

# 海峡および水道の船舶交通現象に関する研究

## B—III 二次元交通の解析

(そのI) 二次元交通流の流体力学的とりあつかい

渡辺 健次\* 沢井 秀之\*

## Navigational Traffic Phenomena on Narrow Straits

### B—III Analysis of Two-dimensional Traffic

—Part I. Hydrodynamical Treatments of Two-dimensional Traffic Flows—

By

Kenji Watanabe and Hideyuki Sawai

A pedestrian traffic is studied as an example of one and two-dimensional traffic flows.

The relation of the velocity and the density is obtained from the result of observations. The maximum traffic capacity is 1.4 persons per unit width (=1m) per second and the corresponding speed is 0.3 m/sec.

The observations for the case of two-dimensional traffic give the presence of shock waves and free boundary which varies with time. The effective pressure introduced as a function of the density is found to be almost constant in the range of the density reported in this paper.

### 1. は し が き

近年、交通の過密に伴い多発する事故の防止、輸送の能率化などの問題の研究が交通工学の名のもとに進められている。すなわち陸上においては自動車、海上においては船舶の交通容量や交通管制、道路水路の設計の技術的基礎の解明が行なわれてきた。

船、自動車、人などの流れ、すなわち交通流を一つの流体の流れとみて解析する事は自動車の場合についてはすでに幾つか試みられている。それは一次元の管路を流れる圧縮性の流体をモデルとしている。しかしながら船や人の場合は流れの方向のみならず、それに直角な方向にも平面的な広がりを持つため二次元的な流体モデルをとる事が望ましい。この報告では主として人の流れの場合について観測を行ない解析を試みた。人の流れは比較的一様で観測し易い事がある理由である。

我々の興味の対象として次の二つがある。一つは通路設計上の資料としての交通容量の値がどのくらいであるかという事である。他の一つは現象的な興味であ

って交通流は流体力学の方程式に従うものであるのか、従うとすればどのような性質を持った流体であるかという事である。従って流体の内部構造には立ち入らない。

始めに船や自動車の場合と比べるために次元と見なされる流れについて密度と速度の関係を調べた。次に二次元流として狭い出口によって絞られる時の流れの状態が重要であると思われるので、その場合について適当な近似と境界条件のもとで方程式を解き観測と比較し入口効果、衝撃波の存在などを調べた。

以下で使う記号を示す。

$\rho$ : 密度     $\vec{v}$ : 速度     $t$ : 時間  
 $p$ : 圧力     $Q$ : 流量

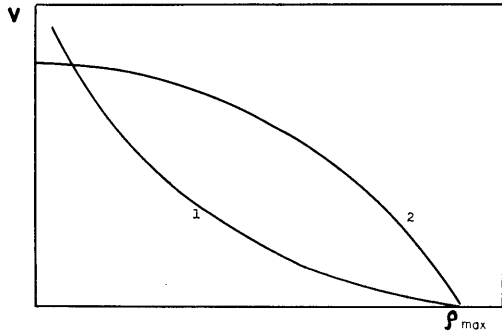
### 2. 一次元の流れ

#### 2.1 一次元の密度と速度・流量の関係

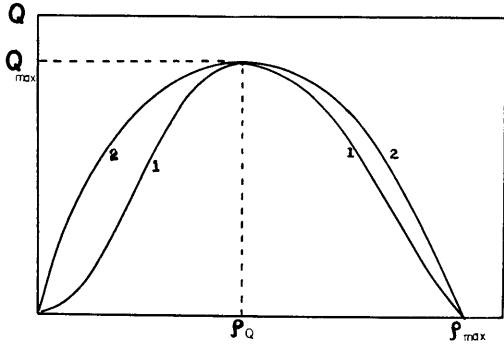
人間・船・自動車などを流体の構成粒子と見なしその流れ、すなわち交通流について考察する。経験的に理解される事だが、それら粒子の密度が大きければ速度は小さく、密度が小さければ速度は大きい。そこで速度  $v$  が密度  $\rho$  の単調減少関数であり、 $\rho = \rho_{\max}$  で  $v = 0$  と仮定すれば流量  $Q = \rho v$  について  $\rho = 0$ ,  $\rho =$

\* 共通工学部

$\rho_{\max}$  で、それぞれ  $Q=0$  となるので  $\rho=\rho_Q$  で  $Q=$  最大  $=Q_{\max}$  となるような密度  $\rho_Q$  があるだろうと予想した。この考えを図に示すと図1のようになる。



