

排気ガスの大気乱流拡散 - I*

渡辺 健次**

Turbulent Diffusion of an Exhaust Gas in Atmosphere

By

Kenji Watanabe

Mathematical analysis was performed for atmospheric turbulent diffusions from (1) a line source in a semi-infinite space and (2) a plane source at the bottom of a deep ditch, the both sides of which were assumed to have some leakage.

In practice, these sources correspond to those which were generated by the car traffic into the semi-infinite space bounded by the ground, and the both sides of the ditch correspond to the buildings on the streets.

The results are as follows:

Case (1); An integral form solution was lead for a continuous line source under some assumption on the source and wind variation. Case (2); A solution containing modified Bessel functions was obtained for a continuous plane source.

1. は し が き

タンカーや自動車などの交通機関から排出される危険かつ有害なガスによる爆発の脅威あるいは環境の汚染が最近大きな問題となりつつある。これら公害の防止にかんじていろいろの対策が樹てられているが、そのために必要な、これら危険かつ有害なガスが大気中をどのように拡散してゆくか、その結果大気汚染分布状況がどのようになってゆくかという問題を、自動車の排気ガスについて検討してゆく。

ほかに、煙突からの煙の拡散についてはいままでに種々の研究がなされてきた。それらの研究は、現象の本質が大気中の風のおこす乱れと地表面における条件から生ずる乱流境界層の中でのいろいろのスケールの渦による大気中のガス成分の拡散であるという乱流拡散の考えから出発している。そして通常の分子拡散の速度は乱流拡散の速度にくらべて小さいとして無視されている。さらに異なる点は、拡散係数が場所の複

雑な函数で非等方性をもっているということである。

BosanquetとPearson¹⁾は、鉛直方向の拡散係数が高さに比例するとした。坂上²⁾は同様の仮定で拡散方程式を点源および線源からの拡散について正確に解いた。Suttonは拡がりは正規分布の形であるとして拡散公式をみちびいた。その後いろいろの形での部分的修正によって煙突からの拡散にかんしては、理論実験ともに大きく発展している。

以上のような研究は煙突の排出口を点拡散源とみなし地面で区切られた半無限空間の中でとりあつかっている。これらが比較的簡単な条件をもつのに反して、自動車排気ガスの拡散は複雑な諸条件によって支配されている。とくに街路では多数の車同士がおよぼしあう影響、建物その他地物の影響があって、統一的な理論はもとより、ガス分布状況の細密な測定すら不可能であるかのようにみえる。

しかしながら拡散の過程を、特徴のないいくつかの段階に分けることによってそのとりあつかいはいくらか簡単になる。各段階で適当な理論的考察と、それにもとづく測定をおこない、得られた結果を総合すること

* 船研排気ガス拡散現象協同研究委員会報告一(1)

**共通工学部

によって全体の描像を得ることができよう。次にその過程を論ずることとする。

テールパイプからの排気ガスの拡散は、ジェット現象としてとらえられる。排気孔での速度は秒速20~30 mに達し、排出は脈動的なので、乱流ジェットの半実験的な理論が適用できる。その温度と速度は急速に小さくなり大気との混合によって、ジェット領域はひろがる一方、浮力、熱拡散、自動車後流にできる渦、などのために自動車の大きさ程度に広がる。これが拡散の第一段階である。第二段階としてはこの排気ガス成分が後続する自動車のためにかきまぜられてさらに拡がり、地面に固定した座標系を考えると、その一点においては上記のような過程が連続しておこるために、平均的にみると道路に沿ってまったくひとしいガス成分の分布状態が現出する。このために、道路に沿って、道路に直角な断面でみるとあるひろがりをもった、線状の拡散源が形成されることになる。この線源からの拡散はまったく従来の大気拡散と同じであると考えてよい。これが拡散過程の第三の段階である。

ここではこの第三の段階について、従来の拡散にかんする研究が点源からのものを主としていることにたいして、線源からの拡散を理論的にとりあつかうことをこころみた。上記各段階の総合として全体のみとおしを得るためには、各段階におけるとりあつかいはなるべく簡単なものであることがのぞましい。したがって拡散式は、坂上の初期のとりあつかいから出発し、仮定によって簡単化するとともに、自動車の排気ガス拡散に特徴的なパラメーターをとりいれてつくりあげた。

はじめに建物などが無い平坦な地域の直線道路からの拡散を考える。つぎに建物の両側にある建物の高さが道路巾と比較して大きい場合の拡散をとりあつかう。結果として基本的な拡散式をあたえ、そのいくつかを図示した。

2. 平坦な地域の直線道路からの拡散

一般の拡散方程式は濃度を C とすると

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}) C = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial C}{\partial x}) C + \frac{\partial}{\partial y} (K_y \frac{\partial C}{\partial y}) C + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial C}{\partial z}) C$$

とあらわされる。拡散係数 K_x, K_y, K_z は非等方であり。 v_x, v_y, v_z は風速成分をあらわす。線源にたいし

(234)

