γ 線平板多重層遮蔽の解析法の研究

片　岡　　　巌*

A Study on the Methods for Analyzing Multilayered Gamma-Ray Shields

By
Iwao KATAOKA

The paper presents two methods for analyzing gamma-rays in stratified slab shields. In Part I, a numerical integration method of the Boltzmann transport equation is described, which solves the equation at the discrete points of ordinates of spatial, angular and energetic. Under the same interval of spatial mesh-points, results of test calculations reveal that the method presented gives more correct attenuation of gamma fluxest han, for instance, the discrete Sn method does. A supplemental procedure is provided for a monoenergetic and monodirectional incident source besides the treatments for continuously distributed sources.

Part II presents the Response Matrix method as well as a table of the response matrices in the Appendix. The transmission and reflection responses of the gamma-rays for an elemental slab of each material have been prepared with the Monte Carlo method for the gamma-ray injection of the unit intensity to the slab surface under a certain set of incident angle and energy. The transmitted or reflected gamma-rays from a given stratified shield of different materials as well as single material are obtained by operating the response matrices of the elemental slabs composing the shield of. The procedures for synthesizing and interpolating the response matrices are given. And the estimated errors accompanied with the procedures have been evaluated.

In Part III, various results of sample calculations are illustrated. The results computed with the present methods show good agreement with those from the Moments method, the Monte Carlo calculations and the experimental measurements.

序　　論

γ 線が物体を透過する現象は，無限に広がる媒質中での解析から始まって，境界を持つ単一層での解析へと進んだ。境界のある物体での γ 線の振舞いを正確に扱うことは，種々な試みがあるにもかかわらず Monte Carlo 法以外の方法ではかなり困難であった。このような研究の当然の帰結として，単一層も含めて，多重層における γ 線の振舞いを解析する方法を見出して，その現象を明らかにしたいと考えられるに至った。

一方，γ 線遮蔽設計の立場からも，多重層遮蔽の解析は重要である。γ 線の遮蔽設計は，大きく分類すると3つの主な分野になる。すなわち，

(1) 主体となる遮蔽体の設計

(2) 貫通孔などの局部的不連続部の設計

(3) 散乱，反射に対する設計

である。主体となる遮蔽体は，種々の物質の多重層によって構成されるのが普通であって，単一層であることがむしろ稀である。したがって，γ 線遮蔽設計の立場から，多重層遮蔽の解析は最も重要で，しかも基本となるものであると云える。

境界の存在するこのような多重層で γ 線の解析を正しく行なうには，γ 線のエネルギー分布および進行方向角分布についての詳しい解析が必要である。換言すると，多重層での γ 線の解析法が完成されたとすると，それは多重層だけでなく，γ 線の透過，減衰，反

* 原子力船部

射などの広い範囲の問題を解析する方法が与えられたことを意味する筈である。事実，以下に述べる本研究で導かれるγ線多重層遮蔽の解析法が，広い適用範囲を持った，γ線遮蔽設計の主体を扱える設計法であることが示される。

一般に，物体の中でのγ線の振舞いを解析して，遮蔽設計に必要な諸量を算出する理論的解析法はつぎの4つに大別される。

(1) Boltzmann 輸送方程式の数値解法

(2) Monte Carlo 法

(3) 逐次散乱法

(4) 物体エレメントの透過，反射から導く方法

これらの方法の歴史的展望および評価は文献 1) に述べてある。以下，本研究第I部では第(1)分類に属する，γ線の定常輸送方程式を，境界条件を満足するできるだけ厳密に近い方法で解く直接積分解法を導くことにする。原子炉遮蔽体の内部で中性子に起因して発生する2次γ線源のような，遮蔽層内分布線源が扱かえる点や，結果のγ線束が層内の分布として得られる点で優れている。

第II部においては，第(2)分類の Monte Carlo 法と第(4)分類の透過，反射の演算法とを組み合せて両者の長所を活用する新しい解法，応答マトリックス法を展開する。この解析法は，直接の計算時間の短い点が特長である。

以上2つの解析法は，得られる結果の種類や内容がやや異なり，また計算の手順などでそれぞれ特長があるため，必要に応じて使い分けるのが適切である。輸送方程式の直接積分解法はγ線束の位置，エネルギー角度などに関して必要に応じて詳細な分布が求められる反面，一般に計算時間がやや長い欠点がある。これに対して，応答マトリックス法は計算時間が極めて短い。他の設計コードの一部に組み込むことも可能で，広い応用範囲を持っている。しかしながら，得られる結果は透過または反射のγ線束であって，詳細な空間分布を期待するのは困難である。

第III部では，このような特長を持った2つの方法を利用して，多重層におけるγ線について幾つかの解析結果を示すことにする。殊に，実験結果または他の理論計算の結果で引用可能なものと比較して，この解析法の信頼性を検討する。また，多重層内でのγ線エネルギースペクトルはこの研究において始めて，具体的に示されるデータである。

本研究の最大の目的の一つは，研究の成果を遮蔽設計に活用する方法を開発することである。第 III 部では，この点にも言及することにする。その結果，この研究の結果と導かれた解析法は，単に多重層問題だけでなく，一般にγ線遮蔽設計の主体をなす分野に広く適用できることが示される。

多重層遮蔽の解析法が確立され，しかも応答マトリックス法のようにパラメタサーベイに適した方法が得られることは，遮蔽の最適設計を行なう有力な手段が与えられることを意味する。

（以降，式の番号および引用文献の番号は各部毎に独立に与えることにする。）

引 用 文 献

1) 片岡巌：日本原子力学会誌，7，634 (1965).

第I部　輸送方程式の直接積分解法

第1章　緒　　言

放射線遮蔽の分野で問題となるのは，考えているシステム内に存在する光子の密度が十分大きくて，光子密度の統計的なゆらぎが無視できる場合が多い。このような場合には，光子の保存則から光子の輸送方程式が成立することはよく知られている。（例えば文献1) 2) 参照）ここで以下に述べるのは，基礎輸送方程式（第2章，第6章）を直接の数値積分によって解く解析法である。

原子炉または放射性同位元素から直接または間接的に発生する光子のエネルギー範囲では，物質との相互作用のうち，3種類の主な反応，すなわち Compton 散乱，光電効果による吸収，電子対生成による吸収が混在し，それらの反応断面積が急激な変化をする（第3章)。したがって，輸送方程式はエネルギーの関数として解かれなければならない。ここでは，エネルギー組分けによって取扱うが，その組間隔は十分密にとる必要がある。多重層問題のように，内部境界での異種物質層の相互作用を考える場合には，このようなエネルギー依存性を重視することが一層必要となる。

多重層の内部境界面および外部境界面での光子束は一般に角度によって大きく変化する。このため，光子の角度分布が一様であると仮定する，輸送方程式の拡散型の近似解法は無価値となる。また，光子束の角度分布を有限項の Legendre 多項式展開で表現する，いわゆる P_l 法も境界での角度依存性を表現するのに不

十分である。境界面の各半空間で別個の Legendre 多項式展開をする，double P_l 法ではこの点がかなり改善されるものと期待される。

角度空間をさらに多くの領域に分割し，各領域内で独立の角度分布関数をとる考え方は一層有効であると思われる。この考え方を実現する1つの方法として，光子の進行方向角に適宜に分点をとり，各角度分点における輸送方程式を解いて光子束を算出する解析法は一般に discrete ordinates 法と称せられる。本論文で提出する解析法ならびに discrete S_n 法は，基本的な考え方として，この分類に属するものである。この両解析法は，輸送方程式の空間積分の方法で区別される。なお，S_n 法では角度分点間での光子束の角度分布は折線的であると仮定し，輸送方程式を各分点間で角度について予め積分する。

discrete ordinates の方法では，光子の角度分布についての制限が関数展開法に比較して非常に少なく，多重層問題のように境界での光子束角度分布の変化が大きい問題の取扱いに適している。境界条件の定義が簡単で見通しのよいことも特長である。以下に述べる解析法 SELENE では，角度分点は云うまでもなく，分点間の全角度にわたって境界条件は厳密に満足されている。

輸送方程式の空間微分を S_n 法では位置の分点間の差分として計算するのに対して，本論文で提案する解析法，EOS 法および SELENE 法では適当な仮定の下に積分を行なう。（第7章）ここに用いられた空間積分の精度を評価するため，簡単な透過問題を例として，S_n 法に用いられた方法を含む3種類の積分法の比較計算を行なう。（第12章）

輸送方程式の線源としては，純線源の他にCompton散乱を経た光子が扱われるが（第4章）その効果を表わす散乱積分の計算（第5章）に当っては，光子束のエネルギー依存および角度依存の様子を仮定しておく必要がある。ここで提案する解析法では以下の3種類の仮定に基ずいて散乱積分を行なう。

(1) 光子束は，各エネルギー分点および角度分点の間では変化しないとする。すなわちステップ状分布をするとする。……SELENE—1（第8章）

(2) 光子束は，各エネルギー分点および角度分点の間で折線状の変化をすると仮定する。……SELENE—2（第10章）

(3) 光子束は，各エネルギー分点間では折線状の分布をする。角度変化は，有限項の Legendre 多項式で表現できるとする。……EOS（第11章）

これらの仮定は，エネルギー組分けおよび角度分点がかなり密にとられることを前提としている。電子計算機の使用により，比較的に短かい合理的な演算時間でこのような計算が可能なことが確かめられた。（第13章）

遮蔽設計の基礎的な reference data としては，しばしば平面状の単1エネルギ，単1方向入射線源の解が要求される。このような入射線源に対する非衝突線束および1回散乱線束は角度およびエネルギーについて δ 関数をなし，上述の解析法でそのまま扱かうことは適当でない。このため，光子束を非衝突線束，1回散乱線束，2回以上の散乱線束に分離し，これらの特別な散乱積分の方法を求める。（第9章）

第2章　定常状態における光子の輸送方程式

単位方向ベクトルを$\vec{\Omega}$とするとき，位置$\vec{r}$において$\vec{\Omega}$の周囲の立体角要素 $d\Omega$ 内に進行方向を持ち，$\vec{\Omega}$に垂直な単位面積当り単位時間に通過する光子の個数のうち，そのエネルギーが E から dE の区間内にある光子の個数を

$$N(\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E)d\Omega dE$$

とする。以降では簡単に光子の個数束と称する。

位相空間（$\vec{r}$, $\vec{\Omega}$, E）内の体積要素における光子の保存則から，定常状態の光子の輸送方程式はつぎのように書ける。

$$\vec{\Omega}\cdot\mathrm{grad}\,N(\vec{r},\vec{\Omega},E)+\mu(\vec{r},\vec{\Omega},E)N(\vec{r},\vec{\Omega},E)$$
$$=F[\vec{r},\vec{\Omega},E:N(\vec{r}',\vec{\Omega}',E')] \qquad (2\text{-}1)$$

(1)式の両辺に体積要素を乗算したとき，左辺第1項は体積要素からの単位時間当りの光子のもれを表わし，第2項は，体積要素内での単位時間当りの吸収を示す。右辺は，（$\vec{r}'$, $\vec{\Omega}'$, E'）における光子束 $N(\vec{r}',\ \vec{\Omega}',\ E')$ に起因して，位相空間内の点（$\vec{r}$, $\vec{\Omega}$, E）における体積要素内に単位時間に発生する光子の個数を表わす線源項である。ここに（$\vec{r}'$, $\vec{\Omega}'$, E'）は問題の定義されている空間内の任意の点の集合と考えられる。

線源項はつぎの3種類に分類して考えることができる。

$$\begin{aligned}F[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r}',\ \vec{\Omega}',\ E')]\\ =F^{*}[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E]\\ +F^{**}[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r},\ \vec{\Omega}',\ E')]\\ +F^{***}[\vec{r},\vec{\Omega},E:N(\vec{r}',\ \vec{\Omega}',\ E')]\end{aligned} \qquad (2\text{-}2)$$

第1項は純線源，すなわち今考えているシステムの範囲外から，単位時間に点 $(\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E)$ に供給される光子の個数であって一般に $S(\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E)$ と書かれる。第2項は，同じ位置 $\vec{r}$ にある光子の進行方向 $\vec{\Omega}'$ およびエネルギー E' が変化して位相空間の点 $(\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E)$ に入る光子を表わしている。光子と他の粒子との相互作用による散乱効果に相当する。第3項は，定義された位相空間内の任意の点 $(\vec{r}',\ \vec{\Omega}',\ E')$ における光子束によって点 $(\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E)$ に発生する光子の個数である。このような現象は，光子のエネルギー，モメンタムその他の性質が，他の粒子の生成またはその性質の変化として運ばれ，その粒子が $\vec{r}'\rightarrow\vec{r}$ の移動をした後に再び光子を生成する過程として理解される。この過程に時間遅れの含まれる場合が考えられるが，定常状態では問題にしなくてよい。線源項の現象としての検討，およびその数式としての表現については第4章で詳しく述べる。

光子の加速の現象，すなわち他の粒子との衝突で光子が加速されることはないと考えてよいから，F^{**} においては $E\leqq E'$ である。同様にして，考えているシステムに外部から電場または磁場などでエネルギーが供給され，中間媒体としての粒子が加速される場合を除いて，F^{***} においても一般に $E\leqq E'$ としてよい。

いま考えているシステムの外境界を $\vec{A}$ とすると，光子束の境界条件はつぎのように与えられる。

$$N(\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E|\vec{r}\in\vec{A})=f(\vec{A},\ \vec{\Omega},\ E) \qquad (2\text{-}3)$$

第3章　γ 線吸収係数の検討

輸送方程式（2-1）に含まれる，γ 線の吸収係数 $\mu(\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E)$ について検討する。

ここでは，原子炉や放射性同位元素からの1次および2次 γ 線の遮蔽に問題となるエネルギー範囲，すなわち 0.02 Mev～10 Mev について主として考えることにする。このエネルギー範囲では下の表に示す反応が主なものであって，これ以外の反応，主として散乱反応は断面積が非常に小さいため通常は無視して差支えない。[1)~2)]

散乱	Compton 散乱	μ_C
	Rayleigh 散乱	μ_R
吸収	光電効果	μ_{PE}
	電子対生成	μ_{PP}
	光子核反応	μ_{PN}

またさらに，放射線遮蔽の解析においてはRayleigh散乱はつぎのような理由で省略される。すなわち，この現象は原子として一体となった軌道電子による光子の coherent な散乱であり，光子のエネルギーが低く，原子番号 Z の大きい元素で断面積が大きい。光子の散乱角を θ とすると微分断面積はつぎのように書ける。

$$\frac{d\sigma_R(\theta)}{d\Omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2(1-\cos^2\theta)[F(q,\ Z)]^2 \qquad (3\text{-}1)$$

ここに $F(q,\ Z)$ は form factor と呼ばれる量で，例えば文献4) または5) に与えられている。q は光子から移るモーメンタムである。

これらの計算結果によると，Rayleigh 散乱は前方，すなわち θ の小さい範囲で多く起り θ が大きくなるに従って急激に小さくなることがわかる。いま Rayleigh 散乱光子の 3/4 が入る円錐の半頂角を θ_R とするとつぎのような近似式が導かれる[6)]。(E は Mev 単位)

$$\theta_R=2\arcsin(0.0133\,Z^{1/3}/E) \qquad (3\text{-}2)$$

すなわち，Rayleigh散乱は散乱角が小さいので遮蔽の放射線透過解析では通常無視して差支えない[1)~3)]。そのうえ，角度にわたって積分した全断面積 μ_R の値は，他の反応の断面積に較べて十分小さい。

光子核反応のうちでは，$(\gamma,\ n)$ 反応が最も予想されるものであり，ついで $(\gamma,\ p)$ 反応である。Z の大きい物質でも反応のしきいエネルギーが数 Mev 以上であり，またいま考えている光子エネルギーの範囲，すなわち高々 10 Mev の範囲では，この反応の断面積が全断面積に占める割合は1％以下である。[7)~9)]

したがって本研究においても，他の大多数の遮蔽解析と同様に，光子と物質との相互作用のうち，以下の3種類を考えることにする。すなわち，

$$\mu(E)=\mu_C(E)+\mu_{PE}(E)+\mu_{PP}(E) \qquad (3\text{-}3)$$

とする。

本研究で数値計算に使用する吸収係数 $\mu(E)$ の値は，Grodstein の表 (1957)[10)] から引用する。この表の 0.01 Mev～0.1 Mev の光電効果の吸収係数は 1959年に McGinnies によって補正された。[11)] その後1964年までに発表された幾つかの数表は，何れも上記の2つの表のデータを再編集したものであった。1965年に Davisson[12)] および Hubbell, Berger[13)] によって，その後のデータによる改訂が行なわれた。

本研究の大部分が行なわれたのは1963～1964年であるため，McGinnies によって補正された Grodstein の値を用いた。この値を附録Aに掲げる。文献12) および 13) の値も参考までに併記してあるが，鉛の場合

を除いて，いま考えているエネルギー範囲では有意の差は認められない。表記のエネルギー値間での値は，対数一対数の 4 点 Lagrange 内挿によって求めた。

なお，吸収係数への引用値は計算例にのみ関係し，理論の構成には無関係である。

第4章　線源項の検討

前章で検討した結果採り入れることにした3つの光子の反応，すなわち Compton 散乱，光電効果による吸収および電子対生成による吸収に対応して，輸送方程式 (2-1) に含まれる線源項は以下の様な反応から成るものと考えられる。第2章ですでに与えた分類 (2-2) に従うと，

$$F^{*}[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E]=S(\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E)\cdots\text{純線源} \tag{4-1}$$

$$\begin{aligned}F^{**}[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r},\ \vec{\Omega}',\ E')] &= F_C[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r},\ \vec{\Omega}',\ E')]\\ &\cdots\cdots\text{Compton 散乱}\end{aligned} \tag{4-2}$$

$$\begin{aligned}F^{***}[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r}',\ \vec{\Omega}',\ E')] &= F_F[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r}',\ \vec{\Omega}',\ E')]\\ &\cdots\cdots\text{螢光輻射}\\ &+F_B[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r}',\ \vec{\Omega}',\ E')]\\ &\cdots\cdots\text{制動輻射}\\ &+F_A[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r}',\ \vec{\Omega}',\ E')]\\ &\cdots\cdots\text{陽電子消滅輻射}\end{aligned} \tag{4-3}$$

となる。

純線源は，位置 $\vec{r}$ における体積要素 dV 内に，線源によってシステムに毎秒加えられる光子の個数のうち，そのエネルギーが E から dE の範囲にあり，かつその進行方向が $\vec{\Omega}$ の周囲の $d\Omega$ 内にある個数が $S(\vec{r},\vec{\Omega},E)dVd\Omega dE$ であるものとして定義される。

$F_C[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r},\ \vec{\Omega}',\ E')]\,dVd\Omega dE$ は，位置 $\vec{r}$ における体積要素 dV 内のすべての光子束のうち Compton 散乱を起して，その結果位相空間の点 $(\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E)$ における体積要素 $dVd\Omega dE$ に入る光子の個数である。第2章ですでに述べたように，散乱の際のエネルギー加速はないから $E'\geqq E$ である。したがって，Compton 散乱の微分断面積を，

$$\frac{d\mu_C(\vec{r},\ \vec{\Omega}'\to\vec{\Omega},\ E'\to E)}{d\Omega dE}$$

とすると F_C はつぎのように表現される。

$$\begin{aligned}&F_C[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r},\ \vec{\Omega}',\ E')]\\ &=\int_E^\infty dE'\int_{4\pi}N(\vec{r},\ \vec{\Omega}',\ E')\\ &\quad\times\frac{d\mu_C(\vec{r},\ \vec{\Omega}'\to\vec{\Omega},\ E'\to E)}{d\Omega dE}d\Omega'\end{aligned} \tag{4-4}$$