(a) 密度、速度の関係のタイプ



(b) 密度、流量の関係のタイプ

図 1

増加の傾向が同じ曲線でも曲り方の違うものがあるので  $v-\rho$  曲線では二つ、 $Q-\rho$  曲線では極大を一つだけ持つとして主な形を二つ描いた。

この予想を裏付けるために流体力学の方程式の特別な解として、このような傾向を持つものがあるかどうか調べてみる。交通流を理想流体すなわち粘性の無視出来る流体の流れと見なせば基本的な方程式として連続の方程式・Eulerの運動方程式・断熱方程式がある。

最初の2つを考える。すなわち、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{\rho v} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{ grad } p \quad (2)$$

一次元の流れについて調べるため流れの方向に  $x$  軸をとり密度として単位長さ当りの個数をとれば (1)、(2) より、

$$(130)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1)'$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2)'$$

第3の関係式としてここで圧力  $p$  と密度  $\rho$  の間に普通の気体に見い出される簡単な関係

$$p = j \rho^k \quad (j, k \text{ は定数で } j > 0) \quad (3)$$

があるものとし  $v$  と  $\rho$  の間には

$$v = f(\rho) \quad (4)$$

なる式が成立するものとする。(3)、(4)を(1)',(2)'に代入し、

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \rho^k}{\partial x} = k \rho^{k-1} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

に注意して整理すると、

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho f' + f) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$f' \frac{\partial \rho}{\partial t} + (ff' + kj\rho^{k-2}) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (f' \equiv \frac{df}{d\rho})$$

を得る。

これを  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial x}$  についての連立方程式と見なして  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$  なる解以外の解が存在するための条件を求めれば、

$$\begin{vmatrix} 1 & \rho f' + f \\ f' & ff' + kj\rho^{k-2} \end{vmatrix} = 0$$

つまり

$$f'^2 - kj\rho^{k-3} = 0$$

となり速度  $v$  は

$$v = f(\rho) = \pm \frac{2\sqrt{kj}}{k-1} \rho^{\frac{k-1}{2}} + v_0 \quad (5)$$

で表わされる。 $k$  をパラメーターとして  $\rho-v$  平面に(5)の曲線を描いた時に上で予想した傾向を持つ曲線の式は、

$$v = \begin{cases} -\frac{2\sqrt{kj}}{k-1} \rho^{\frac{k-1}{2}} + v_0 & (k > 0, k \neq 1) \quad (6-a) \\ -2\sqrt{j} \ln \rho + v_0 & (k = 1) \quad (6-b) \end{cases}$$

である。

これに対応する流量  $Q$  は  $Q = \rho v$  より

$$Q = \begin{cases} -\frac{2\sqrt{kj}}{k-1} \rho^{\frac{k+1}{2}} + v_0 \rho & (k > 0, k \neq 1) \\ -2\sqrt{j} \rho \ln \rho + v_0 \rho & (k = 1) \end{cases}$$

となり、この図を描けばたしかに上で予想した傾向図1の(b)の二の形である。すなわち  $k > 0$  であれば  $v-\rho$  曲線、 $Q-\rho$  曲線は予想した傾向を持つ。ゆえに  $p=j\rho^k$  なる関係は  $k > 0$  である限り矛盾なく交通流において成立するものと考えてよい。

2. 2 観測およびデータ処理

実際に  $v$  と  $\rho$  の関係がどうなっているかを観測により調べた。観測の対象として人の流れを選んだ。それは流れの構成粒子が均一で乱れが少なく観測が容易であるという理由による。場所は新宿駅西口前および同駅中央線ホームである。西口前での観測方法は建物の屋上から一台のカメラで3秒毎に写真を撮りあらかじめ測定した現地での目標物間の距離と写真を比較し対応する距離を定め各瞬間での人の位置を求めた。こうして連続した2枚の写真からその人の速度が分り何

表 1 (a) 速度(0.5~0.9) m/sec に対応する閉塞領域

0	II	60	22	20	3	2
4	9	26	I0	I8	7	I
8	I0	I4	I4	I3	7	0
7	II	8	I4	9	4	0
I4	i6	9	I7	8	5	I
I3	I7	I0	II	4	4	0
20	I2	I8	I6	5	2	0
22	9	I4	6	3	2	0
II	8	8	2	2	I	0
6	I0	5	2	0	0	0
5	4	4	4	2	I	0
4	4	5	2	0	0	0
4	2	0	2	0	0	0
4	0	0	2	2	2	0
I	2	2	0	0	0	0
I	0	I	0	0	0	0