風向はかならずしも直角ではないが、道路に沿ってはまったく等しい状態になっているとするのだから、風速の道路に直角方向の成分のみを考えればよい。この成分を u 、道路に直角な方向を x 軸、鉛直上向きに z 軸をとって、 x 方向に速度 u で動く座標系でみれば

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial C}{\partial z}) \dots \dots \dots (1)$$

なる二次元の問題に帰着する。

坂上²⁾にしたがって $K_x = a, K_z = bz$ とおく

$$\frac{\partial C}{\partial t} = a \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z} (bz \frac{\partial C}{\partial z}) \dots \dots \dots (2)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{4at}} e^{-\frac{x^2}{4at}} \phi(z, t) \text{ とおくと}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} (bz \frac{\partial \phi}{\partial z})$$

変数分離によって特解²⁾

$$e^{-\lambda^2 t} J_0\left(\frac{2\lambda' z}{b} \zeta\right)$$

を得る。ただし、 $\zeta = \sqrt{oz}$ 、 J_0 は第一種ベッセル関数である。

2.1 瞬間的な線源からの拡散

$t=0$ において $x=0$ 、高さ $z=h$ のところに瞬間的に発生する線源からの拡散を考える。 $t=0$ における濃度は $x=0, z=h$ 以外ではゼロであるようなデルタ関数である。Hahkel の逆関係をもちいると²⁾

$$C = D \frac{e^{-\frac{x^2}{4it}}}{\sqrt{4it}} \int_0^\infty J_0(\lambda \alpha_0) J_0(\lambda \zeta) e^{-\frac{b^2 \lambda^2}{4} t} \lambda d\lambda \dots (3)$$

とあらわされる。ただし $\alpha_0 = \sqrt{bh}$ である。

積分を実行すると

$$C = D \frac{e^{-\frac{x^2}{4it}}}{\sqrt{4it}} \frac{2}{b^2 t} e^{-\frac{h+z}{bt}} I_0\left(\frac{2\sqrt{hz}}{bt}\right)$$

となる。 I_0 は変形された第一種ベッセル関数である。

線源の単位長あたり m の拡散物質が発生したとすれば

$$m = \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^\infty C dx \text{ でなければならない。}$$

この結果、 $D = mb/2\sqrt{\pi}$ となる。

ゆえに

$$C = \frac{m}{2bt\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4it} - \frac{h+z}{bt}} I_0\left(\frac{2\sqrt{hz}}{bt}\right) \dots \dots (4)$$

地面に固定した座標系では風速の道路に直角な成分を u とすると

$$C = \frac{m}{2bt\sqrt{a\pi}} e^{-\frac{(x-ut)^2}{4at} - \frac{h+z}{bt} I_0\left(\frac{2\sqrt{hz}}{bt}\right)} \dots (5)$$

$z=h$ の高さにおける濃度の x への依存性の時間的変化を図1に示す。

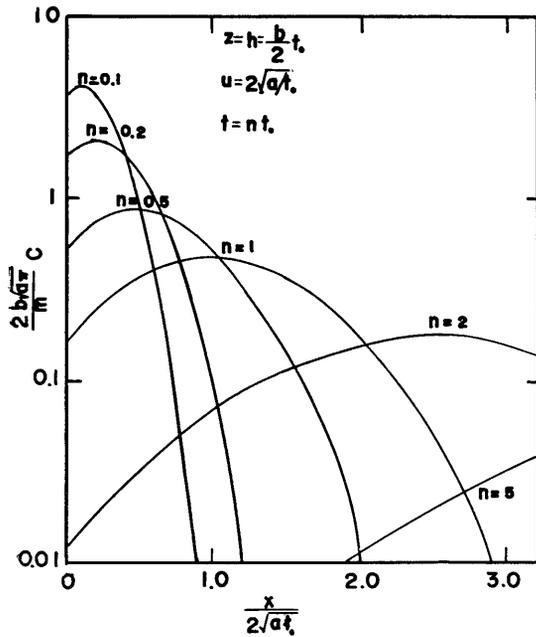


図1 瞬間的線源からの拡散の濃度分布時間推移

2.2 時間的に連続な線源からの拡散

道路に沿った、あるひろがりをもった線源を得るためには、連続的な車の流れを仮定しなければならない。車の流れは時間的に変動するが、その変動は比較的ゆっくりしていて限られた時間内では道路に沿った線源を仮定できるようなものでなければならない。

時間 $d\tau$ の間に単位長さあたり $md\tau$ の物質が拡散源に発生するとする。このときは前に述べた瞬間的な線源からの拡散の式において、時間 t を $t-\tau$ におきかえ τ について $-\infty$ から t まで積分すると、時間的に連

$$C = \frac{mb}{2\pi\sqrt{a\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{(x-ut)^2}{4aT} - \frac{b^2\lambda^2 T}{4}}}{\sqrt{4aT}} \int_0^\pi J_0(\lambda R) \cdot d\theta \lambda d\lambda dT$$

