

層流境界層の非定常剝離に関する考察

重 光 胖*

1. 序 論

低速流体力学の分野においては、流れの非定常的性格にもとづく重要な実際上の問題が多くある。しかし問題が複雑なため、これらの問題に系統的な研究をすすめるについての基本になる態度すら定まっていない。例えば、Reynolds 数に対する球の抵抗係数の変化は、定常状態における多くの実験から、一つの曲線として表わされている。しかし、球の Reynolds 数が時間とともに変動する場合には、定常状態の曲線にそつて抵抗係数が変化すると考えることは問題である。抵抗の変化は、球のまわりの層流または乱流境界層やその後方の伴流などの非定常的性格に関係すべきことがらである。すなわち、球の非定常な抵抗を受ける機構は、定常状態では表われない週期、振幅などの条件による。これらの基本的問題が解決されなければ球の抵抗の非定常的な性格を明らかにすることはできない。

実用上の目的をもつ非定常の問題については、現在のところ、主に実験的方法によつて研究をすすめるを得ない。なぜならば、非定常 Navier-Stokes の複雑な偏微分方程式を解くことは極めて困難であり、今まで簡単な場合について得られている解は実用問題に対して殆どそのままでは役に立たないからである。しかし、多くの実用問題に表われる基本的な非定常現象について、運動方程式に基づく合理的な考察をすすめることは、やはり重要なことであると思う。

よく知られているように、物体の周りの境界層は抵抗について本質的な役割りを演ずる。層流境界層について、非定常な運動方程式の理論解析が少し行われている。しかし、実際には、非定常的要素のために層流境界層は崩れて乱流境界層になることが多い。この崩れる現象を普通遷移とよんでいる。もしも主流に非定常的要素が全然なければ、定常剝離をした境界層がたまたまなお壁面にそつて流れることはあつても、遷移

ということは考えることができない。平板にそつ境界層の遷移も、非定常特性を考慮しなくては理解できないわけである。

層流境界層の非定常特性の研究としては、Orr-Sommerfeld の線形化された非定常運動方程式に基づいて安定理論が発達した。この理論結果は実験から支持されるにしても、遷移の問題はこの理論の範囲外にある。遷移の研究としては、境界層内の速度変動による非定常的な剝離という考え方で、この現象を解釈しようという試みが若干なされている。一つの試みは場所的のみ sine 変動をする主流の速度変動による剝離点を定めることである¹⁾。別の試みとして、境界層の剝離に対する主流内の等方性乱れの影響が、局部剝離という概念を導入してしらべられた²⁾。しかし、これらの試みにおける数理解析の条件は、実際の境界層流の速度変動の状況には適応できず、したがつて、その基礎概念の妥当性はいまだ証明されていない。

非定常剝離の問題の根本は、その定義にあるものと思われる。うえにのべたうち、前者の試みは定常流の剝離の条件をつかつており¹⁾、後者は非定常状態における局部剝離の概念に基づいている²⁾。もし後者の概念を実際の境界層流の状況に適応するように数式化すれば、遷移の機構を解明するうえに何らかの手がかりが得られるものと思う。この論文では、乱流発生基礎研究の始めとして、局部剝離の概念に数学表式をあたえ、層流境界層内の速度変動の実験と直接比較できる定量結果を導いてみた。

2. 非定常剝離の概念

まず始めに、2次元非圧縮流における境界層の定常剝離について考える。層内の逆向きの静圧力が流れの方向の粘性力に対してある程度大きくなると、壁面近くで逆流がおこり境界層は剝離してゆく。壁面に平行垂直に x, y 軸をとり、 U を層内の x 成分の速度とすると、うえにのべた条件は

$$y = 0 \quad \text{で} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

* 共通工学部

であらわされる。

層流境界層理論によれば、層内速度分布に対する静圧力の影響は、第一近似としては、

$$A = \left(-\frac{dP_0}{dx} \delta \right) / \left(\rho \nu \frac{U_0}{\delta} \right) \dots\dots\dots(2)$$

