} k_1 &= \bar{X} = E[X(t)] = \sum \lambda_j \\ k_2 &= \sigma_X^2 = \sum c_j^2 + 2 \sum \lambda_j^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \\ k_m &= \sum 2^{m-1} (m-1)! \lambda_j^m + \sum m! \lambda_j^{m-2} c_j^2 \\ &\quad \text{for } m \geq 3 \end{aligned} \quad (156)$$

で与えられる。Kac - Siegert [52] と Neal [51] は式 (154) 式で表される確率密度関数は closed form で与えられず、数値計算が必要であると結論づけている。これは確かに事実であるが、特殊な近似が成り立つ場合には closed form solution が存在し得る場合がある。

(2) NAESS の近似 Naess [53,54,55] は係留浮体の長周期運動では、2次応答の内2成分波の和の周波数成分が差の周波数成分に比べて非常に小さいことから、つぎの slow drift approximation を導入した。

$$G_2(\omega_1, \omega_2) = 0 \quad \text{as } \omega_1 \cdot \omega_2 > 0$$

つまり

$$K(\omega_1, \omega_2) = 0 \quad \text{for } \omega_1 \cdot \omega_2 > 0 \quad (157)$$

この時、積分方程式 (150) は、

$$\int_0^{\infty} K(\omega_1, \omega_2) \bar{\Psi}_j(\omega_2) d\omega_2 = \bar{\lambda}_j \bar{\Psi}_j(\omega_1) \quad \text{for } \omega_1 \geq 0 \quad (158)$$

固有値は、

$$\lambda_{2j-1} = \lambda_{2j} = \bar{\lambda}_j \quad (159)$$

となるので、これは2重固有値問題である。固有関数は、

$$\Psi_{2j-1}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_j(\omega) & , \omega \geq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_j^*(\omega) & , \omega < 0 \end{cases} \quad (160)$$

$$\Psi_{2j}(\omega) = \begin{cases} -\frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_j(\omega) & , \omega > 0 \\ 0 & , \omega = 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \bar{\Psi}_j^*(\omega) & , \omega < 0 \end{cases}$$

となるので、 $W_{2j-1}$  と  $W_{2j}$  は Hilbert 変換対になり

$$R_j(t) = \sqrt{W_{2j-1}^2 + W_{2j}^2} \quad (161)$$

はレイリー過程である。もし、線形応答が2次の応答に比べて小さければ、 $c_j \equiv 0$  であり、また有限固有値であると仮定すれば、純2次応答の確率密度関数はつぎのように closed form で与えられる。

$$p_X(x) = \begin{cases} \sum \frac{l_j}{2\lambda_j} \exp\left(-\frac{x}{2\lambda_j}\right) & , x \geq 0 \\ \sum \frac{l_j}{2|\lambda_j|} \exp\left(\frac{x}{2|\lambda_j|}\right) & , x < 0 \end{cases} \quad (162)$$

ここで、

$$l_j = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda_k}{\lambda_j}\right)} \quad (163)$$

であり、固有値はつぎのように正と負の2つのグループに分けられる。 $(\lambda_j, j = 1, \dots, M, \text{ for } \lambda_j > 0 \text{ と } \lambda_j, j = M+1, \dots, N, \text{ for } \lambda_j < 0)$

### (3) 近似理論

(i) Gram-Charlier 展開法 もし、応答過程が弱非線形であれば、応答の瞬時値確率密度関数は、Gram-Charlier 展開 (展開第一項が正規確率密度関数) で表される。これについて簡単に紹介しよう。

もし、固有値  $\lambda_j$  がパラメータ  $c_j$  に比べてかなり小さければ、 $X$  はガウス分布に近づく事が予想される。そこで、 $X - E[X]$  を  $Z$  で置き換え次式で定義される誤差  $p_\epsilon(z)$  を導入すると

$$p_\epsilon(z) = p_X(z) - N(0, \sigma_X^2) \quad (164)$$



で表される。ここで、 $N(0, \sigma_x^2)$  はゼロ平均、分散 $\sigma_x^2$ をもつ正規密度関数である。もし、 $p_e$ を重み関数  $\{w(z)h_n(z)\}$  を持つ直交関数族で展開すれば、それはつぎのように表される。

$$p_e(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n h_n(z) w(z) \quad (165)$$

ここで、

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(z) p_e(z) dz \quad (166)$$

$w(z)$  が正規確率密度関数である場合は、良く知られたように  $h_n(z)$  は Hermite 多項式で表される。Hermite 多項式の性質から、最終的に応答  $X$  の確率密度関数はつぎの展開形で与えられる。

$$p_X(x) \simeq \frac{1}{2\pi\sigma_X} \left[ 1 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\bar{b}_n}{n! \sigma_X^n} H_n \left\{ \frac{x - \bar{X}}{\sigma_X} \right\} \exp \left( -\frac{x - \bar{X}}{2\sigma_X^2} \right) \right] \quad (167)$$

これは、Gram-Charlier 展開と呼ばれ統計学ではしばしば現れる。この式の中の  $\bar{b}_n$  は高次モーメントを表し、

$$\bar{b}_n = E[(x - \bar{X})^n] \quad \text{for } n \geq 3 \quad (168)$$

で与えられる。また、これらは周波数領域の積分形でも与えられる。この方法は、高次モーメントを求めれば応答の確率密度関数がただちに求められる点で利点があるが、この展開級数は常に収束するとはかぎらずまた、有限項で打ち切ると負の確率密度が生じる可能性があるので注意が必要である。負の確率密度が生じる事は物理的に考えて不合理である。

(ii) ガンマ分布近似 もし、固有値の数が有限であるとすれば、(149) 式から応答  $X(t)$  は次の2つの確率過程に分離できる。

$$X(t) = Z_1 + Z_2 \quad (169)$$

ここで、

$$Z_1 = \sum_{j=1}^M (c_j W_j + \lambda_j W_j^2) \quad (170)$$

$$Z_2 = \sum_{j=M+1}^N (c_j W_j + \lambda_j W_j^2) \quad (171)$$

このとき、確率過程  $Z_1$  と  $Z_2$  は互いに独立である (e.g. Papoulis [63])。もし、時間を固定し、 $c_j \equiv 0$  であれば、 $Z_1$  は常に正の値をとる確率変数になり、一方  $Z_2$  は常に負である確率変数になる。この場合、連続確率分布の近似理論により  $Z_1$  と  $Z_2$  は、一般化 Laguerre 多項式の級数で展開できることが数学的に証明される [64]。この級数の初項は2パラメータを持つガンマ pdf である。例えば、もし  $Y = \lambda_1 W_1^2 + \dots + \lambda_n W_n^2$  とおき、 $\lambda_j > 0 (j=1, \dots, n)$  を考えると、 $Y$  の pdf は次のような一様収束する級数で表される。

$$p_Y(x) = p_Y(x, 2\theta; \frac{\nu}{2}) \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k L_k^{(\frac{\nu}{2}-1)} \left( \frac{x}{2\theta} \right) \right] \quad (172)$$

ここで、 $p_Y$  は2パラメータ ( $\theta$  と  $\nu$ ) をもつガンマ pdf である。 $L_k^{(\frac{\nu}{2})}$  は一般化 Laguerre 多項式であり、 $B_k$  は Laguerre 多項式の直交性から決定される係数を表す。パラメータ  $\theta$

と  $\nu$  は未知であるので、これらを係数  $B_1$  と  $B_2$  が0となるように決定すれば、 $p_Y$  は  $p_Y$  に対する2次の近似解を与える。つまり、 $p_Y$  の1次及び2次モーメントは  $p_Y$  のそれと一致する。同様の近似が  $c_j \neq 0$  の場合にも適用される。(170) 式の  $Z_1$  を次のように変換すれば

$$Y_1 = Z_1 + \sum \frac{c_j}{4\lambda_j} = \sum \lambda_j V_j^2$$

$$V_j = W_j + \frac{c_j}{2\lambda_j} \quad (173)$$

(173) 式は  $c_j = 0$  の場合と同じように正規確率変数の2次形式の形を取る。ただし、 $E[V_j(t)] = \frac{c_j}{2\lambda_j} \neq 0$  である。このとき、 $V_j^2(t)$  の pdf は非心  $\chi^2$  pdf となり、 $V_j$  は互いに独立である。従って、 $Y$  の pdf は非心  $\chi^2$  pdf の級数形で表される。非心  $\chi^2$  pdf は一般化 Laguerre 多項式でも表されるので、 $Y$  の pdf はまたガンマ pdf を初項とする一般化 Laguerre 多項式の級数で (172) 式のように表される。しかしながら、1次と2次応答間の統計的相互干渉は、3次以上の高次モーメントで起こる ( (156) 式参照)。それゆえ、2次までの pdf の近似では不十分である。そこで、2次までの pdf の近似を少なくとも3次まで拡張する必要がある。まず、次のような3パラメータ ( $\theta, \nu, \delta$ ) を有するガンマ pdf を考える。

$$p_Y(x, \delta, 2\theta; \frac{\nu}{2}) = \frac{1}{(2\theta)^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} (x - \delta)^{\nu/2-1} \exp \left( -\frac{x - \delta}{2\theta} \right) U(x - \delta) \quad (174)$$

ここで、 $U(x - \delta)$  は階段関数であり、次の関係を満たす。

$$U(x - \delta) = \begin{cases} 1 & x \geq \delta \\ 0 & x < \delta \end{cases} \quad (175)$$

$\theta$  はガンマ pdf の母数、 $\nu$  は自由度を表す。

対応する特性関数 (cf) は

$$\phi_Y(u, \delta, 2\theta; \nu/2) = \frac{1}{(1 - 2i\theta u)^{\nu/2}} \exp(i\delta u) \quad (176)$$