ただし $R = \sqrt{\varphi^2 + \alpha^2 - 2\alpha\varphi \cos\theta}$

積分の順序を変えて

$$C = \frac{mb}{4\pi\sqrt{a\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi J_0(\lambda R) \lambda d\theta d\lambda \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-\frac{x^2}{4aT} - \left(\frac{u^2}{4a} + \frac{b^2\lambda^2}{4}\right)T + \frac{xu}{2a}} dT = \frac{mb}{4\pi\sqrt{a\pi}} \int_0^\infty \int_0^\pi J_0(\lambda R) \lambda d\lambda d\theta$$

続な線源からの拡散の式がえられる。ただし m は一般に時間の関数である。

まず m が定数である場合を考える。 m が変動する場合でも、変動が三角函数の重ね合せで表わし得るならば m は一定部分 m_0 と、たがいに打ち消しあって効果がゼロとなる変化部分とに分けられるから、以下の議論は通用する。

一般に拡散源が無限時間継続するとき、空間各点での濃度が、源と拡散のつり合いの結果として定常状態を保っているか、それとも発散すなわち限りなく増大するかという問題がある。拡散係数がすべて a にひとしいとき、瞬間的な拡散源に対する式は、それぞれ次のようになる。

点源 $C \propto e^{-\frac{r^2}{4at}/t^{\frac{3}{2}}}$

線源 $C \propto e^{-\frac{r^2}{4at}/t}$

面源 $C \propto e^{-\frac{z^2}{4at}/t^{\frac{1}{2}}}$

連続的な源にたいする式を得るための積分をおこなうと線源と面源の場合は発散し、点源の場合は定常な解を得る。もちろん拡散源が一定でなく適当な時間の関数であればかならずしもこの結論は正しくない。

これにたいし式(2)より出発すれば面源にたいしてのみ発散し、点源と線源の場合は定常な濃度分布がえられる。これは方程式の z に関係する部分が、拡散係数がすべて一定の数にひとしいときの線源にたいする式と同じ形になっていることに原因がある。

さて、連続的な一定拡散源にたいする解をみちびく。

式(9)において $D = mb/2\sqrt{\pi}$

$x \rightarrow x-ut$ とおいた形から出発する。

$$C = \frac{mb}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{[x-u(t-\tau)]^2}{4a(t-\tau)}} \int_0^\infty J_0(\lambda\alpha_0) J_0(\lambda\varphi) \cdot e^{-\frac{b^2\lambda^2}{4}(t-\tau)} \lambda d\lambda d\tau$$

$t-\tau \equiv T$ とおき Neumann の加法定理を角 θ について積分することにより

$$\left(\sqrt{\frac{\pi}{u^2/4a+b^2\lambda^2/4}} e^{-\sqrt{\frac{x^2}{4a} + \frac{u^2}{4a} + \frac{b^2\lambda^2}{4} + 2a}} \right) = \frac{m}{2\pi\sqrt{a}} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{R^2 + \frac{b^2x^2}{4a}}} e^{-\frac{u}{b\sqrt{a}}\sqrt{R^2 + \frac{b^2x^2}{4a} + \frac{xu}{2a}}} d\theta = \frac{m}{2\pi\sqrt{ab}} \int_0^\pi \frac{\frac{\lambda a}{e^{2u}} - \frac{u}{\sqrt{ab}} \sqrt{z+h-2\sqrt{hz}\cos\theta + bx^2/4a}}{\sqrt{z+h-2\sqrt{hz}\cos\theta + \frac{bx^2}{4a}}} d\theta \dots\dots(6)$$

が得られる。

この式を数値積分すれば連続かつ一定な拡散源からの拡散を知ることができる。つぎに特別な場合について式(6)の結果をあたえよう。

拡散源が地上にあるときは $h=0$ であって積分はおこなう必要がなくなる。

$$C = \frac{m}{b\sqrt{x^2 + \frac{4a}{b}}} z e^{-\frac{u}{2a}\sqrt{x^2 + \frac{4a}{b}} + \frac{u}{2a}x} \dots\dots(7)$$

また地上濃度は $z=0$ とおけば同様に

$$C = \frac{m}{b\sqrt{x^2 + \frac{4a}{b}h}} e^{-\frac{u}{2a}\sqrt{x^2 + \frac{4a}{b}h} + \frac{u}{2a}x} \dots\dots(8)$$

道路に直角な風速成分がないときは $n=0$

$$C = \frac{m}{2\pi\sqrt{ab}} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{(z+h) - 2\sqrt{hz}\cos\theta + \frac{bx^2}{4a}}}$$

公式 $Q_\nu(\zeta) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \int_{-1}^1 \frac{(1+t^2)^\nu}{(\zeta-t)^{\nu+1}} dt$
 ただし $\text{Real } \nu > -1$ $\zeta > 1$ Q は第二種 Legendre 関数。において $\nu = -\frac{1}{2}$ $t = \cos\theta$ とおけば

