

プロペラの基礎理論

(特に Munk の定理と揚力線理論について)

花岡達郎*

Fundamental Theory of a Screw Propeller

(Especially on Munk's Theorem and Lifting-Line Theory)

By

Tatsuro Hanaoka

The purpose of the present paper is to give a fundamental theory of hydrodynamics concerning a screw propeller on the status of both potential and vortex theory.

Chapter 1 is a brief description regarding historical aspect of the recent development in propeller theory.

Chapter 2 is devoted to the theory of a wing with finite span. We have been made familiar with propeller theory through wing theory. The description will be useful for us to understand the remainder of this paper.

In this paper the propeller theory consists of three parts. The first deals with the fundamentals of the theory in the frame of linearized theory in Chapter 3.

In Chapter 4 and 5, the theory previously discussed is developed to nonlinear theory and theory of wake-adapted propellers.

は し が き

プロペラ理論は翼の理論の中で最も複雑な形をしているものの一つであるが、さらに問題の性質上線型理論だけでは済まされないため、記述は繁雑なものとなり、時として理論の全容を理解するのにかなりの努力を必要とすることがある。

本文はプロペラ理論を直進翼の理論と比較対照しながら、Munk の定理と揚力線理論を中心に、基本的事項を述べたもので、その目的はこれまで十分に吟味されないまま利用されてきた部分を補い、基礎理論をできるだけ一貫した形で記述することにある。

最近では高速電子計算機が普及しているので、諸種の応用問題が計算される気運にあり、そのため、プロペラ理論は今までも増して複雑なものを取り上げられるようになっている。それにもかかわらず、ここで、すでに論じつくされたかのごとく思われている Munk の定理と揚力線理論を中心に解析を試みたのは、単に

回顧的な意味からではなく、理論の基礎を的確に捕え、将来の発展への基礎固めとしたいと考えたからである。

本文中に他の研究者の業績を紹介した部分はいくつか含まれているが、これらは理論の全般を理解するのに役立つであろう。

内 容

1. 序 論
 - 1.1. プロペラ理論の発展
 - 1.2. Prandtl の翼理論の3つの境界値問題
2. 直進翼の理論
 - 2.1. 加速度ポテンシャル理論の基礎
 - 2.2. 加速度ポテンシャル理論と渦理論
 - 2.3. Munk の定理
 - 2.4. 揚力面理論
 - 2.5. Lawrence の揚力線理論
 - 2.6. Prandtl 揚力線の積分方程式

*運動性能部

- 2.7. Weissinger 揚力線
 2.8. Prandtl 揚力線に対する揚力面補正
 2.9. 揚力線の積分方程式の数値解法
 3. 線型プロペラ理論
 3.1. 速度ポテンシャル
 3.2. 渦理論
 3.3. 境界条件と揚力面の積分方程式
 3.4. 核関数
 3.5. 核関数の特異性
 3.6. エネルギー定理
 3.7. Munk の定理
 3.8. Prandtl 揚力線の積分方程式
 3.9. 揚力線に対する揚力面補正
 3.10. 無限後方の流場と河田の理論
 4. 非線型プロペラ理論
 4.1. 速度ポテンシャル
 4.2. 境界条件
 4.3. 定ピッチ非線型理論
 4.4. 最適プロペラ
 4.5. 直進翼とプロペラの縦横比
 4.6. 揚力線による揚力面の逐次近似計算法
 5. 伴流プロペラの理論
 5.1. Fresenius の原理
 5.2. 境界条件
 5.3. 吹上げの表示式と揚力線の仮定
 5.4. エネルギー損失極小の条件

記号

- x, y, z : 直交座標 ($(x, y, z), (x, r, \theta)$ は任意点の座標。 $(x', y', z'), (x', r', \theta')$ は特異点分布の座標)
 x, r, θ : 円筒座標
 ρ : 流体密度
 p : 流体圧力
 \mathbf{q} : 攪乱流の速度ベクトル
 ϕ : 加速度ポテンシャル
 Φ : 速度ポテンシャル
 Φ_∞ : 無限後方の速度ポテンシャル
 ϕ_u, ϕ_l : 翼上下面の加速度ポテンシャル (負圧側を ϕ_u とする)
 Φ_u, Φ_l : 翼上下面の速度ポテンシャル
 $\Pi = \rho(\phi_u - \phi_l)$: 揚力分布密度 (線型理論)
 δn : 翼の運動軌跡面への法線素片 (揚力の働く方向を正とする)
 w : 吹上げ (upwash)
 w_t : 翼の位置における自由渦の吹上げ

(Prandtl 揚力線の場合)

- $w_{t\infty}$: 無限後方の吹上げ
 C_L : 翼型の揚力係数

直進翼

- α_g : 翼弦の幾何学的迎角
 α_{0g} : 零揚力角より測った幾何学的迎角
 V : 前進速度
 b : 半翼幅
 l_1, l_2 : 翼断面の前後縁の x 座標
 $2c = l_2 - l_1$: 翼弦長
 $\gamma = \Gamma / (\rho V)$: 循環分布密度
 $\Gamma = \int_{l_1}^{l_2} \gamma dx$: 翼断面の全循環
 $\alpha_i = -w_i / V$: 誘導迎角

プロペラ

- V : 前進速度
 Ω : 回転角速度
 r_0 : プロペラ半径
 r_b : ボス半径
 l : 翼数
 s : 渦の分布する螺旋に沿って測った長さ
 s_1, s_2 : 翼の前後縁の s 座標
 $2c = s_2 - s_1$: 翼弦長
 γ : 循環分布密度 (線型理論の場合は $\Gamma / (\rho W)$)

$$\Gamma = \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds: \text{翼断面の全循環}$$

$2\pi h$: 螺旋渦のピッチ

(線型理論の場合は $h = V / \Omega$)