のパラメーターで代表させられる。但し、添字₀は主流における値をしめし、 δ , ρ , ν はそれぞれ層の厚さ、流体の密度、動粘性係数を表わす。いうまでもなく、(2)の分母分子はそれぞれ層断面における x 方向の粘性力、静圧力を意味する。また、パラメーター A がある臨界値

$$A = A_c, \quad A_c \approx -8 \dots\dots\dots(3)$$

に達すると、速度分布に(1)の状況が表われることが理論解析によつて証明されており、(3)式が、第一近似として層の剝離を予測する条件であることが認められている。(2)の物理的の意味を理解すれば、(3)がうえにのべた(1)の解釈を物語っていることがわかるであろう。要するに、定常流の場合、条件(3)は本質的には(1)と同等であり、算出された結果 $A_c \approx -8$ は定常流の場合の実験測定からも支持されている。

境界層の剝離という概念は、非定常流の場合でも別に否定されることはないであろう。しかし、この場合の剝離の物理的意味は明確でなく、剝離条件の数学表式もいまだ確定していない。われわれはこの問題を議論したい。最初に図1に示すように、 $A=0$ の平板にそう層流境界層がある時刻 t_1 において突然 $A=A_c$

の剝離の速度分布をもつ流れに変化する非定常流の場合をとりあげよう。 t_1 以前には速度は Blasius の分布をもち、その後次第に(1)の条件で規定される剝離の分布に近づくことは明らかである。

粘性流体の力学によれば、境界条件の突然の変化に対応して、流れは、分子粘性に帰因するある時間のずれをもつて、次第に定常状態に近づくことがわかっている。非定常 Navier-Stokes の方程式の 2, 3 の厳密解によれば、普通の値の Reynolds 数のもとでは、この時間のずれは大体 0.1 秒ぐらいのオーダーであることが証明されている。図1にしめした場合には、速度の Blasius 分布が剝離の分布に落着くまでにはこの程度の時間間隔 Δt が必要でなければならない。

つぎに、われわれは境界層の A の値が A_c と 0 との間をゆききするように主流の静圧が変動する理想的な場合をとることにしよう。変動の週期が Δt よりはるかに長いときには、速度分布は Blasius と剝離型との間を往復する。しかるに、 Δt よりも短い週期の場合には、たとえ A が A_c に達しても、速度分布は剝離型になる以前に逆転するにちがいない。

主流に変動がなく、境界層断面における速度が全体として x 方向に振動する変動部分をもつ場合をとりあげよう。一般に、ある点において速度が変動部分をもつと、それによる慣性力は Navier-Stokes の方程式の中で変動する圧力とみなされる。この場合、層内の速度変動は、主流による平均の静圧力 dP_0/dx のまわり

にある圧力変動をもたらす。 $(dp_x/dx)^*$ を層断面におけるこの意味での圧力変動力の x 成分の代表的な値として最大値とすれば、パラメーター(2)は、平均と変動部分 \bar{A} と λ とに分けて、

$$A = \bar{A} + \lambda \dots\dots\dots(4)$$

$$\bar{A} = \left(-\frac{dp_0}{dx} \delta \right) / \left(\rho \nu \frac{U_0}{\delta} \right),$$

$$\lambda = \left\{ \left(-\frac{dp_x}{dx} \right)^* \delta \right\} / \left(\rho \nu \frac{U_0}{\delta} \right)$$