衝突する電子が自由電子であるとすると，μ_C は位置 $\vec{r}$ における単位体積当りの電子の個数 $n(\vec{r})$ に比例する。すなわち，

$$\frac{d\mu_C(\vec{r},\ \vec{\Omega}'\to\vec{\Omega},\ E'\to E)}{d\Omega dE}=n(\vec{r})\frac{d\sigma_C(\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega},\ E'\to E)}{d\Omega dE} \tag{4-5}$$

またさらに，電子の速度は光子に比較して無視できるから，Compton 散乱の前後での光子の波長 λ' および λ と，散乱角の余弦との間には次式のような関係が成立する。

$$\lambda-\lambda'=1-\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega} \tag{4-6}$$

λ は Compton 波長単位である。すなわち，光子のエネルギーが E Mev とすると，

$$\lambda=mc^2/E \tag{4-7}$$

Compton 散乱の現象に関しては，エネルギー E を変量として扱うよりも波長 λ について考えた方が式の表現が簡単になる。したがって，以下では λ を変量として考える。

よく知られているように，自由静止電子での微分断面積はつぎの Klein-Nishina の式で与えられる。

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_C(\lambda',\ \vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})}{d\Omega}&=\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{\lambda'}{1+\lambda'-\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega}}\right)^2\\ &\times\left[\frac{\lambda'}{1+\lambda'-\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega}}+\frac{1+\lambda'-\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega}}{\lambda'}\right.\\ &\left.-1+(\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})^2\right]\end{aligned} \tag{4-8}$$

したがって (4-6) の関係式と併せて，

$$\frac{d\sigma_C(\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega},\ \lambda'\to\lambda)}{d\Omega d\lambda}=\frac{d\sigma_C(\lambda',\ \vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})}{d\Omega}\delta(1+\lambda'-\lambda-\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega}) \tag{4-9}$$

が得られる。この断面積を F_C の定義 (4-4) に代入すると，Compton 散乱による線源項はつぎのように表現される。

$$\begin{aligned}&F_C[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ \lambda:N(\vec{r},\ \vec{\Omega}',\ \lambda')]\\ &=n(\vec{r})\int_{\lambda-2}^{\lambda}d\lambda'\int_{4\pi}N(\vec{r},\ \vec{\Omega}',\ \lambda')\end{aligned}$$

$$\times\frac{d\sigma_C(\lambda',\ \overrightarrow{\Omega'}\cdot\overrightarrow{\Omega})}{d\Omega}\delta(1+\lambda'-\lambda-\overrightarrow{\Omega'}\cdot\overrightarrow{\Omega})d\Omega' \tag{4-10}$$

ただしエネルギーEから波長λへの変換（4-7）をすでに行ってある。

つぎに，光子の吸収から再発生までに他の粒子が中間に介在する現象に起因する線源項を考える。ただしここでの論議は，あくまでも遮蔽解析に及ぼすこれらの現象の影響の程度を知る程度に止め，余りに詳細に立ち入った検討は行なわない。

光子の光電効果により軌道電子を失った原子から，螢光輻射により発生する光子，すなわち特性X線による線源項を求めるとつぎのようになる。ただし原子はその間殆ど移動しないから $|r'-r|=0$ と置ける。すなわち，

$$F_F[\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{\Omega},\ E:N(\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{\Omega'},\ E')]$$
$$=\frac{1}{4\pi}\sum_m\sum_l\sum_{l'}\Big[n_m(\overrightarrow{r})\,\phi^{l'}_{ml}\,\delta(E-E^{l'}_{ml})$$
$$\times\int_E^\infty\sigma^l_m(E')\,dE'\int_{4\pi}N(\overrightarrow{r},\ \overrightarrow{\Omega'},\ E')d\Omega'\Big] \tag{4-11}$$

ここに $n_m(\overrightarrow{r})$：第m原子の数／単位体積。

$\sigma^l_m(E)$：第m原子の第l準位の軌道電子に対する，エネルギーEの光子による光電効果のミクロ断面積。

$\sum\sigma^l(E)=\sigma_{PE}(E)$

$E^{l'}_{ml}$：第l'軌道電子の第l軌道への遷移エネルギー

$\phi^{l'}_{ml}$：第l'軌道電子が空位の第l軌道へ遷移し，しかも光子を放出する確率。

今考えている光子のエネルギー範囲，0.02 Mev～10 Mev の範囲では，重い元素のK殻の反応が起るだけである。すなわち，主な原子に対するエネルギー準位のうち，0.01 Mev 以上のものは下の表の通りである。[13)]

Z	原子名	エネルギー準位 (Mev) K	L_1	L_2	L_3
82	Pb	0.088001	0.015870	0.015207	0.013044
74	W	0.069508	0.012090	0.011535	0.010198
50	Sn	0.029190			
42	Mo	0.020002			

K殻に対する遷移確率は近似的に，

$\phi_K\approx1/(1+1.12\times10^6/Z^4)$

と表わされる。[14)] 詳細な議論は別としてここで問題になる原子では確率は1にかなり近いものと考えてよい。

さて前記のエネルギー準位表で見るように，放出される特性X線のエネルギーはいま考えているエネルギー範囲の下限に近く，遮蔽解析には大きな影響を与えないと思われる。螢光輻射の影響が比較的に大きいと考えられる，重い元素すなわち鉛に，低いエネルギー（0.5 Mev）の光子が入射した場合の透過線量率の試算においてさえ影響は2％であった。[15)]

以上の検討の結果，螢光輻射による線源項はこれを無視することにする。ただし，一般のγ線透過の解析で注目されるより低い，すなわち，ここで選んだ下限エネルギーよりさらに低いエネルギーについての情報が必要な特別な場合には，この効果を無視するわけには行かない。

光子の再発生に属する現象の第2として電子の制動輻射について検討する。

光子はつぎのような反応の結果，電子を加速し，または生成させる。すなわち，

光電効果の光電子
Compton 散乱による散乱電子
電子対生成による生成電子
電子を相手とする電子対生成（triplet production）による反跳電子

運動している電子（T Mev）は，原子番号Zなる物質中で制動輻射により光子を放出するがそのエネルギー総量はつぎのようになる。[16)]

$$\int EN(E)dE\approx TZ\frac{1.98\times10^{-4}(1.96T+2)}{1+0.35\log_{10}\left(\frac{82}{Z}\right)} \tag{4-12}$$

また生成光子のエネルギースペクトル$N(E)$の形は近似式として与えられている。[17)]

$$N(E)\propto\left[1-\frac{E}{T}-\frac{3}{4}\frac{E}{T}ln\left(\frac{T}{E}\right)\right] \tag{4-13}$$

上記の2つの式は，いずれも種々な仮定と近似の結果得られたものであるが，以下のような推論は可能である。

すなわち，いま考えているエネルギー範囲の光子から生成または加速された電子のエネルギーTが，余り高いものではないことは現象を検討すれば明らかである。しかも，このエネルギーTなる電子から輻射される光子のエネルギー量は（4-12）式で見るように減少

する。さらに，生成する光子のスペクトルがエネルギーの低い範囲に集中していることは (4-13) 式から推定できる。したがって，ここでは制動輻射の影響は無視することにする。本論文で扱っている範囲より高いエネルギーの光子の透過の解析，例えば粒子加速器の遮蔽，ではこの効果を重視する必要がある。

なお，著者は本章において各線源項Fの解析計算に適した表現を与えているが制動輻射については省略する。制動輻射により生成する光子の角度分布には前方ピークが存在することが実験的に確かめられているので，数式上の表現にはこれを繰り入れることが必要である。また電子の range は比較的に長いので，形式的な光子の線源項の中に電子の透過計算の介在することが困難を増している。

最後に，光子による電子対生成から発生した陽電子が電子と再び結合して発生する，いわゆる消滅輻射による光子を考える。

$$F_A[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r'},\ \vec{\Omega}',\ E')]$$
$$=\frac{1}{4\pi}\int_V dV'\int_{E_{th}}^{\infty} G(\vec{r'}\to\vec{r})\Psi(E:E',\ |\vec{r'}-\vec{r}\,|)$$
$$\times\mu_{PP}(\vec{r'},\ E')dE'\int_{4\pi}N(\vec{r'},\vec{\Omega}',E')d\Omega' \tag{4-14}$$

ここに dV' は $\vec{r'}$ における体積要素。

$G(\vec{r'}\to\vec{r})dV$：陽電子が $\vec{r'}$ から $\vec{r}$ における体積要素 dV に達する確率。

$\Psi(E:E',\ |\vec{r'}-\vec{r}|):E'$ なるエネルギーの光子から発生した陽電子が，$|\vec{r'}-\vec{r}|$ だけ移動した後に消滅して，輻射する光子のエネルギースペクトル。

E_{th}：電子対生成のしきいエネルギー。

$E_{th}=2\,mc^2$　　核に対する反応

$E_{th}=4\,mc^2$　　電子に対する反応

輻射光子の角度分布は等方と仮定してある。

陽電子は，低い運動エネルギーにおいて消滅する確率が大きいので $|\vec{r'}-\vec{r}\,|$ は有限値である。しかしながらその値は小さく，一般に，

$$G(\vec{r'}\to\vec{r})=\delta(|\vec{r'}-\vec{r}\,|)$$

としてよい。また，消滅を起すときの陽電子の運動エネルギーを無視すると，

$$\Psi(E:E',\ |\vec{r'}-\vec{r}\,|)=2\delta(E-mc^2)$$

とおける。したがって (4-14) 式は簡単に，

$$F_A[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r},\ \vec{\Omega}',\ E')]$$
$$=\frac{1}{2\pi}\delta(E-mc^2)\int_{E_{th}}^{\infty}\mu_{PP}(\vec{r},\ E')dE'$$
$$\times\int_{4\pi}N(\vec{r},\ \Omega',\ E')d\Omega' \tag{4-15}$$

と書ける。

電子対生成に伴う消滅輻射は，光子エネルギーが高い場合はその影響が無視できないのにもかかわらず，現在までのほとんどすべての γ 線遮蔽の透過解析において省略されてきた。(例えば文献 1)〜3)) 本研究においては，この効果も含めて理論を組み立てることとする。

すなわち以降の解析に用いられる線源項はつぎのようにとる。

$$F[\vec{r},\ \Omega,\ E:N(\vec{r},\ \Omega',\ E')]$$
$$=S(\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E)$$
$$+F_C[\vec{r},\ \vec{\Omega},\ E:N(\vec{r},\ \vec{\Omega}',\ E')]$$
$$+F_A[\vec{r},\ \Omega,\ E:N(\vec{r},\ \vec{\Omega}',\ E')] \tag{4-16}$$

しかして F_C は (4-10) 式で，また F_A は(4-15) 式で与えられるとする。ただし，すでに注意したように (4-10) 式はエネルギーEの代りに波長 λ について定義されている。もし特に，E についての定義が必要ならば，つぎの微分断面積を用いれば簡単に求められる。すなわち，

$$\frac{d\sigma_C(\vec{\Omega}'\to\vec{\Omega},\ E'\to E)}{d\Omega dE}$$
$$=\frac{d\sigma_C(\lambda',\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})}{d\Omega}\frac{\delta(1+\lambda'-\lambda-\vec{\Omega}'\cdot\vec{\Omega})mc^2}{E^2} \tag{4-17}$$

とすればよく，また λ と E との関係は (4-7) で与えられている。

第5章　Compton 散乱線源項の積分変換

互いに垂直な2つの基準となる単位ベクトル $\vec{R}$ および $\vec{Q}$ をとり，それに対して，散乱前および散乱後の光子の進行方向，$\vec{\Omega}'$ および $\vec{\Omega}$，の角度成分を以下のように定義する。

$$\vec{\Omega}\cdot\vec{R}=\omega$$
$$(\vec{\Omega}\times\vec{R})\cdot(\vec{Q}\times\vec{R})=|\vec{\Omega}\times\vec{R}|\cos\psi$$
$$\vec{\Omega}'\cdot\vec{R}=\omega'$$

$$(\vec{\Omega}' \times \vec{R}) \cdot (\vec{Q} \times \vec{R}) = |\vec{\Omega}' \times \vec{R}| \cos \psi'$$

$$\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega} = \eta$$

$$\frac{(\vec{\Omega} \times \vec{R}) \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{\Omega}')}{|\vec{\Omega} \times \vec{R}| \quad |\vec{\Omega} \times \vec{\Omega}'|} = \cos \phi$$

散乱後の光子の波長 λ，および進行方向$\vec{\Omega}$を基準にして考えると，Compton 散乱では，散乱前の光子の状態は散乱による進行方向の振れを示す2つの値，すなわち η および ϕ によって1義的に決められる。(4-6) の関係式，および立体角の加法定理によって上記の性質を関係式として書き現すとつぎのようになる。

$$\lambda'(\eta) = \lambda - 1 + \eta \tag{5-1}$$

$$\omega'(\eta, \phi) = \omega\eta + \sqrt{1-\omega^2}\sqrt{1-\eta^2}\cos\phi \tag{5-2}$$

$$\psi'(\eta, \phi) = \psi + \arccos\left[\frac{\eta - \omega[\omega'(\eta, \phi)]}{\sqrt{1-\omega^2}\sqrt{1-[\omega'(\eta, \phi)]^2}}\right] \tag{5-3}$$

また，(5-2)，(5-3) から形式的に，

$$\vec{\Omega}' = \vec{\Omega}'(\eta, \phi)$$

と表現することもできる。

このような新しい2つの変量について， Compton 散乱による線源項 (4-10) は容易に書き直せて，

$$F_C[\vec{r}, \vec{\Omega}, \lambda : N(\vec{r}, \vec{\Omega}', \lambda')] = n(\vec{r})\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} N(\vec{r}, \vec{\Omega}'(\eta, \phi), \lambda'(\eta)) \times \frac{d\sigma_C(\lambda'(\eta), \lambda)}{d\Omega} d\eta \tag{5-4}$$

となる。ここに，

$$\frac{d\sigma_C(\lambda'(\eta), \lambda)}{d\Omega} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(\frac{\lambda'(\eta)}{\lambda}\right)^2 \times \left[\frac{\lambda'(\eta)}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda'(\eta)} + \{\lambda'(\eta) - \lambda\}\{2 + \lambda'(\eta) - \lambda\}\right] \tag{5-5}$$

である。

第6章　平板形状における基礎輸送方程式

基準となる単位ベクトル$\vec{R}$を考える。これについて，

$$\vec{r} \cdot \vec{R} = z$$

とおく。1次元平板形状では，すべての量は

$$z = \text{const.}$$

なる平面上では位置に無関係に一定である。

また同様に，すべての量は角度成分 ψ には無関係である。

このような1次元平板形状に対する光子の輸送方程式は，(2-1) からつぎのように導かれる。ただし，本章以降では，変量としてエネルギー E の代りに波長 λ を用いる。すなわち，

$$N(z, \omega, E)d\Omega dE = N(z, \omega, \lambda)d\Omega d\lambda \tag{6-1}$$

と定義する。輸送方程式は，

$$\omega\frac{\partial}{\partial z}N(z, \omega, \lambda) + \mu(z, \lambda)N(z, \omega, \lambda) = F[z, \omega, \lambda : N(z, \omega', \lambda')] \tag{6-2}$$

となり，線源項は(4-16)，(5-4)，(4-15) から下のように表わされる。

$$\begin{aligned} F[z, \omega, \lambda : N(z, \omega', \lambda')] &= S^*(z, \omega, \lambda) \\ &\quad + F_C[z, \omega, \lambda : N(z, \omega', \lambda')] \\ &\quad + F_A[z, \omega, \lambda : N(z, \omega', \lambda')] \end{aligned} \tag{6-3}$$

$$F_C[z, \omega, \lambda : N(z, \omega', \lambda')] = 2n(z)\int_0^{\pi} d\phi \int_{-1}^{1} N(z, \omega'(\eta, \phi), \lambda'(\eta)) \times \frac{d\sigma_C(\lambda'(\eta), \lambda)}{d\Omega} d\eta \tag{6-4}$$

$$F_A[z, \omega, \lambda : N(z, \omega', \lambda')] = \delta(\lambda - 1)\int_0^{\lambda_{th}} \mu_{PP}(z, \lambda')d\lambda' \times \int_{-1}^{1} N(z, \omega', \lambda')d\omega' \tag{6-5}$$

ここに λ_{th} は電子対生成反応のしきい値で

$\lambda_{th} = 1/2$ (Compton 波長単位)

である。純線源は，

$$S^*(z, \omega, \lambda) = S(z, \omega, E)\frac{dE}{d\lambda}$$

で与えられる。

γ 線の透過計算では，第2章で定義された個数束 $N(z, \omega, E)$ よりも，むしろつぎのように定義されるエネルギー束 $I(z, \omega, E)$ を考えた方が都合のよいことが多い。

$$I(z, \omega, E) = E \cdot N(z, \omega, E) \tag{6-6}$$

エネルギー E と波長 λ との関係式 (4-7) を使って (6-1) なる変換式を変形すると，

$$E \cdot N(z, \omega, E) = \lambda \cdot N(z, \omega, \lambda) \tag{6-7}$$

となる。したがってエネルギー束 $I(z, \omega, \lambda)$ を下のように定義し，以降の計算はすべてこのエネルギー束について行なうことにする。

$$I(z, \omega, \lambda)=\lambda \cdot N(z, \omega, \lambda) \qquad (6\text{-}8)$$

したがって，求める基礎輸送方程式は，

$$\omega \frac{\partial}{\partial z} I(z, \omega, \lambda)+\mu(z, \lambda) I(z, \omega, \lambda) =F[z, \omega, \lambda : I(z, \omega', \lambda')] \qquad (6\text{-}9)$$

となる。ここに線源項 $F[z, \omega, \lambda : I(z, \omega', \lambda')]$ は単に (6-3)～(6-5) で $N(z, \omega, \lambda)$ に $I(z, \omega, \lambda)$ を代入したものではなく，つぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} F[z, \omega, \lambda : I(z, \omega', \lambda')] &=S(z, \omega, \lambda) \\ &\quad +F_C[z, \omega, \lambda : I(z, \omega', \lambda')] \\ &\quad +F_A[z, \omega, \lambda : I(z, \omega', \lambda')] \end{aligned} \qquad (6\text{-}10)$$

$$\begin{aligned} S(z, \omega, \lambda) &=\lambda \cdot S^*(z, \omega, \lambda) \\ &=E \cdot S(z, \omega, E) \end{aligned} \qquad (6\text{-}11)$$

$$\begin{aligned} F_C[z, \omega, \lambda : I(z, \omega', \lambda')] &=\frac{n(z)}{\pi}\int_0^\pi d\phi \int_{-1}^1 I(z, \omega'(\eta, \phi), \lambda'(\eta)) \\ &\quad \times K(\lambda'(\eta), \lambda) d\eta \end{aligned} \qquad (6\text{-}12)$$

$$\begin{aligned} F_A[z, \omega, \lambda : I(z, \omega', \lambda')] &=\delta(\lambda-1)\int_0^{1/2} \frac{\lambda}{\lambda'} \mu_{PP}(z, \lambda') d\lambda' \\ &\quad \times \int_{-1}^1 I(z, \omega', \lambda') d\omega' \end{aligned} \qquad (6\text{-}13)$$