人かの集団に着目して密度を求めた。この集団の速度は個々の人の速度の平均をとった。

また別の方法で密度、速度を求めた(図2参照)。それは速度の分っている人を原点としてその進行方向に  $y$  軸、それに垂直な方向に  $x$  軸をとり  $y < 0$  にいる人つまり原点の人の後方にいる人の座標を読み取り  $x$  軸  $y$  軸を 0.2m づつに区切ってますを作り、このますの中に  $(x, y)$  の値が入る人数を数えて表1を得た。原点にいる人の速度によって表を三つにわけた。また  $y$  軸に関して左右対称であるとして左右を区別しなかった。この表である行を横に比較して一番人数の多いますをとり、どの行についても同じ操作をしてそ

表 1 (b) 速度(1.0~1.6) m/sec に対応する閉塞領域

2	28	I02	75	56	29	I0	3
23	28	42	35	57	I9	II	I
I9	30	25	36	45	22	II	0
I9	26	27	29	23	25	I4	I
23	29	38	24	3I	II	II	0
35	4I	37	34	29	I6	II	0
27	36	30	20	22	I6	5	2
33	32	39	20	26	I5	4	0
33	33	29	20	I4	I5	3	0
26	33	22	I6	I5	7	2	0
46	34	26	23	I5	8	0	0
27	I6	I8	I4	9	7	4	3
I4	22	I8	7	I0	3	0	0
I8	9	I4	I2	7	3	2	0
I8	6	I3	8	3	4	0	0
8	6	5	4	3	I	0	0
3	6	I	2	I	0	I	0
4	3	0	I	I	I	0	2
4	3	3	0	0	I	0	0
I	I	3	I	2	I	0	0

これらのますを結ぶ折線とx軸y軸の囲む閉じた多角形すなわち閉塞領域を考える。この領域の意味するものは人が同一方向に歩いている場合、一人に着目してその人を中心に他の人の散らばり方を考えると後方では折線の所に一番人が集まり易いという事である。つまりこの領域には大抵の人が入るのを避けると解釈する。そうすればこの領域は平均して一人が占有する領域で、密度はこの領域の面積の逆数をとればよい。

西口前での観測では密度の大きな値が得られなかったので中央線ホームで次のような方法で行なった。一人がストップウォッチを持って人の流れに速度を合せて歩き一定の長さ進むのに要する時間を計り、他の

表 1 (c) (0.5~1.6) m/sec 速度に対応する閉塞領域

2	39	162	97	76	32	I2	3
27	37	68	45	75	26	I2	I
27	40	39	50	58	29	II	0
26	37	35	43	32	29	I4	I
37	45	47	41	39	16	I2	0
48	58	47	45	33	20	II	0
47	48	48	36	27	18	5	2
55	41	53	26	29	17	4	0
44	41	37	22	16	16	3	0
32	43	27	18	15	7	2	0
51	38	30	27	17	9	0	0
31	20	23	16	9	7	4	3
18	24	18	9	10	3	0	0
22	9	14	14	9	3	2	0
19	8	15	8	3	4	0	0
9	6	6	4	3	1	0	0
3	6	1	2	1	0	1	0
4	3	0	1	1	1	0	2
4	3	3	0	0	1	0	0
1	1	3	1	2	1	0	0

一人がその時間内に通過する人数を測定する方法で、図3において速度vの人がA線から距離lを進むのに要する時間τの間にB線を通して人数をnとすれば

$$\rho = \frac{n}{la}, \quad v = \frac{l}{\tau}$$

なる式からρとvが求められる。

### 2.3 結果

以上の結果をρ-v曲線とρ-Q曲線とにまとめた。(図4)

この図と2.1での予想を比較すると $3 > k > 0$ であれば $\frac{dv}{d\rho} < 0$ ,  $\frac{d^2v}{d\rho^2} > 0$ であるのでvおよびQの増加の傾向及び曲り方が同じである事がわかる。またこの図から通路幅1m当りの交通容量が $1.4 \pm 0.2$ 人/m.secである事がわかる。