とかくことができる。(4)において λ は x 方向の圧力変動力の層断面における最大値と平均粘性力との比とみなすことができる。

(4)の A が(3)の臨界値

$$A = \bar{A} + \lambda = A_c \dots\dots\dots(3')$$

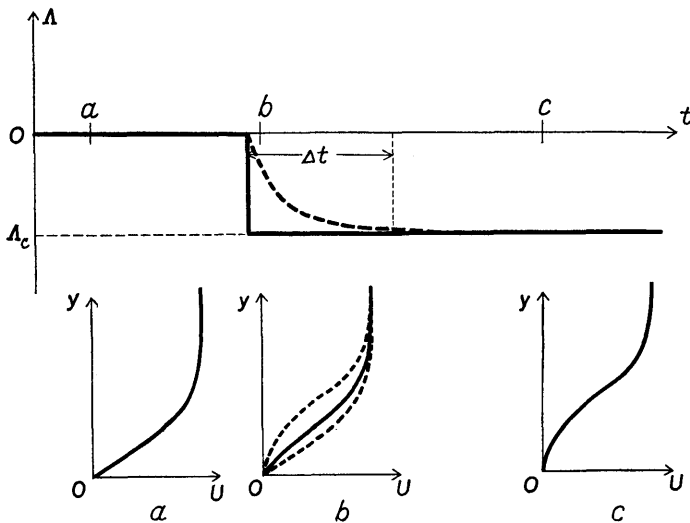


図1 パラメーター A の0から A_c への急激な変化に対応する層流境界層速度分布の変化

に達する場合を考えよう。(4)でみてきたように、 dp/dx は Navier-Stokes の方程式において $U(\partial u/\partial x)$, $\partial u/\partial t$ などで表わされるので、 λ の変動する値は u の強さと週期とに基づく。それで、週期が高いときには、 u の強さが小さくとも λ は容易に大きな値に達することができる。

もしも定常流の場合の剥離条件 (1) を非定常の場合にあてはめると、

$$y=0 \quad \text{で} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial(\bar{U}+u)}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(1')$$

となる。(1') の条件は u 変動の週期には関係せず、 $y=0$ 近くの $\bar{U}+u$ の値だけにに基づく。図 1 にしめすように週期が 0 になるときは、 Δt の移り変りの部分を除いては (1') と (3') とはそれぞれ (1) と (3) と同等である。しかし、前にのべたように、週期が 0 から増大してゆくと、たとえ A の値が臨界値 A_c に達しても、時間のずれのために (1') の条件は次第に成立しなくなる。非定常流の場合には一般に (1') の条件は (3') と同等でなく、層流境界層の非定常剥離という概念に対して、(1'), (3') または他の、いかなる条件をえらぶべきかの本質的な問題に遭遇する。

実験観測によると、次のことがらが明らかにされている。風洞気流に 1~10 cycle/sec 程度の低い週期の強い振動を与えると、境界層の速度分布に (1') の状態が観察される。しかし強制振動の週波数を高くすると、速度分布が (1') の状態に達する以前に境界層は通常遷移現象をおこす。外部から人工的な振動を働かせない壁面にそう層流境界層においても、特有な境界層変動が見出されるものである^{3,4)}。主流の乱れの度合いがそう低くないときは変動はある範囲の週波数を含むが⁷⁾、その週波数範囲は通常 10 cycle/sec 以上である。これらの自然の境界層変動はまた弱い強度の u でもつて容易に遷移をひきおこす。実際の層流境界層においては、その変動が (1') の条件を満たすまで成長することは一般に難かしい。

うえにのべた実験事実によると、(1') の条件よりも (3') の方がより実際上の意味があるように思われる。そこで、われわれは次の解釈をとることにしよう。すなわち、層断面における最大の逆向きの瞬間的の圧力変動が平均流の粘性力よりある程度大きくなると、

$\bar{U}+u \sim y$ の速度分布のかたち拘らず、境界層の瞬間的な剥離が生ずるものと考えよう。定常剥離の (1) の条件になじんでいるわれわれにとつては、瞬間的速度分布が (1') の状態に達する以前に境界層が「剥離す

る」ということは奇妙に感じられる。しかし、この一見矛盾してみえるなかに、遷移の謎の現象の本質的な性格が見出せるのかもしれない。

よく知られているように、(3') の条件の解釈は局部剥離の概念として G. I. Taylor によつて導入されたものと同じである。しかし、その解析において、彼は (4) のパラメーター λ の中の圧力変動 $\bar{p}x$ の値として $\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2$ をとつている。もしも圧力変動にそのまま時間平均をとるならば、Navier-Stokes の方程式において $\bar{p}x = \frac{1}{2}\rho\bar{u}^2$ が得られる。しかし、局部剥離の概念においては、圧力変動の値として $\rho\bar{U}u$ 等で近似される瞬間値をとるべきものとする。もし必要であればゴチック u を $\sqrt{\bar{u}^2}$ を表わすものとして、 $\rho\bar{U}u$ 等で近似される root-mean-square の値 $\sqrt{\bar{p}_x^2}$ をとるべきである。彼はさらに、境界層内の圧力変動は層の外側の主流のそれと同じであると仮定した。Prandtl の推論によつて層内の平均圧力は主流におけるのと同じことは容易に証明できるけれども、変動圧力についてのこの仮定は証明することはできない。そのうえ主流が等方性乱れを含むとき、実際の層流境界層にはうえにのべたような強い振幅と大体 10~100 cycle/sec 程度の低い週期の別種の変動が存在するし、この変動の局部剥離に及ぼす影響は無視できない。かくして、われわれは、局部剥離の基礎概念を、解析の条件が実際の層流境界層に適応でき理論結果が実験研究から検討できるように、もつと合理的な扱い方によつて、一つの数学表式にまとめてみたい。