$$C = \frac{mu}{2\pi ab} \int_0^\pi \frac{e^{-\xi(1 + \frac{Z+H-2\sqrt{HZ}\cos\theta}{\xi^2}) + \xi}}{\xi} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Z+H-2\sqrt{HZ}\cos\theta}{\xi^2} \right) d\theta = \frac{mu}{2\pi ab\xi^2} e^{-\frac{Z+H}{2\xi}} \int_0^\pi e^{\frac{\sqrt{ZH}}{\xi} \cos\theta} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{Z+H-2\sqrt{ZH} - 4\sqrt{ZH}\sin^2\theta}{\xi^2} \right) d\theta = \frac{mu}{2\pi ab\xi^2} e^{-\frac{Z+H}{2\xi}} \left\{ \pi I_0\left(\frac{\sqrt{ZH}}{\xi}\right) \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{Z}-\sqrt{H}}{\xi}\right)^2 \right] - \frac{4\pi}{\xi} I_1\left(\frac{\sqrt{ZH}}{\xi}\right) \right\} = \frac{m}{bx} e^{-\frac{h+z}{bx}u} \left\{ I_0\left(\frac{2\sqrt{hz}}{bx}u\right) \left[1 - \frac{2u^2(z-h)^2}{b^2x^2} \right] - \frac{8a}{ux} I_1\left(\frac{2\sqrt{hz}}{bx}u\right) \right\}$$

ただしこの式は $\xi^2 \gg Z, H$ すなわち $x^2 \gg \frac{4a}{b}z, \frac{4a}{b}h$ のとき成立する。 a と b が同じオーダーならばこの条件は x の相当の範囲内で成立する。

2.3 パラメーターが変化するとき

以上の式中にはいくつかのパラメーターがふくまれている。これらのパラメーターのあるものは実際には時間的に変化する。また線源自体はあるひろがりをも

$$Q_{-\frac{1}{2}}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\zeta - \cos\theta}}$$

$$C = \frac{m}{2\pi\sqrt{ab}} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{hz}}} \int_0^\pi \frac{b\theta}{\sqrt{z+h + \frac{bx^2}{4a} - \cos\theta}} d\theta$$

と変形すればあきらかに $\frac{z+h+bx^2/4a}{2\sqrt{hz}} > 1$

ゆえに

$$C = \frac{m}{2\sqrt{ab}\pi\sqrt{\sqrt{hz}}} Q_{-\frac{1}{2}}\left(\frac{z+h+bx^2/4a}{2\sqrt{hz}}\right) \dots\dots(9)$$

を得る。

つぎに比較的拡散源からはなれている点の濃度にたいする近似式をもとめる。拡散源の高さ h も、濃度を問題とする点の高さ z もせいぜい 1m から 2m の程度であるから、 z および h をふくむ項が、 x をふくむ項より小さいとして展開をおこなうことにする。式(6)において

$$\frac{xu}{2a} = \xi \quad \frac{zu^2}{ab} = Z \quad \frac{hu^2}{ab} = H \quad \text{とおけば}$$

$$C = \frac{mu}{2\pi ab} \int_0^\pi \frac{e^{-\sqrt{H+Z-2\sqrt{HZ}\cos\theta+\xi^2}+\xi}}{\sqrt{H+Z-2\sqrt{HZ}\cos\theta+\xi^2}} d\theta$$

根号を展開し二項目までにとどめれば

っている。線源が x および z 方向にひろがりをもち、道路に直角な断面において単位面積あたりの拡散源の強さを $m(\xi, h)$ とする。ひろがりをもつ源にたいする式を得るためには、今までに得られた式において

$x \rightarrow x - \xi$ とおきかえ, $md\xi dh$ をかけて 断面積にわたって積分するとよい。

自動車の排気の拡散にたいして重要なパラメーターは, 風速と自動車交通密度である。いま自動車の排気量を単位時間あたり M とする。これが速度 v で走れば単位長さあたり M/v の拡散物質が発生することになる。単位時間あたりの通過自動車台数を n とすれば, 単位時間単位長さあたり Mn/v の拡散物質の発生をみることになる。ところが n/v は自動車交通密度にひとしいから拡散源の強さは自動車交通密度に比例することになる。実際には排気量は車種, 走行状態によって異なるから, 交通密度は排気換算密度といったものにおきかえなければならない。いずれにしても風速の道路に直角な成分 u と源の強さ m の時間的変動を考慮することが必要となる。たとえば源の強さが $m=f(\tau)$ であたえられるならば

$$C = \frac{1}{2\sqrt{a\pi b}} \int_{-\infty}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{[x-u(t-\tau)]^2}{4a(t-\tau)} - \frac{h+z}{b(t-\tau)}} I_0\left(\frac{2\sqrt{hz}}{b(t-\tau)}\right) \dots\dots\dots(11)$$

となる。

2.4 拡散式の簡単化

以上のようにパラメータの変動を考慮にいたした拡散式は積分形となっていてとりあつかいに不便である。拡散の各段階を総合して全体のみとおしを得るためには, それら各段階のとりあつかいはなるべく簡単なものであることがのぞましい。そこで拡散現象にたいし適当な仮定をおいて, よりとりあつかいやすい形をとめる。

風方向の拡散は無視できるとする。すなわち x 方向の拡散係数 $a=0$ とする。

方程式は,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(b z \frac{\partial C}{\partial z} \right)$$