### 3. 二次元の流れ

交通流で問題となる主要な二次元の流れには図5のようにいろいろな場合があるが、ここでは(d)の場合す

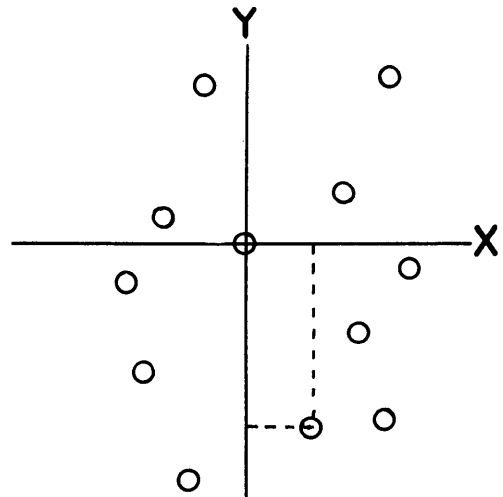


図 2 閉塞領域のもともめ方

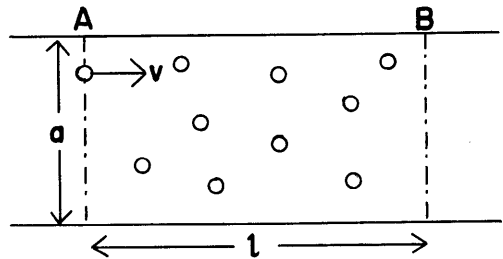


図 3 通過する人数によって密度, 流量をもとめる方法

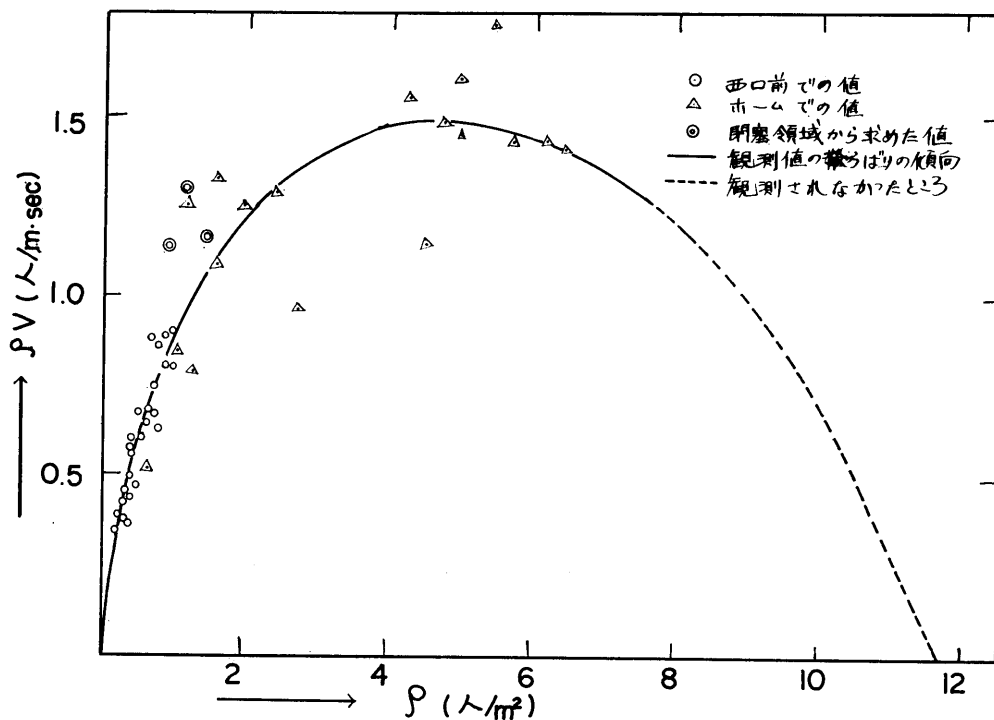


図 4 (a) 密度と流量の関係

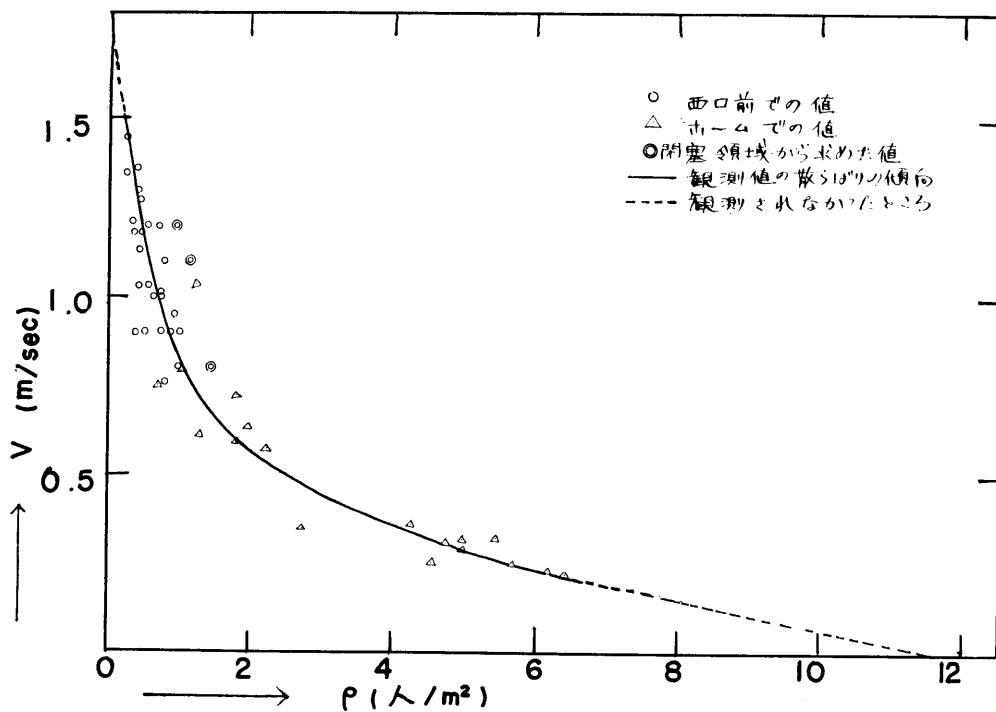


図 4 (b) 密度と速度の関係

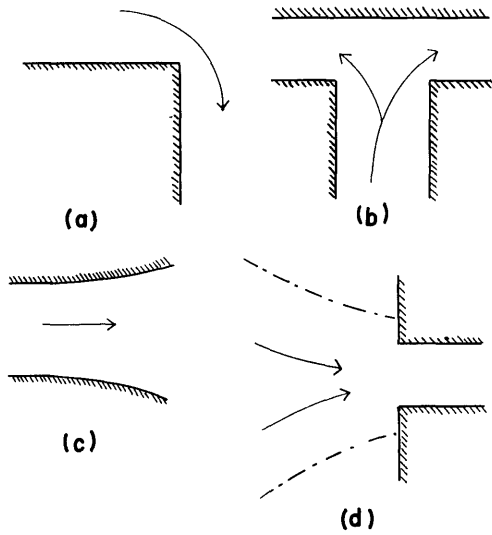


図5 二次元のいろいろな流れ

なわち流れが一つの入口へ向っている場合を考える。

3.1 交通流の特質

交通流において現われる特別な現象を考えてみる。

a 自由境界

図5の(d)で矢印の方向からの交通流がある場合、密度が極端に大きくない限り鎖線で示した領域内にしか流れが存在しない。これは流れが最も能率良く出口へ向かおうとする事から生ずるもので、この境界の事を自由境界と呼ぶ事にする。これは交通流においてのみ現われる現象であるが実在の流体では、流れの方向が逆ならジェットの様相との類似点がみられる。

b 衝撃波