と表される。 $Z_1$  のキュムラント母関数とガンマ pdf に従う確率変数のキュムラント母関数の差をとり、

$$\Delta \equiv \log \phi_{Z_1} - \log \phi_Y$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \log(1 - 2i\lambda_j u) + \frac{\nu_1}{2} \log(1 - 2i\theta_1 u)$$

$$- \sum_{j=1}^M \frac{c_j^2 u^2}{2(1 - 2i\lambda_j u)} - i\delta_1 u \quad (177)$$

$iu = \frac{\xi_1}{1 + 2\theta_1 \xi_1}$  を代入すれば、

$$\Delta \equiv -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \log[1 - 2(\lambda_j - \theta_1)\xi_1]$$

$$+ \frac{M - \nu_1}{2} \log(1 + 2\theta_1 \xi_1)$$

$$+ \sum_{j=1}^M \frac{c_j^2}{2} \left[ \frac{\xi_1^2}{\{1 - 2(\lambda_j - \theta_1)\xi_1\}(1 + 2\theta_1 \xi_1)} \right]$$

$$- \frac{\delta_1 \xi_1}{(1 + 2\theta_1 \xi_1)} \quad (178)$$

を得る。もし、 $\theta_1$  が  $2\theta_1 > \max \lambda_j (j = 1, \dots, M)$  を満たすように取られるとすれば、すべての  $\xi_1$  に対し、

$$|2(\lambda_j - \theta_1)\xi_1| \leq |2\theta_1\xi_1| \leq 1$$

を満足する。それゆえ、 $\Delta$  は  $2\theta_1\xi_1$  に関し一様収束するべき級数に展開できる。

$$\begin{aligned} \Delta &= \left( \sum \lambda_j - \nu_1 \theta_1 - \delta_1 \right) \xi_1 \\ &+ \left( \sum \lambda_j^2 - 2 \sum \lambda_j \theta_1 + \nu_1 \theta_1^2 + \sum \frac{c_j^2}{2} + 2\theta_1 \delta_1 \right) \xi_1^2 \\ &+ \left[ \frac{3}{4} \left( \sum \lambda_j^3 - 3 \sum \lambda_j^2 \theta_1 + 3 \sum \lambda_j \theta_1^2 - \nu_1 \theta_1^3 \right) \right. \\ &- 4\theta_1^2 \delta_1 + \sum \lambda_j c_j^2 - 2 \sum c_j^2 \theta_1 \left. \right] \xi_1^3 \\ &+ O(\{2\theta_1\xi_1\}^4) \end{aligned} \quad (179)$$

上式右辺第 1、2、3 項を消去するように  $\theta_1, \nu_1, \delta_1$  を決めれば、各パラメータは

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{4 \sum \lambda_j^3 + 3 \sum \lambda_j c_j^2}{4 \sum \lambda_j^2 + 2 \sum c_j^2} \\ \delta_1 &= \sum \lambda_j - \frac{(2 \sum \lambda_j^2 + \sum c_j^2)^2}{4 \sum \lambda_j^3 + 3 \sum \lambda_j c_j^2} \\ \nu_1 &= \frac{2(2 \sum \lambda_j^2 + \sum c_j^2)^3}{(4 \sum \lambda_j^3 + 3 \sum \lambda_j c_j^2)^2} \end{aligned} \quad (180)$$

と決定される。*Naess* によって導入された slow drift approximation を導入すると、各パラメータはそれぞれ、

$$\bar{\delta}_1 = 2\delta_1 \quad (181)$$

$$\bar{\nu}_1 = 2\nu_1 \quad (182)$$

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 \quad (183)$$

となる。すなわち、 $Z_1$  の pdf の近似解は次式で与えられる。

$$p_{Z_1}(x) \simeq p_\gamma(x, \bar{\delta}_1, 2\bar{\theta}_1; \bar{\nu}_1/2) \quad (184)$$

この解は、3 次までのモーメントが厳密解に一致するので、 $p_{Z_1}$  の 3 次近似解である。

厳密解は以下に示すように、一般化 *Laguerre* 多項式の級数形で表される。

(179) 式から、 $Z_1$  の特性関数は次式で表される。

$$\begin{aligned} \phi_{Z_1} &= \phi_\gamma(u, \bar{\delta}_1, 2\bar{\theta}_1; \bar{\nu}_1/2) \exp\left[\sum_{n=4}^{\infty} A_n \xi_1^n\right] \\ &= \phi_\gamma \sum_{k=0}^{\infty} B_k \xi_1^k \end{aligned} \quad (185)$$

ここで、 $B_0 = 1, B_1 = B_2 = B_3 = 0$  を課す。

次の関係式を用いると

$$\frac{\partial^k}{\partial \theta_1^k} \phi_\gamma = \bar{\nu}_1(\bar{\nu}_1 + 2) \cdots (\bar{\nu}_1 + 2k - 2) \xi_1^k \phi_\gamma \quad (186)$$

$$\phi_{Z_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{\bar{\nu}_1(\bar{\nu}_1 + 2) \cdots (\bar{\nu}_1 + 2k - 2)} \frac{\partial^k}{\partial \theta_1^k} \phi_\gamma \quad (187)$$

となる。右辺の偏微分は

$$\frac{\partial^k}{\partial \theta_1^k} \phi_\gamma = \frac{(-1)^k e^{i\bar{\delta}_1 u}}{\bar{\theta}_1^k \Gamma(\bar{\nu}_1/2)} \int_0^\infty e^{2iu\bar{\theta}_1 x} \frac{\partial^k}{\partial x^k} (e^{-x} x^{\bar{\nu}_1/2+k-1}) dx \quad (188)$$

のような積分形で表される。これを *Laguerre* 陪多項式

$$L_r^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{r!} \frac{d^r}{dx^r} (e^{-x} x^{r+\alpha}) \quad (189)$$

(ただし、 $\alpha > -1, r = 0, 1, 2, \dots$ ) を使用して書き直すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k}{\partial \theta_1^k} \phi_\gamma &= \frac{(-1)^k}{\bar{\theta}_1^k \Gamma(\bar{\nu}_1/2)} \int_{\bar{\delta}_1}^\infty k! \exp\left(-\frac{s - \bar{\delta}_1}{2\bar{\theta}_1}\right) \\ &\left(\frac{s - \bar{\delta}_1}{2\bar{\theta}_1}\right)^{\bar{\nu}_1/2-1} L_k^{(\bar{\nu}_1/2-1)}\left(\frac{s - \bar{\delta}_1}{2\bar{\theta}_1}\right) e^{ius} \frac{ds}{d\bar{\theta}_1} \end{aligned} \quad (190)$$

が導かれる。結局  $Z_1$  の pdf の厳密解は次のようになる。

$$\begin{aligned} p_{Z_1} &= p_\gamma(x, \bar{\delta}_1, 2\bar{\theta}_1; \bar{\nu}_1/2) \left[ 1 + \sum_{k=4}^{\infty} B_k \frac{(-1)^k k! \Gamma(\bar{\nu}_1/2)}{\bar{\theta}_1^k \Gamma(\bar{\nu}_1/2 + k)} \right. \\ &\times \left. L_k^{(\bar{\nu}_1/2-1)}\left(\frac{x - \bar{\delta}_1}{2\bar{\theta}_1}\right) \right] \end{aligned} \quad (191)$$

展開係数は、

$$B_k = \frac{\bar{\theta}_1^k}{(-1)^k} E[L_k^{(\bar{\nu}_1/2-1)}\left(\frac{x - \bar{\delta}_1}{\bar{\theta}_1}\right)] \quad (192)$$

となる。4 次以上のモーメントが必要である場合には (191) 式を使用すればよい。次に、 $-Z_2$  の pdf も同様に

$$p_{Z_2}(x) \simeq p_\gamma(x, \bar{\delta}_2, 2\bar{\theta}_2; \bar{\nu}_2/2) \quad (193)$$

と近似できる。

この結果は、全 2 次応答過程  $X(t)$  が、3 パラメータを有するガンマ分布に従う 2 つの独立な確率変数の差で近似できることを意味している。したがって、畳み込み積分から全 2 次応答過程の近似 pdf は次式で与えられる。

$$p_X(x) = \begin{cases} f(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2; \bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2) \int_0^\infty (z + x - \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2)^{\bar{\nu}_1/2-1} \\ z^{\bar{\nu}_2/2-1} e^{-az} dz \exp\left(-\frac{x - \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2}{2\bar{\theta}_1}\right) \\ \text{for } x \geq \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2 \\ f(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2; \bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2) \int_0^\infty (z - x + \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2)^{\bar{\nu}_2/2-1} \\ z^{\bar{\nu}_1/2-1} e^{-az} dz \exp\left(\frac{x - \bar{\delta}_1 + \bar{\delta}_2}{2\bar{\theta}_2}\right) \\ \text{for } x < \bar{\delta}_1 - \bar{\delta}_2 \end{cases}$$

ただし、

$$f(\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2; \bar{\delta}_1, \bar{\delta}_2) = \frac{1}{(2\bar{\theta}_1)^{\bar{\nu}_1/2} (2\bar{\theta}_2)^{\bar{\nu}_2/2} \Gamma(\bar{\nu}_1/2) \Gamma(\bar{\nu}_2/2)}$$

$$a = \frac{1}{2\bar{\theta}_1} + \frac{1}{2\bar{\theta}_2}$$

である。上式の被積分関数は多価関数であるが、Cauchy の主値積分を利用すれば数値的に処理することができる。

ガウス分布への収束について もし、固有値 $\lambda_j$ が $c_j$ に比べて非常に小さい場合、すなわち2次の応答よりも1次(線形)応答が大きい場合には明らかに応答過程 $X(t)$ は正規過程に近づく。この事実を本近似法でも説明できるかどうか以下に調べる。