となり瞬間的な線源にたいし, 風とともに動く座標系からみたとき,

$$C = \frac{m}{bt} e^{-\frac{h+z}{bt}} I_0\left(\frac{2\sqrt{hz}}{bt}\right)$$

である。しかしこの形のままで意味がない。

道路に直角な風速の成分を u とすると単位時間に単位長さあたり, 発生した強さ m の線源は風に流されて x 軸方向の単位幅あたり強さ m/u の面源と等価になる。ただしある点 x_1 においては発生後 $t_1=x_1/u$ の時刻における状態があらわれていることになる。ゆえに $t \rightarrow x/u$ $m \rightarrow m/u$ のおきかえをおこなって

$$C = \frac{m}{bx} e^{-\frac{(h+z)u}{bx}} I_0\left(\frac{2\sqrt{hz}}{bx} u\right) \dots\dots\dots(12)$$

となる。これはちょうど式(10)の第一項であって, 以上のような簡単化で近似できる範囲が, h, z にくらべて x の大きいところであることがわかる。

図2はいろいろの高さにたいする濃度分布を示す。

ここで線源が時間的に変化する場合を考える。

$m=f(\tau)$ とすれば, ある点 x_1 における時刻 t_1 の状態は, 時刻 t_1-x_1/u に原点で発生した源の強さに

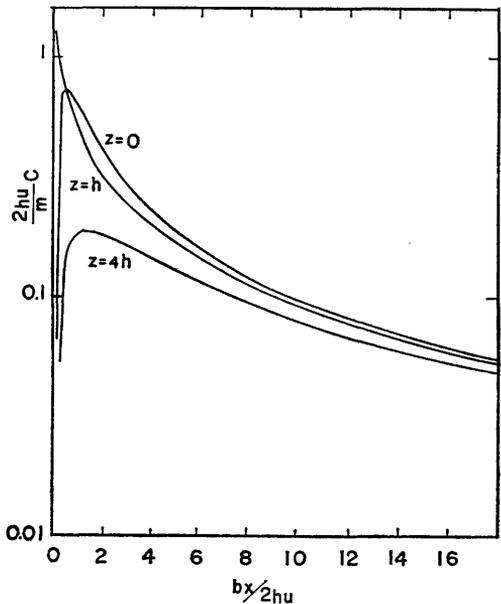


図2 連続的な線源による濃度分布

ひとしい源からの発生後、 x_1/u の時刻における状態であるから

$$C = \frac{f(t-x/u)}{bx} e^{-\frac{(h+z)u}{bx}} I_0\left(\frac{2\sqrt{hz}}{bx} u\right) \dots\dots\dots(13)$$

が得られる。

風速が変動するとき、ある点 x_1 の時刻 t_1 における状態は

$$X = \int_{t_0}^{t_1} u(\tau) d\tau$$

でさだまる時刻 t_0 に原点で発生した源と同じ強さの拡散状態で、その強さは、

$m(t_0)/u(t_0)$ である。ゆえに

$$\begin{cases} C = \frac{m(t_0)}{bu(t_0)(t-t_0)} e^{-\frac{h+z}{b(t-t_0)}} I_0\left(\frac{2\sqrt{hz}}{b(t-t_0)}\right) \\ X = \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \end{cases} \dots\dots\dots(14)$$

より t_0 を消去してもとめられる。

線源のひろがり を考慮したときには

$$C = \iint \frac{m}{b(x-\xi)} e^{-\frac{(h+z)u}{b(x-\xi)}} I_0\left(\frac{2\sqrt{hz}}{b(x-\xi)}\right) dh d\xi \dots\dots\dots(15)$$

とあたえられる。

3. 建物高さが道路幅に比較して大きい場合の拡散

拡散の問題における境界条件は、境界に直角な物質の流れがないということで、これは $z=0$ で z 方向の拡散係数がゼロになるということで自動的に満足されている。建物がある場合、このように簡単に境界条件を処理することはできない。したがってとりあつかいは近似的なもので満足しなければならない。

そこで、建物の高さが道路幅にくらべて充分大きく、道路の相当長い部分にわたってこの条件が満足されている理想的な場合について考える。

必然的に、風は市街地全体の風向とことなり、道路に沿って吹くことになり、風速は拡散式に陽にあらわれてこない。むしろ拡散係数に関係するというかたちで影響してくる。

3・1 線源からの拡散

道路に直角な断面を図3にしめす。建物が道路幅に

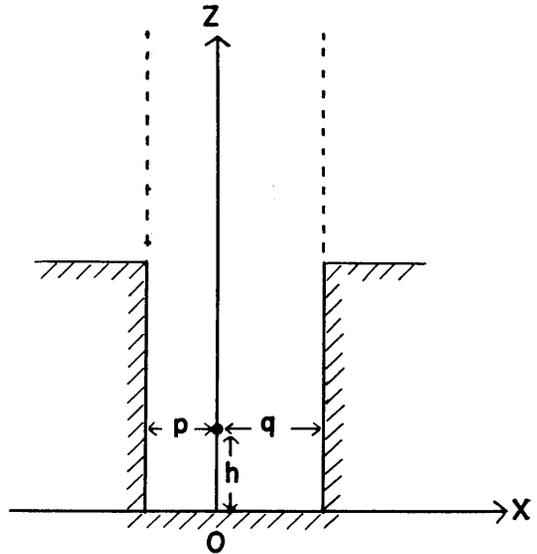


図3 街路の道路に直角な断面

くらべて充分高いために、境界を図の点線のように無限に長いと考える。道路幅を $p+q$ とし、図のように座標軸をとり、原点状高さ h のところに瞬間的に線源が発生すると考える。建物の境界面に直角な物質源の流れがないという条件をみたすためには、鏡像の位置に線源をおけばよい。建物の面は両側にあるから、鏡像点は無限につらなることになり