流れの中にある面が存在しその面を境として流れの密度、圧力および面に相対的な速度の面への法線成分が不連続的に変化する場合がある。その面は一般的には流体に対して移動している。かような不連続面のつたわりを衝撃波と呼び不連続面に対する流れの速度の面への法線成分を  $v_n$  とすれば面の両側で

$$\rho v_n = \text{一定} \quad (7)$$

が成立している。これは普通の流体にも同様に存在する。

c 入口での効果

図5(d)の入口の近く図6において左側からの流入量が右側への流出量より多ければ人は左側にたまる。ここでは路幅に不連続な飛躍が発生しているため、やはり衝撃波と見なし得る。この時の波面の両側での連続条件は路幅を  $a$  として  $a\rho v_n = \text{一定}$  である。交通流に

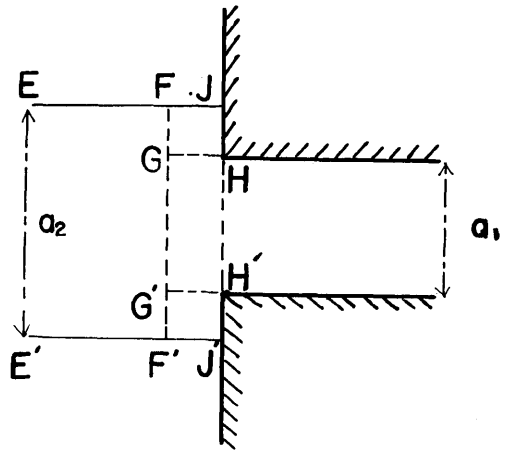


図6 入口近くの自由境界とその変動

においては、さらにこの路幅が後方に移動し結局図の点線のように自由境界が変動する。この自由境界の変化は人が能率よく流れようとする事から生ずるものと考えられる。この不連続面  $F-F'$  の伝播速度  $u$  は右の方に正方向をとれば、この面に相対的な流れの量が両側で等しいという事から、

$$\rho_2(v_2 - u)a_2 = \rho_1(v_1 - u)a_1$$

すなわち、

$$u = \frac{\rho_2 v_2 a_2 - \rho_1 v_1 a_1}{\rho_2 a_2 - \rho_1 a_1} \quad (8)$$