また $K(\lambda', \lambda)$ は慣用的に用いられる Compton の微分断面積の1表現であって，[1)~3)] つぎのように定義される。

$$K(\lambda', \lambda) = 2\pi \frac{\lambda}{\lambda'} \frac{d\sigma_C(\lambda', \lambda)}{d\Omega} \qquad (6\text{-}14)$$

すなわち，(5-5) から，

$$\mathrm{K}(\lambda', \lambda) =\frac{3}{8}\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)\left[\frac{\lambda'}{\lambda}+\frac{\lambda}{\lambda'} + (\lambda'-\lambda)(2+\lambda'-\lambda)\right]\sigma_T : \lambda-2 \leqq \lambda' \leqq \lambda \qquad (6\text{-}15)$$

となる。ただし，σ_T は断面積の単位であって，Thomson 単位と称せられる。

$$\sigma_T =\frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \fallingdotseq 0.665\times 10^{-24}\, cm^2$$

Compton散乱の線源項 (6-12) に現れる関数 $\lambda'(\eta)$ および $\omega'(\eta, \phi)$ は第5章ですでに定義したが便宜上再録しておく。

$$\lambda'(\eta)=\lambda-1+\eta \qquad (5\text{-}1)$$

$$\omega'(\eta, \phi)=\omega\eta+\sqrt{1-\omega^2}\sqrt{1-\eta^2}\cos\phi \qquad (5\text{-}2)$$

考えている遮蔽体の2つの外表面をそれぞれ $z=0$ および $z=A$，ただし $A>0$ とする。2つの関数，$f_1(\omega, \lambda)$ および $f_2(\omega, \lambda)$ を決めると，境界条件はつぎのように与えられる。

$$\left.\begin{aligned} I(0, \omega, \lambda)&=f_1(\omega, \lambda) & 1\geqq\omega>0 \\ I(A, \omega, \lambda)&=f_2(\omega, \lambda) & -1\leqq\omega<0 \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}16)$$

以上要約すると，本研究第I部においては，境界条件 (6-16) の下において基礎輸送方程式 (6-9) を解くことが課題である。また第4章および第5章で検討した結果，輸送方程式に含まれる線源項は (6-10)～(6-13) の形をとることがわかった。線源項に含まれる積分をどのようにして行なうかが解かれるべき第2の課題である。以下第7章～第10章において解法を述べる。

第7章　輸送方程式の直接積分

位置を示す変量 z を，外境界0および A の間で任意の適当な間隔で a 個の区間に分割し，その分点を $z_i(i=0, 1, 2, \cdots\cdots, a)$ とする。内部の物質層間の境界に分点の1つが一致するようにとられることが多い。この場合には，物質常数は分点の両側で異なる2つの値が定義される。したがって，一般に z_i においてつぎのような記号を定義する。

$$\lim_{\Delta z\to 0} \mu(z_i+\Delta z, \lambda)=\mu(z_i^+, \lambda)$$

$$\lim_{\Delta z\to 0} \mu(z_i-\Delta z, \lambda)=\mu(z_i^-, \lambda)$$

$$\lim_{\Delta z\to 0} F[z_i+\Delta z, \omega, \lambda : I(z_i, \omega', \lambda')] = F[z_i^+, \omega, \lambda : I(z_i, \omega', \lambda')]$$

$$\lim_{\Delta z\to 0} F[z_i-\Delta z, \omega, \lambda : I(z_i, \omega', \lambda')] = F[z_i^-, \omega, \lambda : I(z_i, \omega', \lambda')]$$

他の量もこれに準じて表現する。z_i が，異なる物質の内部境界と一致する場合は，z_i^+ での値と z_i^- での値とは等しくない。境界以外では2つの値は一致する。なおエネルギー束 $I(z_i, \omega, \lambda)$ は如何なる場合にも連続である。特に，

$$\begin{cases} z_0=0 \\ z_a=A \end{cases}$$

と定義する。

つぎに，ω を任意の適当な間隔で $Q+1$ 個の区間に

分割し，その分点を ω_q ($q=0, 1, 2, \cdots\cdots, Q, Q+1$) とする。特に，

$$\begin{cases} \omega_0=1 \\ \omega_{Q+1}=-1 \end{cases}$$

とする。さらに，$Q+2$ 個の ω のメッシュ点 ω_q^* をつぎのような条件で適当に選ぶ。

$$\begin{cases} \omega_0^*=\omega_0=1 \\ \omega_q \geqq \omega_q^* > \omega_{q+1} : q=1, 2, \cdots\cdots, Q-1 \\ \omega_Q \geqq \omega_Q^* \geqq \omega_{Q+1} \\ \omega_{Q+1}^* = \omega_{Q+1} = -1 \end{cases}$$

同様にして，光子の波長 λ の必要とする区間内に分点 λ_j ($j=0, 1, 2\cdots\cdots$) を選ぶ。λ_0 としては，考えるべき最高のエネルギーに対応する波長をとる。また λ_j^* を適当にとり，つぎのような関係を満足するとする。

$$\lambda_j \leqq \lambda_j^* < \lambda_{j+1} : j=0, 1, 2\cdots\cdots$$

以降では，つぎのような略記法を用いる。

$$F[z, \omega, \lambda : I(z, \omega', \lambda')] = F(z, \omega, \lambda)$$

上記の諸定義の下で，

$$\omega=\omega_q^* \quad : q=0, 1, 2, \cdots\cdots, Q, Q+1$$

$$\lambda=\lambda_j^* \quad : j=0, 1, 2\cdots\cdots$$

なる点での輸送方程式は，

$$\frac{\partial}{\partial z} I(z, \omega_q^*, \lambda_j^*) + \frac{\mu(z, \lambda_j^*)}{\omega_q^*} I(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)$$

$$= \frac{1}{\omega_q^*} F(z, \omega_q^*, \lambda_j^*) \qquad (7\text{-}1)$$

となる。

輸送方程式中に含まれる $\mu(z, \lambda_j^*)$ は物質常数であるから当然既知である。多重物質層の境界と分点とを一致させることにすると，$\mu(z, \lambda_j^*)$ は相隣る2つの分点 z_{i-1} と z_i との間では一定値，$\mu(z_{i-1}, \lambda_j^*)$ をとると考えてよい。特に，$\mu(z, \lambda_j^*)$ が分点間で z の関数として変化する場合でも，分点の間隔が適当であって上記の仮定が成立するものとする。したがって，

$$\mu(z_{i-1}^+, \lambda) = \mu(z_i^-, \lambda) = \mu(z_{i-1}, \lambda)$$

とおく。

次に $F(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)$ には既知の成分と，これから計算によって求められるべき未知の部分とが含まれている。輸送方程式 (7-1) を解くためには，$F(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)$ が形式的に既知であると一旦仮定して計算を進める。この際に z の各分点における $F(z_i, \omega_q^*, \lambda_j^*)$ の値がすでに求められていることの他に，分点間での z による変化の状態が適当に仮定される必要がある。なるべく簡単な関数を選ぶことにするとつぎの2つが考えられる。

(i) $F(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)$ は分点 z_{i-1}, z_i で一定値，
$F(z_{i-1}^+, \omega_q^*, \lambda_j^*) = F(z_i^-, \omega_q^*, \lambda_j^*)$ をとる。
……………(仮定7-1)

(ii) $F(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)$ は分点 z_{i-1}, z_i 間で z の1次関数として変化する。…………(仮定7-2)

本研究の目的である遮蔽解析においては，透過距離が大きく，したがって z の分点間隔が大きくとられることが多い。或いは，換言すると $\mu(z_{i-1}, \lambda_j)(z_i-z_{i-1})$ の値が大きくなる可能性が強い。第12章に例を上げるように，(仮定7-1) によると誤差が大きいばかりでなく，負のエネルギー束が得られる場合が生じて適当でない。したがって本研究においては (仮定 7-2) を採用する。

上記の仮定の下に，輸送方程式 (7-1) を解いてエネルギー束の各分点での値 $I(z_i, \omega_q^*, \lambda_j^*)$ を求めると以下のようになる。[18] ただし境界条件は，

$$\left.\begin{aligned} I(z_0, \omega_q^*, \lambda_j^*) &= f_1(\omega_q^*, \lambda_j^*) : 1 \geqq \omega_q^* > 0 \\ I(z_a, \omega_q^*, \lambda_j^*) &= f_2(\omega_q^*, \lambda_j^*) : -1 \leqq \omega_q^* < 0 \end{aligned}\right\} \quad (7\text{-}2)$$

とする。

(i) $1 \geqq \omega_q^* > 0$

$$I(z_0, \omega_q^*, \lambda_j^*) = f_1(\omega_q^*, \lambda_j^*) \qquad (7\text{-}3)$$

$$\begin{aligned} I(z_i, \omega_q^*, \lambda_j^*) &= \exp[-\mu(z_{i-1}, \lambda_j^*)\Delta z_i/\omega_q^*]\, I(z_{i-1}, \omega_q^*, \lambda_j^*) \\ &\quad + \alpha_{iq}^j F(z_i^-, \omega_q^*, \lambda_j^*) \\ &\quad + \beta_{iq}^j F(z_{i-1}^+, \omega_q^*, \lambda_j^*) \qquad (7\text{-}4) \\ &\quad : i=1, 2, 3, \cdots\cdots, a \end{aligned}$$

(ii) $-1 \leqq \omega_q^* < 0$

$$I(z_a, \omega_q^*, \lambda_j^*) = f_2(\omega_q^*, \lambda_j^*) \qquad (7\text{-}5)$$

$$I(z_i, \omega_q^*, \lambda_j^*)$$

$$=\exp[\mu(z_i,\ \lambda_j^*)\Delta z_{i+1}/\omega_q^*]\,I(z_{i+1},\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$$
$$+\ \alpha_{(i+1)q}^{j}F(z_i^+,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$$
$$+\ \beta_{(i+1)q}^{j}F(z_{i+1}^-,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*) \quad (7\text{-}6)$$
$$:i=a-1,\ a-2,\ \cdots\cdots,\ 2,\ 1,\ 0$$

ここに，

$$\alpha_{iq}^{j}=\frac{1}{\mu(z_{i-1},\ \lambda_j^*)}\left[1-\frac{|\omega_q^*|}{\mu(z_{i-1},\ \lambda_j^*)\Delta z_i}\left\{1-\exp\left(-\frac{\mu(z_{i-1},\ \lambda_j^*)\Delta z_i}{|\omega_q^*|}\right)\right\}\right] \quad (7\text{-}7)$$

$$\beta_{iq}^{j}=\frac{1}{\mu(z_{i-1},\ \lambda_j^*)}\left[\left(1+\frac{|\omega_q^*|}{\mu(z_{i-1},\ \lambda_j^*)\Delta z_i}\right)\times\left\{1-\exp\left(-\frac{\mu(z_{i-1},\ \lambda_j^*)\Delta z_i}{|\omega_q^*|}\right)\right\}-1\right] \quad (7\text{-}8)$$

であり，また

$$\Delta z_i=z_i-z_{i-1} \quad (7\text{-}9)$$

とする。

以上のようにして求められた，有限個の各メッシュ点でのエネルギー束の値 $I(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ から，線源項を算出する方法が残された問題である。線源項 (6-10) の内の2つの成分 F_C, F_A は，$I(z,\ \omega',\ \lambda')$ を積分することによって求められる，(6-12) および(6-13)。したがって $I(z,\ \omega',\ \lambda')$ の各分点での値のみでなく，その中間における値も必要とされる。この分点間での変化の正確な状況は，一般には判っていないことが多いから，適当と思われる仮定によって積分を行なわなければならない。

ω および λ の分点間の巾が小さいことを前提とすると，つぎのような簡単な関数形を仮定できる。

(i) $I(z_i,\ \omega,\ \lambda)$ は分点，ω_q, ω_{q+1} 間で一定の値，$I(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda)$ をとる。
$K(\lambda,\ \lambda_J)\,I(z_i,\ \omega,\ \lambda)$ は分点 λ_j, λ_{j+1} 間で一定値，$K(\lambda_j^*,\ \lambda_J)\ I(z_i,\ \omega,\ \lambda_j^*)$ をとる。
$\frac{1}{\lambda}\mu_{PP}(z_i,\ \lambda)\,I(z_i,\ \omega,\ \lambda)$ は分点 λ_j, λ_{j+1} 間で一定値，$\frac{1}{\lambda_j^*}\mu_{PP}(z_i,\ \lambda_j^*)I(z_i,\ \omega,\ \lambda_j^*)$ をとる。 (仮定 7-3)

(ii) $I(z_i,\ \omega,\ \lambda)$ は分点 ω_q, ω_{q+1} 間で ω の1次関数として変化する。
$K(\lambda,\ \lambda_J)\,I(z_i,\ \omega,\ \lambda)$ は分点 λ_j, λ_{j+1} 間で λ の1次関数として変化する。
$\frac{1}{\lambda}\mu_{PP}(z_i,\ \lambda)\,I(z_i,\ \omega,\ \lambda)$ は分点 λ_j, λ_{j+1} 間で λ の1次関数として変化する。 (仮定 7-4)

(iii) $I(z_i,\ \omega,\ \lambda)$ は ω の全区間 $1\geqq\omega\geqq-1$ にわたって，ω の Legendre 多項式の有限項の和で表わされる。すなわち，

$$I(z_i,\omega,\lambda)=\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{4\pi}I_l(z_i,\ \lambda)P_l(\omega)$$

とする。
$I(z_i,\ \omega,\ \lambda)$ は分点 λ_j, λ_{j+1} 間で λ の1次関数として変化する。
$\frac{1}{\lambda}\mu_{PP}(z_i,\ \lambda)\,I(z_i,\ \omega,\ \lambda)$ は分点 λ_j, λ_{j+1} 間で λ の1次関数として変化する。 (仮定 7-5)

すでに述べた輸送方程式の解，(7-3)～(7-9) と (仮定 7-3) を組み合わせた解法を第8章に，(仮定7-4) によるものを第10章に述べる。また (仮定 7-5) に基ずく解法を第11章に記す。第9章では，単1エネルギー，単1方向線源の問題に関する特別な取扱いを (仮定 7-3) に基ずいて求める。

本章以降では，エネルギー束 $I(z,\ \omega,\ \lambda)$ を2つ部分に分けて扱うことにする。すなわち，

$$\omega\frac{\partial}{\partial z}I(z,\ \omega,\ \lambda)+\mu(z,\ \lambda)I(z,\ \omega,\ \lambda)$$
$$=F\,[z,\ \omega,\ \lambda:I(z,\ \omega',\ \lambda')]$$
$$=S(z,\ \omega,\ \lambda)$$
$$+F_C\,[z,\ \omega,\ \lambda:I(z,\ \omega',\ \lambda')] \quad (7\text{-}10)$$

$$\omega\frac{\partial}{\partial z}I_A(z,\ \omega,\ \lambda)+\mu(z,\ \lambda)\,I_A(z,\ \omega,\ \lambda)$$
$$=F_A\,[z,\ \omega,\ \lambda:I(z,\ \omega',\ \lambda')]$$
$$+F_C\,[z,\ \omega,\ \lambda:I_A(z,\ \omega',\ \lambda')] \quad (7\text{-}11)$$

とおく。$I(z,\ \omega,\ \lambda)$ は新たに定義されて，

$$(\text{エネルギー束})=I(z,\ \omega,\ \lambda)+I_A(z,\ \omega,\ \lambda) \quad (7\text{-}12)$$

このように，Compton 散乱と純線源を考慮に入れたエネルギー束 $I(z,\ \omega,\ \lambda)$ を主体として扱い，一方，電子対生成に伴う陽電子消滅輻射によるエネルギー束 $I_A(z,\ \omega,\ \lambda)$ を別に扱う理由は幾つかある。ただし，エネルギー範囲は，原子炉および放射性同位元素の遮蔽に必要な，0.02～10 Mev について考えている。

(1) 基礎輸送方程式がエネルギー束の線形関数である。

(2) $I(z,\ \omega,\ \lambda)$ は今考えているエネルギー範囲全

域について存在する。しかるに，$I_A(z, \omega, \lambda)$ は $E \leqq 1mc^2$ にのみ存在する。

(3) $I(z, \omega, \lambda)$ が $E \geqq 2mc^2$ で存在しなければ $I_A(z, \omega, \lambda)$ は全く存在しない。

(4) $I(z, \omega, \lambda)$ は $I_A(z, \omega, \lambda)$ とは全く独立に計算される。独立に確定した $I(z, \omega', \lambda')$ から $F_A[z, \omega, \lambda : I(z, \omega', \lambda')]$ も一種の線源として一義に求められる。この線源によって $I_A(z, \omega, \lambda)$ が $I(z, A, \lambda)$ と同様な手順で，独立に計算される。

(5) 解析の目的によっては，$I_A(z, \omega, \lambda)$ を無視することが多い。例えば Moments 法の計算では $I(z, \omega, \lambda)$ のみを求めている。[1)~3)] 結果の比較には $I(z, \omega, \lambda)$ と $I_A(z, \omega, \lambda)$ を別に扱うのが便利である。

以上のような理由で以下では，エネルギー束を，主体となる $I(z, \omega, \lambda)$ と，その補正項としての $I_A(z, \omega, \lambda)$ とに区分して扱うことにする。

第8章　直接積分解法（その1，SELENE 1）

本章では，（仮定7-3）に従って線源項の積分(6-12)および (6-13) を行ない，その結果によって輸送方程式 (7-10) および (7-11) を解く方法を述べる。

§ 8.1　$F_C[z, \omega, \lambda : I(z, \omega', \lambda')]$ の計算

Compton 散乱の結果，波長 λ^*_{j-k} から，波長 λ^*_j に減速する場合の散乱角の余弦，η^{j*}_k は (5-1) の関係式からつぎのようになる。

$$\eta^{j*}_k = 1 + \lambda^*_{j-k} - \lambda^*_j \tag{8-1}$$

同様にして，

$$\left.\begin{aligned} &\eta^j_k = 1 + \lambda_{j-k+1} - \lambda^*_j \quad : k \neq 0 \\ &\eta^j_0 = 1 \end{aligned}\right\} \tag{8-2}$$

と定義する。しかるに，

$$-1 \leqq \eta^j_k \leqq 1$$

であるから，$\lambda^*_j \geqq 2 + \lambda_0$ なら，

$$\eta^j_{N_j} \leqq -1 < \eta^j_{N_j-1} \tag{8-3}$$

なる N_j が存在する。また，その問題で現れる最高のエネルギーに対応する波長を λ_0 としたから，$(j+1) < k$ は意味がないはずである。したがって (8-2) におけるパラメタ k はつぎの範囲にある。

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \min(j+1,\ N_j)$$

ただし，(8-2) から計算される値に関係なく，

$$\eta^j_{N_j} \equiv -1$$

とおく。同様に，(8-1) から与えられる $\eta^{j*}_{N_j-1}$ の値が -1 より小なる場合は，$\eta^{j*}_{N_j-1} = -1$ とおくことにする。前者は結果の表現を簡単にするための単なる約束であるが，後者は，波長区間，$\lambda_{j-N_j+1} \sim \lambda_{j-N_j+2}$ の代表値が $\lambda^*_{j-N_j+1}$ であるとした（仮定7-3）に基ずく帰結である。なお min (a, b) は，a または b の値のうち，何れか小なる方を意味する。