(180)式から、標準偏差 $\sigma_X$ と平均 $\bar{X}$ を固定すると

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_1 &= \frac{\sigma_X}{\sqrt{2\hat{\nu}_1}} \\ \hat{\delta}_1 &= \bar{X} - \sqrt{\frac{\hat{\nu}_1}{2}}\sigma_X \end{aligned} \quad (194)$$

の関係が得られる。すなわち、ガンマ pdf のパラメータは互いに独立ではなく、一つだけが独立である。そこで、 $\hat{\nu}_1$ (ガンマ pdf の自由度)を独立変数とし、確率変数 $x$ を $z$ で置き換え、

$$z = \frac{x - \bar{X}}{\sigma_X}$$

$n = \hat{\nu}_1/2$ と置けば、ガンマ pdf は次のように書き直される。

$$p_\gamma(z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{n}}{\Gamma(n)}(\sqrt{n}z + n)^{n-1} \\ \times \exp(-\sqrt{n}z - n) & \text{for } z > -\sqrt{n} \\ 0 & \text{for } z \leq -\sqrt{n} \end{cases}$$

$\lambda_j \ll 1$ かつ $n \rightarrow \infty$ のときの上式の漸近挙動を調べる。

Stirling の公式

$$\Gamma(z+1) \simeq \sqrt{2\pi}z^{z+1/2}e^{-z} \quad \text{as } z \rightarrow \infty$$

に注意し、 $\log(1+u)$ の $|u| < 1$ に対する Taylor 展開

$$\log(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$$

を使用すると $\log p_\gamma$ は次のように表される。

$$\begin{aligned} \log p_\gamma &= -\log \sqrt{2\pi} + \left\{ -\frac{1}{4n^2} + \frac{1}{3n^2} + \dots \right\} - \frac{z^2}{2} \\ &+ \frac{z^3}{3\sqrt{n}} - \left( \frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{z^2}{2n} + \dots \right) + o(1) \end{aligned} \quad (195)$$

もし、 $n \rightarrow \infty$ であれば

$$\log p_\gamma \sim -\log \sqrt{2\pi} - \frac{z^2}{2} + O\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)$$

すなわち、

$$p_\gamma \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (196)$$

を得る。これは、 $n$ が十分大きいときは、 $p_\gamma$ は正規分布に漸近することを意味している。

しかし、tail での正規分布への漸近の速さは緩やかで、 $|z| < \sqrt{n}$ の範囲に対してのみに適用されることに注意が必要である。

## 4.2 極値分布

確率過程の極値の確率分布の予測は通常、応答過程が狭帯域ガウス過程であるという仮定の基にレイリー分布を使用して行われる。しかしながら、係留浮体システムの場合には応答過程がガウス過程であるという前提条件を満足しないためにレイリー分布を使用することはできない。

非線形定常応答過程の極値分布を厳密に求めるためには、応答の変位、速度及び加速度の結合確率密度関数を必要とする。つまり、応答 $X(t)$ が、ある範囲 $[y, y + \delta y]$ にある場合の単位時間当たりの極大値、極小値の数の期待値は、それぞれ次式により求められる。

$$E[N^+(y)] = -\delta y \int_{-\infty}^0 \ddot{x} p_{x\dot{x}\ddot{x}}(y, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} \quad (197)$$

$$E[N^-(y)] = \delta y \int_0^{\infty} \ddot{x} p_{x\dot{x}\ddot{x}}(y, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} \quad (198)$$

それゆえ、極大値及び極小値が $(y, y + \delta y)$ にある確率は次式で与えられる。

$$p_p^+(y)\delta y = \frac{E[N^+(y)]}{E[N^+(-\infty)]} \quad (199)$$

$$p_p^-(y)\delta y = \frac{E[N^-(y)]}{E[N^-(\infty)]} \quad (200)$$

ただし、

$$\begin{aligned} E[N^+(-\infty)] &= -\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \ddot{x} p_{x\dot{x}\ddot{x}}(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} dx \\ &= E[N^-(\infty)] \end{aligned} \quad (201)$$

ここで、 $p_p^+, p_p^-$ はそれぞれ極大値及び極小値の確率密度関数である。応答 $x(t)$ が狭帯域スペクトルを持っている場合には、mean レベルアップクロスの個数と極大値の個数は等しくなるので $p_{x\dot{x}\ddot{x}}$ の代わりに、応答変位と応答速度の結合確率密度関数 $p_{x\dot{x}}$ から次式によりあるレベル $y$ を超える極大値の数の単位時間当たりの期待値を求めることができる。

$$E[N_+(y)] = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}| p_{x\dot{x}}(y, \dot{x}) d\dot{x} \quad (202)$$

これより極大値の確率分布関数は

$$P_p(y) = 1 - \frac{E[N_+(y)]}{E[N_+(\bar{x})]} \quad (203)$$

で与えられ、極大値の確率密度関数は

$$p_p(y) = -\frac{d}{dy} \left\{ \frac{\int_0^{\infty} p_{X\dot{X}}(y + \bar{X}, \dot{x}) \dot{x} d\dot{x}}{\int_0^{\infty} p_{X\dot{X}}(\bar{X}, \dot{x}) \dot{x} d\dot{x}} \right\} \quad (204)$$

で与えられる。

一般に、交差するレベルを大きく取れば、たとえ応答過程が広帯域であっても近似的に上式が用いられる。しかしながら、非線形応答過程の結合確率密度関数を求めることは非常に難しい。最近、確率密度が従う運動方程式 (Fokker-Planck 方程式と言われる) から経路積分法を用いて直接計算する方法が Naess-Johnsen [65] によって開発されているが、実用的な方法ではない。

そこで、近似的に応答変位と応答速度は独立であるという条件を課す。この場合、

$$p_{x\dot{x}}(x, \dot{x}) = p_x(x) \cdot p_{\dot{x}}(\dot{x}) \quad (205)$$

であるから極大値の確率密度関数は次式から求められる。

$$p_p(y) = -\frac{d}{dy} \left\{ \frac{p_X(y + \bar{X})}{p_X(\bar{X})} \right\}, \quad y \geq \bar{x} \quad (206)$$

また、確率分布関数は、

$$P_p(y) = 1 - \frac{p_X(y)}{p_X(\bar{x})} \quad (207)$$

となり、瞬時々の応答の確率密度関数のみから与えられる。

### 4.3 応答の異常値統計量

応答の異常値を特徴づけるものとして以下の統計量がある。

**1/n 最大期待値の平均値** これは応答の極大値の母集団分布から任意に  $M$  個取り、その極大値の内大きい方から  $M/n$  個取り出して平均を取ったもので次式から求められる。

$$\bar{x}_{\frac{1}{n}} = \int_{\bar{x}_{\frac{1}{n}}}^{\infty} x p_p(x) dx \quad (208)$$

$$1/n = 1 - P_p(\bar{x}_{\frac{1}{n}}) \quad (209)$$

極値の分布をレイリー分布に仮定したときは

$$\bar{x}_{\frac{1}{n}} = n\sqrt{m_0} \left[ \frac{1}{n} \sqrt{\ln n} + \sqrt{\pi} \left\{ \frac{1}{2} - Er(\sqrt{2 \ln n}) \right\} \right] \quad (210)$$

$$Er(x) = \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt$$

と近似できる。ただし、 $Er$  はガウスの誤差関数、 $m_0$  は次式で与えられるスペクトルモーメントである。

$$m_n = \int_0^{\infty} \omega^n S_x(\omega) d\omega \quad (211)$$

ここで、 $S_x$  は応答のスペクトル密度関数である。

**$N$  波中最大値の期待値** 極大値  $N$  個のサンプルを母集団分布より抽出し、その中から最大の極大値を一つ選ぶ。この試行を繰り返す、その平均を  $N$  波中の最大値の期待値と呼ぶ。これは、試行が独立であれば、次式より与えられる。

$$E[x_m(N)] = \int_x^{\infty} x_m p_m p dx_m \quad (212)$$

$$p_m p = N P_p(x_m)^{N-1} p_p(x_m)$$

**時間幅  $T$  内の最大値の期待値** これは、前の極大値の数の代わりに時間幅  $T$  を使用したもので次式で定義される。

$$E[\hat{x}(T)] = E[\max\{x(t); t_0 \leq t \leq t_0 + T\}] \quad (213)$$

ただし、極値の数と  $T$  は次のように近似できる。

$$N = \frac{1}{4\pi} \left( \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} + \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \right) T \quad (214)$$

極値分布にレイリー分布を仮定すると次の良く知られた *Longuet-Higgins* の漸近解がある。

$$E[\hat{x}(T)] \sim \sqrt{m_0} \left( \sqrt{q_1} + \frac{\gamma}{\sqrt{q_1}} \right), \quad (T \gg 1) \quad (215)$$

$$q_1 = 2 \ln \left( \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} T \right) \quad (216)$$

ここで、 $\gamma$  は Euler の定数である。

**動的信頼性からみた最大極大値の期待値** 動的荷重に対する構造物の安全性、すなわち動的信頼性は次に示すように初期超過確率を理論的に算出することに集約できる。初期条件  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  で確率過程  $x(t)$  が初めてある振幅レベル  $\lambda_1$  または  $-\lambda_2$  に達するまでの時間  $T_f$  は確率変数でその確率分布関数を  $P_{T_f}(t)$  とすれば、動的信頼性は

$$P_0(\lambda_1, -\lambda_2) = \text{Prob}\{\max x(t) \leq \lambda_1 \cap \min x(t) \geq -\lambda_2; 0 \leq t \leq T\} = 1 - P_{T_f} \quad (217)$$