$$C = \frac{m}{2\sqrt{a\pi} b} \frac{1}{i^{3/2}} e^{-\frac{h+z}{bt}} I_0\left(\frac{2\sqrt{hz}}{bt}\right) \sum_{h=-\infty}^{\infty} \left\{ e^{-\frac{1}{4at}} (x-2np-2hq)_2 - \frac{1}{4at} (x-2q-2np-2nq)_2 \right\} \dots\dots\dots(16)$$

無限和は積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{4at}} dz$ と比較すれば明らか

ように収束することがわかる。

しかるに時間的に連続な線源を考えると濃度は限りなく増大する。式(9)をもちいて x のかわりに $(x-2np-2nq)$, $(x-2q-2np-2nq)$ をいれ

$$C = \frac{m}{2\sqrt{ab\pi}\sqrt{hz}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q^{-1} \left[\frac{h+z}{2\sqrt{hz}} + \frac{1}{8a\sqrt{hz}} (x-2np-2nq)^2 \right] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q^{-1} \left[\frac{h+z}{2\sqrt{hz}} + \frac{1}{8a\sqrt{hz}} (x-2q-2np-2nq)^2 \right]$$

ξ が充分大きいとき

$$Q^{-1}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1}{\xi}} \left[1 + O\left(\frac{1}{\xi^2}\right) \right]$$

ゆえに n が大きくなると無限和の各項は

A/|x-2np-2nq| の形になる。したがって無限和は発散する。

3・2 側面からの漏洩を考えた面源からの拡散

前節の証明は充分なものではないが、時間的に連続な線源により濃度が限りなく増大するという事は、この境界の設定が本質的に一次元的であること、すなわち面源からの拡散と等価であることから理解される。

充分建物高さが高いとすれば、排出されたガスは、はじめに述べた各段階の結果道路幅いっぱいにはろがり、そこから上方へむかって拡散がおこなわれる。拡散源は高さ方向にひろがりをもった面源とみなし、拡散は一次元的におこなわれるものと考てよいことになる。拡散源は高さによって強さの異なる平面源の重ねあわせと考える。

この状態は道路に沿って吹く風によって道路方向に移動する。道路の途中に直角の横道があれば、そこではほぼ二次元的な拡散がおこなわれる。このような効果の平均的な結果として、さきに述べた境界条件のうち建物の面にたいして直角な物質の流れをある程度考えなければならぬ。すなわち、一次元の拡散がおこなわれている一方に Z 軸の各点において、吸いこみまたは漏洩、を考えなければならぬ。

高さ h のところに地面に平行な平面の源があり、側面からは濃度に比例する漏洩があると仮定すれば、方程式は K を漏洩の比例係数とするととき、

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(b^2 \frac{\partial C}{\partial z} \right) - kC \dots\dots\dots(17)$$

C = C₁e^{-kt} とおくと

$$\frac{\partial C_1}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(b^2 \frac{\partial C_1}{\partial z} \right)$$

となり前の諸結果が使用できる。

瞬間的に z=h に発生する面源については

$$C = \frac{bm}{2} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{b^2\lambda^2}{4} + k\right)t} \lambda d\lambda J_0(\lambda\alpha_0) J_0(\lambda\xi)$$

連続的な面源にたいしては

$$C = \frac{bm}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\frac{b^2\lambda^2}{4} + k\right)t} T dT J_0(\lambda\alpha_0) J_0(\lambda\xi) \lambda d\lambda$$

$$= \frac{bm}{2} \int_0^\infty \frac{\lambda}{\frac{b^2\lambda^2}{4} + k} J_0(\lambda\alpha_0) J_0(\lambda\xi) d\lambda$$

$$= \begin{cases} \frac{2m}{b} I_0\left(\xi \sqrt{\frac{4}{b^2}k}\right) K_0\left(\alpha_0 \sqrt{\frac{4}{b^2}k}\right) & \alpha_0 > \xi \\ \frac{2m}{b} I_0\left(\alpha_0 \sqrt{\frac{4}{b^2}k}\right) K_0\left(\xi \sqrt{\frac{4}{b^2}k}\right) & \xi > \alpha_0 \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} \frac{2m}{b} I_0\left(2\sqrt{\frac{k}{b}}z\right) K_0\left(2\sqrt{\frac{k}{b}}h\right), & h > z \\ \frac{2m}{b} I_0\left(2\sqrt{\frac{k}{b}}h\right) K_0\left(2\sqrt{\frac{k}{b}}z\right), & h > z \end{cases} \dots\dots(18)$$