$\mu', \mu = \mu' / \Omega$: Rayleigh の仮想摩擦係数

$$W = \sqrt{V^2 + \Omega^2 r^2}$$

$$\sigma = \theta - x/h$$

$$\tau = \theta + x/h$$

$$\mu = r/h$$

$$\tan \varepsilon = V / (\Omega r)$$

$w_a = \partial \Phi_I / \partial x|_{\sigma=\sigma'}$, 自由渦の軸方向誘導速度

$w_t = \partial \Phi_I / (r \partial \theta)|_{\sigma=\sigma'}$, 自由渦の接線方向誘導速度

$$x = f(\theta, r) \text{ 翼素の平均矢高面の方程式}$$

$$\tan \varepsilon_0 = \partial f / (r \partial \theta)$$

$$\tan \varepsilon_i = (V + w_a) / (\Omega r + w_t)$$

$$\tilde{\alpha}_g = \sin(\varepsilon_0 - \varepsilon) \doteq \varepsilon_0 - \varepsilon$$

1. 序論

1.1. プロペラ理論の発展

直進翼とプロペラの流場の相違は単に渦の分布する

面が平面状であるか、または螺旋面状であるかというだけのことで、理論の内容としては類似する部分が多い。実際にプロペラ理論は直進翼の理論を model として発展してきたものであるから、この両者を対比しながら、発展の過程をたどることは、理論の内容を理解するのに少なからず役立つものと思う。

三次元の翼理論では翼を渦面で置換え、翼の流場を解くということは、流れが翼面に沿って流れるような循環分布を求めることである。直進翼についての Prandtl の揚力線理論は、翼を一本の渦で置換え、自由渦に関する渦定理と、(1) 流れは各翼断面内で二次元的である、(2) 翼の位置における自由渦による吹上げ w_i は、無限後方のその半分である、という二つの仮説をもとにして、翼形状と循環分布の関係を定める方程式を組み立てたもので、翼形状を与えて循環分布を求めたいときは、これは積分方程式を解く問題となる。

Kutta-Joukowski の定理と、Prandtl の仮説 (1) により、翼の各断面で

$$\rho V \Gamma = \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot 2c C_L = \rho V^2 c \frac{dC_L}{d\alpha} \cdot (\alpha_{0g} - \alpha_i) \quad \dots\dots(1.1.1)$$

の関係が成り立つ。二次元薄翼理論によれば、 $dC_L/d\alpha = 2\pi$ であるが、実用的には $dC_L/d\alpha = 2k\pi$ ($k < 1$) のように表わし、 k の値は翼型試験の結果を参考にして定める。

(1.1.1) の α_i は仮説 (2) により、

$$\alpha_i = -\frac{1}{2} \frac{w_{i\infty}}{V} = \frac{1}{4\pi V} \int_{-b}^b \frac{d\Gamma/dy'}{y-y'} dy' \quad \dots\dots(1.1.2)$$

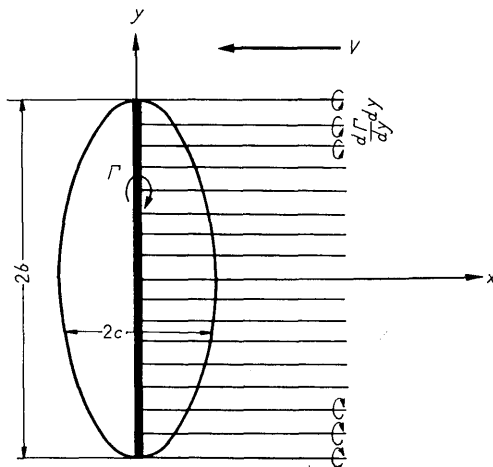


図 1

で与えられる。この表示式は Biot-Savart の法則を用いると容易に導かれる。

(1.1.2) を (1.1.1) に代入すると循環分布 Γ を求めるための Prandtl の積分方程式が得られる。この方程式によって計算した結果は、縦横比が 4 より大きい翼については実験値とよく一致することが知られている。

この理論は極めて簡明直截なもので、その考え方は初期のプロペラ渦理論にそのまま応用された。ただ、プロペラの場合は α_i の表示式として、螺旋状の自由渦の誘導速度によるものを用いねばならない。守屋¹⁾ はプロペラの w_i として Biot-Savart の法則による誘導速度を螺旋面に沿って、翼の位置より無限後方で積分したものをを用い、一方河田²⁾ は Goldstein の理想プロペラの理論³⁾ の解析的手法を応用して、 $w_{i\infty}$ の表示式をポテンシャル論的に求め、その半分の w_i として用いた。

理想プロペラ (エネルギー損失極小のプロペラ) の問題を渦理論によって解く方法を初めて考えたのは Betz⁴⁾ であった。この少し前 Munk⁵⁾ [II, pp. 132] は直進翼の誘導抵抗の極小問題に関連して 3 つの定理を導いた。Betz の理論はプロペラにおいても Munk の定理が成り立つものと仮定したもので、この考えは守屋、河田の理論にも踏襲され、また現在の最適プロペラ設計の基礎をなす仮定となっている。

近藤^{6,7)} は Prandtl の加速度ポテンシャル理論⁸⁾ の方法をプロペラに応用し、はじめて揚力面プロペラの流場を導き、Munk の定理 III に相当するものを証明するなどして、理論を飛躍的に発展させたが、数値計算には守屋、河田と同じ Prandtl 揚力線の形を用いた。Sparenberg の揚力面理論⁹⁾ の着想は近藤の理論と同じものと考えてよい。

Ginzel and Ludwig¹⁰⁾ は揚力面の自由渦による吹上げが翼面上で翼弦方向に一樣でないことに着目し、揚力線に対する揚力面補正としてキャンパー修正の考えを導入して、揚力線理論を縦横比の比較的小さいプロペラにも適用できる方法を考えた。この研究はプロペラ理論に一紀元を画したもので、船用プロペラの渦理論は、ここからはじまるといってもよい。

線型理論は自由渦が翼の運動軌跡面上に分布すると仮定するものであるが、現実の流れでは、自由渦は付近の誘導速度にしたがって流され、渦面は変形を受ける。そして揚力が大きく、また縦横比が小さいほど、その影響は著しい。この影響を翼理論に取り入れたも

のが非線型翼理論である。プロペラの渦系の誘導速度は直進翼のそれに比べるとかなり大きいので、中程度の荷重または大荷重のプロペラ理論としては非線型翼理論の方法を採用するのが望ましいが、それはなかなかむづかしい。中程度の荷重のプロペラ理論の場合は普通単に螺旋渦のピッチが誘導速度にしたがって変化すると仮定している^{11,12)}。この方法はまた伴流プロペラ理論に応用されたりしているが、この方面の研究はあまり進展を見せていない。一定ピッチ螺旋渦の非線型理論は、導かれる式の形が線型理論のものとあまり違いはなく、ピッチを求めるための逐次近似計算の手数を除けば、数値計算は線型理論の場合とほぼ同じように行なうことができる。