添字2は  $F-F'$  の左側、1は右側での値を示す。

3.2 二次元流の方程式

まず一次元の方程式で流れが定常である場合を解く。定常ゆえ  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0$  に注意して (1)', (2)' より

$$\rho v = \text{一定} \equiv d \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} v^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \text{一定} \equiv e \quad (10)$$

(9), (10) より、

$$\rho = \text{一定}, \quad u = \text{一定}$$

これは衝撃波の両側でも異なった定数を持って別々に成立している。

二次元の方程式は (1), (2) より

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

これを極座標であらわす。その際

$$\begin{aligned}
 \rho &= \rho(r, t) \\
 v_r &= v_r(r, t) \quad (v_r \text{ は } \vec{v} \text{ の } r \text{ 方向の成分}) \\
 v_\theta &= 0 \quad (v_\theta \text{ は } \vec{v} \text{ の } \theta \text{ 方向の成分}) \\
 p &= p(r, t) \text{ と仮定すれば,} \\
 \left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{\rho v_r}{r} &= 0 \\
 \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (12)
 \end{aligned}$$

となる。

$$\text{定常状態ならば } \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial v_r}{\partial t} = 0 \text{ ゆえ}$$

$$\rho v_r r = \text{一定} = d \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} v_r^2 + \int \frac{dp}{\rho} = \text{一定} = e \quad (14)$$

が得られる。

これらの式および3.1におけるような性質が見い出されるかどうか次に調べる。

### 3.3 観測およびデータ処理

観測は後楽園で行なった。観測場所の様子は図7に示す。流れは図の左側から来る。Dで示した領域の右端は階段になっていて交通流が著しく制限されている

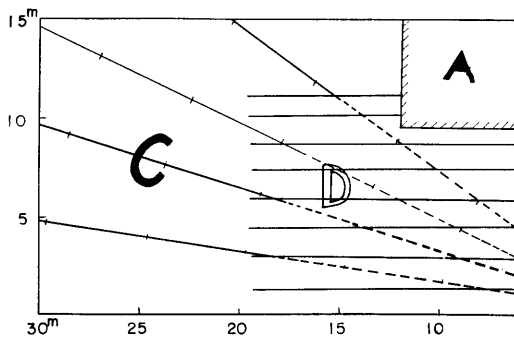


図7 観測地点の概念図

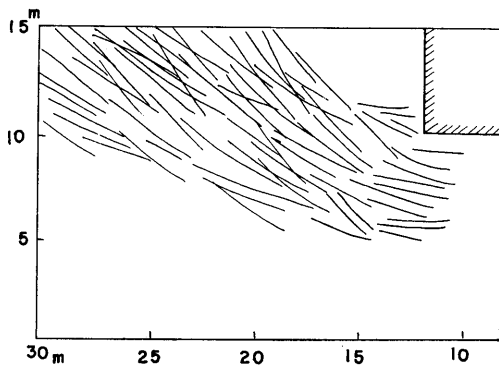


図8 観測された流線

る。縦軸の負の側およびAは建物で負の側の建物にカメラを一台据え3秒毎にこの流れを写真にとった。その際領域C, Dに当たる部分はカメラの位置を変え別の時間に撮ったのでデータの整理に当ってはC, Dは全く独立させて行なった。そのデータ整理は次のようにした。

2での観測と同じように人の位置を求め同一の人の位置を調べて流線を得た。図8は流線であり下側が空白なのは障害物によって撮影出来なかったためである。この流線を見ると焦点を共有する双曲線群に近い事がわかる。それはまた出口から遠いC領域では一点に収束するような直線群で、出口の付近のD領域では平行な直線であるとしてもよいだろう。従ってC領域では極座標を用い  $\rho, v_r$  は原点からの距離  $r$  のみに依存すると考えて求めた。D領域では一次元の流れとして求めた。結果は時間的に、ややばらつきがあるため定常流と考えるとC領域では時間平均をとり表2を得た。D領域では各点で  $\rho, v$  の急変する時刻を探すとそれより前と後の様子かどの場所でも大体同じであったので、それについての平均をとる事にした。これは衝撃波が伝わって行くものとし、この前後では、それぞれ  $\rho, v$  が一定であると見なしたからである。