Compton 散乱の線源項は (6-12) によると，

$$F_C[z, \omega^*_q, \lambda^*_j : I(z, \omega', \lambda')]$$
$$= \frac{n(z)}{\pi} \int_0^\pi d\phi \sum_{k=0}^{\min(j, N_j-1)} \int_{\eta^j_{k+1}}^{\eta^j_k} I(z, \omega'(\eta, \phi) \lambda'(\eta)) \times K(\lambda'(\eta), \lambda^*_j) d\eta \tag{8-4}$$

この積分は（仮定 7-3）によって簡単に実行されてつぎのようになる。

$$F_C[z, \omega^*_q, \lambda^*_j : I(z, \omega', \lambda')]$$
$$= \frac{n(z)}{\pi} \int_0^\pi d\phi \sum_{k=0}^{\min(j, N_j-1)} I(z, \omega'(\eta^{j*}_k, \phi), \lambda^*_{j-k}) \times K(\lambda^*_{j-k}, \lambda^*_j)(\eta^j_k - \eta^j_{k+1}) \tag{8-5}$$

つぎに (8-5) 中の積分，

$$\int_0^\pi I(z, \omega'(\eta^{j*}_k, \phi), \lambda^*_{j-k}) d\phi$$

を行なう。このため，ω' と ϕ との関係を検討する。散乱角 $\arccos \eta^{j*}_k$，azimuthal angle ϕ をもって進行方向 ω^*_q に達する光子の，散乱前の進行方向を $\omega_q'(\eta^{j*}_k, \phi)$ とすると，(5-2) から明らかに，

$$\omega_q'(\eta^{j*}_k, \phi) = \omega^*_q \eta^{j*}_k + \sqrt{1-(\omega^*_q)^2} \sqrt{1-(\eta^{j*}_k)^2} \cos\phi \tag{8-6}$$

である。ϕ が 0 から π まで変化する間に $\omega_q(\eta^{j*}_k, \phi)$ の到達し得る値の上下限を求め，この値に対して U_k および L_k を以下のように定義する。U_k, L_k には q および j をパラメタとして含むが明らかであるから省略する。

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{U_k} \geqq \left\{\omega^*_q \eta^{j*}_k - \sqrt{1-(\omega^*_q)^2} \sqrt{1-(\eta^{j*}_k)^2}\right\} > \omega_{U_{k+1}} \\ &\omega_{L_k} \geqq \left\{\omega^*_q \eta^{j*}_k + \sqrt{1-(\omega^*_q)^2} \sqrt{1-(\eta^{j*}_k)^2}\right\} > \omega_{L_{k+1}} \end{aligned}\right\} \tag{8-7}$$

$\omega_{L_k} \geqq \omega_{U_k}$, $L_k \leqq U_k$

ここで ω の分点 ω_t $(t=0, 1, 2, \cdots\cdots, Q+1)$ の各々に対して ϕ_{kt} を対応させ，つぎのように定義する。ただし，$|\omega_q^*| \neq 1$, $|\eta_k^j| \neq 1$ とする。

$$\left.\begin{aligned} &\phi_{kt}=0 &&: t=0, 1, 2, \cdots\cdots, L_k \\ &\phi_{kt}=\arccos\left[\frac{\omega_t-\omega_q^*\eta_k^{j*}}{\sqrt{1-(\omega_q^*)^2}\sqrt{1-(\eta_k^{j*})^2}}\right], 0<\phi_{kt}\leqq\pi && \\ & &&: t=L_k+1, \cdots\cdots, U_k \\ &\phi_{kt}=\pi &&: t=U_k+1, \cdots\cdots, Q, Q+1 \end{aligned}\right\} \tag{8-8}$$

$|\omega_q^*|=1$, あるいは $|\eta_k^{j*}|=1$ の場合は，

$L_k=U_k$

であり，

$$\omega_{L_k} \geqq \omega_q^*\eta_k^{j*} > \omega_{L_{k+1}}$$

である。(8-8) の定義をそのまま適用すると，

$$\left.\begin{aligned} &\phi_{kt}=0 &&: t=0, 1, 2, \cdots\cdots, L_k \\ &\phi_{kt}=\pi &&: t=L_k+1, \cdots\cdots, Q, Q+1 \end{aligned}\right\} \tag{8-8$'$}$$

となり，以降の手順では (8-8)′ および (8-8) で定義された ϕ_{kt} を同等に扱って差支えない。

（仮定 7-3) によると，$I(z, \omega, \lambda)$ は ω_q, ω_{q+1} の区間では代表値 $I(z, \omega_q^*, \lambda)$ をとるから，上記の定義に従うと (8-5) に含まれる積分はつぎのように実行される。

$$\int_0^\pi I(z, \omega'(\eta_k^{j*}, \phi), \lambda_{j-k}^*)d\phi$$

$$=\sum_{t=L_k}^{U_k}\int_{\phi_{kt}}^{\phi_{k(t+1)}} I(z, \omega'(\eta_k^{j*}, \phi), \lambda_{j-k}^*)d\phi$$

$$=\sum_{t=L_k}^{U_k} I(z, \omega_t^*, \lambda_{j-k}^*)(\phi_{k(t+1)}-\phi_{kt})$$

あるいは，定義 (8-8), (8-8)′ から形式的に，

$$=\sum_{t=0}^{Q} I(z, \omega_t^*, \lambda_{j-k}^*)(\phi_{k(t+1)}-\phi_{kt}) \tag{8-9}$$

となる。本章では $\omega_Q^*=-1$ とおく。

Compton 散乱の線源項はしたがって，(8-5) に (8-9) を代入して得られる。

$$F_C[z, \omega_q^*, \lambda_j^* : I(z, \omega', \lambda')]$$

$$=n(z)A_{00}(\lambda_j^*)I(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)$$

$$+n(z)\sum_{k=1}^{\min(j, N_{j-1})}\sum_{t=0}^{Q} A_{kt}(\omega_q^*, \lambda_j^*)I(z, \omega_t^*, \lambda_{j-k}^*) \tag{8-10}$$

$$\left.\begin{aligned} &A_{00}(\lambda_j^*)=K(\lambda_j^*, \lambda_j^*)(\eta_0^j-\eta_1^j) \\ &A_{kt}(\omega_q^*, \lambda_j^*) \\ &\quad =\frac{1}{\pi}K(\lambda_{j-k}^*, \lambda_j^*)(\eta_k^j-\eta_{k+1}^j)(\phi_{k(t+1)}-\phi_{kt}) \end{aligned}\right\} \tag{8-11}$$

§ 8.2 $I(z_i, \omega_q^*, \lambda_j^*)$ の計算

前節の結果，(8-10) を輸送方程式 (7-11) に代入すると，

$$\omega_q^*\frac{\partial}{\partial z}I(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)+\mu(z, \lambda_j^*)I(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)$$

$$=F[z, \omega_q^*, \lambda_j^* : I(z, \omega', \lambda')]$$

$$=S(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)$$

$$+n(z)A_{00}(\lambda_j^*)I(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)$$

$$+n(z)\sum_{k=1}^{\min(j, N_{j-1})}\sum_{t=0}^{Q} A_{kt}(\omega_q^*, \lambda_j^*)I(z, \omega_t^*, \lambda_{j-k}^*)$$

$$: j=0, 1, 2, \cdots\cdots, J$$

$$: q=0, 1, 2, \cdots\cdots, Q$$

となる。これを整理すると新たな輸送方程式としてつぎの微分方程式が得られる。

$$\omega_q^*\frac{\partial}{\partial z}I(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)+\mu'(z, \lambda_j^*)I(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)$$

$$=F'(z, \omega_q^*, \lambda_j^*) \tag{8-12}$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} &\mu'(z, \lambda_j^*)=\mu(z, \lambda_j^*)-n(z)A_{00}(\lambda_j^*) \\ &F'(z, \omega_q^*, \lambda_j^*) \\ &\quad =S(z, \omega_q^*, \lambda_j^*) \\ &\quad\quad +n(z)\sum_{k=1}^{\min(j, N_{j-1})}\sum_{t=0}^{Q} A_{kt}(\omega_q^*, \lambda_j^*)I(z, \omega_t^*, \lambda_{j-k}^*) \end{aligned}\right\}$$

$$: j=0, 1, 2, \cdots\cdots, J \tag{8-13}$$

$$: q=0, 1, 2, \cdots\cdots, Q$$

である。$\mu'(z, \lambda_j^*)$ および $S(z, \omega_q^*, \lambda_j^*)$ はすでに与えられている。

最高のエネルギーグループ，すなわち $j=0$ については F' の第2項は零である。したがって適当な境界条件 (7-2) の下で輸送方程式 (8-12) は解けて，(7-3)〜(7〜9) において $\mu(z_i, \lambda_j^*)$ および $F(z_i, \omega_q^*,$

λ_j^*) の代りに，それぞれ $\mu'(z_i,\ \lambda_j^*)$ および $F'(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ を代入することにより解を得る。

以下同様にして，高いエネルギーグループから順次解くことができる。すなわち，いま考えているエネルギーグループ j より上のグループの解，

$$I(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_{j-k}^*)\quad : k=1,2,3,\cdots\cdots,\min(j,N_j-1)$$

はすでに求められている。したがって，(8-13) から $F'(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ は既知となる。すなわち，$\mu'(z_i,\ \lambda_j^*)$, $F'(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ を代入することにより，解(7-3)～(7-6) が得られる。

同様な手順を繰り返すことにより，必要とするエネルギーグループ $j=J$ に達するまで計算する。以上の結果，すべてのメッシュ点におけるエネルギー束，

$$I(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$$

$$: i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ a$$

$$: q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ Q$$

$$: j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ J$$

が得られる。

§ 8.3 $I_A(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ の計算

エネルギースペクトルは，(仮定7-3) によるとつぎのように求められる。

$$\frac{1}{2\pi}I_0(z,\ \lambda)=\int_{-1}^{1}I(z,\ \omega,\ \lambda)d\omega$$

$$=\sum_{q=0}^{Q}\int_{\omega_{q+1}}^{\omega_q}I(z,\ \omega,\ \lambda)d\omega$$

$$=\sum_{q=0}^{Q}I(z,\omega_q^*,\lambda)(\omega_q-\omega_{q+1}) \qquad (8\text{-}14)$$

したがって，電子対生成に伴う陽電子の消滅による線源項 (6-13) はつぎのように書ける。

$$F_A[z,\ \omega,\ \lambda:I(z,\ \omega',\ \lambda')]$$

$$=\delta(\lambda-1)\lambda\sum_{q=0}^{Q}(\omega_q-\omega_{q+1})\int_0^{1/2}\frac{1}{\lambda'}\mu_{PP}(z,\ \lambda')$$

$$\times I(z,\ \omega_q^*,\ \lambda')d\lambda' \qquad (8\text{-}15)$$

ここで，

$$\lambda_{N_P}\leqq\frac{1}{2}<\lambda_{N_{P+1}}$$

なる N_P を求め，改めて，

$$\lambda_{N_{P+1}}\equiv\frac{1}{2}$$

と定義する。このようにすると (仮定 7-3) によって (8-15) の積分が行なえて，

$$F_A[z,\ \omega,\ \lambda:I(z,\ \omega',\ \lambda')]$$

$$=\delta(\lambda-1)\lambda\sum_{q=0}^{Q}(\omega_q-\omega_{q+1})\sum_{j=0}^{N_P}\frac{1}{\lambda_j^*}\mu_{PP}(z,\lambda_j^*)$$

$$\times I(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)(\lambda_{j+1}-\lambda_j) \qquad (8\text{-}16)$$

となる。

(7-11) で定義した $I_A(z,\ \omega,\ \lambda)$ を，消滅輻射により発生した非散乱線束 $I_A^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)$ と1回もしくはそれ以上散乱した線束 $I_A^{(1+)}(z,\ \omega,\ \lambda)$ とに分けて考える。すなわち，

$$I_A(z,\ \omega,\ \lambda)=I_A^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)+I_A^{(1+)}(z,\ \omega,\ \lambda) \qquad (8\text{-}17)$$

となり，これらの満足する輸送方程式は以下の如くなる。

$$\omega\frac{\partial}{\partial z}I_A^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)+\mu(z,\ \lambda)\,I_A^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)$$

$$=F_A[z,\ \omega,\ \lambda:I(z,\ \omega',\ \lambda')] \qquad (8\text{-}18)$$

$$\omega\frac{\partial}{\partial z}I_A^{(1+)}(z,\ \omega,\ \lambda)+\mu(z,\ \lambda)\,I_A^{(1+)}(z,\ \omega,\ \lambda)$$

$$=F_C[z,\ \omega,\ \lambda:I_A^{(0)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$$

$$+F_C[z,\ \omega,\ \lambda:I_A^{(1+)}(z,\ \omega',\ \lambda')] \qquad (8\text{-}19)$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned}&I_A^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)=I_A^{(0)}(z,\ \omega)\,\delta(\lambda-1)\\&F_A[z,\ \omega,\ \lambda:I(z,\ \omega',\ \lambda')]=F_A(z,\ \omega)\delta(\lambda-1)\\&F_A(z,\ \omega)=\sum_{q=0}^{Q}(\omega_q-\omega_{q+1})\sum_{j=0}^{N_P}\frac{1}{\lambda_j^*}\mu_{PP}(z,\ \lambda_j^*)\\&\qquad\times I(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)(\lambda_{j+1}-\lambda_j)\end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}20)$$

と定義すると，輸送方程式 (8-18) はつぎのようになる。

$$\omega\frac{\partial}{\partial z}I_A^{(0)}(z,\ \omega)$$

$$+\mu(z,\ \lambda=1)\,I_A^{(0)}(z,\ \omega)=F_A(z,\ \omega) \qquad (8\text{-}21)$$

$\omega=\omega_q^*$ での解は (7-3)～(7-9) と全く同様に与えられる。明らかに，

$$I(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)\ \text{に}\ \ I_A^{(0)}(z_i,\ \omega_q^*)\ \text{を}$$

$F(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ に $F_A(z_i,\ \omega_q^*)$ を

$\mu(z_i,\ \lambda_j^*)$ に $\mu(z_i,\ \lambda=1)$ を

代入すればよい。$F_A(z_i,\ \omega_q^*)$ は，実は等方分布をするから ω_q^* には無関係である。

以上で $I_A^{(0)}(z_i,\ \omega_q^*)$が求められたから，つぎに (8-19) を解いて $I_A^{(1+)}(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ を求めよう。まず，$F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I_A^{(0)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$ を計算する。

Compton 散乱の線源項 (6-12) に (8-20) の変換を代入すると，

$$F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I_A^{(0)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$$

$$=\frac{n(z)}{\pi}K(1,\ \lambda_j^*)\int_0^\pi I_A^{(0)}(z,\ \omega'(\eta_j,\ \phi))d\phi \quad (8\text{-}22)$$

となる。ただし，

$$1\leqq\lambda_j^*\leqq3$$

また，

$$\left.\begin{aligned}&\eta_j=2-\lambda_j^*\\&\omega'(\eta_j,\ \phi)=\omega_q^*\eta_j\\&\quad+\sqrt{1-(\omega_q^*)^2}\sqrt{1-\eta_j^2}\cos\phi\end{aligned}\right\}\quad(8\text{-}23)$$

である。

従って，η_j を η_k^{j*} と置換えることで，(8-7) および (8-8) によって ϕ_t を定義すると (8-9) と同様な積分が行なえる。添字 k は必要ないから省略する。

$$\int_0^\pi I_A^{(0)}(z,\ \omega'(\eta_j,\ \phi))d\phi$$

$$=\sum_{t=0}^{Q}I_A^{(0)}(z,\ \omega_t^*)(\phi_{t+1}-\phi_t)$$

したがって (8-22) から，

$$F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I_A^{(0)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$$

$$=\frac{n(z)}{\pi}K(1,\ \lambda_j^*)\sum_{t=0}^{Q}I_A^{(0)}(z,\ \omega_t^*)(\phi_{t+1}-\phi_t)$$

$$:1\leqq\lambda_j^*\leqq3 \quad (8\text{-}24)$$

となる。

つぎに $F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I_A^{(1+)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$ を計算する。この場合は，すでに § 8.1 で検討したのと全く同じ手順で，(8-10) および (8-11) と同一の形の解を得る。すなわち，

$$F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I_A^{(1+)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$$

$$=n(z)A_{00}(\lambda_j^*)I_A^{(1+)}(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$$

$$+n(z)\sum_{k=1}^{\min(N_{Aj},\ N_j-1)}\sum_{t=0}^{Q}A_{kt}(\omega_q^*,\ \lambda_j^*)$$

$$\times I_A^{(1+)}(z,\ \omega_t^*,\ \lambda_{j-k}^*) \quad (8\text{-}25)$$

ただし，

$$\lambda_{N_A}\leqq1<\lambda_{N_A+1} \quad (8\text{-}26)$$

なる N_A に対して N_{Aj} をつぎのように定義する。

$$N_{Aj}=j-N_A \quad (8\text{-}27)$$

また N_j は (8-3) で定義されている。なお，(8-25) 中の係数 A_{kt} は (8-11) で与えられる。その場合，(8-11) の表現をそのまま保つために，(8-2) による値とは独立に，

$$\eta_{N_{Aj}+1}^{j}\equiv2-\lambda_j^*$$

とおく。

以上の結果を用いると，$I_A^{(1+)}(z,\ \omega,\ \lambda)$ の輸送方程式 (8-19) は書き直せて，

$$\omega_q^*\frac{\partial}{\partial z}I_A^{(1+)}(z,\omega_q^*,\lambda_j^*)+\mu'(z,\lambda_j^*)I_A^{(1+)}(z,\omega_q^*,\lambda_j^*)$$

$$=F'(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*) \quad (8\text{-}28)$$

となる。ここに，

$$\left.\begin{aligned}&\mu'(z,\ \lambda_j^*)=\mu(z,\ \lambda_j^*)-n(z)A_{00}(\lambda_j^*)\\&F'(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)\\&\quad=\frac{n(z)}{\pi}K(1,\lambda_j^*)\sum_{t=0}^{Q}I_A^{(0)}(z.\ \omega_t^*)(\phi_{t+1}-\phi_t)\\&\quad+n(z)\sum_{k=1}^{\min(N_{Aj},\ N_j-1)}\sum_{t=0}^{Q}A_{kt}(\omega_q^*,\ \lambda_j^*)\\&\qquad\times I_A^{(1+)}(z,\ \omega_t^*,\ \lambda_{j-k}^*)\end{aligned}\right\}$$

$$(8\text{-}29)$$

である。

この方程式は (8-12) と同形であり，したがって § 8.2 に述べたのと全く同じ手順で解くことができ，$I_A^{(1+)}(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ が求められる。これと，すでに求められた $I_A^{(0)}(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda)$ とから，(8-17) によって $I_A(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda)$ が得られる

$I_A(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda)$ は陽電子の消滅による輻射光子によるエネルギー束であるから，

$1 \leqq \lambda$

の波長範囲のみに存在する。また非散乱線束 $I_A^{(0)}(z_i, \omega_q^*, \lambda)$ は，λ に関して Dirac のデルタ関数 $\delta(\lambda-1)$ の分布をなし，一方，1回もしくはそれ以上散乱をしたエネルギー束 $I_A^{(1+)}(z_i, \omega_q^*, \lambda)$ は波長に関して分布関数をなしている。