直進翼の Prandtl 揚力線理論では束縛渦の位置で境界条件を満足するものと定められているが、翼平面形に対する束縛渦の相対位置は規定されない。このため、Prandtl 揚力線は翼の後退角などの影響についてなんらの解答を与えてくれないという欠点がある。これを補うため、別種の揚力線理論が Weissinger¹³⁾ によって考えられた。平面翼の二次元流では、翼を一本の渦で置換え、それを前縁より 1/4 弦長点におくと、3/4 弦長点における誘導速度は、流れの方向が翼面の接線方向と一致するようになる。Weissinger の理論は二次元流のこの関係を三次元翼に適用したもので、Prandtl 揚力線に比べると、翼弦方向のひろがりの影響がある程度加味されているので、簡易揚力面理論ともいわれる。Lawrence¹⁴⁾ は weight function の方法を用い、揚力面の 2 変数積分方程式を 1 変数のものに変換し、翼の縦横比に応じて核を簡略化すると、Prandtl, Weissinger などの積分方程式が導かれることを示した。Lawrence の方法は Flax¹⁵⁾ によって揚力面を解く方法へと発展されている。Weissinger 揚力線および Lawrence の方法はプロペラ理論に広く応用されている^{12,16,17)}。

Prandtl 揚力線にしても Weissinger の理論にしても、翼を一本の束縛渦で置換えたものであるから、揚力の翼弦方向の分布の中に自由渦の局所的影響が含まれていない。これを改善するため、最近では翼を 2 本以上の束縛渦で置換えるいわゆる渦格子のプロペラ理論^{18,19)}、さらに揚力面を直接計算する方法などが考えられている^{20,21)}。

揚力面を計算するには計算技術上困難な点が多く、直進定常翼ですらも、問題なく計算できるという状態になっていない。その理由の主なところは、揚力面の

積分方程式が複雑な形をした特異核をもつため、それを含む数値積分がなかなか精度よく行ない得ないというところにあるように思われる。この困難は渦格子の流体模型を用いることで、ある程度回避することができるが、電子計算機の利用が一般化してきたので、プロペラ揚力面の計算が次第に増えることであろう²¹⁾。しかし技術的工学的立場から考えれば、揚力線プロペラ理論は極めて便利な方法であるから、今後とも消え去るものではなく、また本文中に述べるような逐次近似法によって揚力線理論を介して揚力面上の揚力分布を計算することもできる。

1.2. Prandtl の翼理論における三つの境界値問題

プロペラ理論の応用される問題の種類は広汎なものであるが、単独プロペラの性能に限って問題を考察するときは、それらを Prandtl の「翼理論における三つの境界値問題」²²⁾ [pp. 179~180] にしたがって分類するのが最も合理的である。

Prandtl の三つの境界値問題とは

第一の問題、与えられた揚力分布を得るためには翼の平面形および迎角の分布をいかにすべきか。

第二の問題、全揚力と翼幅が定められた場合、誘導抵抗抗(エネルギー損失)が極小になる揚力分布を見出すこと。

第三の問題、翼平面形および迎角の分布が与えられた場合、揚力分布を求めること。

である。

「第三の問題」は複雑な積分方程式を取り扱うものであるから、最もむづかしいもので、翼およびプロペラ理論発展の中心にあった。これは与えられた作動状態におけるプロペラの性能を求めたいときに遭遇する問題で、これまで主として揚力線理論によって研究が進められてきた。キャビテーションの問題のように翼表面の圧力分布を正確に知りたいものに対して、プロペラ理論は薄翼理論であるから、たとえ揚力面を解いたとしても、そのままでは実際問題に適用できない。その対策として、相当キャンパーを求め、二次元ポテンシャル理論を応用するなどの方法が考えられる²¹⁾。あるいは薄翼理論の渦分布に、翼厚に相当する吹き出しを加えて圧力分布を計算するとかなりよい結果の得られることが二次元理論で知られているので²³⁾、これを利用するのも一つの方法である。最適プロペラ設計のための迎角修正として翼厚を考慮する試みはあるが²⁴⁾、「第三の問題」では揚力面理論がようやく緒に

ついたところで、まだ翼厚を考慮して圧力分布を計算するまでにはいたらない。

「第二の問題」は直進翼の場合では単純なもので、Munk 以後取り立てて研究を進める必要はなかったようであるが、プロペラでは実用的に重要ないわゆる理想プロペラの理論がこれに相当し、直進翼に比べると問題はむつかしく、かつ多様で、かなり沢山の研究が残されている。この問題は Betz⁴⁾ がその基本的な条件を与え、Goldstein⁹⁾ によって解かれた。最適プロペラの設計に便利なチャートは Kramer²⁵⁾、Eckhardt and Morgan²⁶⁾ らによって作られている。Goldstein と同じ方法でボスの径が有限な場合、円壩中のプロペラなどについて「第二の問題」を解いたものがある^{27,28)}。

最適プロペラの設計法に関する研究が最近では目立って多い。これは Eckhardt and Morgan らのチャートを利用して、「第一の問題」を解くことにほかならない。

直進翼理論とプロペラ理論の発展における著しい相違の一つは、飛行機翼の研究が「第三の問題」を中心としているのに対し、船用プロペラの研究は「第一の問題」に重点の置かれていることである。それは恐らく、飛行機と船舶に対する社会的要請の相違に基づくものであろう。

2. 直進翼の理論

ここでは三次元翼理論の中で、特にプロペラ理論と関係のある部分を選んで解析を行なう。

2.1. 加速度ポテンシャル理論の基礎

揚力系の渦理論は渦系の流体模型を介して理論が組み立てられるものであるから、まずその流体模型を理解するという複雑な負担は免れない。特に非定常翼では、束縛渦、自由渦の分布状態が Prandtl の渦保存則²²⁾ [pp. 151~152],⁵⁾ [pp. 280] に規制されて、時々刻々変わるものであるから、プロペラのように渦面の形状が複雑なものでは一般の理解に適しない。それに比べると、加速度ポテンシャルの方法は簡単な仮説と、明快な運算により理論が展開されるので、理論の体系を理解するのは容易である。ただ加速度ポテンシャルの方法は線型理論であるから、非線型的取り扱いを行なうには、導かれた式を渦系の表示式に変換してから、非線型要素を加味する必要がある。