3. 平板にそう境界層変動の場合の局部剥離

平板にそう実際の層流境界層の状態では、主流の乱れが減ると層内には特徴のある単週期的速度変動が表われる。 x 方向にそつて変動は幾分高調波を増しながら成長してゆき、同時に z 方向の強さの分布の一様性が失われてゆく。最後に、最大の強さのところにおいて変動は遷移の現象をひきおこす。すなわち、成長した変動は、しかしそれは大体単週期に近いものであるのだが、突然崩れて高週期の乱流斑点になる^{3,4)}。境界層変動が場所と時間について不連続的に乱流状態になるということは、本質的な特徴とすべきことである。さらに、強制振動の方法により、特にあまり発達していない段階での速度変動は、安定理論から予期される Tollmien-Schlichting の不安定波の性質をもつてい

ることが証明されている。

勿論、安定理論は2次元解析における種々の仮定のう
えに成立するものであり、観測される速度変動が理論
上の Tollmien-Schlichting の不安定波と同一である
ということとはできない。しかし、Orr-Sommerfeld
の方程式からの理論結果は、実際の流れの速度変動の
特性を推定するのにやはり役立つものである。速度変動
の z 方向の変化は著しくなるけれども、遷移は z 方
向の最大の強さのところできり、近似的には流れは局
部的な 2次元性を保つ。かくして、局部剥離の大局をし
らべるには、平均速度の Blasius の分布に Tollmien-
Schlichting の波が重ね合わさった場合において、粘
性と圧力変動との間の力の釣合の解析をすすめること
が、有意義であろう。

Tollmien-Schlichting の波は次の変動する流れの
函数、

$$\begin{aligned} \phi &= \varphi(y) \exp \{i\alpha(x - Ct)\}, \quad C = C_r + iC_i, \\ u &= \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

で表わせられる。但し、 C_r と C_i とはそれぞれ波動
の伝播速度と増幅係数であり、波長は $2\pi/\alpha$ で与えら
れる。幾多の研究者の計算結果によると⁶⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾、次の
オーダーの関係

$$\begin{aligned} \alpha\delta &= O(1), \quad (=1.2 \sim 0.3), \\ |C|/U_0 &\doteq C_r/U_0 = O(1), \quad (=0.43 \sim 0.26), \quad (6) \\ \varphi''(y)(\partial/\partial y)' &= O(1), \end{aligned}$$

が得られている。但し φ_1' は層断面での $d\varphi/dy$ の最
大値である。また、実験観測によれば、境界層変動は
乱流斑点に崩れるまで (6) のオーダー関係を保つこと
が明らかにされている。

Tollmien-Schlichting の波が存在する境界層流に
非定常の Navier-Stokes の方程式をあてはめてみよ
う。座標の値 x と主流の速度 U_0 のオーダーを 1 とと
り、次の 2つの量、

$$(U_0 x/\nu)^{-1/2} = \varepsilon_1, \quad u^*/U_0 = \varepsilon_2 \dots\dots\dots(7)$$

を導入する。すると、この場合には

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1 \dots\dots\dots(8)$$

である。
境界層の厚さ δ は Prandtl により ε_1 のオーダー
をもつことが証明されている。また、 $\bar{U}(\partial\bar{U}/\partial x)$,
 $\bar{V}(\partial\bar{U}/\partial y)$, $\nu(\partial^2\bar{U}/\partial y^2)$ の項は 1 ; $\bar{U}(\partial\bar{V}/\partial x)$,
 $\bar{V}(\partial\bar{V}/\partial y)$, $\nu(\partial^2\bar{V}/\partial y^2)$ は ε_1 ; $\nu(\partial^2\bar{U}/\partial x^2)$ は ε_1^2 ;
 $\nu(\partial^2\bar{V}/\partial x^2)$ は ε_1^3 のオーダーをもつことも証明され