第9章　単一方向，単一エネルギー入射線源の取扱い

§9.1　概　　要

単一方向単一エネルギー入射線源* については特別な取扱いが検討されなければならない。すなわち，このような線源からの非散乱線束は，その角度分布およびエネルギースペクトルの両者とも不連続な分布，つまりデルタ関数分布をなし，すでに仮定した（仮定7-3)～(仮定7-5）の何れで扱うにしても誤差が大きすぎる。特に垂直入射線源では，1回散乱線にも著しい特異性が現れる。したがって，本章ではこれらの特異性を示すエネルギー束の成分を一般の連続分布を持つ部分と分離して扱かうことにする。陽電子の消滅による光子のエネルギー分布には特異性があるので，このような考え方はすでに§8.3においても利用された。ここでさらに一般的な場合について検討する。

エネルギー束 I を，非散乱線束 $I^{(0)}$，1回散乱線束 $I^{(1)}$，……，n 回散乱した線束 $I^{(n)}$ と云うように散乱回数毎の成分に分離する。すなわち，

$$I=I^{(0)}+I^{(1)}+I^{(2)}+\cdots\cdots+I^{(n)}+\cdots\cdots。\tag{9-1}$$

冗長を避けるため不必要なパラメタの記載を省くと，これらの各エネルギー束に対する輸送方程式はつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}
&\omega\frac{\partial I^{(0)}}{\partial z}+\mu I^{(0)}=S\\
&\omega\frac{\partial I^{(1)}}{\partial z}+\mu I^{(1)}=F_C[I^{(0)}]\\
&\omega\frac{\partial I^{(2)}}{\partial z}+\mu I^{(2)}=F_C[I^{(1)}]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega\frac{\partial I^{(n)}}{\partial z}+\mu I^{(n)}=F_C[I^{(n-1)}]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\tag{9-2}$$

* 物質層のある面または点に入射する放射線がある場合に，この放射線を入射線源，或いは単に線源と称することが多い。ここでもこの慣習に従った。

I_A の成分には，$\lambda \leqq \frac{1}{2}$ の高エネルギー線源の方向性またはエネルギースペクトルの特異性は直接には関係しないから，輸送方程式を解くに当って線源の特異性に起因する特別な取扱いは不要である。ただし，線源項 F_A の計算にやや特別な考慮が必要である。これについては後に§9.6で述べる。

以下各節で詳しく述べるが，角度分布またはエネルギースペクトルに著しい特異性が見出されるのは高々1回散乱線までで，それ以上の回数散乱した線束では（仮定 7-3)～(仮定 7-5）が成立すると考えてよい。1回もしくはそれ以上の回数散乱したエネルギー束を $I^{(1+)}$，同様に2回もしくはそれ以上散乱したエネルギー束を $I^{(2+)}$ と書くことにする。明らかに，

$$I^{(1+)}=I^{(1)}+I^{(2)}+\cdots\cdots+I^{(n)}+\cdots\cdots$$
$$I^{(2+)}=I^{(2)}+I^{(3)}+\cdots\cdots+I^{(n)}+\cdots\cdots$$

である。$F_C[I]$ の定義，例えば (5-4) や (6-12) によって明らかなように，$F_C[I]$ は I について線形である。したがって，もし $I^{(0)}$ のみが著しい特異性を示す場合は，つぎのように輸送方程式を分離し，$I^{(1+)}$ については§8.2で述べたのと全く同様に扱えばよい。

$$\left.\begin{aligned}
&I=I^{(0)}+I^{(1+)}\\
&\omega\frac{\partial I^{(0)}}{\partial z}+\mu I^{(0)}=S\\
&\omega\frac{\partial I^{(1+)}}{\partial z}+\mu I^{(1+)}=F_C[I^{(0)}]+F_C[I^{(1+)}]
\end{aligned}\right\}\tag{9-3}$$

もし，$I^{(0)}$ および $I^{(1)}$ の特異性が著しい場合には，上記と同様にして，以下のように考える。

$$\left.\begin{aligned}
&I=I^{(0)}+I^{(1)}+I^{(2+)}\\
&\omega\frac{\partial I^{(0)}}{\partial z}+\mu I^{(0)}=S\\
&\omega\frac{\partial I^{(1)}}{\partial z}+\mu I^{(1)}=F_C[I^{(0)}]\\
&\omega\frac{\partial I^{(2+)}}{\partial z}+\mu I^{(2+)}=F_C[I^{(1)}]+F_C[I^{(2+)}]
\end{aligned}\right\}\tag{9-4}$$

以下の各節において，特異性の著しい成分，すなわち $I^{(0)}$ および $I^{(1)}$ の取扱いを述べる。

なお本章では単一エネルギー線源だけを扱うから，線源エネルギーを $\lambda_0=\lambda_0^*$ とおく。

§9.2　斜入射線源の取扱い

$z=0$ の境界において ω_s の方向に入射する波長 λ^0 の単位入射線源はつぎのように表わされる。

$$I^{(0)}(0,\ \omega,\ \lambda)=\frac{\lambda_0}{2\pi\omega_s}\delta(\omega-\omega_s)\delta(\lambda-\lambda_0) \qquad (9\text{-}5)$$

また非散乱線束 $I^{(0)}(z,\ \omega,\ q)$ の満足すべき輸送方程式は (9-3) によって,

$$\omega_s\frac{\partial}{\partial z}I^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)+\mu(z,\ \lambda_0^*)I^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)=0 \qquad (9\text{-}6)$$

となる。入射線源 (9-5) を入れると解は簡単に求められる。すなわち,

$$I^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)=\frac{\lambda_0}{2\pi\omega_s}\delta(\omega-\omega_s)\delta(\lambda-\lambda_0)$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{\omega_s}\int_0^z\mu(\zeta,\ \lambda_0^*)d\zeta\right\} \qquad (9\text{-}7)$$

であり，自明なことではあるがエネルギースペクトルおよび角度分布の両者に特異性が認められる。ここでつぎのように定義しておく。

$$I^{(0)}(z,\omega)=\int_0^{\lambda_J}I^{(0)}(z,\omega,\lambda)\,d\lambda=\frac{\lambda_0}{2\pi\omega_s}\delta(\omega-\omega_s)$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{\omega_s}\int_0^z\mu\ (\zeta,\lambda_0^*)d\zeta\right\} \qquad (9\text{-}8)$$

$$I^{(0)}(z)=\int_{4\pi}I^{(0)}(z,\ \omega)\,d\Omega$$

$$=\frac{\lambda_0}{\omega_s}\exp\left\{-\frac{1}{\omega_s}\int_0^z\mu(\zeta,\ \lambda_0^*)d\zeta\right\} \qquad (9\text{-}9)$$

つぎに $F_C[z,\omega_q^*,\ \lambda_j^*:I^{(0)}]$ を求める。線源の波長 λ_0^* から λ_j^* に減速する場合の散乱角の余弦は (5-1) によって次式のように与えられる。

$$\eta_j^*=1+\lambda_0^*-\lambda_j^* \qquad (9\text{-}10)$$

したがって (6-12) の表現を用いて,

$|\omega_q^*|\neq1,\ \ |\eta_j^*|\neq1:$

$$F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I^{(0)}]=\frac{n(z)}{\pi}\int_0^\pi d\phi$$

$$\times\int_{-1}^1 I^{(0)}(z,\omega'(\eta,\phi),\lambda'(\eta))\,K(\lambda'(\eta),\lambda_j^*)d\eta$$

$$=\frac{n(z)}{2\pi^2}\int_0^\pi I^{(0)}(z,\omega'\ (\eta_j^*,\phi))\,K(\lambda_0^*,\ \lambda_j^*)d\phi$$

$$=\frac{n(z)}{2\pi^2}K(\lambda_0^*,\ \lambda_j^*)I^{(0)}(z)\left(\frac{d\phi}{d\omega'}\right)_{\omega'=\omega_s}$$

$$:\omega_L>\omega_s>\omega_U$$

$$=0 \qquad :\omega_s>\omega_L,\ \omega_s<\omega_U \qquad (9\text{-}11)$$

ここに，ω_L および ω_U は，(8-7) で η_k^{j*} を η_j^* とおいた式で定義される。

(5-2) から,

$$\omega'(\eta_j^*,\ \phi)=\omega_q^*\eta_j^*+\sqrt{1-(\omega_q{}^*)^2}\sqrt{1-(\eta_j{}^*)^2}\cos\phi$$

であるから, (9-12)

$$\left(\frac{d\phi}{d\omega'}\right)_{\omega'=\omega_s}$$

$$=\left[1-(\omega_q^*)^2-(\omega_s)^2-(\eta_j^*)^2+2\omega_q^*\omega_s\eta_j^*\right]^{-1/2} \qquad (9\text{-}13)$$

となり，(9-11) に代入すると $F_C[I^{(0)}]$ が得られる。ただし, (9-11) は $\omega_s=\omega_L$ または $\omega_s=\omega_U$, $|\omega_q^*|=1$, $|\eta_j^*|=1$ の場合にはそのままでは使えない。このような困難を避けるため別の解法を以下に述べる。

第5章に述べたと同様にして, azimuthal angle ϕ' をつぎのように定義する。

$$\frac{(\vec{\Omega}'\times\vec{R})\cdot(\vec{\Omega}'\times\vec{\Omega})}{|\vec{\Omega}'\times\vec{R}|\,|\vec{\Omega}'\times\vec{\Omega}|}=\cos\phi' \qquad (9\text{-}14)$$

(5-2) の関係式に相当して,

$$\omega=\omega_s\eta_j^*+\sqrt{1-\omega_s{}^2}\sqrt{1-(\eta_j{}^*)_2}\cos\phi' \qquad (9\text{-}15)$$

$$:0\leqq\phi'\leqq2\pi$$

となる。

さて Compton 散乱の結果，線源の波長 λ_0^* から, λ_j^* に減速する光子の総量, $F_{CT}[z,\ \lambda_j^*:I^{(0)}]$ は次式のように表わされる。

$$F_{CT}[z,\ \lambda_j^*:I^{(0)}]=\int_{4\pi}F_C[z,\ \omega,\ \lambda_j^*:I^{(0)}]d\Omega$$

$$=\frac{n(z)}{2\pi}\int_0^{\lambda_j^*}d\lambda'\int_{4\pi}d\Omega$$

$$\times\int_{4\pi}I^{(0)}(z,\ \omega',\ \lambda')K(\lambda',\ \lambda_j^*)$$

$$\times\delta(\vec{\Omega}\cdot\vec{\Omega}'-\eta_j^*)d\Omega'$$

$$=n(z)K(\lambda_0^*,\ \lambda_j^*)I^{(0)}(z) \qquad :\lambda_0^*\leqq\lambda_j^*\leqq\lambda_0^*+2$$

$$=0 \qquad :\lambda_j^*>\lambda_0^*+2 \qquad (9\text{-}16)$$

$\omega=\omega_q^*$ の周辺に立体角 $\Delta\Omega_q=2\pi\Delta\omega$ をとる。そのとき (9-15) 式によって $\Delta\omega$ に対応する ϕ' の部分

$\Delta\phi'$ が決められる。ただし ϕ' について対称であるから $0\leqq\phi'\leqq\pi$ の範囲を考える。$\Delta\phi'$ の区間に散乱する光子は，ϕ' の値に係らず $\Delta\phi'$ だけに比例するから，立体角 $\Delta\Omega_q$ の内に散乱する光子はつぎのようになる。

$$F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I^{(0)}]\Delta\Omega_q$$

$$=\frac{n(z)}{\pi}K(\lambda_0^*,\ \lambda_j^*)I^{(0)}(z)\Delta\phi' \qquad (9\text{-}17)$$

$$:\lambda_0^*\leqq\lambda_j^*\leqq\lambda_0^*+2$$

§ 8.1 と同様にして，

$$\left.\begin{aligned}\omega_{U'}&\geqq\left\{\omega_s\eta_j^*-\sqrt{1-\omega_s^2}\sqrt{1-(\eta_j^*)^2}\right\}>\omega_{U'+1}\\ \omega_{L'}&\geqq\left\{\omega_s\eta_j^*+\sqrt{1-\omega_s^2}\sqrt{1-(\eta_j^*)^2}\right\}>\omega_{L'+1}\end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}18)$$

と U' および L' を定義し，さらに ω の分点 ω_q ($q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ Q+1$) の各々に対応して ϕ_q' を以下のように決める。

$$\left.\begin{aligned}&\phi'_q=0 && :q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L'\\ &\phi_q'=\arccos\left[\frac{\omega_q-\omega_s\eta_j^*}{\sqrt{1-\omega_s^2}\sqrt{1-(\eta_j^*)^2}}\right],\ 0<\phi_q'\leqq\pi\\ &&& :q=L'+1,\ \cdots\cdots,\ U'\\ &\phi_q'=\pi && :q=U'+1,\ \cdots\cdots,\ Q,\ Q+1\end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}19)$$

$|\eta_j^*|=1$ の場合には，$U'=L'$ となるからそのまま (9-19) を適用する。すなわち，$(\omega_s,\ \omega_{s+1})$ の区間の１回散乱線には角度分布の特異性は存在しないとする。なお $\omega_s=1$ の場合は §9.3 で扱う。

さて，(仮定 7-3) を準用すると，ω の区間，$(\omega_q,\ \omega_{q+1})$ で，$F_C[z,\ \omega,\ \lambda_j^*:I^{(0)}]$ は代表値 $F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I^{(0)}]$ をとると仮定できる。したがって (9-17) は，上述の ϕ_q' を使ってつぎのように表現される。

$$F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I^{(0)}]$$

$$=\frac{n(z)}{2\pi^2}K(\lambda_0^*,\ \lambda_j^*)I^{(0)}(z)\frac{\phi'_{q+1}-\phi_q'}{\omega_q-\omega_{q+1}} \qquad (9\text{-}20)$$

$$:\lambda_0^*\leqq\lambda_j^*\leqq\lambda_0^*+2$$
$$:q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ Q$$

ここに求めた $F_C[I^{(0)}]$ から直ちに判るように１回散乱線はエネルギー分布，および角度分布にまだ幾分の局限性を残している。しかしながら，斜入射線源の場合には，次節に述べる垂直入射線源の１回散乱線束に比較して特異性が少ない。$I^{(1+)}(z,\ \omega,\ \lambda)$ が (仮定 7-3) に従うと仮定しても大きな誤差は生じない。したがって (9-3) を適用すると輸送方程式はつぎのようになる。

$$\omega_q^*\frac{\partial}{\partial z}I^{(1+)}(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)+\mu'(z,\lambda_j^*)I^{(1+)}(z,\omega_q^*,\lambda_j^*)$$

$$=F'(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*) \qquad (9\text{-}21)$$

$$:j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots J$$
$$:q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots Q$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}&\mu'(z,\ \lambda_j^*)=\mu(z,\ \lambda_j^*)-n(z)\ A_{00}(\lambda_j^*)\\ &F'(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)=F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I^{(0)}]\\ &\quad+n(z)\sum_{k=0}^{\min(j,\ N_J-1)}\sum_{t=0}^{Q}A_{kt}(\omega_q^*,\ \lambda_j^*)\\ &\quad\times I^{(1+)}(z,\ \omega_t^*,\ \lambda_{j-k}^*)\end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}22)$$

である。$F_C[I^{(0)}]$ は (9-20) で，また A_{00} および A_{kt} は (8-11) に与えられている。

この輸送方程式は (8-12) と全く同形であり § 8.2 に述べた解法をそのまま適用できる。このようにし求めた解 $I^{(1+)}(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ と，(9-7) で与えた非散乱線束 $I^{(0)}(z_i,\ \omega,\ \lambda)$ とを併せて斜入射，単１エネルギー線源の解が得られる。

§ 9.3　垂直入射線源の取扱い（その１）

入射線源は，

$$I^{(0)}(0,\ \omega,\ \lambda)=\frac{\lambda_0}{2\pi}\delta(\omega-1)\delta(\lambda-\lambda_0) \qquad (9\text{-}23)$$

となる。非散乱線束の輸送方程式は (9-4) から，

$$\omega\frac{\partial}{\partial z}I^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)+\mu(z,\ \lambda_0)I^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)=0 \qquad (9\text{-}24)$$

であり解はつぎのようになる。

$$I^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)=\frac{\lambda_0}{2\pi}\delta(\omega-1)\delta(\lambda-\lambda_0)$$

$$\times\exp\left\{-\int_0^z\mu(\zeta,\ \lambda_0^*)\,d\zeta\right\} \qquad (9\text{-}25)$$

この結果から $F_C[I^{(0)}]$ を計算する。§9.2 と同じく，$\lambda_0=\lambda_J^*$ から λ_s^* に減速する場合の散乱角の余弦は，

$$\eta_s^*=1+\lambda_0^*-\lambda_s^* \qquad (9\text{-}10)'$$

となる。ここで添字 s は線源を示すものではない。

$\lambda_0^* \leqq \lambda_s^* \leqq \lambda_0^*+2$ なるλのメッシュポイントを表わす添字である。線源の方向角の余弦 ω' は1である。したがって，1回散乱をして波長が λ_s^* に達した光子は，すべて $\omega=\eta_s^*$ なる方向に達することになる。

（仮定 7-3）によって解析を進める場合は，メッシュポイント，すなわち λ_j^* および ω_q^* での値が代表値となる。ここで検討している垂直入射線源での1回散乱線束のように，波長のあるメッシュポイント λ_s^* で考えた時に，その進行方向角がデルタ関数をなす場合は注意する必要がある。$\omega=\eta_s^*$ がメッシュポイントに当らないと1回散乱線束を数え落すことになる。

したがって，垂直入射線源においては，

$$\left.\begin{aligned} &\omega_q^*=1+\lambda_0^*-\lambda_j^* \\ &\qquad : j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ Q-1 \\ &\qquad : q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ Q-1 \\ &\omega_Q^*=-1,\ \lambda_Q^*=\lambda_0^*+2 \end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}26)$$

なる関係を満足するように ω_q^* および λ_j^* を関連させて選ぶことにする。なお $j=Q+1$, ……については自由である。いまの場合は，明らかに散乱線は $\omega_s^*=\eta_s^*$ なる方向に集中する。したがって，

$$F_C[z,\ \omega,\ \lambda_s^*:I^{(0)}]$$
$$=\frac{\lambda_0}{2\pi}n(z)\delta(\omega-\omega_s^*)K(\lambda_0^*,\ \lambda_s^*)$$
$$\times\exp\left\{-\int_0^z \mu(\zeta,\ \lambda_0^*)\,d\zeta\right\} \quad (9\text{-}27)$$

である。λ_s^* を固定して考えると，$I^{(1)}$ には角度分布の特異性が明らかに存在する。$I^{(1)}$ の輸送方程式は (9-4) で与えられる。

$$\omega\frac{\partial}{\partial z}I^{(1)}(z,\ \omega,\ \lambda_s^*)+\mu(z,\ \lambda_s^*)I^{(1)}(z,\ \omega,\ \lambda_s^*)$$
$$=F_C[z,\ \omega,\ \lambda_s^*:I^{(0)}] \quad (9\text{-}28)$$

ここで，

$$I^{(1)}(z,\ \omega,\ \lambda_s^*)=I^{(1)}(z,\ \lambda_s^*)\,\delta(\omega-\omega_s^*)$$
$$F_C[z,\ \omega,\ \lambda_s^*:I^{(0)}]=F_C(z,\ \lambda_s^*)\delta(\omega-\omega_s^*)$$