で定義される。つまり、一定時間  $[0, T]$  において  $x(t)$  の最大値が  $\lambda_1$  よりも小さく、同時に最小値が  $-\lambda_2$  よりも大きくなる確率で評価する。そこで、 $x(t)$  の限界値  $\lambda$  ( $\lambda_1$  または  $-\lambda_2$ ) が十分大きいと仮定すると、 $x(t)$  が  $\lambda$  と交差する機会はめったに起こらないので、それらを独立に発生する事象と考え、ポアソン分布則が適用できるとする。このとき、定常過程を考えれば、片側（極大値方向）限界  $\lambda$  に対し、次式が得られる。

$$P_0 = \exp(-\nu_{\lambda}^+ T) \quad (218)$$

ただし、 $\nu_{\lambda}^+$  は単位時間当たりの正勾配でレベル  $\lambda$  を超える交差回数の期待値である。

これは、見かたをかえると  $x(t)$  の極大値のある時間内  $[t_0, t_0 + T]$  の確率に等しくなる。従って、この確率分布関数から期待値を求めることができる。つまり、ある時刻  $[t_0, t_0 + T]$  内の最大極大値  $\hat{Z}(T)$  の期待値は

$$E[\hat{Z}(T)] = \int_0^{\infty} \lambda dP_0(\lambda) \quad (219)$$

で与えられる。もし、 $N$  を  $N = \nu_{\lambda}^+ T$  で置き換えると

$$\begin{aligned} \log[(1 - P_p(z))^N] &= N \log\left(1 - \frac{\nu_{\lambda}^+ T}{N}\right) \\ &= -\nu_{\lambda}^+ T + O\left(\frac{\nu_{\lambda}^+ T}{N}\right) \end{aligned} \quad (220)$$

となる。これは、 $N \rightarrow \infty$  の時、 $(1 - P_p)^N$  は  $\exp(-\nu_{\lambda}^+ T)$  に近づくことを意味している。すなわち、 $N$  が十分大きいときは (212) と (219) は等価になる。

#### 補足：風、波による長周期運動の非線形予測理論

- まず、波による長周期運動の確率密度関数  $p_x$  は、ガンマ分布近似法で求められる。
- 風による長周期運動は変動風による低周波数成分に起因するものであり、変動風過程は準正規過程であることが既に判明しているため、変動風は平均  $m$ 、分散  $\sigma$  の正規過程と考える。すなわち、

$$p_w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (221)$$

この時風による長周期運動の平均と分散は次式から推定できる。

$$\bar{x} = S_1 \Delta p_1 H_L(0)$$

$$\sigma_x^2 = \int |H_L(\omega)|^2 S_1^2 S_{\Delta p_1}(\omega) d\omega$$

ただし、 $\Delta p_1$  は、surge 方向の変動差圧であり、 $S_{\Delta p_1}(\omega)$  はそのスペクトルである。これらは、圧力係数  $C_p = 1.3$  を用いて変動風から推定可能である。

- 波による長周期運動と風による長周期運動とは独立と考えられるので、風及び波による長周期運動の瞬時値の確率密度関数は、次の畳み込み積分によって得られる。

$$p_x(x) = \int p_s(z-x)p_w(z)dz \quad (222)$$

- 最大極大値の期待値の予測に関しては、運動応答とその速度応答が独立であるという工学的にシビアな条件を課すと最終的に  $N$  波中での最大極大値の期待値は (212) から求められる。

## 5 実海域データによる検討

### 5.1 長周期運動の統計解析

模型試験あるいは理論研究によると、長周期運動の分布はガウス分布からはずれ、またその運動の最大期待値は線形理論では予測できないと言われている。それが真実かどうかを実測結果と比較することにより調べる。さらに変動風によっても長周期運動が生じるが、風の影響についても言及する。

解析の対象とした実海域のデータは、平均風向及び入射波の主方向がほぼ船首方向と仮定できる9時間の連続データである。有義波高は約3m、有義波周期は約7secであった。Fig. 72は、surge及びswayの長周期運動(波周期成分及び風の影響も含む)の瞬時値分布(1時間)の例を示す。図から判るように surgeの分布形状は左右非対称であり、破線で示すガウス分布から外れており、分布の裾が drift 方向に広がる傾向がある。図中の実線は、風、波による長周期運動の非線形予測理論に基づいて求められた瞬時値分布である。この非線形統計理論による推定結果は、実測結果と良く一致している。これに対し swayは、surgeほど明瞭ではないが、やはりガウス分布から若干ずれる傾向がある。分布の非対称の原因は、物理的には次のように考えられる。

浮体からみて無限遠方に浮体を取り囲む検査面をとり、検査面に囲まれる領域で運動量保存則を適用すると、波漂流力は反射波の波高の自乗に比例することが示される。長周期運動はこの漂流力の時間変化によって生じる。エネルギー保存則から反射波のエネルギーと透過波のエネルギーの和は入射波のエネルギーに等しい。入射波をガウス過程とすると、入射波の瞬時々のエネルギーはレイリー過程の自乗、つまりガンマ過程で表される。同様に透過波のエネルギー過程もガンマ過程で表されるが、入射波のエネルギー過程を表すガンマ過程と比べると、大きさ及び周波数特性が異なるために、自由度及び母数等が異なる。結局、波漂流力過程は2つのガンマ過程の差で表され、反射波が生じる際には、入射波のエネルギーに比べて透過波のエネルギーが小さいために、長周期運動の瞬時値分布は、波に対して drift 方向に裾が広い非対称分布になる。

Fig. 73は、surgeの drift 方向の極値分布である。極値は、各ピーク値ではなく、狭帯域の仮定つまり、ミーンアップクロス間の最大ピークを取っている。この結果からも surgeの長周期運動の極値分布が、線形過程から得られるレイリー分布からずれ、非線形予測結果と良く一致することがわかる。

Fig. 74は、長周期運動を含む surge及びswayの  $N$  波中最大極大値の期待値を示す。図の破線は、Longuet-Higgins

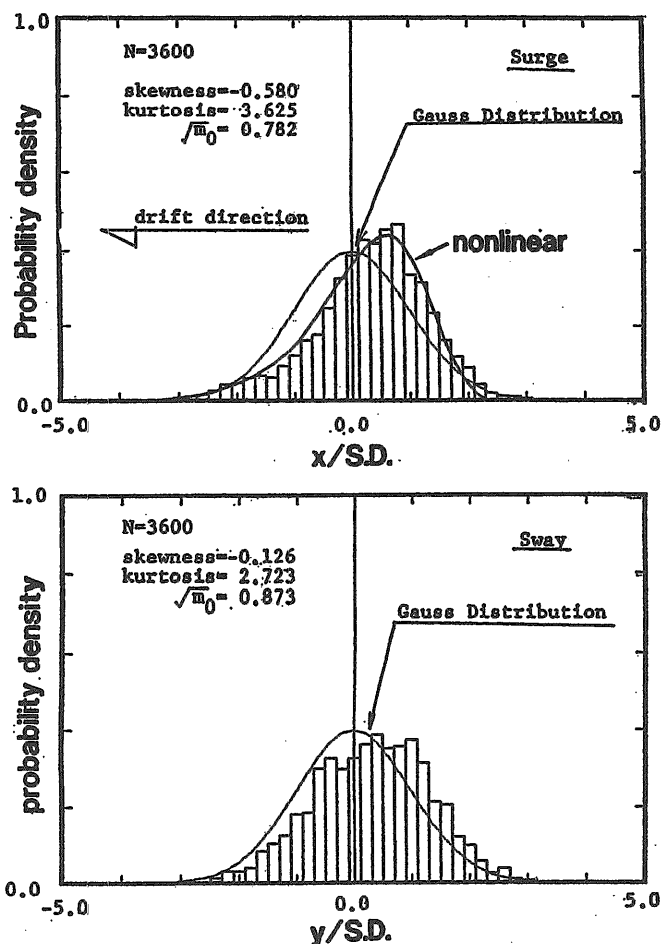


Fig. 72: Instantaneous probability density functions of total second order motions

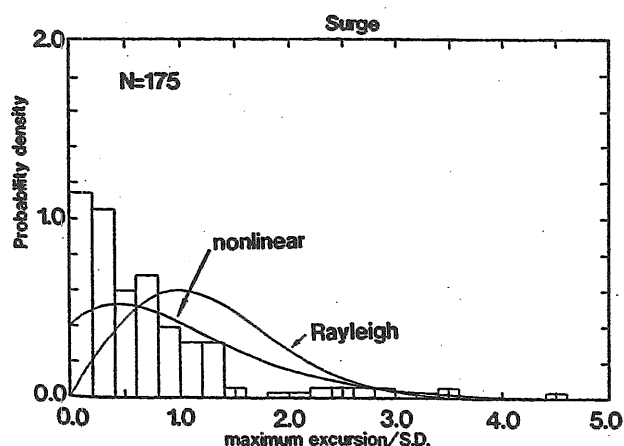


Fig. 73: Peak probability density function of total second order motion

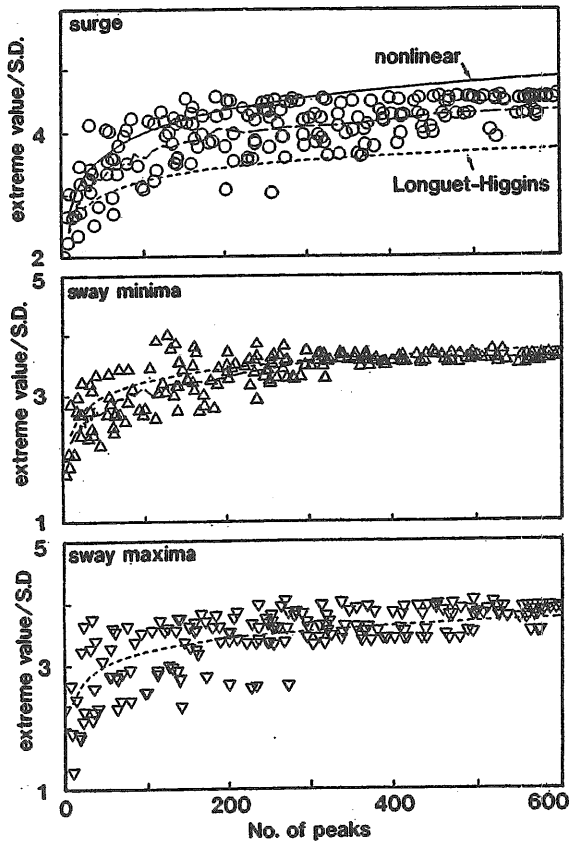


Fig. 74: Extreme statistics of total second order motion

の予測結果 [1]、実線は非線形予測結果を示している。この結果から、surgeの最大極大値の期待値は Longuet-Higginsの結果より 1.3 倍くらい大きくなっていることがわかる。これに対し、非線形予測結果は、観測値のほぼ上限を与えている。このように surgeの最大極大値の期待値は、線形理論では予測できず非線形理論を用いなければならない。