まず加速度ポテンシャルの方法の基本的考え方から解説をはじめることとする。

完全流体の Euler の運動方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad \dots (2.1.1)$$

である。翼の迎角が小さく、また厚みも小さいときは、 \mathbf{q} は翼の前進速度に比べて小さいので、その2次以上の項は省略しても大差ない。そのとき (2.1.1) は、

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \nabla \phi, \quad \phi = -\frac{p}{\rho} \quad \dots (2.1.2)$$

となる。すなわち加速度は圧力に比例するポテンシャル ϕ をもつ。この式を t で積分すると、

$$\mathbf{q} = \text{grad} \left\{ \int_{t_0}^t \phi dt + F(t) \right\} \quad \dots (2.1.3)$$

が得られる。これはベクトル \mathbf{q} がスカラー量の勾配になっていることを示すもので、このスカラー量を速度ポテンシャルとよび Φ で表わすことにする。

無限前時間、すなわち翼の無限前方で流体が静止していることを考慮すると、 $t_0 \rightarrow -\infty$ のとき $F(t) = \text{const.}$ でなければならない。よって、

$$\Phi = \int_{-\infty}^t \phi dt, \quad \phi = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \dots (2.1.4)$$

のように表わされる。これは流体に対し、静止した座標系について表わした速度と加速度のポテンシャルの関係式である。

線型理論では $\text{rot } \mathbf{q}$ を含む $\mathbf{q} \cdot \nabla \mathbf{q}$ の項を省略しているので、必然的に速度ポテンシャルが導かれるが、非線型理論では速度ポテンシャルの存在を認めるには、流場が無渦であることを仮定する必要がある。

連続の方程式により Φ は Laplace の方程式を満足するものであるから、(2.1.4) の関係によって、 ϕ も Laplace の方程式を満足しなければならない。

翼の速度場では、翼面のほかに自由渦面でも速度ポテンシャルは不連続になるが、加速度場は翼面以外のいたる所で連続であるから、まず加速度場のポテンシャルを求め、それを積分して速度場を求める方が、直接速度場を解析するより容易である。

2.2. 加速度ポテンシャル理論と渦理論

翼は x 軸の負の方向に一定速度 V で直進するものとする。

(2.1.4) を翼とともに前進する座標系に関するもの書き改めると、

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^x \phi(X, y, z) dX, \quad \phi = V \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \dots (2.2.1)$$

となる。

翼の厚さを無視しても大差ないほど薄い翼のときは、圧力場は翼の平均矢高面の位置に圧力飛躍がある

ほかは、流体の全領域にわたって連続である。よって翼は加速度場の複源分布で表わされ、そのモーメントは Π/ρ である。

線型理論は翼の迎角の小さい場合に適用されるものであるから、複源分布の位置を、平均矢高面の位置から、その運動軌跡面上への投影面上に移して考えても、それによる誤差は二次以下の微小量である。このように翼を表わす特異点を翼の運動軌跡面上に移して解析することは線型理論の一つの特徴で、もしこうしないと、流場に渦のほか吹き出し分布が現われて、加速度ポテンシャルの方法は渦理論の方法と結果の表示式が一致しない。

翼の加速度ポテンシャルは、

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\rho} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \Pi(x', y') \frac{\partial}{\partial z'} \times \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \times dx' dy' \quad \dots\dots(2.2.2)$$

のように表わされる。ただし揚力の働く方向は z 軸の正の方向である。

(2.2.2) を (2.2.1) の第 1 式に代入すると

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\rho V} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \Pi(x', y') dx' dy' \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial z'} \times \frac{1}{\sqrt{(X-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dX \quad \dots\dots(2.2.3)$$

が得られる。これが加速度ポテンシャルの方法によって求めた速度ポテンシャルであるが、次にこれを渦系の表示式に変換してみる。

(2.2.3) の積分変数 X を、これと $X-x=x'-X'$ の関係にある X' に変えると、

$$\Phi_{II} = \frac{1}{V} \int_0^{x-x'} \phi dX^* = \frac{1}{4\pi\rho V} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \frac{\Pi(x', y')(z-z')(x-x')}{\{(y-y')^2 + (z-z')^2\} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' \quad \dots\dots(2.3.2)$$

$$\Phi_I = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^0 \phi dX^* = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(y') \cdot (z-z')}{(y-y')^2 + (z-z')^2} dy' \quad \dots\dots(2.3.3)$$

のように表わす。ただし $\Gamma(y')$ は (2.2.6) の $\Gamma(l_2, y')$ を意味する。

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} = 1$$

であるから、

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi_{II} = \Phi_I, \quad \Phi_{\infty} = 2\Phi_I \quad \dots\dots(2.3.4)$$

となる。

(222)

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\rho V} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \Pi(x', y') dx' dy' \int_{x'}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z'} \times \frac{1}{\sqrt{(x-X')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dX' \quad \dots\dots(2.2.4)$$

となる。 $l_2 < x$ では $\Pi=0$ であるから、 x' に関する積分の上限を ∞ としても結果に変わりはない。 x', X' についての二重積分に Dirichlet 変換²⁹⁾ を適用して、積分順序を交換すると、

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\rho V} \int_{-b}^b dy' \int_{l_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z'} \times \frac{1}{\sqrt{(x-X')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dX' \times \int_{l_1}^{x'} \Pi(x', y') dx' \quad \dots\dots(2.2.5)$$

と書かれる。

(2.2.1) を参照すると、

$$\int_{l_1}^{x'} \frac{\Pi}{\rho V} dx' = \frac{1}{V} \int_{l_1}^{x'} (\phi_u - \phi_l) dx' = \Phi_u - \Phi_l = \Gamma(X', y') \dots\dots(2.2.6)$$

である。(2.2.5) は翼の運動軌跡面上に循環が $\Gamma(X', y')$ の渦が分布しているときの速度ポテンシャルである³⁰⁾ [pp. 211]。(2.2.6) は Kutta-Joukowski の定理を表わし、 $X' < l_2$ では $\Gamma = \text{const.}$ であることがわかる。これが自由渦である。このように加速度ポテンシャルの方法により求めた速度ポテンシャルは渦系の表示式に変換することができる。