とおくと，輸送方程式はつぎのようになる。

$$\omega\frac{\partial}{\partial z}I^{(1)}(z,\ \lambda_s^*)+\mu(z,\ \lambda_s^*)I^{(1)}(z,\ \lambda_s^*)$$
$$=F_C(z,\ \lambda_s^*) \quad (9\text{-}29)$$
$$: s=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots Q$$

ここに，

$$F_C(z,\ \lambda_s^*)=\frac{\lambda_0}{2\pi}n(z)K(\lambda_0^*,\ \lambda_s^*)$$
$$\times\exp\left\{-\int_0^z \mu(\zeta,\ \lambda_0^*)\,d\zeta\right\} \quad (9\text{-}30)$$

この形の微分方程式は解けて，解はつぎのようになる。

$$I^{(1)}(z,\omega,\lambda_s^*)$$
$$=\frac{\lambda_0}{2\pi}n(z)\delta(\omega-\omega_s^*)\,K(\lambda_0^*,\lambda_s^*)G(z,\omega,\lambda_s^*) \quad (9\text{-}31)$$

ここに，

$$G(z,\ \omega,\ \lambda_s^*)$$
$$=\frac{1}{\omega}\int_0^z \exp\left[-\int_0^x \mu(\zeta,\ \lambda_0^*)d\zeta - \frac{1}{\omega}\int_x^z \mu(\zeta,\ \lambda_s^*)\ d\zeta\right]dx \qquad : 1\geqq\omega>0$$
$$=\frac{1}{\mu(z,\lambda_s^*)}\exp\left[-\int_0^z \mu(\zeta,\ \lambda_0^*)\ d\zeta\right] \qquad : \omega=0$$
$$=\frac{1}{\omega}\int_z^A \exp\left[-\int_0^x \mu(\zeta,\ \lambda_0^*)d\zeta - \frac{1}{\omega}\int_x^z \mu(\zeta,\lambda_s^*)\ d\zeta\right]dx \qquad : 0>\omega\geqq-1$$
$$(9\text{-}32)$$

ただし $z=A$ は外境界である。

つぎに $F_C[I^{(1)}]$ を計算する。考え方としては前節で述べた斜入射線源での $F_C[I^{(0)}]$ の計算法と同じである。すなわち，線源の波長が λ_s^* で，入射角の余弦が ω_s^* なる単一方向線束に対して $F_C[I^{(1)}]$ を求める。前節と対比しつつ相違点だけを述べる。

(9-10)：

$$\eta_j^*=1+\lambda_s^*-\lambda_j^* \quad (9\text{-}33)$$
$$: \lambda_s^* \leqq \lambda_j^* \leqq \lambda_s^*+2$$

(9-8)：

$$I_s^{(1)}(z,\ \omega)=\int_{\lambda_s}^{\lambda_{s+1}} I^{(1)}(z,\ \omega,\ \lambda_s^*)d\lambda$$
$$=\frac{\lambda_0}{2\pi}n(z)\delta(\omega-\omega_s^*)K(\lambda_0^*,\ \lambda_s^*)$$

$$\times(\lambda_{s+1}-\lambda_s)\ G(z,\ \omega,\ \lambda_s^*)$$

$$I_s^{(1)}(z)=\int_{4\pi}I_s^{(1)}(z,\ \omega)d\Omega$$

$$=\lambda_0 n(z)\ K(\lambda_0^*,\ \lambda_s^*)(\lambda_{s+1}-\lambda_s)G(z,\ \omega_s^*,\ \lambda_s^*) \tag{9-34}$$

斜入射の単一方向，単一エネルギー線源での非散乱線束では，方向分布およびエネルギースペクトルの両者に特異性があるのに対し，垂直入射線源での1回散乱線束では特異性が1つ減っている。(9-34) においては，波長 λ については連続性を認め，角度の余弦 ω に関しては特異性があるとして扱った。もし必要があれば逆に角度分布に連続性を持たせる見方も成立する。

以下，(9-14)～(9-19) は λ_0^* を λ_s^* で置きかえればそのまま成立し，(9-20) に対応する計算式がつぎのようになる。

$$F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I^{(1)}]$$

$$=\frac{n(z)}{2\pi^2}\sum_{s=0}^{Q}K(\lambda_s^*,\ \lambda_j^*)I_s^{(1)}(z)\frac{\phi'_{q+1}-\phi_q'}{\omega_q-\omega_{q+1}}$$

$$=\frac{\lambda_0}{2\pi^2}\{n(z)\}^2\sum_{s=0}^{Q}K(\lambda_0^*,\ \lambda_s^*)\ K(\lambda_s^*,\ \lambda_j^*)$$

$$\times(\lambda_{s+1}-\lambda_s)\frac{\phi'_{q+1}-\phi_q'}{\omega_q-\omega_{q+1}}G(z,\ \omega_s^*,\ \lambda_s^*)$$

$$:\lambda_0^*\leqq\lambda_s^*\leqq\lambda_0^*+2$$

$$:\lambda_s^*\leqq\lambda_j^*\leqq\lambda_s^*+2$$

$$:q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ Q \tag{9-35}$$

(9-19) から明らかなように，ϕ_q' は s をパラメタとして含んでいる。この式から推定されるように $I^{(2)}$ の角度分布およびエネルギースペクトルには特異性はほとんど認められない。したがって $I^{(2+)}$ は (仮定7-3) を満足するものと考えてよい。

以上の結果をもとにして，$I^{(2+)}$の満足すべき輸送方程式が (9-4) から求められる。すなわち，

$$\omega_q^*\frac{\partial}{\partial z}I^{(2+)}(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)+\mu'(z,\ \lambda_j^*)I^{(2+)}(z,\omega_q^*,\lambda_j^*)$$

$$=F'(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$$

$$:j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ J \tag{9-36}$$

$$:q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ Q$$

であり，また，

$$\left.\begin{aligned}&\mu'(z,\ \lambda_j^*)=\mu(z,\ \lambda_j^*)-n(z)A_{00}(\lambda_j^*)\\&F'(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)=F_C[z,\omega_q^*,\ \lambda_j^*:I^{(1)}]\\&\quad+n(z)\sum_{k=1}^{\min(j,\ Nj-1)}\sum_{t=0}^{Q}A_{kt}(\omega_q^*,\lambda_j^*)\\&\quad\times I^{(2+)}(z,\ \omega_t^*,\ \lambda_{j-k}^*)\end{aligned}\right\} \tag{9-37}$$

である。$F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I^{(1)}]$ は (9-35) で，また，A_{00} および A_{kt} は (8-11) で与えられている。

この輸送方程式も (8-12) と同形であって，§8.2で述べた解法をそのまま適用できる。ここに求めた解，$I^{(2+)}(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ および (9-31)，(9-25) で与えられる $I^{(1)}(z_i,\ \omega,\ \lambda_j^*)$，$I^{(0)}(z_i,\ \omega,\ \lambda)$を総合したものが求める垂直入射線源の解である。

§9.4 $F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I^{(1)}]$ の検討

$F_C[I^{(1)}]$ の計算で注意すべき点を述べる。

λ_j^* および ω_q^* のメッシュの選び方は (9-26) で示された通りである。一般には，Qを任意の正の整数とした場合，λ およびω共に，$2/Q$の等間隔でメッシュポイントを選ぶことが多い。メッシュを等間隔とすると多くの計算が簡単になるが $F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*:I^{(1)}]$の値に望ましくない状況が現れる。すなわち，$n$ を任意の正の整数とし，$n\leqq Q$ とする。このとき (9-35) によると，

$$\left.\begin{aligned}&F_C[z,\ \omega_0^*,\ \lambda_{2n}^*:I^{(1)}]\\&\quad=\frac{\lambda_0}{2\pi}\{n(z)\}^2K(\lambda_0^*,\lambda_n^*)K(\lambda_n^*,\lambda_{2n}^*)G(z,\omega_n^*,\lambda_n^*)\\&F_C[z,\ \omega_0^*,\ \lambda_{2n-1}^*:I^{(1)}]=0\end{aligned}\right\} \tag{9-38}$$

となる。現象を考察すれば明らかなように，これは単純にメッシュポイントで代表値計算をする際には避けられないことである。この $(\omega_0^*,\ \lambda_{2n-1}^*)$ に達すべき光子は，$(\omega_0^*,\ \lambda_{2n}^*)$ および $(\omega_0^*,\ \lambda_{2n-2}^*)$ に配分されている。

したがって，この場合は次式のように特別に $F_C[I^{(1)}]$ を計算すれば，上述のような不合理な現象は見られなくなる。いま，

$$\lambda_s=(\lambda_0^*+\lambda_j^*)/2$$

と定義する。λ_s は必ずしも λ のメッシュポイントとは一致しない。

$$F_C[z,\ \omega_0^*,\ \lambda_j^* : I^{(0)}]$$

$$=\frac{\lambda_0}{4\pi}\{n(z)\}^2 K(\lambda_0^*, \lambda_s)K(\lambda_s,\ \lambda_j^*)G(z,\ \omega_s,\ \lambda_s) \tag{9-40}$$

ここに,

$$\omega_s=1+\lambda_0^*-\lambda_s=1+(\lambda_0^*-\lambda_j^*)/2$$

である。

§ 9.5 垂直入射線源の取扱い（その2）

垂直入射，単一エネルギー線源における1回散乱線 $I^{(1)}(z,\ \omega,\ \lambda)$ は，(9-31) 示したようにエネルギースペクトルあるいは角度分布の一方にだけ特異性を有している。したがって $I^{(1+)}(z,\ \omega,\ \lambda)$ が（仮定7-3）を満足すると考えるのはやや無理があるが，エネルギースペクトルあるいは角度分布の一方には連続性が存在するから，メッシュ間隔が粗くなければ誤差は少ない。

この場合も，非散乱線束 $I^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)$ は (9-25) で計算される。

$I^{(1)}(z,\ \omega,\ \lambda)$ が（仮定7-3）に従うため，$F_C[I^{(0)}]$ はつぎのようになる。

$$F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^* : I^{(0)}]$$

$$=\frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{n(z)}{\omega_q-\omega_{q+1}}K(\lambda_0^*,\ \lambda_j^*)$$

$$\times\exp\left\{-\int_0^z\mu(\zeta,\ \lambda_0^*)\,d\zeta\right\}$$

$$:j=q \tag{9-41}$$

$$=0 \qquad :j\neq q$$

(9-27) と比較すればわかるように，分点，ω_q, ω_{q+1}, λ_j, λ_{j+1} で囲まれた領域内に発生するCompton 1回散乱線の量は両式の何れによっても等しい。(9-41) では，1回散乱線がこの単位領域内で均等に分布すると仮定したわけである。

輸送方程式は (9-3) によって，

$$\omega_q^*\frac{\partial}{\partial z}I^{(1+)}(z,\omega_q^*,\lambda_j^*)+\mu'(z,\lambda_j^*)I^{(1+)}(z,\omega_q^*,\lambda_j^*)$$

$$=F'(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*) \tag{9-42}$$

となり，また，

$$\left.\begin{aligned}\mu'(z,\ \lambda_j^*)&=\mu(z,\ \lambda_j^*)-n(z)A_{00}(\lambda_j^*)\\ F'(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)&=F_C[z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^* : I^{(0)}]\\ &+n(z)\sum_{k=1}^{\min(j,N_{j-1})}\sum_{t=0}^{Q}A_{kt}(\omega_q^*,\ \lambda_j^*)\\ &\times I^{(1+)}(z,\ \omega_t^*,\ \lambda_{j-k}^*)\end{aligned}\right\} \tag{9-43}$$

である。$F_C[I^{(0)}]$ は (9-41) に，また A_{00} および A_{kt} は (8-11) に与えられている。輸送方程式 (9-42) は (8-12) と同形であるから § 8.2 で述べた手順によって解くことができる。

§ 9.6 $F_A[z,\ \omega,\ \lambda : I]$ の検討

すでに § 8.3 で述べたように，電子対生成に伴う陽電子の消滅による光子束 $I_A(z,\ \omega,\ \lambda)$ は $\lambda\geqq1$ なる低エネルギーにのみ存在する。一方電子対生成は $\lambda\leqq\frac{1}{2}$ なる高エネルギーの光子で生ずる。また消滅輻射光子は $\lambda=1$ なる波長で，等方角度分布を以って発生すると仮定した。高エネルギーの単一方向線源に対してはこの仮定が厳密には成立たないが，いま問題にしているエネルギー範囲ではこの仮定との差は無視できる程度である。

したがってつぎのように考えることができる。単一エネルギー単一方向線源の波長が，

○ $\lambda>1/2$ の場合。 I_A が存在しない。

○ $\lambda\leqq1/2$ の場合。 I_A が存在するが，I_Aの線源項である $F_A[I]$ には，線源のエネルギーおよび角度分布の特異性は及ばない。すなわち § 8.3 で述べた解法に従って解が得られる。

残された問題は，（仮定 7-3）に従わない成分を含んだエネルギー束 $I(z,\ \omega,\ \lambda)$ に対して，(6-13)で定義される $F_A[z,\ \omega,\ \lambda : I]$ をどのようにして求めるかである。何れも $\lambda_0\leqq1/2$ とする。

(1) 斜入射線源（線源：(9-5)）

$$F_A[z,\ \omega,\ \lambda : I^{(0)}]=\frac{1}{2\pi\omega_s}\delta(\lambda-1)\lambda\mu_{PP}(z,\lambda_0^*)$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{\omega_s}\int_0^z\mu(\zeta,\ \lambda_0^*)\,d\zeta\right\} \tag{9-44}$$

$$F_A[z,\omega,\lambda : I^{(1+)}]$$

$$=\delta(\lambda-1)\lambda\sum_{q=0}^{Q}(\omega_q-\omega_{q+1})\sum_{j=0}^{N_P}\mu_{PP}(z,\ \lambda_j^*)$$

$$\times I^{(1+)}(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_j}{\lambda_j^*} \tag{9-45}$$

ここに，N_P は § 8.3 に与えられている。

(2) 垂直入射線源（線源：(9-23)）

$$F_A[z,\ \omega,\ \lambda : I^{(0)}] = \frac{1}{2\pi}\delta(\lambda-1)\lambda\mu_{PP}(z,\ \lambda_0^*)$$

$$\times\exp\left\{-\int_0^z \mu(\zeta,\ \lambda_0^*)\,d\zeta\right\} \qquad (9\text{-}46)$$

$$F_A[z,\ \omega,\ \lambda : I^{(1)}]$$

$$= \frac{\lambda_0}{2\pi}n(z)\,\delta(\lambda-1)\lambda\sum_{j=0}^{N_P}\mu_{PP}(z,\ \lambda_j^*)$$

$$\times K(\lambda_0^*,\ \lambda_j^*)G(z,\ \omega_j^*,\ \lambda_j^*)\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_j}{\lambda_j{}^*} \qquad (9\text{-}47)$$

$$F_A[z,\ \omega,\ \lambda : I^{(2+)}] = \delta(\lambda-1)\lambda\sum_{q=0}^{Q}(\omega_q-\omega_{q+1})$$

$$\times\sum_{j=0}^{N_P}\mu_{PP}(z,\ \lambda_j^*)I^{(2+)}(z,\omega_q^*,\ \lambda_j^*)\frac{\lambda_{j+1}-\lambda_j}{\lambda_j{}^*} \qquad (9\text{-}48)$$

もし $I=I^{(0)}+I^{(1+)}$ なる近似を行なう場合は，

$F_A[z,\ \omega,\ \lambda : I^{(0)}]$ を (9-46) で

$F_A[z,\ \omega,\ \lambda : I^{(1+)}]$ を (9-45) で

計算すればよい。

第10章　直接積分解法（その2, SELENE 2）

本章では，（仮定 7-4）に従って線源項の積分 (6-12) および (6-13) を行ない，その結果を用いて輸送方程式 (7-10) および (7-11) を解く方法を述べる。

（仮定7-4）では，分点 $\lambda_j(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ および $\omega_q(q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \cdots\cdots,\ Q)$ でエネルギー束が計算される。代表値を与えるメッシュポイント，λ_j^* および ω_q^* は必要がない。

任意の正の奇数を Q とするとき，

$$h=2/Q \qquad (10\text{-}1)$$

なる h を分点間隔として波長 λ および光子の進行方向角の余弦 ω を分割する。

$$\omega_0=1,\ \omega_Q=-1$$

とする。

$$\left.\begin{array}{ll}\omega_q=1-qh & : q=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ Q\\ \lambda_j=\lambda_0+jh & : j=0,\ 1,\ \cdots\cdots\end{array}\right\} \qquad (10\text{-}2)$$

である。

§ 10.1　$F_C[z,\ \omega,\ \lambda : I(z,\ \omega',\ \lambda')]$ の計算

波長 λ_{j-k} から Compton 散乱によって λ_j に減速するときの散乱角の余弦は，(5-1) によって，

$$\eta_k=1+\lambda_{j-k}-\lambda_j$$
$$=1-kh \qquad (10\text{-}3)$$

$$: k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ \min(j,\ Q)$$

したがって $\eta_0=1,\ \eta_Q=-1$ である。

便宜上 $F_C[z,\ \omega,\ \lambda : I(z,\ \omega',\ \lambda')]$ の式を再録する。

(6-12)：

$$F_C[z,\ \omega_q,\ \lambda_j : I(z,\ \omega,\ \lambda)]$$

$$=\frac{n(z)}{\pi}\int_0^\pi d\phi\int_{-1}^1 I(z,\ \omega'(\eta,\ \phi),\ \lambda'(\eta))$$

$$\times K(\lambda'(\eta),\ \lambda_j)d\eta \qquad (10\text{-}4)$$

$$(5\text{-}1) : \lambda'(\eta)=\lambda_j-1+\eta \qquad (10\text{-}5)$$

$$(5\text{-}2) : \omega'(\eta,\ \phi)=\omega_q\eta+\sqrt{1-\omega_q{}^2}\sqrt{1-\eta^2}\cos\phi \qquad (10\text{-}6)$$

(10-3) および (10-5) から明らかに，

$$\lambda'(\eta_k)=\lambda_{j-k} \qquad (10\text{-}7)$$

である。

冗長を避けるため，つぎの略記を行なう。

$$I(z,\ \omega'(\eta,\ \phi),\ \lambda'(\eta))K(\lambda'(\eta),\ \lambda_j)$$
$$\longrightarrow IK(\omega'(\eta,\ \phi),\ \lambda'(\eta))$$

（仮定 7-4）によると，$IK(\omega',\ \lambda')$ は λ' の区間 $(\lambda_{j-k},\ \lambda_{j-k+1})$ で λ' の1次関数として変化する。λ' と η との関係式 (10-5) から，η の1次関数であると仮定するのと同等である。