一方 sway について、観測値は、大体 Longuet-Higgins の予測値まわりで変動しており、左舷方向の最大極大値の期待値は、その予測値を若干上回っている。この原因としては、次が考えられる。

前述したように sway の長周期運動は、風が支配的であり、風速変動の過程は、準正規過程であることがすでに判明している。従って、swayの最大極大値の期待値は、狭帯域仮定から導かれた Longuet-Higgins の予測値とほぼ良く一致する。しかし、長周期運動に対する波の寄与があると surge の時と同様に非線形影響が現れ、線形予測値である Longuet-Higgins の結果を上回った。左舷側の sway の最大極大値の期待値の傾向はこのように解釈すべきである。

このことは、波による長周期運動に風による長周期運動が混入すると、長周期運動のトータルな分散は増加するが、最大極大値の期待値と標準偏差との比は、線形理論である Longuet-Higgins の結果に近づくことになる。これを確認するため、風及び波による非線形予測理論で調べた。

このようにして求めた結果が Fig. 75 である。確かに、風によって分布の非対称性が緩和され、最大極大値の期待値も波だけによる非線形予測結果より低下し Longuet-Higgins の結果に近づくことが判る。また、本論の非線形予測理論

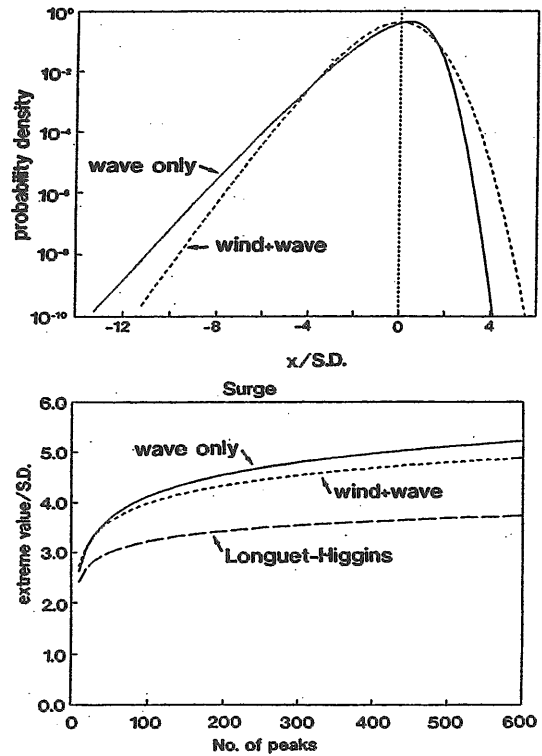


Fig. 75: Effect of wind to instantaneous pdf and extreme statistics

結果は、シミュレーション結果の上限値を与えていることがわかる。これは、非線形予測理論が工学的にシビアな条件として応答過程とその速度過程が独立であるという仮定から求められていることと波の方向分散性を考慮していないためであり、上限値を与えていることは理にかなっていると思われる。従って、波による長周期運動応答が混入しているトータル応答の最大極大値を推定する場合、本論で示した非線形予測理論を用いる方が安全である。

## 5.2 係留変動張力の統計解析

変動張力は、Fig 69に見られるように強い非対称性をもち、また波高に対しても強い非線形性を有する現象である。Fig. 76は冬季のある 1 ヶ月間の定時計測から得られた有義波高と張力の有義値 (1/3 最大期待値) の関係をプロットしたものであるが、この図からも非線形性が明瞭である。このような現象の統計的性質を調べるために Fig. 70 に示した張力の時系列及びそれらの長周期成分、短周期成分について、瞬時値分布、極値分布、振幅分布等の統計解析を行った。また、係留点での水平方向変位  $h(t)$  及び鉛直方向変位  $v(t)$  に対しても同様の解析を行った。そのうち、瞬時値、極大値及びゼロアップクロス振幅分布を Fig. 77 に示す。図の上の段から  $h(t)$ 、張力の実測値、動的計算、長周期成分を除いた動的計算、静的計算、長周期成分を除いた静的計算である。またそれぞれの統計量を Table 10 に示す。これらより次のことがいえる。

- 1) 計測された張力は正の標本歪度と大きな標本尖度を有している。
- 2) 動的計算の結果はどの分布も実測値と良く一致している。

Table 10: Statistical values of measured and calculated tensions

	MEASURED	DYNA. CAL.	STAT. CAL.	DYNA. CAL. no L. F. M.	STAT. CAL. no L. F. M.	HORI. DIS.
$\sqrt{m_0}$	0.815 L 0.289 H 0.763	0.816 0.290 0.764	0.552 0.324 0.447	0.699	0.423	1.07 0.789 0.720
$H_{1/3}$	3.53 L 0.989 H 3.16	3.56 1.01 3.28	1.88 1.12 1.77	3.04	1.63	3.28 2.80 2.78
$H_{max}$	10.8 L 2.23 H 10.6	10.0 1.86 10.1	4.38 2.18 4.07	8.38	3.36	6.33 4.10 5.55
$a_{max}$	8.10 L 1.95 H 6.51	6.61 1.45 5.81	3.89 1.66 2.56	5.61	2.28	5.04 3.17 3.14
$\frac{a_{max}}{\sqrt{m_0}}$	9.94 L 6.77 H 8.53	8.09 5.00 7.61	7.04 5.11 5.73	8.03	5.38	4.71 4.01 4.37
NO. of maxima	1506 L 197 H 1571	1480 196 1491	1133 197 1139	1500	1141	1246 199 1255
SKREW	0.86 L 0.97 H -0.16	0.90 0.34 0.14	1.05 0.75 0.30	0.18	0.41	0.20 0.03 -0.04
PEAK	9.59 L 5.89 H 8.89	8.42 3.91 8.35	5.14 4.65 3.47	7.44	3.01	3.13 3.18 2.97

\* L: low frequency component H: high frequency component  
UNIT is TON for tensions, METER for horizontal displacement

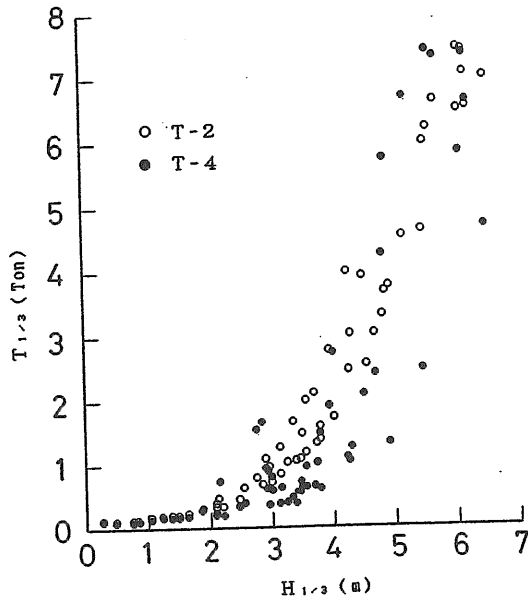


Fig. 76: Significant value of tension vs. significant wave height

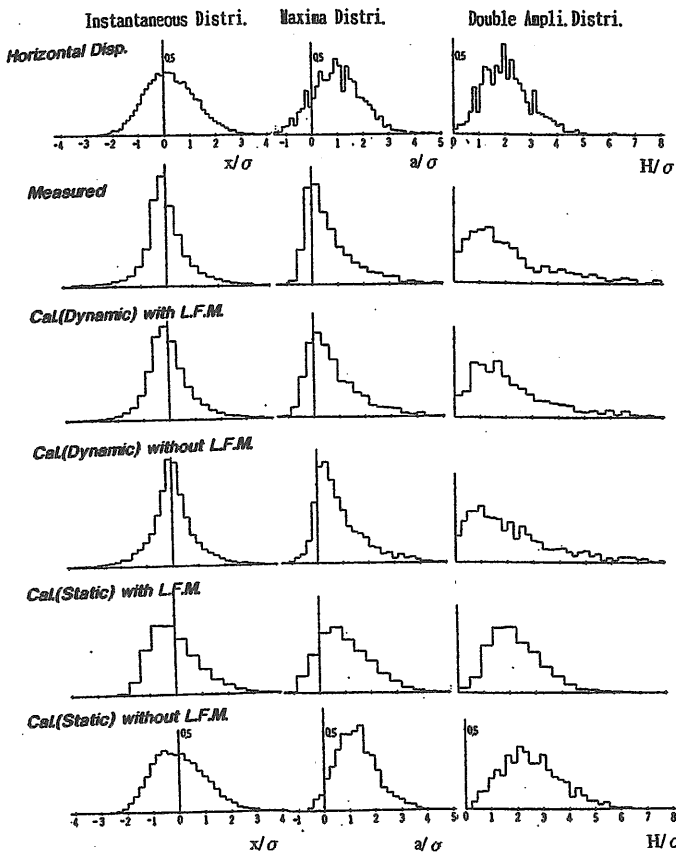


Fig. 77: Statistical distributions of  $h(t)$  and tensions

- 3) しかし、静的計算の結果は実測値に比べ標準偏差が小さく、標本歪度は大きく標本尖度は逆に小さい。
- 4) 長周期運動を除いた計算では標本歪度が極端に小さくなるとともに標本尖度が若干小さくなる。