2.3. Munk の定理

(2.2.3) の積分変数 X を、これと $X^* = X - x'$ の関係にある X^* に変え、この積分を $[0, x-x']$, $[-\infty, 0]$ の二つの区間に分けて

$$\Phi = \Phi_{II} + \Phi_I \quad \dots\dots(2.3.1)$$

(2.3.2) はまた、

$$\Phi_{II} = \frac{1}{4\pi\rho V} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \Pi(x', y') \times \tan^{-1} \left\{ \frac{y-y'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right\} \times \frac{x-x'}{z-z'} dx' dy' \quad \dots\dots(2.3.5)$$

と書かれる。さらに $\Gamma(y)$ が翼端が消失することを考慮して、(2.3.3) の y' について部分積分すると、

$$\phi_I = \frac{1}{2}\phi_\infty = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{d\Gamma}{dy'} \tan^{-1} \frac{y-y'}{z-z'} dy' \quad \dots\dots(2.3.6)$$

となる。

(2.3.6) から、翼の無限後方では流れは翼の進行方向に垂直な平面内の二次元運動で、翼正面形の射影に沿って密度 $d\Gamma/dy'$ の渦が分布していることがわかる。そしてこの速度ポテンシャルは $z-z'$ に関して奇関数となっている。

翼の縦横比が大きいときは、

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \approx |y-y'| \quad \dots\dots(2.3.7)$$

と置いて誤差は少ない。このとき (2.3.5) は

$$\phi_0 = \frac{1}{2\pi\rho V} \int_{l_1}^{l_2} \Pi(x', y) \tan^{-1} \frac{x-x'}{z-z'} dx' \quad \dots\dots(2.3.8)$$

となる。これは二次元薄翼の速度ポテンシャルである。

(2.3.8), (2.3.4) は 1.1 節に述べた Prandtl の (1) および (2) の仮説と同等のことを表わしているので、その2つの仮説は (2.3.7) に集約される。以上の解析から、Prandtl 揚力線の近似の程度を推察することができる。

線型理論では翼表面の境界条件は近似的に

$$\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} = \frac{1}{V} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=z'} = \frac{w}{V} \quad \dots\dots(2.3.9)$$

とする。ただし \hat{z} は平均矢高面の z 座標である。

翼の誘導抵抗 D_i は、(2.3.9) を用いると、

$$D_i = - \iint \Pi \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} dx dy = \frac{-1}{V} \iint \Pi \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z} \Big|_{z=z'} dx dy + \frac{-1}{V} \iint \Pi \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} \Big|_{z=z'} dx dy \quad \dots\dots(2.3.10)$$

である。

$$\frac{1}{V} \iint \Pi \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z} \Big|_{z=z'} dx dy = \frac{1}{4\pi\rho V^2} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \Pi(x, y) \times dx dy \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \frac{\Pi(x', y') \cdot (x-x')}{(y-y')^2 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \times dx' dy' \quad \dots\dots(2.3.11)$$

であるから、右辺の二つの面積分の順序を交換し、 x, x', y, y' の記号を交換すると、符号だけ異なり形のまったく等しい式となるから、これは0である。し

たがって D_i は (2.3.10) の右辺第2項だけで表わされることになる。すなわち、

$$D_i = -\rho \int_{-b}^b \Gamma \frac{\partial \Phi_I}{\partial z} \Big|_{z=z'} dy \quad \dots\dots(2.3.12)$$

$$\frac{1}{V} \iint \Pi \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial z} \Big|_{z=z'} dx dy = 0 \quad \dots\dots(2.3.13)$$

である。

(2.3.4), (2.3.12), (2.3.13) は Munk の定理で

I. 揚力系の全誘導抵抗は揚力要素を前後に移動しても変わらない。

II. 2点の束縛渦が互に影響してひき起こす誘導抵抗は互に打ち消す。

III. 揚力要素を前後に移動して、揚力系の運動方向と直交する一平面上に集めたとき、その面内の吹き上げは無無限後方の吹き上げの1/2である。

のようにいい表わされる。普通これを Munk の変位定理といっている。これは定常翼理論の基本となる重要定理であるが、最近では演算技法にのみとられ、この定理の意味するところを忘れがちであることは注意を要する。

Munk の定理は、「揚力面の束縛渦はこれを前後に移動しても、また循環分布密度を変えても、断面の全循環さえ変えなければ、誘導抵抗は不変である」ことを表わしている。したがって翼を一本または数本の束縛渦で置換えても誘導抵抗の計算に物理的不都合は生じない。すなわちエネルギー損失極小の翼を揚力線理論によって設計しても差し支えないわけである。

このようにして、仮説から導かれた Prandtl の揚力線理論は Munk の定理によって確固たる理論的根拠が与えられた。非定常翼やまた後に述べるプロペラの非線型理論のように Φ_∞ が、流場を自由渦面に沿って移動させたとき変化するものでは Munk の定理は成り立たない。このような場合について揚力線理論を組み立てるには、Munk の定理が Prandtl 揚力線に果たした役割を理解して、誤りのないように工夫しなければならない。

2.4. 揚力面理論

直進翼については揚力線理論はすでに過去のものとなり、現在では揚力面を計算するのが常識とされている。その理由は直進翼では誘導抵抗よりも揚力分布、モーメントなどに重点が置かれているためである。

揚力面を計算する場合、積分方程式の核関数の特異性をよく知っておかないと、数値計算のとき、思わぬ誤差に災されて、精度のよい結果の得られないことが

しばしばある。プロペラの積分方程式の核関数の特異性は直進翼のそれによく似たところがあるから、直進翼の核関数の特異性を熟知しておくことは、プロペラの計算に当たって極めて好都合なことである。

(2.3.2), (2.3.3) を z で微分して, $z=z'$ と置くと,

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=z'} = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \frac{\gamma}{(y-y')^2} \times \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} dx' dy' + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \frac{\gamma}{(y-y')^2} dx' dy' \dots (2.4.1)$$