ている。それで、(6) の第 1 の関係から、

$$\alpha = O(\varepsilon_1^{-1}) \dots\dots\dots(9)$$

という性質がわかる。(5) の式から $\partial u/\partial x$ はせいぜ
い $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ のオーダーであることがわかり、連続の式か
ら $\partial v/\partial y$ もまた同じオーダーをもつことがわかる。
同様に (6) のすべての関係をつかうと、次のオーダー
の関係がわかる。すなわち、 $\partial u/\partial t$, $\bar{U}(\partial u/\partial x)$,
 $v(\partial\bar{V}/\partial y)$, $\partial v/\partial t$, $\bar{U}(\partial v/\partial x)$ は $\varepsilon_2/\varepsilon_1$; $u(\partial u/\partial x)$,
 $v(\partial u/\partial y)$, $u(\partial v/\partial x)$, $v(\partial v/\partial y)$ は $\varepsilon_2^2/\varepsilon_1$;
 $u(\partial\bar{U}/\partial x)$, $\bar{V}(\partial u/\partial y)$, $\nu(\partial^2 u/\partial x^2)$, $\nu(\partial^2 u/\partial y^2)$,
 $\bar{V}(\partial\bar{v}/\partial y)$, $v(\partial\bar{V}/\partial y)$, $\nu(\partial^2 v/\partial x^2)$, $\nu(\partial^2 v/\partial y^2)$ は
 ε_2 ; $u(\partial\bar{V}/\partial x)$ は $\varepsilon_1\varepsilon_2$ のオーダーをもつ。

非定常 Navier-Stokes の方程式において時間平均
をととり、第一近似としてのオーダーの項を集めると、

$$\begin{aligned} \bar{U} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \bar{V} \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} &= 0, \quad \dots\dots\dots(10) \\ \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

となり、これは勿論 Prandtl の方程式と同じである。
省略した項のオーダーは $\varepsilon_2^2/\varepsilon_1$, ε_1 , ε_1^2 , ε_1^3 である。
第 2 近似では、Tollmien-Schlichting の不安定波の
 ε_2 は x 方向に増大し ε_1 は減少するので、 $\varepsilon_2^2/\varepsilon_1$ の

オーダーの $u \frac{\partial u}{\partial x}$, $v \frac{\partial v}{\partial y}$, $u \frac{\partial v}{\partial x}$, $v \frac{\partial u}{\partial y}$
の項が重要になる。もつとも、あとの二つの u , v 相
関の値は僅かであろう。すなわち、第 1 近似として、
 $\varepsilon_2^2/\varepsilon_1 \ll 1 \dots\dots\dots(11)$

の条件が満されるかぎり、平均の Blasius の速度分
布は不安定波によつて殆ど影響されるところがない。

瞬間的な状態となると状況は違ってくる。Navier-
Stokes の方程式の中で 1 のオーダーの項を集めると、
やはり Prandtl の方程式(10)が得られる。しかし、
第 2 近似では $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ のオーダーの項が表われ、それら
が圧力変動として働く。これらの項を集めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} &= \frac{-1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{-1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_y}{\partial y} \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

となる。

$\varepsilon_2/\varepsilon_1 \ll 1$ (13)
 でないかぎり、(12)の3つの式をそれぞれ(10)の式に加えねばならぬ。すなわち、Blasius 分布の平均状態の力の釣合からの瞬間的なずれは無視することはできない。たとえ $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ が1に近づいても、遷移現象がおこらぬかぎり、平均速度分布は Blasius のと一致していることが(11)からわかる。しかし、このような状況の時でも、 $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ のオーダーの小さくない変動圧力が境界層内でたえず働いていることになる。これが瞬間的な層流剝離をひきおこすのではなからうかと想像

する。 $U_0 x/\nu$ の x Reynolds 数が 10^3 の場合、 u^*/U_0 が 0.3 パーセントに成長するときに $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ は1になるということは注目すべきである。