### 3.4 結果

#### (c) C領域について

表2より  $\rho v_r r = \text{一定}$  が確められる。(9)と表2を比較して

$$d = 20.1 \quad (15)$$

表2 C領域での観測結果

$r$ m	$\rho$ 人/m <sup>2</sup>	$v_r$ m/sec	$\rho v_r$ 人/m·sec	$\rho v_r r$ 人/sec
18.5	3.55	0.31	1.10	20.3
20.5	2.08	0.46	0.95	19.5
22.5	1.15	0.77	0.89	19.9
24.5	0.78	1.06	0.83	20.3
26.5	0.69	1.08	0.78	19.6
28.5	0.54	1.35	0.74	21.1
30.5	0.59	1.11	0.65	19.8

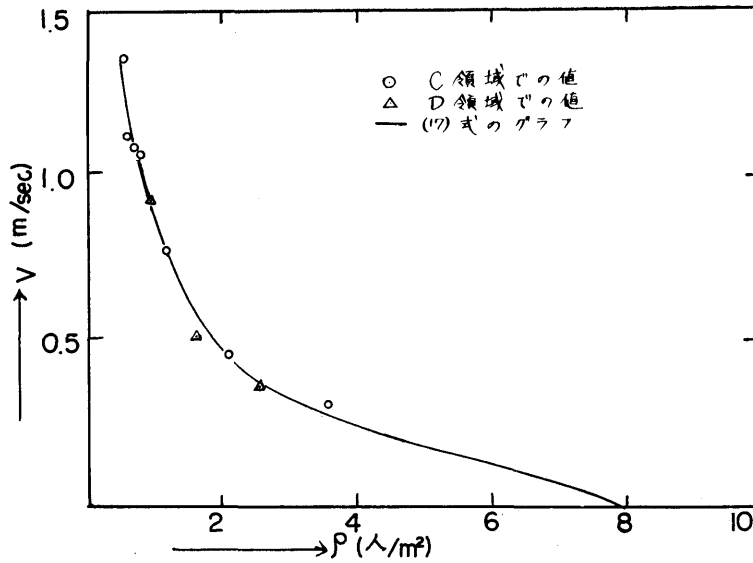


図9 二次元での密度、速度の関係

を得た。これに流れのなす角度 0.63 rad. をかけると約 13 人/sec となり毎秒 13 人の交通量となる。さらに  $p = j\rho^k$  とおいて (10) に代入すれば、

$$\frac{1}{2} v_r^2 = -j \frac{k}{k-1} \rho^{k-1} + e \quad (16)$$

となり、これが観測結果表 2 に合うように  $k, j$  を決めた。すなわち、

$$v_r = \sqrt{0.89 - 0.99 - 0.10 - 0.10} \quad (17)$$

なる式で  $v$  と  $\rho$  の関係が近似される (図 9)。

圧力  $p$  については、

$$p = 44\rho^{0.01} \quad (18)$$

で図 10 に示す。

一般の流体中で生じた乱れの伝播する速度すなわち音速  $C$  は、

$$C = \sqrt{dp/d\rho} \quad (19)$$

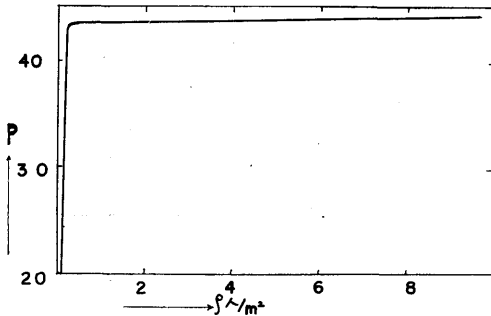


図10 密度と「圧力」の関係

で表わされるが、この式に (18) を代入して、

$$C = \sqrt{0.44 \rho^{-0.99}} \cong \sqrt{0.44} \rho^{-\frac{1}{2}}$$

を得る。

一方粒子間の平均距離を  $l$  とすると  $\rho \cong \frac{1}{l^2}$ 、従って  $C = \sqrt{0.44} l$ 。ある粒子から次の粒子へ乱れの伝わるまでの時間を  $t$  とすれば、

$$t = \frac{l}{c} = \frac{1}{\sqrt{0.44}} \cong 1.4 = \text{一定}$$

となる。

つまり密度が変化しても乱れが伝播するのに要する時間は、ほぼ一定である事になる。この事からこの密度の範囲では人の間の相互作用が殆んど変化しないと考えられる。交通流における圧力  $p$  の持つ意味は、このように考える事によって明らかになる。