I₀, K₀ は変形された第一種および第二種のベッセル関数である。

図4は 式(18)を高さ h に関係するパラメーターによりあらわしてある。実際には面源が高さ方向に m(h)dh なる分布をもつから式(18)を h について積分すれば、拡がりをもつ源にたいする式を得る。

つぎにこの源の強さが時間的に変動しているときの式をみちびこう。一定分をのぞいて源の強さは m sin ωt であらわされるとする。

$$C = \frac{bm}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^t e^{-\left(\frac{b^2\lambda^2}{4} + k\right)(t-\tau)} \sin\omega\tau \sin\omega t$$

$$J_0(\lambda\alpha_0) J_0(\lambda\xi) \lambda d\lambda = \frac{bm}{2} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{b^2\lambda^2}{4} + k\right) \sin\omega t - \omega \cos\omega t}{\left(\frac{b^2\lambda^2}{4} + k\right)^2 + \omega^2}$$

$$\cdot J_0(\lambda\alpha_0) J_0(\lambda\xi) \lambda d\lambda$$

式の形から結果は源と、ある位相差をもった正弦関数になることがわかる。

sin ωt をふくむ項は

$$\frac{bm}{4} \int_0^\infty \left[\frac{\lambda J_0(\lambda\alpha_0) J_0(\lambda\xi)}{b^2\lambda^2 + k - i\omega} + \frac{\lambda J_0(\lambda\alpha_0) J_0(\lambda\xi)}{b^2\lambda^2 + k + i\omega} \right] d\lambda$$

$$= \frac{m}{b} \int_0^\infty \left[\frac{\lambda J_0(\lambda\alpha_0) J_0(\lambda\xi)}{\lambda^2 + \frac{4}{b^2}(k - i\omega)} + \frac{\lambda J_0(\lambda\alpha_0) J_0(\lambda\xi)}{\lambda^2 + \frac{4}{b^2}(k + i\omega)} \right] d\lambda$$

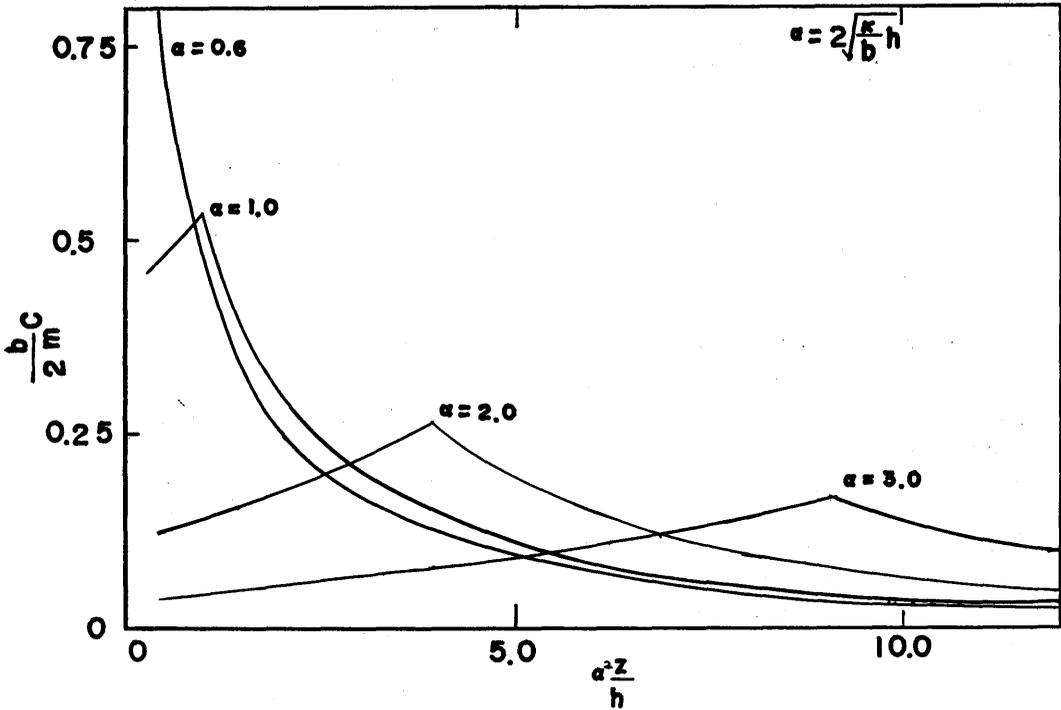


図4 一連続面源による高さ方向分布

$$= \begin{cases} \frac{m}{b} \left[I_0 \left(\frac{2}{b} \varphi \sqrt{k-i\omega} \right) K_0 \left(\frac{2}{b} \alpha_0 \sqrt{k-i\omega} \right) \right. \\ \quad \left. + I_0 \left(\frac{2}{b} \varphi \sqrt{k+i\omega} \right) K_0 \left(\frac{2}{b} \alpha_0 \sqrt{k+i\omega} \right) \right], & \alpha_0 > \varphi \\ \frac{m}{b} \left[K_0 \left(\frac{2}{b} \varphi \sqrt{k-i\omega} \right) I_0 \left(\frac{2}{b} \alpha_0 \sqrt{k-i\omega} \right) \right. \\ \quad \left. + K_0 \left(\frac{2}{b} \varphi \sqrt{k+i\omega} \right) I_0 \left(\frac{2}{b} \alpha_0 \sqrt{k+i\omega} \right) \right], & \alpha_0 < \varphi \end{cases}$$