このような現象において、 $N$ 波中の最大極大値の期待値及び振幅分布を予測することを考える。そのためにはまず、瞬時値分布をある統計モデルに当てはめてみる。Fig. 78の白丸印が実測された張力の瞬時値分布で、そのときの標本歪度と標本尖度を用い *Gram-Charlier* 展開、*Hermite* moment モデルを当てはめてみた。*Hermite* moment モデルは、確率密度関数ではなく確率過程そのものを次のように変数変換するものである。

$$\eta = \kappa \sigma_{\eta} \sum_{i=0}^3 H_i(b) \quad (223)$$

ここで、 $H_n(x)$  は *Hermite* 多項式、 $\eta$  は対象としている確率過程、 $\sigma_{\eta}$  はその標準偏差、 $b(t)$  は理想確率変数であり、平均0、分散1の標準正規過程である。

もし、上式を3項で打ち切ると、係数はそれぞれ以下のように求められる。

$$c_3 = (\sqrt{1 + 1.5(\beta_2 - 3)} - 1)/18 \quad (224)$$

$$c_2 = \sqrt{\beta_1}/6(1 + 6c_3) \quad (225)$$

$$\kappa = (1 + 2c_2^2 + 6c_3^2)^{-1/2} \quad (226)$$

$$c_1 = 1.0 \quad (227)$$

$$c_0 = 0 \quad (228)$$

ただし、 $\sqrt{\beta_1}$  及び  $\beta_2$  はそれぞれ  $\eta$  の標本歪度及び標本尖度である。このとき、 $\eta$  の確率密度関数は、確率変数変換公式から

$$p(\eta) = \exp(-b^2/2) [\sqrt{2\pi} \kappa \sigma_{\eta} \{1 + 2c_2 b + 3c_3 (b^2 - 1)\}]^{-1} \quad (229)$$

となる。実際に  $p(\eta)$  を求める場合は、 $b$  に任意の値を与え、(229) 式より確率密度を求める。それに対応する  $\eta$  の値

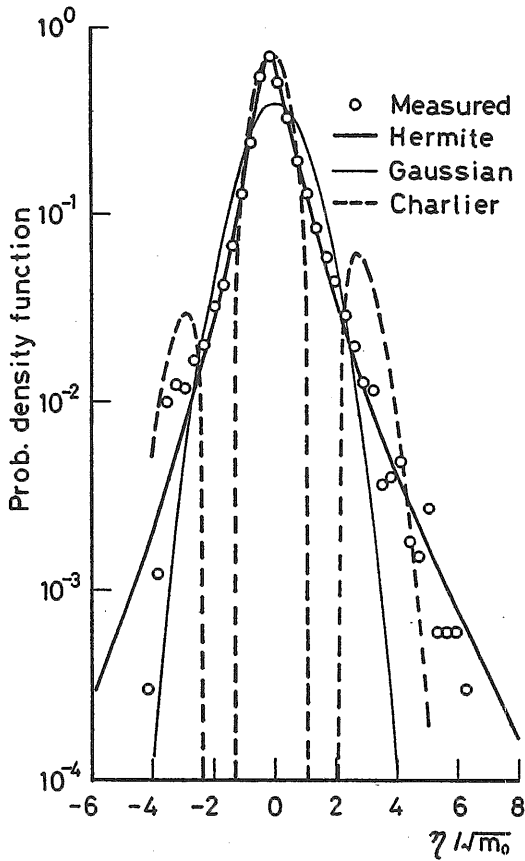


Fig. 78: Probability densities of tension

は (223) 式から求める。このようにして求めた  $\eta$  の確率密度関数が Fig. 78 の太実線である。Gram-Charlier 展開によるそれが破線、ガウス密度関数が細実線である。図より、Hermite moment モデルによる分布は実測値を良く表している。また、Gram-Charlier 展開による結果は、負の確率密度が生じておりモデルとしては適切ではない。極大値、極小値分布についても同様に、理想確率過程  $b$  がバンド幅  $\epsilon$  を持つとき  $b$  の極値  $\zeta$  の確率分布は Cartwright-Longuet-Higgins により次式から求められる。

$$p(\zeta)d\zeta = (2\pi)^{-1/2} \epsilon \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\epsilon^2}\right) + 1/2(1-\epsilon^2)^{1/2} \times \zeta \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left[\frac{\zeta(1-\epsilon^2)^{1/2}}{\sqrt{2}\epsilon}\right]\right] \quad (230)$$

ここで、 $\zeta = \frac{a}{\sqrt{m_0}}$  である。なお、 $\eta$  と  $b$  のバンド幅パラメータ  $\epsilon$  は等しいと仮定する。

このとき瞬時値分布と同様にして、確率変数の変換から求めることができる。

解析の対象とした実海域データは、1989年11月19日の3時間の連続データである。Fig. 79の上側が極小値分布、下側が極大値分布であるが、両者とも実測の分布と良く一致しており非対称性が良く表現されている。次に  $N$  波中の最大極大値の期待値を予測することを考える。Hermite moment モデルに従う場合、正規確率過程から求められる  $N$  波中の最大極大値の期待値  $b_N$  を (223) 式に代入することにより陽の形で直ちに求められる。一方3時間の時系列を10,20,60,120及び180分に分割し、 $N$  波中の最大極大値の平均と標準偏差との比を求めたのが Fig. 80である。図中には動的計算、長周期運動を除いた動的計算、静的計算の

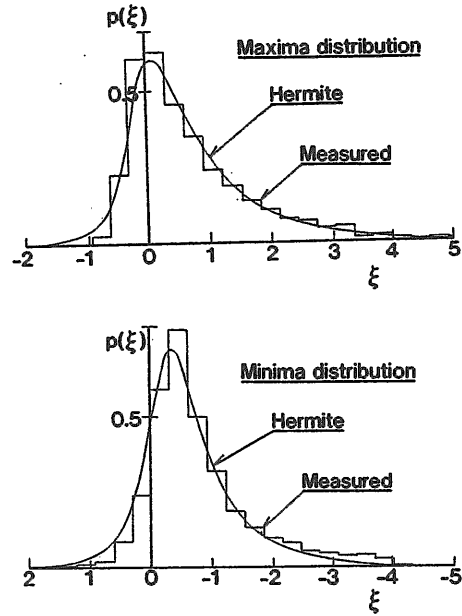


Fig. 79: Minima and maxima distributions of tension

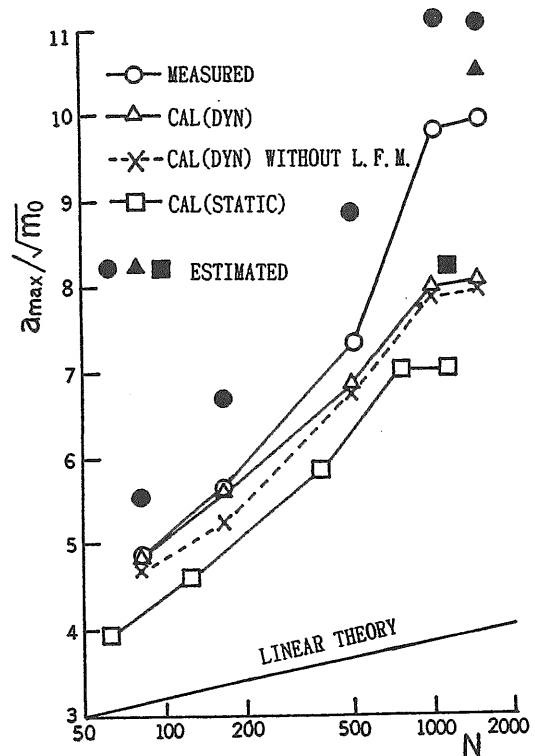


Fig. 80: Extreme value in  $N$  observations of tension



結果も示してある。この図より異常値に及ぼす長周期運動の影響及び保留ラインの動的影響を見ることができる。そして図中の●▲■が *Hermite moment* モデルから予測された値であるが、これはほぼ統計値の上限を与えていることが判る。

以上により標本歪度や標本尖度の大きい現象についての確率分布が *Hermite moment* モデルで良く表されることが判った。*Hermite moment* モデルを適用するには張力の母集団の歪度及び尖度を理論的に求める必要がある。これは今後の課題である。

## 6 成果のまとめと今後の課題

### 6.1 変動風と風荷重

- 海上における平均流方向の変動スペクトル表示式を提案した。この表示式には無次元スペクトルピーク周波数と標準偏差の2つのパラメータが存在するが、これらのパラメータは、海面と大気との摩擦係数によって決められる。
- 海面と大気との摩擦係数は海面の摩擦速度と一対一に対応する。これは、強風時には平均風速の増加とともに増加する。この摩擦係数の平均風速に対する増加率は、北海で *Geenaert* らが計測した結果とほぼ一致する。この結果を利用すると新提案スペクトル内に含まれる無次元スペクトルピーク周波数は推定可能である。
- 実測された変動風の標準偏差と海面での摩擦速度は強風時には比例関係にある。これは混合乱流境界層の *Monin-Obukhov* の相似理論を支持するものである。比例定数はほぼ 3.45 であり、摩擦速度すなわち摩擦係数から標準偏差は推定可能である。
- ある観測データにたいし、新提案スペクトル及び世界の観測データの平均線から求めた *Ochi-Shin* スペクトル及び既存の提案スペクトルの比較を行った結果、観測スペクトルは、新提案スペクトル及び *Ochi-Shin* のスペクトルと良く一致した。
- 変動風の統計解析から、変動風は広帯域準正規過程で近似できることが判明し、*Longuet-Higgins* が提案した一般の極値分布形から  $1/n$  最大期待値等の極値統計量が推定できる。
- 変動風荷重は、変動風の乱流特性を考慮して主流方向ばかりでなく横方向の風荷重も考慮すべきである。変動風スペクトルとしては、一般に良く用いられる *Davenport* あるいは日野のスペクトルではなく、今回提案したスペクトルあるいは *Ochi-Shin* のスペクトルを用いるべきである。