この流れの場合、境界層のパラメーター(4)は

$$\begin{aligned} A &= \bar{A} + \lambda, \\ \bar{A} &= 0, \\ \lambda &= \left\{ \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right)^* \delta \right\} / \left(\rho \nu \frac{U_0}{\delta} \right), \end{aligned} \quad \text{.....(14)}$$

となる。但し、 \bar{U}/U_0 は (11) により Blasius の分

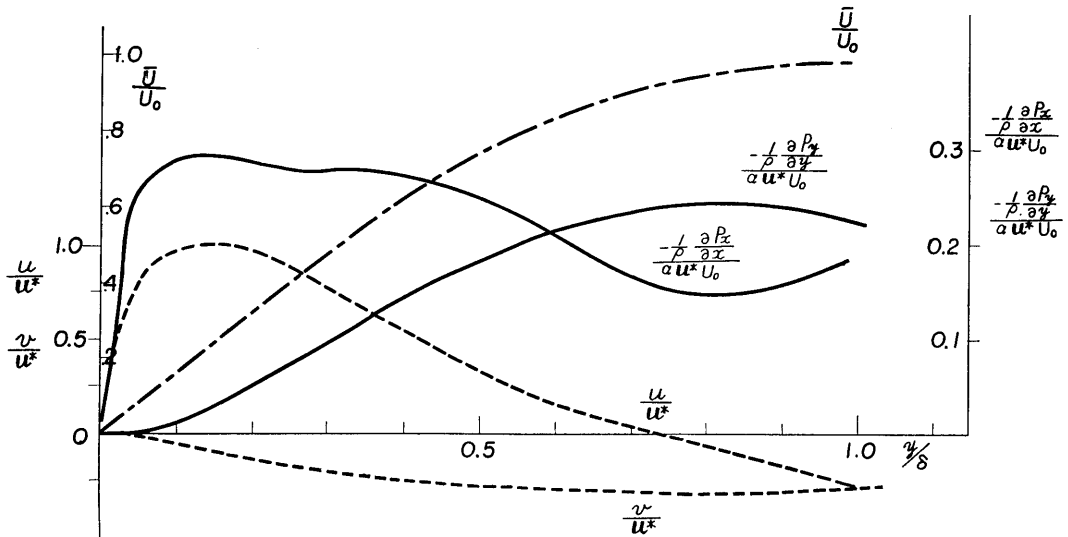


図 2 $U_0 \delta_1/\nu=894$ の I の場合の層流境界層断面における、圧力変動ならびに平均、変動速度の分布

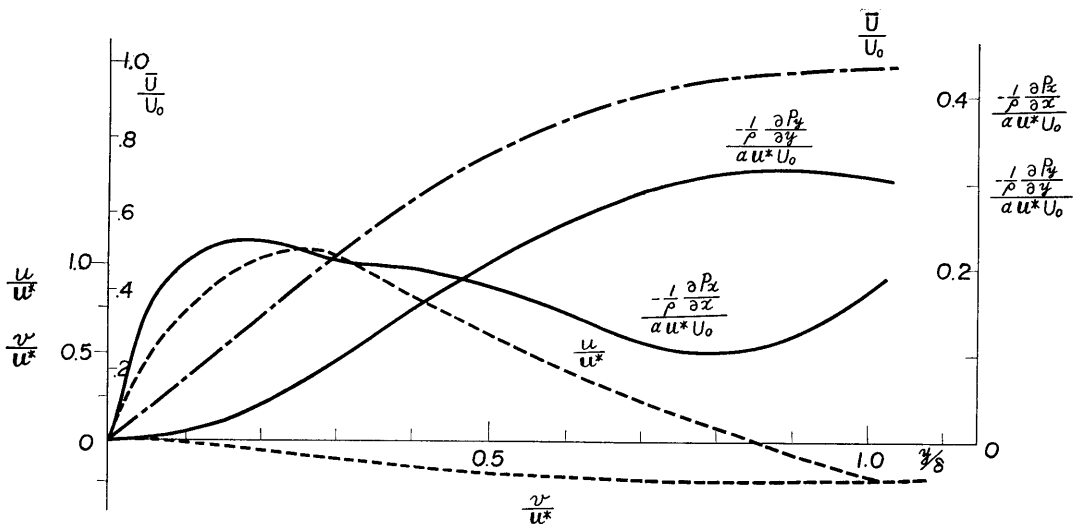


図 3 $U_0 \delta_1/\nu=2070$ の II の場合の層流境界層断面における、圧力変動ならびに平均、変動速度の分布

布とみなされ、また、以前にのべたように*は層断面での $-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x}$ の最大値の場所の値をしめす。