となる。これの y' に関する積分は発散するが, Hadamard の意味の有限部分³¹⁾をとる。この発散積分の有限部分を計算する方法として Mangler³²⁾ のものが知られている。すなわち,

$$w = \frac{1}{4\pi} \left[\left\{ \int_{-b}^{y-\epsilon} + \int_{y+\epsilon}^b \right\} dy' \int_{l_1}^{l_2} \frac{\gamma}{(y-y')^2} \times \left\{ \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} + 1 \right\} dx' - \frac{2}{\epsilon} \int_{l_1}^{l_2} \gamma(x', y) \{ \text{sgn}(x-x') + 1 \} dx' \right] \dots (2.4.2)$$

である。ここに ϵ は正の小さな数とする。

数値計算には (2.4.1) を

$$w = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \frac{\gamma \cdot \bar{K}(x, x'; y, y')}{(y-y')^2} dx' dy' \dots (2.4.3)$$

ただし,

$$\bar{K} = \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} + 1 \dots (2.4.4)$$

のように表わし, $\gamma \bar{K}$ を近似的に最小二乗法の公式などで置換えて, x', y' の積分を行なうのが普通見られる解法である。

\bar{K} は,

$$\bar{K}(x, x'; y, y')|_{y=y'} = \begin{cases} 2, & x-x' > 0 \\ 1, & x-x' = 0 \\ 0, & x-x' < 0 \end{cases} \quad (2.4.5)$$

のように $y=y', x=x'$ のところで不連続になる。このような不連続関数の数値積分を精度よく行なうにはかなり工夫を要するもので, 揚力面の計算のむづかしいところは主としてこの辺にある。

無次元量

(224)

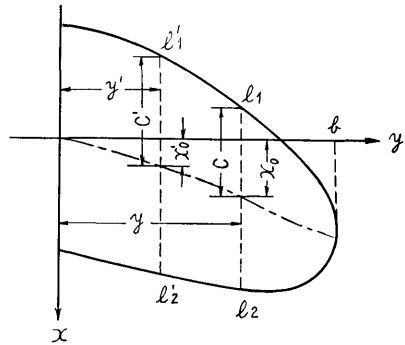


図 2

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= (x' - x_0')/c', \quad \xi_0' = x_0'/c', \\ x_0' &= (l_1' + l_2')/2, \quad c' = (l_2' - l_1')/2, \\ \xi &= (x - x_0)/c, \quad \xi_0 = x_0/c, \\ x_0 &= (l_1 + l_2)/2, \quad c = (l_2 - l_1)/2, \\ \eta &= y/b, \quad \eta' = y'/b \end{aligned} \right\} \quad (2.4.6)$$

を用いると (図 2 参照), (2.4.1) は

$$-\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi V} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma c'}{b(\eta - \eta')^2} \times \left\{ \frac{c(\xi + \xi_0) - c'(\xi' + \xi_0')}{\sqrt{\{c(\xi + \xi_0) - c'(\xi' + \xi_0')\}^2 + b^2(\eta - \eta')^2}} + 1 \right\} d\xi' d\eta' \dots (2.4.7)$$

と書かれる。

二次元流の解より類推して, γ を

$$\frac{\gamma}{V} = \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\eta) \xi^n \dots (2.4.8)$$

のように表わすと, (2.4.7) の中の ξ' に関する積分は,

$$B_n(\xi, Y) = \int_{-1}^1 \frac{\xi'^n (1 - \xi')}{\sqrt{1 - \xi'^2}} \times \frac{c(\xi + \xi_0) - c'(\xi' + \xi_0')}{\sqrt{\{c(\xi + \xi_0) - c'(\xi' + \xi_0')\}^2 + Y^2}} d\xi' \dots (2.4.9)$$

ただし $Y = b(\eta - \eta')$

の形の積分の和で表わされる。これは楕円積分で, $\eta = \eta'$ に対数特異点をもつ。したがって (2.4.9) の和で表わした積分方程式の η' の被積分関数は $\eta = \eta'$ に 2 位の極と対数特異点をもつことになる。すなわち (2.4.5) に示した核関数のもつ不連続は, 以上の運算で対数特異点に形を変えたわけで, 数値計算に当たって, これらの特異点を含む核関数をいかに処理するかが, 揚力面の計算の一つの要点になっている。

対数特異点の計算法として Mangler and Spencer³³⁾ のものがよく用いられる。最近の Garner の計算³⁴⁾ に

よると、対数特異点について、特にこれにとらわれな
いで計算したものと、Mangler and Spencer の計算法
を適用したものとでは、同じ精度を得るのに、前者で
は標点の数をかなり多くとらねばならないことが報告
されている。

揚力面を解く方法としては現在、最適標点法^{32,35)}、
Flax の方法¹⁵⁾、最小二乗法の方法^{36,37)} の三つが代表
的なものである³⁸⁾。揚力面の問題を加速度場における
ポテンシャルの境界値問題として、円盤および楕円盤
揚力面が Kinner³⁹⁾、Krienes⁴⁰⁾ および Schade⁴¹⁾ によ
って解かれている。これらの研究は揚力面理論の古典
として永く残るものであろうし、また揚力面の数値解
法の精度を確かめる一つの基準として尊重されるであ
らう。上記の理論を統合して記述したものに
Küssner⁴²⁾ の研究がある。

2.5. Lawrence の揚力線理論

Flax の理論¹⁵⁾ が示すように、もし翼幅方向の揚力
分布ないしは全揚力だけが知りたいときは、揚力面を
解かなくても、揚力線を計算するだけでほぼ目的が達
せられる。揚力線理論を統一的に研究したのが Law-
rence⁴⁴⁾ である。

揚力面の積分方程式 (2.4.1) を収斂型の積分で表わ
すと

$$\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} = \frac{-1}{4\pi V} \frac{\partial}{\partial y} \oint_{-b}^b \oint_{l_1}^{l_2} \frac{\gamma}{y-y'} \\ \times \left\{ \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}{x-x'} + 1 \right\} dx' dy' \quad \dots\dots(2.5.1)$$

である。

Lawrence はこの式の両辺に $\sqrt{l_2-x}/\sqrt{x-l_1}$ を乗
じ、 x で l_1 より l_2 まで積分して、2変数の積分方程式
を1変数のものに近似表現した。これが Lawrence の
weight function の方法である。その式で、近似的に