### 6.2 方向波スペクトルと方向分布関数

- 波の観測データから、鳥羽らが提唱する「風波の3/2乗則」を支持する結果が得られた。この則に整合する波スペクトルは高周波数側で周波数の-4乗に比例する形状を持つことが理論的に示されるが、実測スペクトルはこれを支持した。造船の分野では、*JONSWAP* スペクトルが波スペクトルとして良く用いられるが、

これを観測データを基に *JONSWAP* スペクトルを修正したスペクトル形を新たに提案した。

- 波スペクトルのピーク周波数付近の形状は、平均的に修正 *JONSWAP* スペクトルの  $\gamma = 2$  に相当している。水深波長比の減少、すなわち浅海波になるにつれて非常に急峻な形状を呈するようになり、 $\gamma = 6$  に相当するケースも現れている。
- 有義波高が3mを超えるような場合は、スペクトルピーク周波数付近の方向分布関数の形状は比較的滑らかな単一のピークを有しており光易型方向分布関数でほぼ近似できる。方向集中パラメータ  $s$  は、スペクトルピーク周波数付近で最大となり周波数がそれから離れるにしたがって減少する傾向にある。また、今回のデータの周波数に対する  $s$  の変化の割合は泉宮の式に近かった。

### 6.3 粘性流体力及び線形流体力

- surge, sway* に対する粘性抗力係数  $C_d$  にはクーリガンカーベンター数 ( $K_c$  数) に反比例する項があり、実機ではこの項が模型よりも大きい。しかし、高  $K_c$  数域では実機と模型では良く一致する。高  $K_c$  数域で両者が一致する理由は、ボセイドンが円筒形状を有しているため剥離による影響が少なかったためと考えられる。
- roll* 及び *pitch* の等価線形化された減衰係数は、模型の値の方が実機の値よりも約2倍大きい。これはレイノルズ数影響を表しているものと考えられる。
- 線形流体力は、ポテンシャル理論に基づく3次元特異点分布法により推定可能である。

### 6.4 定常外力による定常変位と定常傾斜

- 定常風荷重は、上部構造物の圧力係数  $C_p$  を 1.3、コラム部の圧力係数 (船級協会規則)  $C_d = 0.65$  からほぼ推定可能である。
- 潮流力は、生物付着影響を考慮し、 $C_d = 0.8$  として推定可能である。ただし、ボセイドン号のように喫水が5mと浅い場合には、吹送流による流れは考慮しなくても良い。
- 定常波漂流力は、ポテンシャル理論に基づく漂流力と粘性抗力に基づく粘性漂流力を考慮し、単一方向波として推定可能である。また、水槽試験によっても推定可能である。
- 浮体の定常外力に対する定常変位は、保留復原力をカタナリー理論を用いて推定すれば、予測可能である。
- 風及び流れによる定常傾斜量は、模型実験によってほぼ推定可能であるが、理論的に推定するためには揚力の影響及び傾斜したことによる力及びモーメントレバーの変化等について今後検討する必要がある。

### 6.5 波力と動揺応答

- 変動漂流力を推定するためには、定常漂流力推定と同様に、ポテンシャル理論に基づく漂流力だけでなく粘性に起因する粘性漂流力を考慮しなければならない。

- wave drift damping 等の影響は、波高及び波スペクトルのピーク周波数に依存し、ピーク周波数が高周波数側に移動し、長周期運動が波周期運動に比べて卓越すると、その影響が顕著に現れる。模型実験によると、この影響が現れるのは平均波周期が 6sec 以下になったときである。しかし、実海域実験では平均周期 7sec 前後の時のデータしかないためこの影響の確認はできていない。
- 線形波力及び線形応答に関しては、ポテンシャル理論から求めた線形波力・流体力及び粘性抗力を考慮し、単一方向波と仮定すればほぼ推定可能である。しかしながら、推定精度を向上させるためには方向波の影響を考慮すべきである。長周期動揺についても、2次の波力である変動漂流力と粘性に起因する粘性漂流力及び変動風による長周期変動力を考慮し、単一方向波と仮定すれば安全サイドで推定可能である。ただしこの場合、変動風による長周期変動外力を主流方向及び横方向に同時に考慮しなければならない。

## 6.6 係留力

係留ライン働く変動張力には、短周期成分と長周期成分が含まれる。長周期成分は、浮体の長周期運動とカタナリ理論から推定可能である。短周期成分を推定するためには係留ライン自身が動揺することによって生じるラインに働く動的張力ばかりでなく長周期運動によってラインが変形することによる動的張力の変化を考慮しなければならない。張力の短周期成分の推定に対し、係留ラインの動的張力及び長周期運動の影響を考慮した簡易推算法を新たに提案し、その有効性を示した。また、係留ラインの動的張力が浮体の動揺に及ぼす影響は小さく、また係留ライン一本一本が変位に対し非線形な張力特性を有していても、浮体に及ぼす係留ラインによるトータル復原力の観点から調べると、これは変位に対しほぼ線形近似できることが実海域自由動揺試験からわかった。

## 6.7 統計予測

- 風及び波による長周期運動の瞬時値及び極値分布の予測に関し、風と波は独立過程であるとの仮定の下に、あらたに非線形予測理論を開発した。
- surge の瞬時値分布は、明らかにガウス分布ではなく分布の裾が波による drift 方向に広がった非対称分布である。実測分布と今回提案した非線形予測法により推定した分布を比較したところ両者は良く一致した。また、たとえ正面からの風であっても横方向の変動風荷重によって長周期 sway が生じるが、この瞬時値分布は、ほぼ正規分布で近似でき、線形ノイズ理論から予測可能である。
- 波及び風による長周期運動の  $N$  波中の最大極大値の期待値の予測に関し、通常良く用いられる *Longuet-Higgins* による線形予測結果は過小評価を与える。一方、今回開発した非線形予測理論では僅かに過大評価を与えるが、安全サイドで予測可能である。しかしながら、精度向上をはかるためには、方向波の影響を考慮すべきである。
- 長周期運動の瞬時値分布に関し、風は分布の非対称性を緩和する働きがある。そのため、最大極大値の期待値もこの効果により波だけの予測結果より低下する。
- 係留ラインに働く変動張力の瞬時値分布は *Hermite moment* モデルで良く表現される。このモデルと実測データから得られた標本標準偏差、標本歪度、標本尖度を使用して、極値分布・極値統計量を推定した結果は実測結果と良く一致した。今後は、これらの標本統計値の予測法が課題である。

## 6.8 今後の課題

推定精度向上をはかるために、今後の課題として、

- 複合定常外力中での定常傾斜の予測法
- 方向波中での2次の波力の推定法と確率予測法
- 粘性漂流力及び粘性減衰力の理論推定法
- wave drift damping の推定法
- 係留張力のような強非線形応答の確率予測法（もっと一般に非線形複合外力をうける非線形係留浮体システムの確率応答予測法）

の開発が挙げられる。

## 参考文献

- [1] Longuet-Higgins, M.S.: On the statistical distribution of the heights of sea waves. *Journal of Marine Research*, XI, pp.245-266, 1952
- [2] 戸川隼人: 有限要素法による振動解析. サイエンス社, 1975.
- [3] Tamura, T., Tsuboi, K., and Kuwahara, K.: Numerical Simulation of Unsteady Flow Patterns Around a Vibrating Cylinder. *AIAA paper-88-0128*, 1988.
- [4] Rice, S.O.: *Mathematical analysis of random noise*. John Wiley & Sons, 1949.
- [5] Davenport, A.G.: The Spectrum of Horizontal Gustiness near the Ground in High Wind. *Q.J. Roy. Met. Soc.* Vol.87, 1961.
- [6] 日野幹雄: 瞬間最大値と評価時間の関係 - 特に突風率について - . 土木学会論文集, No.117, 1965
- [7] Harris, R.L.: The nature of the wind, The Modern Design of Wind-Sensitive Structures. *Const. Ind. Res. & Inf. Assn.*, London, 1971.
- [8] 宮島省吾他: 浮遊海洋構造物の長周期動揺特性に対する方向波の影響について (第一報). 日本造船学会論文集, No.173, 1993.
- [9] Inoue, Y., Xue, W.Y.: Slowly varying wave drift force in directional waves. *Proc. of 6th BOSS*, 1992.
- [10] Kim, M.H., Yue, D.K.P.: Slowly varying wave drift forces in short crested irregular seas. *Applied Ocean Research*, Vol.11, No.1, 1989.