したがって (10-4) に含まれる積分の1部が実行できて，つぎのようになる。

$$\int_{-1}^1 IK(\omega'(\eta,\ \phi),\ \lambda'(\eta))d\eta$$

$$=\sum_{k=1}^{\min(j,\ Q)}\int_{\eta_k}^{\eta_{k-1}} IK(\omega'(\eta,\ \phi),\ \lambda'(\eta))d\eta$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\min(j,\ Q)}(\eta_{k-1}-\eta_k)$$

$$\times\Big\{IK(\omega'(\eta_{k-1},\phi),\lambda'(\eta_{k-1})))$$

$$+IK(\omega'(\eta_k,\ \phi),\ \lambda'(\eta_k))\Big\} \qquad (10\text{-}8)$$

(10-3) の関係式を用いて (10-8) を書き直すと，

$$\int_{-1}^1 IK(\omega'(\eta,\ \phi),\ \lambda'(\eta))d\eta$$

$$=\frac{h}{2}IK(\omega'(\eta_0,\ \phi),\ \lambda_j)$$

$$+h\sum_{k=1}^{\min(j-1,\ Q-1)}IK(\omega'(\eta_k,\ \phi),\ \lambda_{j-k})$$

$$\begin{cases}+\dfrac{h}{2}IK(\omega'(\eta_j,\ \phi),\ \lambda_0) & : j<Q\\ +\dfrac{h}{2}IK(\omega'(\eta_Q,\ \phi),\ \lambda_{j-Q}) & : j\geqq Q\end{cases} \qquad (10\text{-}9)$$

となる。

$F_C[z,\ \omega_q,\ \lambda_j : I]$ を求めるためには，(10-4) で見るように上述の積分 (10-9) に加えて，さらにつぎの形の積分を行なう必要がある。すなわち，

$$\int_0^\pi I(z,\ \omega'(\eta_k,\ \phi),\ \lambda_{j-k})d\phi$$

ϕ が 0 から π まで変化する際の $\omega'(\eta_k,\ \phi)$ の上下限の値は (10-6) によって求められる。

$$\left.\begin{aligned}\omega_{L_k-1} &< [\omega_q\eta_k+\sqrt{1-\omega_q^2}\sqrt{1-\eta_k^2}] \geqq \omega_{L_k}\\ \omega_{U_k} &\geqq [\omega_q\eta_k-\sqrt{1-\omega_q^2}\sqrt{1-\eta_k^2}] > \omega_{U_{k+1}}\end{aligned}\right\} \quad (10\text{-}10)$$

$\omega_{L_k}\sim\omega_{U_k}$ 間の ω の分点 ω_t の各々に対して ϕ_{kt} をつぎのように定める。

$$\phi_{kt}=\arccos\left[\frac{\omega_t-\omega_q\eta_k}{\sqrt{1-\omega_q^2}\sqrt{1-\eta_k^2}}\right],\ 0\leqq\phi_{kt}\leqq\pi \quad (10\text{-}11)$$

$$: t=L_k,\ L_k+1,\ \cdots\cdots,\ U_k$$

また計算結果の表現を簡単にするため，

$$\left.\begin{aligned}\phi_{kt}&=0 &&: t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ L_k-1\\ \phi_{kt}&=\pi &&: U_k+1,\ \cdots\cdots,\ Q\end{aligned}\right\} \quad (10\text{-}11)'$$

とおくことにする。

(仮定 7-4) に従うと $I(z,\ \omega,\ \lambda)$ は ω の区間，$(\omega_t,\ \omega_{t+1})$ 間で ω の1次関数として変化する。したがって求める積分は以下のように行なえる。ここではつぎの略記を用いる。

$$I(z,\ \omega'(\eta_k,\ \phi),\ \lambda_{j-k}) \longrightarrow I(\omega'(\eta_k,\ \phi))$$

$$\int_0^\pi I(\omega'(\eta_k,\ \phi))d\phi$$

$$=\sum_{t=L_k-1}^{U_k}\frac{1}{\omega_t-\omega_{t+1}}\int_{\phi_{kt}}^{\phi_{k(t+1)}}\Big[\Big\{\omega'(\eta_k,\phi)-\omega_{t+1}\Big\}I(\omega_t)$$

$$-\Big\{\omega'(\eta_k,\ \phi)-\omega_t\Big\}I(\omega_{t+1})\Big]d\phi$$

$$=\sum_{t=0}^{Q}B_{kt}(\omega_q)I(\omega_t)$$

$$: q=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ Q-1$$

$$: |\eta_k|\neq 1,\ |\omega_q|\neq 1 \quad (10\text{-}12)$$

ここに，

$$B_{kt}(\omega_q)$$

$$=\frac{1}{h}\Big\{\sqrt{1-\omega_q^2}\sqrt{1-\eta_k^2}(\sin\phi_{k(t+1)}$$

$$-2\sin\phi_{kt}+\sin\phi_{k(t-1)})$$

$$+\omega_q\eta_k(\phi_{k(t+1)}-2\phi_{kt}+\phi_{k(t-1)})$$

$$-\omega_{t+1}(\phi_{k(t+1)}-\phi_{kt})$$

$$+\omega_{t-1}(\phi_{kt}-\phi_{k(t-1)})\Big\}$$

$$: t=L_k-1,\ L_k,\ \cdots\cdots,\ U_k+1$$

$$=0 \qquad : t=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ L_k-2$$

$$=0 \qquad : t=U_k+2,\ \cdots\cdots,\ Q \quad (10\text{-}13)$$

また特に，$|\omega_q|=1$ または $|\eta_k|=1$ のときは，

$$\begin{aligned}B_{kt}(\omega_q)&=\pi\delta(t-k) &&: q=0\\ &=\pi\delta(t-Q+k) &&: q=Q\\ &=\pi\delta(t-q) &&: k=0\\ &=\pi\delta(t-Q+q) &&: k=Q\end{aligned} \quad (10\text{-}14)$$

以上，2つの積分 (10-9) および(10-12)～(10-14) の結果を使って，$F_C[z,\ \omega_q,\ \lambda_j : I]$, (10-4) はつぎのように求められる。

$$F_C[z,\ \omega_q,\ \lambda_j : I(z,\ \omega',\ \lambda')]$$

$$=n(z)A_{00}(\lambda_j)I(z,\ \omega_q,\ \lambda_j)$$

$$+n(z)\sum_{k=1}^{\min(j,Q)}\sum_{t=0}^{Q}A_{kt}(\omega_q,\lambda_j)I(z,\omega_t,\lambda_{j-k})$$

$$(10\text{-}15)$$

$$A_{00}(\lambda_j)=\frac{h}{2}K(\lambda_j,\ \lambda_j) \qquad : k=0$$

$$A_{kt}(\omega_q,\ \lambda_j)$$

$$=\frac{h}{\pi}K(\lambda_{j-k},\ \lambda_j)B_{kt}(\omega_q) \qquad : q\neq 0,\ Q$$

$$=\frac{h}{2\pi}K(\lambda_0,\ \lambda_j)B_{kt}(\omega_q) \qquad : k=j$$

$$=\frac{h}{2}K(\lambda_{j-Q},\ \lambda_j)\delta(t-Q+q) \qquad : k=Q$$

$$A_{kt}(\omega_0,\ \lambda_j)$$

$$=hK(\lambda_{j-k},\ \lambda_j)\delta(t-k)$$

$$=\frac{h}{2}K(\lambda_0,\ \lambda_j)\delta(t-j) \qquad : k=j$$

$$=\frac{h}{2}K(\lambda_{j-Q},\ \lambda_j)\delta(t-Q) \qquad : k=Q$$

$$A_{kt}(\omega_Q,\ \lambda_j)$$

$$=hK(\lambda_{j-k},\ \lambda_j)\delta(t-Q+k)$$

$$=\frac{h}{2}K(\lambda_0,\ \lambda_j)\delta(t-Q+j) \qquad : k=j$$

$$=\frac{h}{2}K(\lambda_{j-Q},\ \lambda_j)\delta(t) \qquad : k=Q$$

$$(10\text{-}16)$$

§ 10.2 $I(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_j)$ の計算

輸送方程式 (7-11) に，前節で求めた $F_C[I]$ を代入して整理するとつぎの輸送方程式が得られる。

$$\omega_q\frac{\partial}{\partial z}I(z,\ \omega_q,\ \lambda_j)+\mu'(z,\ \lambda_j)I(z,\ \omega_q,\ \lambda_j)$$

$$=F'(z,\ \omega_q,\ \lambda_j) \qquad (10\text{-}17)$$

$$: j=0,1,2,\cdots\cdots,J \quad : q=0,1,2,\cdots\cdots,Q$$

ここに,

$$\left.\begin{aligned} &\mu'(z,\ \lambda_j)=\mu(z,\ \lambda_j)-n(z)A_{00}(\lambda_j) \\ &F'(z,\ \omega_q,\ \lambda_j)=S(z,\ \omega_q,\ \lambda_j) \\ &\quad +n(z)\sum_{k=1}^{\min(j,Q)}\sum_{t=0}^{Q}A_{kt}(\omega_q,\lambda_j)\,I(z,\omega_t,\lambda_{j-k}) \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}18)$$

である。取扱っている問題に現れる最高のエネルギーを含む適当な上限エネルギーの波長を λ_0 とし，また計算を必要とする最低のエネルギーを含む適当な下限エネルギーの波長 λ_J とする。

$$\lambda_J=\lambda_0+Jh \qquad (10\text{-}19)$$

位置の変数 z の各分点 z_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ a)$ において純線源 $S(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_j)$ は与えられている。また線吸収係数 $\mu(z_i,\ \lambda_j)$ も当然既知である。境界条件は (7-2) の形で知られているとする。本章では，すでに述べたように，λ_j^*, ω_q^* をそれぞれ λ_j, ω_q と読み替える。

最高エネルギー分点，λ_0 では，

$$F'(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_0)=S(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_0)$$

であり，すでに与えられている。したがって第7章の解法を適用して，解 $I(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_0)$ は (7-3)～(7-9) として得られる。

つぎに，波長 λ_1 においては，

$$F'(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_1)=S(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_1)$$
$$+F_C[z_0,\ \omega_q,\ \lambda_1 : I(z_i,\ \omega_t,\ \lambda_0)]$$

となり，$I(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_0)$ の解はすでに求まっているから，$F'(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_1)$ は既知となり，同じく (7-3)～(7-9) によって解，$I(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_1)$ が計算される。

以下同様にして，

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\cdots,\ \lambda_J$$

の順序に計算を進行させることによって，

$$I(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_j)$$
$$: i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ a$$
$$: q=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ Q$$
$$: j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ J$$

がすべて解けることになる。

§ 10.3 $I_A(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_j)$ の計算

(仮定 7-4) によると，エネルギースペクトルは次のようになる。

$$\frac{1}{2\pi}I_0(z,\ \lambda)=\int_{-1}^{1}I(z,\ \omega,\ \lambda)d\omega$$

$$=\frac{h}{2}I(z,\ \omega_0,\ \lambda)$$
$$+h\sum_{q=1}^{Q-1}I(z,\ \omega_q,\ \lambda)$$
$$+\frac{h}{2}I(z,\ \omega_Q,\ \lambda) \qquad (10\text{-}20)$$

また同じく (仮定 7-4) によってつぎの積分が行なわれる。

λ の分点のうちで，

$$\lambda_N \leqq \frac{1}{2} < \lambda_{N+1}$$

を満足する N が定まる。

このようにすると，

$$\int_0^{1/2}\frac{1}{\lambda'}\mu_{PP}(z,\ \lambda')I(z,\ \omega_q,\ \lambda')d\lambda'$$

$$=\sum_{j=0}^{N}b_j\frac{1}{\lambda_j}\mu_{PP}(z,\lambda_j)I(z,\omega_q,\lambda_j) \qquad (10\text{-}21)$$

なる形で積分が求められる。ここに，

$$\left.\begin{aligned} &b_0=h/2 \\ &b_j=h \qquad : j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N-1 \\ &b_N=h/2+(1/2-\lambda_N)/2 \end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}22)$$

である。

上述の2つの積分，(10-20) および (10-22) を使って，電子対生成に伴う陽電子の消滅による線源項 (6-13) はすでに求められた $I(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_j)$ から次式のように表わされる。

$$F_A[z_i,\ \omega_q,\ \lambda : I(z_i,\ \omega',\ \lambda')]$$

$$=\delta(\lambda-1)\lambda\sum_{j=0}^{N}b_j\frac{h}{\lambda_j}\mu_{PP}(z_i,\ \lambda_j)$$

$$\times\Big[\frac{1}{2}I(z_i,\ \omega_0,\ \lambda_j)$$

$$+\sum_{t=1}^{Q-1}I(z_i,\ \omega_t,\ \lambda_j)$$

$$+\frac{1}{2}I(z_i,\ \omega_Q,\ \lambda_j)\Big] \qquad (10\text{-}23)$$

したがって，すでに§ 8.3に用いたのと全く同様な解法が適用できる。すなわち，I_A を非散乱線束 $I_A^{(0)}$ と，散乱線束 $I_A^{(1)}$ とに分離する。

$$I_A(z,\ \omega,\ \lambda)=I_A^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)+I_A^{(1)}(z,\ \omega,\ \lambda) \qquad (10\text{-}24)$$

輸送方程式は，

$$\omega\frac{\partial}{\partial z}I_A^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)+\mu(z,\ \lambda)\,I_A^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)$$

$$=F_A[z,\ \omega,\ \lambda:I(z,\ \omega',\ \lambda')] \qquad (10\text{-}25)$$

$$\omega\frac{\partial}{\partial z}I_A^{(1+)}(z,\ \omega,\ \lambda)+\mu(z,\ \lambda)\,I_A^{(1+)}(z,\ \omega,\ \lambda)$$

$$=F_C[z,\ \omega,\ \lambda:I_A^{(0)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$$

$$+F_C[z,\ \omega,\ \lambda:I_A^{(1+)}(z,\ \omega',\ \lambda')] \quad (10\text{-}26)$$

である。いま，

$$\left.\begin{aligned}&I_A^{(0)}(z,\ \omega,\ \lambda)=I_A^{(0)}(z,\ \omega)\delta(\lambda-1)\\&F_A[z,\omega,\lambda:I(z,\omega',\lambda')]=F_A(z,\omega)\,\delta(\lambda-1)\end{aligned}\right\} \quad (10\text{-}27)$$

とおくと，§8.3 で述べたのと全く同様にして，解 $I_A^{(0)}(z_i,\ \omega_q)$ が，したがって $I_A^{(0)}(z_i,\ \omega_q,\ \lambda)$ が求められる。

つぎに，輸送方程式 (10-26) を解くため，$F_C[I_A^{(0)}]$ を計算する。(8-22) に (10-12) を代入すると，

$$F_C[z,\ \omega_q,\ \lambda_j:I_A^{(0)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$$

$$=\frac{n(z)}{\pi}K(1,\ \lambda_j)\sum_{t=0}^{Q}B_t(\omega_q)\,I_A^{(0)}(z,\ \omega_t)$$

$$:1\leqq\lambda_j\leqq3 \qquad (10\text{-}28)$$

として計算される。ここに $B_t(\omega_q)$ は (10-13) および (10-14) によって与えられる。ただし添字 k は無視し，かつ $\eta=2-\lambda_j$ とおく。

また，$F_C[z,\ \omega_q,\ \lambda_j:\ I_A^{(1+)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$ は，(10-15) と全く同様に与えられる。ただし，明らかに，

$$I_A^{(1+)}(z,\ \omega_q,\ \lambda_j)=0 \qquad :j=0,1,2,\cdots\cdots,N'$$

である。 $\lambda_{N'}<1\leqq\lambda_{N'+1}$

したがって輸送方程式 (10-26)はつぎのように書き直せる。

$$\omega_q\frac{\partial}{\partial z}I_A^{(1+)}(z,\omega_q,\lambda_j)+\mu'(z,\lambda_j)\,I_A^{(1+)}(z,\omega_q,\lambda_j)$$

$$=F'(z,\ \omega_q,\ \lambda_j) \qquad (10\text{-}29)$$

$$:j=N'+1,\ \cdots\cdots,\ J \quad :q=0,1,2,\cdots\cdots,Q$$

ただし，

$$\mu'(z,\ \lambda_j)=\mu(z,\ \lambda_j)-n(z)A_{00}(\lambda_j)$$

$$F'(z,\omega_q,\lambda_j)=\frac{n(z)}{\pi}K(1,\lambda_j)\sum_{t=0}^{Q}B_t(\omega_q)\,I_A^{(0)}(z,\omega_t)$$

$$+n(z)\sum_{k=1}^{\min(j,\,Q)}\sum_{t=0}^{Q}A_{kt}(\omega_q,\lambda_j)I_A^{(1+)}(z,\omega_t,\lambda_{j-k}) \quad (10\text{-}30)$$

であり，$A_{00}(\lambda_j)$ および $A_{kt}(\omega_q,\ \lambda_j)$ は (10-16) でまた $B_t(\omega_q)$ は (10-13)，(10-14) で与えられる。

ただし，

$$A_{kt}(\omega_q,\lambda_j)=\frac{1}{\pi}(\lambda_{N'+1}-1+\frac{h}{2})K(\lambda_{j-k},\lambda_j)B_{kt}(\omega_q)$$

$$:k=j-N'-1 \qquad (10\text{-}31)$$

である。

輸送方程式 (10-29) は (10-17) と同形であるから §10.2 と全く同じ手順で解けて，散乱線束 $I_A^{(1+)}(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_j)$ が得られる。これとすでに求められた $I_A^{(0)}(z_i,\ \omega_q,\ \lambda)$ とを併せたものが消滅輻射による光子のエネルギー束である。

第11章　直接積分解法（その3，EOS）

（仮定 7-5）に従って線源項の積分 (6-12) および (6-13) を行ない，その結果によって輸送方程式 (7-10) および (7-11) を解く方法を述べる。

エネルギー束の角度分布は，全角度にわたって有限項の Legendre 多項式の和で表わされるとしている。ただしすべての計算は，ω の分点，ω_q $(q=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2Q)$ において行なわれる。ここに ω_q は $P_{2Q}(\omega)$ の根である。

λ の分点は等間隔 h を以って選ばれる。ここに，

$$h=2/N \qquad (11\text{-}1)$$

であり，Nは任意の正の整数である。λ の等間割分割は本質的な制限ではない。

§11.1　$I(z,\ \omega,\ \lambda)$ の計算

$I(z,\ \omega,\ \lambda)$ の計算法については，本研究所英文報告に詳しく述べてある。(文献 18) または 22) 参照) したがってここでは前章までの解析法との相違点だけを記すことにする。

この場合は，Compton 散乱の線源項は次式のようになる。

$$F_C[z,\ \omega_q,\ \lambda_j:I(z,\ \omega',\ \lambda')]$$

$$=n(z)\sum_{k=0}^{\min(j,\,N)}\sum_{t=1}^{2Q}A_{kt}(\omega_q,\lambda_j)I(z,\omega_t,\lambda_{j-k})$$

$$:q=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2Q$$

$$:i=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ J \qquad (11\text{-}2)$$

ここに，

$$A_{kt}(\omega_q,\lambda_j)=\sum_{l=0}^{L}a_{lt}\,P_l(\omega_q)\sum_{p=0}^{3}\psi_{pk}^{l}K_p(\lambda_j) \quad (11\text{-}3)$$

である。a_{lt}，ψ_{pk}^{l}，$K_p(\lambda)$ の求め方は文献 18) に与えられている。

ただここで重要なことは，本章の結果では，

$A_{0t}(\omega_q,\ \lambda_j)\neq 0 \qquad : t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2Q$ (11-4)

なることである。(仮定 7-3) による $F_C[I]$ の計算式 (8-10) および (仮定 7-4) から導かれる (10-15) では，何れも，

$A_{0t}(\omega_q,\ \lambda_j)=0 \qquad : t\neq q$ (11-5)

であった。したがって，(仮定 7-5) に従う場合には $F_C[I]$ の中に，未知のエネルギー束の値が含まれることになり，繰り返し法によって輸送方程式が解かれることになる。