(5)式をつかうと λ はさらに、

$$\lambda(x,y) = \left(\frac{\alpha u^* \delta^2}{\nu} \right) \left\{ -\frac{C}{U_0} + \frac{\bar{U}^*}{U_0} + \frac{\varphi^*}{\varphi'^*} \left(\frac{\bar{U}}{U_0} \right)' \right\} \dots\dots\dots(15)$$

となる。ここで、' は y/δ による微分を意味する。中かつこ内の第2項 x の方向の変化は少なく、この係数項をもつて、パラメーター λ は、不安定波の変動速度 u^* と境界層厚さの δ とで容易に x 方向に増大してゆく $(\alpha u^* \delta^2 / \nu)$ の項で代表される。

$U_0 \delta_1 / \nu = 894$ と 2070 の I, II の2つの場合、Schlichting は Tollmien-Schlichting の中立波について (5) の $\varphi(y)$ の函数形を

$$\delta = 2.93 \delta_1 \dots\dots\dots(16)$$

とおいて算出した⁹⁾。但し、 δ_1 は排除厚である。したがつて、 $-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_x}{\partial x}$ または $-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p_y}{\partial y}$ の分布は、

(12)から導くことができ、(15)の係数項の値は、

$$\left\{ -\frac{C}{U_0} + \frac{\bar{U}^*}{U_0} + \frac{\varphi^*}{\varphi'^*} \left(\frac{\bar{U}}{U_0} \right)' \right\} = 0.231 \text{ (I)},$$

$$= 0.292 \text{ (II)} \dots\dots\dots(17)$$

と定まる。図2, 3は、平均ならびに変動速度とともに、それらの計算結果の分布をしめす。これらの図において、 y 方向の圧力変動の影響は平板近くでは少ないことがわかる。

中立変動の I, II の場合については実験上の検証もなされており、瞬間的な速度分布の計算結果も証明されている⁹⁾。この実験によると代表項 $(\alpha u^* \delta / \nu)$ の値も導くことができ、

$$\lambda = \pm 4.43 \text{ (I)}, \quad = \pm 5.61 \text{ (II)}, \quad \dots\dots(18)$$

となる。うえの値は明らかに局部剥離の(3')の臨界値 Ac よりも小さく、実験測定においても、 $|\lambda| < |Ac|$ の関係から予期されるように、遷移現象は観測されな

かつた。

参 照 文 献

1. Dryden, H. L., "Airflow in the Boundary Layer near a Plate," N A C A Tech. Rep. 562, 1936.
2. Taylor, G. I., "Statistical Theory of Turbulence, Part V," Proc. Roy. Soc. A 156, 307, 1936.
3. Schubauer, G. B. & Skramstad, H. K., "Laminar-Boundary-Layer Oscillations and Transition on a Flat Plate," N A C A Tech. Rep. 909, 327, 1948.
4. Dryden, H. L., "Recent Investigations of the Problem of Transition," Zeitschr. Flügwiss., 4, 89, 1956.
5. Shigemitsu, Y., "On the Velocity Fluctuations in the Laminar Boundary Layer, I," Journ. Phys. Sos. Japan, 5, 298, 1950.
6. Tollmien, W., "Über die Entstehung der Turbulenz, I Mitteilung," Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse 21, 1929.
7. Schlichting, H., "Zur Entstehung der Turbulenz bei der Plattenströmung," Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, 182, 1933.
8. Lin, C. C., "On the Stability of Two-Dimensional Parallel Flows, Part III-Stability in a Viscous Fluid," Quart. Appl. Math. 3, 277, 1946.
9. Shlichting, H., "Amplitudenverteilung und Energiebilanz der Klinen Störungen bei der Plattenströmung," Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Klasse, Fachgruppe I, 1, 47, 1935.