(b) D領域について

この領域では 3.1 で説明した三つの現象が生じていることがわかった。まず密度の変化について考えれば不連続面  $S_1, S_2$  が 2 つ存在しそれによって分けられた領域を (1), (2), (3) とすれば、それぞれにおける密度、速度は (1) 0.92 m/sec, 0.94 人/m<sup>2</sup>, (2) 0.51 m/sec, 1.60 人/m<sup>2</sup>, (3) 0.36 m/sec, 2.57 人/m<sup>2</sup> である。この不連続面は  $S_1$  が 0.05 m/sec,  $S_2$  が 0.09 m/sec で左方へ移動している (図 12 参照)。これは衝撃波の伝播である。 $S_1$  では流れの幅すなわち自由境界には変化がなく  $S_2$  では変化する。それは図



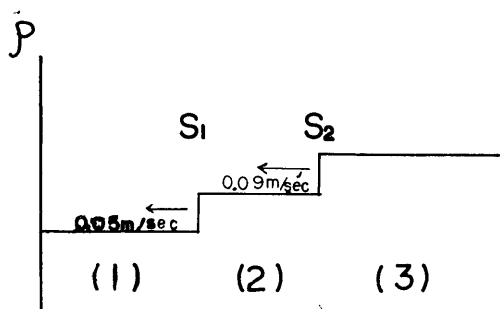


図11 衝撃波前後での密度と衝撃波の速度

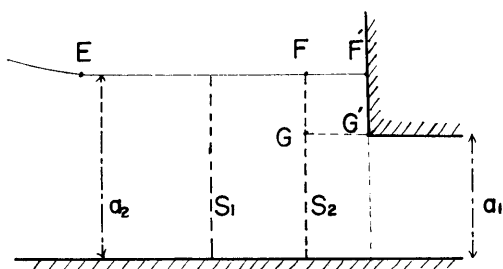


図12 自由境界変動を伴う衝撃波と、伴わない衝撃波の様子

に示してある。つまり時間と共に自由境界が  $E F' G' \rightarrow E F G G'$  と変化している。実際の流れの量を計算してみる。  $S_1$  および  $S_2$  に相対的な流れの量は保存されるはずである。流れの幅  $a_1 = 9.0\text{m}$   $a_2 = 11.0\text{m}$  に注意して (2) から  $S_1$  へ流れる量  $= 1.60(0.51 + 0.05) \times 11.0 = 9.9\text{人/sec}$ ,  $S_1$  から (1) へ流れる量  $= 0.94(0.92 + 0.05) \times 11.0 = 10.0\text{人/sec}$ , (3) から  $S_2$  へ流れる量  $= 2.57(0.36 + 0.09) \times 9.0 = 10.4\text{人/sec}$ ,  $S_2$  から (2) へ流れる量  $= 1.60(0.51 + 0.09) \times 11.0 =$

10.6人/sec, この結果を見ると流れの量は良い一致を示している事がわかる。  $S_1$  は単純な衝撃波,  $S_2$  では自由境界の変化を伴う衝撃波すなわち入口効果が生じているのである。

#### 4. む す び

二次元的な交通の流れを流体力学的に取扱う試みを行なった。特に観測し易い人の流れについて調べてみた。

その結果、ネックにおける自由境界の変動を伴う特殊な効果、衝撃波の存在などがたしかめられた。また、この程度の密度の範囲では圧力に比すべき作用は密度変化に伴って殆んど変化しない事が分った。さらに密度が高くなり圧縮性が殆んど現われない時の流れは興味ある問題で、この次に研究を進める予定である。

同時に密度と速度の関係がほぼ求められた。これから通路幅 1 m 当りの交通容量として 1.4 人/m.sec が得られる。これは幅 5 m の通路を 1 分間に 420 人が通過できる事を示す。

#### 参 考 文 献

- (1) M. J. Lighthill : On kinematic waves II ; A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Road. Proc. Roy. Soc. A 229 p. 317
- (2) H. Greenberg ; An Analysis of Traffic Flow ; J. ops. Res. America vol. 7 p. 79
- (3) 渡辺健次 : 自動車交通の流体力学的取扱い ; 運輸技研資料 No. 55
- (4) 藤井弥平ほか : 制限水路の船舶の基本航行容量について 船舶技研報告 Vol. 3. No. 2