cos ωt をふくむ項も同様にして

$$\begin{cases} \frac{m}{b} \left[I_0 \left(\frac{2}{b} \varphi \sqrt{k-i\omega} \right) K_0 \left(\frac{2}{b} \alpha_0 \sqrt{k+i\omega} \right) \right. \\ \quad \left. - I_0 \left(\frac{2}{b} \varphi \sqrt{k+i\omega} \right) K_0 \left(\frac{2}{b} \alpha_0 \sqrt{k-i\omega} \right) \right] & \alpha_0 > \varphi \\ \frac{m}{b} \left[K_0 \left(\frac{2}{b} \varphi \sqrt{k+i\omega} \right) I_0 \left(\frac{2}{b} \alpha_0 \sqrt{k-i\omega} \right) \right. \\ \quad \left. - K_0 \left(\frac{2}{b} \varphi \sqrt{k-i\omega} \right) I_0 \left(\frac{2}{b} \alpha_0 \sqrt{k+i\omega} \right) \right] & \alpha_0 < \varphi \end{cases}$$

振幅は

$$\begin{cases} \frac{m}{b} \sqrt{\left\{ I_0 \left(\frac{2}{b} \varphi \sqrt{k+i\omega} \right) K_0 \left(\frac{2}{b} \alpha_0 \sqrt{k+i\omega} \right) \right\}^2} \\ \quad + \left\{ I_0 \left(\frac{2}{b} \varphi \sqrt{k-i\omega} \right) K_0 \left(\frac{2}{b} \alpha_0 \sqrt{k-i\omega} \right) \right\}^2} & \alpha_0 > \varphi \\ \frac{m}{b} \sqrt{\left\{ K_0 \left(\frac{2}{b} \varphi \sqrt{k+i\omega} \right) I_0 \left(\frac{2}{b} \alpha_0 \sqrt{k+i\omega} \right) \right\}^2} \\ \quad + \left\{ K_0 \left(\frac{2}{b} \varphi \sqrt{k-i\omega} \right) I_0 \left(\frac{2}{b} \alpha_0 \sqrt{k-i\omega} \right) \right\}^2} & \alpha_0 < \varphi \end{cases}$$

となる。

4. むすび

以上のように、平坦な地域における直線道路と高い建物にかこまれた道路における自動車排気ガス拡散の理論式が得られた。これらの式の中には、いくつかのパラメーターがふくまれているが、その中には風速や、交通密度のように、適用すべき場所および時刻において変わってくるようなものと、拡散係数や漏洩係数などのように基礎的に求めなければならない物理的パラメーターの二種類がある。前者にたいしては、濃度分布と風速、交通密度の同時刻測定を多数回おこなって、理

論式をたしかめることが必要であるが、その時、線源が交通密度とどのような関係をもつか知られなければならない。そのためには排気ガス成分絶対量の測定に加えて、さきに述べた線源形成までの各段階についての研究がなされなければならない。この拡散の前段階の研究がわれわれの第一の課題である。

第二に物理的なパラメーターのうち、拡散係数については、すでに多くの研究がなされ、風速への依存性、大気安定度の影響、などが知られている。したがってその決定は比較的容易であるが、漏洩係数の方はどのようにして考察し、測定すべきであるかの困難が残っている。それは、道路に直角な風速成分、横道の存在、水平方向の拡散係数、などに関係するものと思われるが、なお研究が必要である。これもわれわれの今後の課題である。

また建物の高さが、道路幅とほぼ同程度になるときは、とりあつかいが当然変ってくる。このときは自動車の後流における渦、他の車による攪拌、浮力上昇、熱拡散などの影響を平均化しないままで、濃度分布を問題としなければならない。すなわち、線源形成以前の状態、または線源になったとしても大気拡散以外の要素が強きいてくる状態、を考慮しなければならない。とにかく、この場合は単純な大気拡散理論ではとりあつかい得ない。この場合も、さきに述べた拡散の各段階のくわしい解析が必要である。

以上のように

(1) 拡散源の解析のための拡散前段階の研究ひいては、道路幅と建物の高さが同程度のときの街路内濃度分布の決定(2)漏洩係数の研究、が自動車排気ガス拡散の場合に残る課題である。一方、石油タンカー、LPGタンカーなどの排気ガス、あるいは、それらの事故に際してのガス発生と拡散については、異なる境界条件、異なるとりあつかいが必要と思われる。

本研究にさいしお茶の水女子大学坂上教授の一連の研究に、おおいに suggest された。あつく感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) Bosanquet C. H ; Pearson, T. L
The Spread of Smoke and Gases from Chimneys
Trans. Faraday. Soc. Vol. 32, pp. 1294 (1936)
- 2) Sakagami. J.
On the Turbulent Diffusion in the
Atmosphere Near the Ground
Natural Sci. Rep. Ochanonizu Univ. Vol.5
No.1, pp. 79 (1954)