§ 11.2 $I_A(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_j)$ の計算

文献 18) の(4)式によると，

$$\int_{-1}^{1} I(z,\omega,\lambda)d\omega=\sum_{q=1}^{2Q}2a'_q\, I(z,\omega_q,\lambda) \qquad (11\text{-}6)$$

また (仮定 7-5) にしたがうと，(10-21), (10-22) と全く同様に以下の積分が行なえる。

$$\int_0^{1/2}\frac{1}{\lambda'}\mu_{PP}(z,\ \lambda')\,I(z,\ \omega_q,\ \lambda')d\lambda'$$
$$=\sum_{j=0}^{N} b_j\frac{1}{\lambda_j}\mu_{PP}(z,\ \lambda_j)I(z,\ \omega_q,\ \lambda_j) \qquad (11\text{-}7)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} &b_0=h/2\\ &b_j=h \qquad : j=1,2,\cdots\cdots,N-1\\ &b_N=h/2+(1/2-\lambda_N)/2\end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}8)$$

また，$\lambda_N\leqq 1/2<\lambda_{N+1}$

電子対生成に伴う陽電子の消滅による線源項(6-13)は，したがって次式のようになる。

$$F_A[z,\ \omega_q,\ \lambda : I(z,\ \omega',\ \lambda')]$$
$$=2\delta(\lambda-1)\lambda\sum_{j=0}^{N} b_j\sum_{t=1}^{2Q}a'_t\,\frac{1}{\lambda_j}\,\mu_{PP}(z,\ \lambda_j)$$
$$\times I(z,\ \omega_t,\ \lambda_j) \qquad (11\text{-}9)$$

考え方は §10.3 と全く同様であり，(10-24)〜(10-27) の式はそのまま成立する。非散乱線束 $I_A^{(0)}(z_i,\ \omega_q,\ \lambda)$ は，輸送方程式 (10-25) に (11-9) の線源項を代入し，変換 (10-27) を施して求められる。

つぎに，$I(z,\ \omega,\ \lambda)$ の場合と同様にして，

$$I_A^{(0)}(z,\ \omega)=\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{4\pi}I_{Al}^{(0)}(z)P_l(\omega) \qquad (11\text{-}10)$$

また，

$$\frac{2l+1}{4\pi}I_{Al}^{(0)}(z)=\sum_{q=1}^{2Q}a_{lq}\,I_A^{(0)}(z,\ \omega_q) \qquad (11\text{-}11)$$

であり，$I_A^{(0)}(z,\ \omega_q)$ はすでにわかっている。

よって，

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}I_A^{(0)}(z,\ \omega'(\eta,\ \phi))d\phi$$
$$=\sum_{l=0}^{L}\sum_{t=1}^{2Q}a_{lt}\ I_A^{(0)}(z,\ \omega_t)\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}P_l(\omega'(\eta,\phi))d\phi$$
$$=\sum_{l=0}^{L}\sum_{t=1}^{2Q}a_{lt}\ P_l(\eta)\ P_l(\omega)\ I_A^{(0)}(z,\ \omega_t) \qquad (11\text{-}12)$$

となる。この式を (6-12) に代入し，(10-27) の関係を考えると $F_C\,[I_A^{(0)}]$ がつぎのように求められる。

$$F_C\,[z,\ \omega_q,\ \lambda_j : I_A^{(0)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$$
$$=n(z)\ K(1,\lambda_j)\sum_{l=0}^{L}\sum_{t=1}^{2Q}a_{lt}P_l(\eta_j)P_l(\omega_q)\ I_A^{(0)}(z,\omega_t)$$
$$: 1\leqq\lambda_j\leqq 3 \qquad (11\text{-}13)$$

ここに，

$\eta_j=2-\lambda_j$ (11-14)

である。

また，$F_C\,[z,\ \omega_q,\ \lambda_j : I_A^{(1+)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$ は (11-2) と全く同様にして求められる。ただし，

$\lambda_{N'}<1\leqq\lambda_{N'+1}$

としたとき，

$I_A^{(1+)}(z,\ \omega_q,\ \lambda_j)=0 \qquad : j=0,1,2,\cdots\cdots,N'$

である。

したがって，$I_A^{(1+)}$ の満足する輸送方程式は，

$$I(z,\ \omega_q,\ \lambda_j)\longrightarrow I_A^{(1+)}(z,\ \omega_q,\ \lambda_j)$$
$$S(z,\ \omega_q,\ \lambda_j)\longrightarrow F_C[z,\ \omega_q,\ \lambda_j : I_A^{(0)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$$
$$F_C[z,\ \omega_q,\ \lambda_j : I(z,\ \omega',\ \lambda')]$$
$$\longrightarrow F_C[z,\ \omega_q,\ \lambda_j : I_A^{(1+)}(z,\ \omega',\ \lambda')]$$

と読み替えれば $I(z,\ \omega,\ \lambda)$ の場合と全く同型となり，文献18) で述べた解法がそのまま適用でき，繰返し法によって解 $I^{(1+)}(z_i,\ \omega_q,\ \lambda_j)$ が求められる。

第12章　S_n法との比較および減衰計算の誤差評価

本章では，輸送方程式の数値解法として比較的に多く用いられてきた S_n 法，特に discrete S_n 法と本研究の解析法とを比較し，減衰計算での誤差の評価を行なう。以下に述べる如く，本解析法は広い範囲にわたって安定した解を与える。S_n 法の解は，場合によって正負の振動解を与え，この場合のために提案された

別解法は精度がよくない。なお本章での検討は，中性子に対してもそのまま当てはまるものである。

(7-1) によると，

$$\omega=\omega_q^* \quad : q=0,1,2,\cdots\cdots,Q+1$$

$$\lambda=\lambda_j^* \quad : j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

なる代表点での平板形状の輸送方程式はつぎのようになる。

$$\omega_q^*\frac{\partial}{\partial z}I(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)+\mu(z,\ \lambda_j^*)I(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$$
$$=F(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*) \tag{12-1}$$

この輸送方程式を適当な境界条件の下で解くため，以下のように仮定する。

z を適当な分点 $z_i(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ a)$ によって a 個の区間に分割する。z_0 および z_a は考えている物体の両外表面である。内部の物質境界に z_i を一致させることにすると，多重層ではつぎのように仮定して差支えない。

「z の区間 $(z_{i-1},\ z_i)$ で，$\mu(z,\ \lambda_j^*)$ は一定値 $\mu(z_{i-1},\ \lambda_j^*)$ をとる。」（仮定 12-1)

この仮定は S_n 法および本解析法の両者で行なっている。

さらに，discrete S_n 法ではつぎのように仮定する。[20)21)]

「z の区間 $(z_{i-1},\ z_i)$ で，$I(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ は z の1次関数として変化する。$F(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ は代表値 $F_{i-1}^*(\omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ をとる。」（仮定 12-2)

この仮定に従う場合を，ここでは，便宜上 (Case 1) と呼ぶことにする。ω_q^*, λ_j^* は自明のパラメタであるから省略し，ω_q^* は単に ω と，また $I(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ は単に I_i と書くことにする。

輸送方程式 (12-1) は，このような仮定の下ではつぎの差分方程式になる。

(Case 1)

$$\omega(I_i-I_{i-1})+\frac{1}{2}\mu_{i-1}(I_i+I_{i-1})\Delta z_i$$
$$=F_{i-1}^*\,\Delta z_i \tag{12-2}$$

ここに，

$$\Delta z_i=z_i-z_{i-1} \tag{12-3}$$

である。

$(\mu_{i-1}\Delta z_i/\omega)$ の値が大きい場合には，(12-2) から求められる解 I_{i-1} と I_i は交互に正負の値を持つ振動解となる。このような場合を考えて，discrete S_n 法ではつぎのような，より簡単な仮定を提案している。[20)]

「z の区間 $(z_{i-1},\ z_i)$ で，$I(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ は一定値 $I(z_i,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ をとる。

$F(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ は代表値 $F_{i-1}^*(\omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ をとる。」

（仮定 12-3)

この仮定に従う場合を (Case 2) と称する。$I(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ のとるべき一定値としては $I(z_{i-1},\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ も考えられるはずであるが，文献 20) では触れていない。何れにしても本質的な差は認められない。

輸送方程式 (12-1) はつぎの差分方程式となる。

(Case 2)

$$\omega(I_i-I_{i-1})+\mu_{i-1}I_i\Delta z_i$$
$$=F_{i-1}^*\,\Delta z_i \tag{12-4}$$

以後の比較のため，本研究で用いた解析法を Case 3とし，そこでの（仮定 7-2) を再録しておく。

「z の区間 $(z_{i-1},\ z_i)$ で，$F(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ は z の1次関数として変化する。」（仮定 12-4)

$I(z,\ \omega_q^*,\ \lambda_j^*)$ は輸送方程式 (12-1) の解として定まるもので，特に仮定や制限は設けない。

簡単のため $\omega>0$ の範囲だけで考えることにする。$\omega<0$ でも階差の方向が反対になるだけである。このとき，以上3つの Case についての解 I_i は，I_{i-1} からつぎのように求められる。

(Case 1)

$$I_i=\frac{F_{i-1}^*\dfrac{\Delta z_i}{\omega}+\left(1-\dfrac{1}{2}\mu_{i-1}\dfrac{\Delta z_i}{\omega}\right)I_{i-1}}{1+\dfrac{1}{2}\mu_{i-1}\dfrac{\Delta z_i}{\omega}} \tag{12-5}$$

(Case 2)

$$I_i=\frac{F_{i-1}^*\dfrac{\Delta z_i}{\omega}+I_{i-1}}{1+\mu_{i-1}\dfrac{\Delta z_i}{\omega}} \tag{12-6}$$

(Case 3)

$$I_i=\exp\left[-\mu_{i-1}\frac{\Delta z_i}{\omega}\right]I_{i-1}+\alpha_iF_i^-+\beta_iF_{i-1}^+ \tag{12-7}$$

ここに，α_i および β_i は (7-7)，(7-8) で与えられる。

放射線透過問題におけるこれら3つの解法の精度を

比較するため，本質を失なわない範囲で，できるだけ簡単化した問題を設定する。

エネルギー1組みとし，つぎのように仮定する。

$F_i=\mu_{si}I_i$

ここに μ_{si} は z_i における散乱の断面積である。一般に散乱された放射線は，いま考えている ω 以外の角度にも移り，同時に，他の角度での散乱放射線がこの ω の範囲に入ってくる。上記の仮定は，これが平衡状

表 1 減衰計算の比較（その1 $\mu_s/\mu=0$） $I(\mu z/\omega)/I_0$

	$\mu z/\omega$	1	5	10	15	20	30
厳密解		.3679(00)	.6738(-02)	.4540(-04)	.3059(-06)	.2061(-08)	.9358(-13)
	$\mu\Delta z/\omega$						
Case 1 (S_n 法)	0.1	.3676(00)	.6710(-02)	.4502(-04)	.3021(-06)	.2027(-08)	.9126(-13)
	0.5	.3600(00)	.6047(-02)	.3656(-04)	.2211(-06)	.1337(-08)	.4887(-13)
	1.0	.3333(00)	.4115(-02)	.1694(-04)	.6969(-07)	.2868(-09)	.4858(-14)
	2.0	——	——	.0000(00)	.0000(00)	.0000(00)	.0000(00)
	5.0	——	±.4286(00)	±.1837(00)	±.7872(00)	±.3374(-01)	±.6916(-02)
Case 2 (S_n 法)	0.1	.3855(00)	.5818(-02)	.7256(-04)	.6181(-06)	.5266(-08)	.3821(-12)
	0.5	.4444(00)	.1734(-01)	.3007(-03)	.5215(-05)	.9043(-07)	.2720(-10)
	1.0	.5000(00)	.3125(-01)	.9766(-03)	.3052(-04)	.9537(-06)	.9313(-09)
	2.0	——	——	.4115(-02)	.2640(-03)	.1694(-04)	.6969(-07)
	5.0	——	.1667(00)	.2778(-01)	.4630(-02)	.7716(-03)	.2143(-04)
Case 3 (本研究)	0.1	.3679(00)	.6738(-02)	.4540(-04)	.3059(-06)	.2061(-08)	.9356(-13)
	0.5	.3679(00)	.6738(-02)	.4540(-04)	.3059(-06)	.2061(-08)	.9356(-13)
	1.0	.3679(00)	.6738(-02)	.4540(-04)	.3059(-06)	.2061(-08)	.9356(-13)
	2.0	——	——	.4540(-04)	.3059(-06)	.2061(-08)	.9356(-13)
	5.0	——	.6738(-02)	.4540(-04)	.3059(-06)	.2061(-08)	.9357(-13)

±：正負値に振動することを示す。

表 2 減衰計算の比較（その2 $\mu_s/\mu=0.5$） $I(\mu z/\omega)/I_0$

	$\mu z/\omega$	1	5	10	15	20	30
厳密解		.6065(00)	.8209(-01)	.6738(-02)	.5531(-03)	.4540(-04)	.3059(-06)
	$\mu\Delta z/\omega$						
Case 1 (S_n 法)	0.1	.6065(00)	.8204(-01)	.6731(-02)	.5523(-03)	.4531(-04)	.3050(-06)
	0.5	.6049(00)	.8101(-01)	.6563(-02)	.5317(-03)	.4307(-04)	.2827(-06)
	1.0	.6000(00)	.7776(-01)	.6047(-02)	.4702(-03)	.4702(-03)	.2211(-06)
	2.0	——	——	.4115(-02)	——	.1694(-04)	.6969(-07)
	5.0	——	±.1111(00)	±.1235(-01)	±.1372(-02)	±.1524(-03)	±.1882(-05)
Case 2 (S_n 法)	0.1	.6211(00)	.9242(-01)	.8541(-02)	.7894(-03)	.7295(-04)	.6231(-06)
	0.5	.6694(00)	.1344(00)	.1807(-01)	.2429(-02)	.3266(-03)	.5902(-05)
	1.0	.7143(00)	.1859(00)	.3457(-01)	.6428(-02)	.1195(-02)	.4132(-04)
	2.0	——	——	.7776(-01)	——	.6047(-02)	.4702(-03)
	5.0	——	.4737(00)	.2244(00)	.1063(-01)	.5035(-01)	.1130(-01)
Case 3 (本研究)	0.1	.6066(00)	.8213(-01)	.6746(-02)	.5541(-03)	.4551(-04)	.3070(-06)
	0.5	.6081(00)	.8316(-01)	.6915(-02)	.5750(-03)	.4782(-04)	.3307(-06)
	1.0	.6127(00)	.8635(-01)	.7456(-02)	.6438(-03)	.5558(-04)	.4144(-06)
	2.0	——	——	.9778(-02)	——	.9561(-04)	.9349(-06)
	5.0	——	.1714(00)	.2936(-01)	.5031(-02)	.8621(-03)	.2531(-04)

±：正負値に振動することを示す。

態にあると仮定したものであり，実際とは必ずしも一致しないが，ここでの比較検討の目的には十分である。

透過の精度を比較するのであるから，μ_i および μ_{si} は一定とし，また Δz_i も i に係らず一定とする。

S_n 法，すなわち (Case 1) および (Case 2) での F の代表値 F^*_{i-1} の具体的な求め方は確定していない。したがって，ここでは仮りに，

$$F^*_{i-1}=\frac{1}{2}(F_i+F_{i-1})$$

とおく。$F_i=F(z_i,\ \omega^*_q,\ \lambda^*_j)$ である。

以上の仮想的な放射線透過問題に対して，

$$\begin{cases}\mu_s/\mu=0,\ 0.5\\ \mu\Delta z/\omega=0,1,\ 0.5,\ 1.0,\ 2.0,\ 5.0\end{cases}$$

をパラメタとして，$\mu z/\omega$ の1から30までの範囲について透過の放射線束 I_i を求めた結果を表1および表2に掲げる。なお，$\mu_s/\mu=1$ の場合は，上記の問題では無意味になる。$I_0=1$ とする。

表で見るように，S_n法の (Case 1)では，$(\mu\Delta z/\omega)$ の大きい値に対して正負の振動解を与える。この場合に適用すべく提案された (Case 2) は精度が極度に悪い。遮蔽問題でしばしば問題になるような深い透過に対してはほとんど使用できない。これに対して，本研究で用いた解析法 (Case 3) は，広いパラメタ範囲にわたって安定した，比較的よい精度の解を与える。ω の値の範囲は0の極めて近傍にとらえる場合もあるから $(\mu\Delta z/\omega)$ の値はかなり大きい値にまで及ぶと予想される。この場合に S_n 法の誤差は極めて大きくなる。ただし，炉心設計の如く透過距離の小さい問題でメッシュポイントを極めて多くとり，Δzを小ならしめた場合は事情はかなりよいものと思われる。深い透過が重要である遮蔽解析においては，上記の S_n 法の欠点には注意する必要がある。

第13章　結　　言

以上第I部において提案し，具体的な計算式を与えた一連の解析法は，光子の定常 Boltzmann 輸送方程式を数値積分によって解く方法で，つぎのような特長を持っている。

(1) 平板多重層遮蔽体内部の任意のメッシュポイントにおいて，γ 線の進行方向分布，エネルギースペクトルが与えられる。

(2) 算出結果は，多重層遮蔽体内部での，γ 線による熱発生の解析にそのまま使用できる。

(3) 算出結果はまた，多重層遮蔽体を透過する γ 線の線量率を高い精度で与える。

(4) 計算時間が比較的に短かい。

プログラミングの手法および計算機種で異なるが，現有のプログラムではつぎの通りである。

SELENE 1：

約0.2秒/(エネルギーメッシュ)・(位置メッシュ)・(角度メッシュ)

EOS：

約0.3秒/(エネルギーメッシュ)・(位置メッシュ)・(角度メッシュ)・(繰返し回数)

使用計算機は NEAC 2206 である。IBM 7090 を用いれば 1/20～1/50 の計算時間となろう。

(5) 計算時間が短かいので，一般設計計算，最適設計のためのパラメタサーベイ，参照計算資料の整備に実用可能である。

(6) 輸送方程式の空間積分法は，S_n 法で採用された解法に比較して精度が飛躍的に向上した。

遮蔽解析においては，一般に透過距離が非常に大きいので，空間積分精度の向上は特に重要である。同一精度を要求される場合は，メッシュ間隔を大きくとれるので計算時間が短かくなる。

(6) 多重層遮蔽解析において重要な，境界条件をよく満足している。特に SELENE では，角度メッシュ点で境界条件を満足するばかりでなく，メッシュの中間においても光子の平衡は厳密に保たれている。Legendre 展開法の如く，メッシュの中間で負の γ 線束を与えるようなことはない。

(8) 境界線源問題のみでなく，多重層内で任意の分布をする線源に対する解が容易に得られる。

このことは，原子炉遮蔽解析において特に重要である。すなわち，原子炉遮蔽体内での熱中性子の捕獲反応による放出 γ 線が，遮蔽体外面での放射線量の支配要素であるのが通例である。この γ 線源である熱中性子束の多重層内での空間分布はかなり急激な変化を示す。ここに提案した解析法によれば，この取り扱いが容易である。

(9) 単一エネルギーの単一方向表面線源に対する特別な解析法を与えた。

(10) 電子対生成に伴う発生陽電子の消滅による輻射光子の解析法を与えた。

(11) EOS では，Compton 線源項の計算で，γ 線束の角度分布を Legendre 展開する。輸送方程式の積分