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \doteq |y-y'| \quad \dots\dots(2.5.2)$$

のようにおくと、(1.1.1) と同じ Prandtl の揚力線の
積分方程式が得られる。ただしその式では (1.1.1) の
 $dC_L/d\alpha$ を 2π にとった形となる。また近似的に

$$\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} = \sqrt{c^2 + (y-y')^2} \quad \dots\dots(2.5.3)$$

のようにおくと、Weissinger 揚力線の積分方程式が
得られる。(2.5.2)、(2.5.3) を比較してみると、
Weissinger 揚力線は翼弦方向の拡がりを幾分加味した
ものであることが理解できる。

このように Lawrence の理論は揚力線の近似の程度
が明らかにされていることと、揚力面から単なる演算
操作によって揚力線が導かれるところに近代性を感じ
とることができる。

2.6. Prandtl 揚力線の積分方程式

Prandtl 揚力線は束縛渦を x の位置に集めて、翼を
一本の渦糸で表わしたものであるが、こうすると、束
縛渦の位置では $\partial\Phi_{II}/\partial z|_{x=x'}=0$ であるから、 Φ_{II}
による吹き上げは零となる。したがって速度ポテンシ
アルを直接 (2.3.9) の境界条件式に代入したのでは、束
縛渦による吹き上げを理論に取り入れるることができな
い。古典的の Prandtl 揚力線理論ではこの難点は二次
元翼の関係式 (1.1.1) を導入することで解決されてい
る。(1.1.1) は Prandtl 揚力線の象徴的表示式であっ
て、プロペラ理論にも用いられたし、また後述の揚力
面補正の考えもこの式を念頭において α_{0g} を補正す
るという方法がとられている。

Lawrence の方法よりもっと演繹的な方法によっ
て Prandtl 揚力線の積分方程式を導くことができる。
この方法は揚力線に対する揚力面補正を考えたり、ま
た揚力線の解法を利用して揚力面を逐次近似的に解く
のに役立つ。

(2.2.3) の X に関する積分は初等的に行うことが
できるが、プロペラの場合にはできない。 X に関する
積分が行なわれた後の形で考える方が理解しやすいの
であるが、プロペラの場合に参考になるように積分を
行なわないままの形で解析を進めることにする。

$$w = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \gamma dx' dy' \\ \times \int_{-\infty}^x \frac{y-y'}{(X-x')^2 \sqrt{(X-x')^2 + (y-y')^2}} dX \quad \dots\dots(2.6.1)$$

である。(2.5.1) はこの式の X に関する積分を行な
ったものである。

(2.6.1) の $x=x'$ における特異性を分離して

$$w = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \gamma dx' dy' \int_{\epsilon \operatorname{sgn}(x-x')}^{x-x'} \frac{\operatorname{sgn}(y-y')}{X^2} dX + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \gamma dx' dy' \int_{\epsilon \operatorname{sgn}(x-x')}^{x-x'} \\ \times \left\{ \frac{y-y'}{X^2 \sqrt{X^2 + (y-y')^2}} - \frac{\operatorname{sgn}(y-y')}{X^2} \right\} dX + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \gamma dx' dy' \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{y-y'}{X^2 \sqrt{X^2 + (y-y')^2}} dX \quad \dots\dots(2.6.2)$$

のように表わす。ε は正の非常に小さな数とする。このように ε を有限にとることは、(2.5.1) で Cauchy の主値をとることと同等である。

(2.5.2) の近似が成り立つものとする、(2.6.2) の右辺第2項は消失する。第1項、第3項の X に関する積分と y に関する微分を行なうと、(2.6.2) は

$$-\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} = \frac{1}{2\pi V} \oint_{l_1}^{l_2} \frac{\gamma}{x-x'} dx' + \frac{1}{4\pi V} \int_{-b}^b \frac{d\Gamma/dy'}{y-y'} dy' \quad \dots\dots(2.6.3)$$

のように簡単な形に表わされる。右辺第2項は(1.1.2) の α_i である。ここで無次元量

$$\xi = (x-x_0)/c, \quad c = (l_2-l_1)/2, \quad x_0 = (l_2+l_1)/2 \quad \dots\dots(2.6.4)$$

を用いると、(2.6.3) は

$$-\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} - \alpha_i = \frac{1}{2\pi V} \oint_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi-\xi'} d\xi' \quad (2.6.5)$$

と書かれる。

(2.6.5) を γ に関する積分方程式とみなし、Kutta の流出条件が充たされるものとして解を求めると⁴³⁾ [pp. 212]

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{V} &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \frac{-\partial \hat{z}/\partial x - \alpha_i}{\xi-\xi'} d\xi' \\ &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \frac{-\partial \hat{z}/\partial x}{\xi-\xi'} d\xi' \\ &\quad - 2\alpha_i \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \quad \dots\dots(2.6.6) \end{aligned}$$

である。この式の両辺を x で l₁ より l₂ まで積分すると

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{V} &= \frac{c}{V} \int_{-1}^1 \gamma d\xi = 2c \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \\ &\quad \times \left(-\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \right) d\xi' - 2\pi c \alpha_i \quad \dots\dots(2.6.7) \end{aligned}$$

が得られる。α_i を (2.6.3) の右辺第2項の形にもどして表わすと

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{2\pi c V} + \frac{1}{4\pi V} \int_{-b}^b \frac{d\Gamma/dy'}{y-y'} dy' \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \left(-\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \right) d\xi' \quad \dots\dots(2.6.8) \end{aligned}$$

となる。右辺は薄翼理論によると、零揚力角から測った幾何学的迎角 α_{0θ} であるから、(2.6.8) は(1.1.1)、(1.1.2) の積分方程式と一致する。このように Prandtl 揚力線の積分方程式は揚力面の積分方程式から演繹的に導くことができるので、揚力面に対する誤差を正確に評価できるという際立った特徴をもっている。

2.7. Weissinger 揚力線

Weissinger の揚力線理論は Prandtl 揚力線理論以後に最も広く利用されてきたもので、プロペラ理論でもこの方法を採用した例は数知れない。ここで Weissinger 理論の要点を簡単に述べる。

まず翼の二次元流の場合を考えることにすると、γ は、

$$\frac{\gamma}{V} = a_0 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + a_1 \sqrt{1-\xi^2} + a_2 \xi \sqrt{1-\xi^2} + \dots\dots \quad \dots\dots(2.7.1)$$