- [11] Newman, J.N.: Second-Order Slowly Varying Forces on Vessels in Irregular Waves. *Proc. Internat. Symp. on Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves*, Univ. Coll. London, 1974.
- [12] Lighthill, J.: Waves and Hydrodynamic Loading. *Proc. Symp. on BOSS*, Univ. Coll. London, 1979.
- [13] Kim, M.H., Yue, D.K.P.: The complete Second Order Diffraction Solution for an Axisymmetric Body Part2. Bichromatic Incident Waves and Body Motions. *Journal of Fluid Mechanics Vol.211*, pp.557-593, 1990.
- [14] Eatock Taylor, R., Hung, S.M.: Second Order Diffraction Forces on a Vertical Cylinder in Regular Waves. *Applied Ocean Research Vol.9*, pp.19-30, 1987.
- [15] Wichers, J.E.W. and van Sluijs, M.F.: The Influence of Waves on the Low-Frequency Hydrodynamic Coefficients of Moored Vessels. *OTC paper, No.3625*, 1979.
- [16] Wichers, J.E.W.: On the Low-Frequency Surge Motion of Vessels Moored in High Sea. *OTC paper, No.4437*, 1982.
- [17] Standing, R.G., Brendling, W.J., Wilson, D.: Recent developments in the analysis of wave drift forces, low-frequency damping and response. *Proc. OTC No.5456*, Houston, 1987.
- [18] Wichers, J.E.W. and Huijsmans, R.M.H.: On the low frequency hydrodynamic damping forces acting on offshore moored vessels. *OTC paper No.4813*, 1984.
- [19] Hearn, G.E., Tong, K. C.: Added resistance gradient versus drift force gradient-based predictions of wave drift damping. *Int. Shipbuilding Progress, Vol.35, No.402*, 1988.
- [20] Kato, S., Kinoshita, T.: On the Effect of Exciting Short Period Disturbance on Free and Forced Oscillation for the System with Nonlinear Damping. *36th Performance Subcommittee of Ocean Engineering Committee, the Soc. of Nav. Archit. of Japan*, 1983.
- [21] Saito, K., Takagi, M.: On the increased damping for a moored semisubmersible platform during low-frequency motions in waves. *Proc. 7th Int. OMAE symp., ASME, Vol.2*, 1988.
- [22] Chakrabarti, S.K.: Steady drift force on vertical cylinder - viscous vs. potential. *Appl. Ocean R. Vol.6, No.2 pp.73-82*, 1984.
- [23] Ekman, V.W.: On the Influence of the Earth's Rotation on Ocean Current. *Arkiv. mat, astronoch fys.*, 1905.
- [24] 井上令作他.: 浮遊式海洋構造物の実海域実験 その1 実験の概要. 船舶技術研究所報告別冊13号, 1992.
- [25] Geernaert, G.L. et al.: Measurements of wind stress, heat flux and turbulence intensity during storm conditions over the North Sea. *J. geophys. Res.*, **92**, 13127-13139, 1987.
- [26] Garratt, J. R.: Review of drag coefficients over oceans and continents. *Mon. Wea. Rev.*, **105**, 1977.
- [27] Wu, Jin.: Wind-stress coefficients over sea surface near neutral conditions. *J. Phy. Oceanogr.*, **10**, 1980.
- [28] Monin, A.S. and Obukhov, A.M.: Basic regularity in turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere. *U.S.S.R. Acad. Sci. Geophys. Inst.*, **24**, 1954.
- [29] Forristall, G. Z.: Wind spectra and gust factors over water. *Proc. of the 20th annual Offshore Technology Conference*, Houston, Texas, OTC 5735, 1988.
- [30] Ochi, M. K. and Shin, Y. S.: Wind Turbulent Spectra for Design Consideration of Offshore Structures. *Ibid*, OTC 5736, 1988.
- [31] Cartwright, D.E. and Longuet-Higgins, M.S.: The Statistical Distribution of Maxima of a Random Function. *Proc. of Roy. Soc.*, **237**, 1956.
- [32] Wilson, B.W.: Numerical prediction of ocean waves in the North Atlantic for December 1959. *Duct. Hydrogr. Zeit*, Vol.8, 1965.
- [33] Phillips, O.M.: The equilibrium range in the spectrum of wind-generated waves. *Jour. Fluid Mech.*, Vol.4, 1958.
- [34] 光易恒.: 風波のスペクトルの増幅率について. 第26回海岸工学講演会論文集, pp.88-91, 1974.
- [35] 合田良実他.: 光易型方向スペクトルによる不規則波の屈折・回折計算. 港湾技研資料, No.230, pp.45, 1975.
- [36] 泉宮尊司.: 回折領域における波浪場の現地観測. 第33回海岸工学講演会論文集, pp.129-133, 1988.
- [37] Takagi, M., Saito, K.: On the Description of Non-harmonic Wave Problems in the Frequency Domain (1st, 2nd, 3rd, 4th, 5th, 6th and 7th reports). *Journal of Kansai Soc. N.A.*, Vols. **182**, **184**, **187**, **191**, **192**.
- [38] Roberts, J.B., Kountzeris, A., Gawthrop, P.J.: Parametric Identification Techniques for Roll Decrement Data. *Int. Shipbuild. Progr. Vol.38, No.415*, 1991.
- [39] 今野浩, 山下浩.: 非線形計画法. 日科技連, 1978.
- [40] Wang, C.Y.: On High Frequency Oscillating Viscous Flows. *Journal of Fluid Mechanics, Vol.32*, 1968.
- [41] Kinoshita, T. and Takaiwa, K.: A Mathematical Model for Slow Drift Motion of A Vessel Moored in Waves Determined by Oscillation Tests in Regular Wave trains. *Report of The Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Vol.35, No.5*, 1990.
- [42] Dalzell, J.F.: Cross-bispectral analysis: Application to ship resistance in waves. *Jour. Ship Res.*, Vol.18, No.1, 1974.

- [43] Tick, L.J.: Conditional Spectra, Linear Systems and Coherency. *Proc. of the Symposium on Time Series Analysis*, John-Wiley & Sons, New York, 1963.
- [44] 山内保文.: 多入力スペクトル解析法の船の応答研究への応用と非線形応答の一取扱い. 日本造船学会論文集, 第166号, 1989.
- [45] 中村昌彦他.: 係留鎖に働く抗力の海洋構造物長周期動揺への影響. 日本造船学会論文集, 第166号, 1989.
- [46] 小寺山亘.: 係留浮体の運動と係留鎖張力について. 西部造船会々報, 第53号, 1976.
- [47] 島田潔他.: 係留ラインの張力に対する動的影響について. 西部造船会々報, 第60号, 1980.
- [48] 安藤定雄, 加藤俊司.: 鉄鎖係留ラインの静的張力特性と動的変動張力特性について. 西部造船会々報, 第66号, 1983.
- [49] 安藤定雄.: 索・鎖の流体力について (その1部分模型). 西部造船会々報, 第50号, 1975.
- [50] Kato, S., Kinoshita, T.: Nonlinear Response of Moored Floating Structures in Random Waves and its Stochastic Analysis. *Papers of Ship Research Institute, Vol.27, No.4*, 1990.
- [51] Neal, E.: Second Order Hydrodynamic Forces due to Stochastic Excitation. *Proc. of 10th ONR Symposium*, 1974.
- [52] Kac, M., Siegert, A.J.F.: On the Theory of Noise in Radio Receivers with Square Law Detector. *Journ. of Appl. Physics, Vol.18*, 1947.
- [53] Naess, A.: Statistical Analysis of Second-Order Response of Marine Structures. *Journ. of Ship Res., Vol.29*, 1985.
- [54] Naess, A.: The Statistical Distribution of Second-Order Slowly-Varying Forces and Motions. *Appl. Ocean Res., Vol.8*, 1986.
- [55] Naess, A.: On the Statistical Analysis of Slow-Drift Forces and Motions of Floating Offshore Structure. *5th OMAE Symposium, Vol.1*, 1986.
- [56] Vinje, T.: On the Statistical Distribution of Second Order Forces and Motion. *I.S.P., Vol.30*, 1983.
- [57] Vinje, T.: On the Calculation of Maxima of Nonlinear Wave Forces and Wave Induced Motion. *I.S.P. Vol.23*, 1976.
- [58] Hineno, M.: A Calculation of the Statistical Distribution of the Maxima of Nonlinear Responses in Irregular Waves (2nd Report). *J. Soc. Nav. Arch. Japan, Vol.159*, 1986.
- [59] Winterstein, S.R.: Nonlinear Vibration Models for Extremes and Fatigue. *ASCE Jour. of Engineering Mechanics, Vol.114, No.10*, 1988.
- [60] Winterstein, S.R. et al.: Statistical and Physical Models of Nonlinear Random Waves. *10th OMAE Symp. Vol.114, No.10*, 1991.
- [61] Kato, S., Kinoshita, T and Takase S.: Statistical Analysis of Total Second Order Responses of Moored Vessels in Random Seas. *Applied Ocean Research, Vol.12*, 1990.
- [62] Takase, S., Kinoshita, T., Matsui, T.: On Extreme Values of the Slow Drift Motion of a Moored Vessel - Effects of the Second Order Potential and Coupled Motions -. *proc. of OMAE 1991 Stavanger, Vol.2. pp.71-78*, 1991.
- [63] Papoulis, A.: *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*. MacGraw-Hill, 1965.
- [64] Johnson, N.L., Kotz, S.: *Distribution in Statistics: Continuous Multivariate Distributions*. Wiley, New York, 1972.
- [65] Naess, A., Johnsen, J.M.: The Path Integral Solution Technique Applied to The Random Vibration of Hysteretic Systems. *Proc. of the First International Conference on Computational Stochastic mechanics*, 1991.
- [66] 加藤俊司, 安藤定雄, 佐藤宏, 元良勇太郎.: 浮遊式海洋構造物の実海域実験 その1 実験海域における風の実海域実験 No.167, 1990.
- [67] 吉元博文, 安藤定雄, 小林顕太郎.: 浮遊式海洋構造物の実海域実験 その2 実験海域の波方向スペクトルについて. 日本造船学会論文集 No.168, 1990.
- [68] 尾股貞夫, 大松重雄.: 浮遊式海洋構造物の実海域実験 その7 係留ラインの張力特性. 日本造船学会論文集 No.171, 1992.
- [69] 斉藤昌勝, 加藤俊司, 大川豊.: 浮遊式海洋構造物の実海域実験 その8 自由動揺時の流体力特性について. 日本造船学会論文集 No.171, 1992.
- [70] 加藤俊司, 斉藤昌勝, 高瀬悟.: 浮遊式海洋構造物の実海域実験 その9 長周期運動のシミュレーションと統計予測. 日本造船学会論文集 No.172, 1992.