のように表わされる。この級数は Birnbaum⁴⁴⁾ が二次元薄翼の積分方程式を数値的に解くに当ってはじめて用いたもので、普通 Birnbaum 級数と呼ばれる。

二次元薄翼の積分方程式は (2.6.5) で α_i=0 と置いた式である。(2.7.1) をその積分方程式に代入し、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi'^2}(\xi-\xi')} d\xi' \\ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\xi'^n}{\sqrt{1-\xi'^2}(\xi'-\xi)} d\xi' \\ = b_{n-1} + b_{n-2}\xi + \dots\dots + b_1\xi^{n-2} \\ \quad + b_0\xi^{n-1} \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \\ = \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n} & (n: \text{偶数}) \\ 0 & (n: \text{奇数}) \end{cases} \\ b_0 = 1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(2.7.2)$$

の公式⁴⁵⁾ [pp. 209] を用いて ξ' に関する積分を行なうと、

$$-\frac{d\hat{z}}{dx} = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2}\xi + \frac{a_2}{2} \left(-\frac{1}{2} + \xi^2 \right) + \dots\dots \quad \dots\dots(2.7.3)$$

となる。

次に (2.6.5) の γ が一点 ξ' に集中し、その強さが (2.7.1) を翼弦全体に積分したものであるとすると

$$-\frac{d\hat{z}}{dx} = \frac{1}{\xi-\xi'} \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\xi-\xi'} \frac{a_1}{4} + 0 + \dots \quad (2.7.4)$$

である。

ξ を圧力中心位置にとるという考えを捨てて、形式的に ξ=1/2, ξ'=-1/2 とすると、(2.7.3) と (2.7.4) は第2項まで一致する。したがって Weissinger の 1/4~3/4 弦長法は平板翼と円弧翼の場合に適用できることがわかる。

翼弦上の 1/4, 3/4 弦長点の x 座標を $x_{1/4}$, $x_{3/4}$ で表わすと, Weissinger 揚力線の積分方程式は, (2.5.1) より,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \Big|_{x=x_{3/4}} &= \frac{1}{4\pi V} \frac{\partial}{\partial y} \oint_{-b}^b \frac{\Gamma}{y-y'} \\ &\times \frac{\sqrt{(x_{3/4}-x_{1/4})^2+(y-y')^2}}{x_{3/4}-x_{1/4}} dy' + \alpha_i \end{aligned} \quad \dots\dots(2.7.5)$$

のように表わさる。矩形翼の場合には,

$$\sqrt{(x_{3/4}-x_{1/4})^2+(y-y')^2} = \sqrt{c^2+(y-y')^2}$$

であるから, Lawrence の weight function の方法による積分方程式と (2.7.5) とは (2.7.3) の右辺第 2 項までをとる限り同等となる。

普通に用いられる翼の平均矢高線の形状は円弧状より複雑なものは少ないし, また揚力面の誘導曲り流れも ξ の 1 次以上の項は小さいようであるから, Weissinger 揚力線によって揚力分布を計算すれば, かなりよい結果の得られることが想像できる。

Weissinger 揚力線は矩形翼の場合を除けば, 一般には前節に述べた Prandtl 揚力線の場合のような演繹的な方法によってその積分方程式を導くことができない。

解の精度をよくするため, 翼面をいくつかの区画に分割して, それに 1/4~3/4 弦長法を適用するいわゆる渦格子の方法がとられることがあるが, それよりは Multhopp の最適標点法^{32,35)}の方が解析的に洗練された理論というべきであろう。しかし数値計算の結果は大差ないようである⁴⁵⁾。

2.8. Prandtl 揚力線に対する揚力面補正

Prandtl 揚力線と揚力面とが同じ揚力分布をもつときの吹き上げ分布の相違をはじめて具体的に示したのは Blenk⁴⁶⁾である。プロペラ理論で Ginzler and Ludwig¹⁰⁾はこの相違をキャンパー修正係数と呼ばれるもので表わし, Prandtl 揚力線に揚力面補正を行なった。その考えの根底をなすものを以下に解説する。

2.6 節では (2.6.2) の右辺第 2 項を省略して揚力線理論を導いたが, これを揚力面補正項として取り上げる。それを $-Vu$ で表わすことにし, (2.6.2) の右辺第 2 項を整理すると,

$$\begin{aligned} u &= \frac{-1}{4\pi V} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \frac{\gamma}{(y-y')^2} \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \\ &\times dx' dy' - \frac{1}{2\pi V} \oint_{l_1}^{l_2} \frac{\gamma}{x-x'} dx' \quad \dots\dots(2.8.1) \end{aligned}$$

と書かれる。揚力面の積分方程式は (2.6.3) の右辺に

u が加わったものであるから,

$$-\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} = \frac{1}{2\pi V} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\gamma}{x-x'} dx' + \alpha_i + u \quad (2.8.2)$$

のように表わされる。

u を既知と仮定し, 2.6 節にならって, (2.8.2) より γ を求めると,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{V} &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \frac{-\partial \hat{z}/\partial x - u}{\xi - \xi'} d\xi' \\ &- 2\alpha_i \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \quad \dots\dots(2.8.3) \end{aligned}$$

となる。さらにこれから揚力線の積分方程式を求めると,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{2\pi c V} + \frac{1}{4\pi V} \int_{-b}^b \frac{d\Gamma/dy'}{y-y'} dy' \\ = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \left(-\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} - u \right) d\xi' \quad \dots\dots(2.8.4) \end{aligned}$$

となる。

u の第 1 近似を 0 として, (2.8.4) を解くと Γ および α_i が求められ, その α_i を (2.8.3) に代入すると第 1 近似の γ が得られる。その γ を用いると, (2.8.1) によって第 2 近似の u が得られる。その u を利用して (2.8.4), (2.8.3) を計算すると, 第 2 近似の γ が得られる。以下この操作を繰り返せば, 揚力面の解を求めることができる。

一般に $\partial \hat{z}/\partial x$, u は ξ の多項式で表わすことが可能である。簡単のため, ξ の一次の項で止めて,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} &= \alpha_0 + 2f_0/c \cdot \xi, \quad u = \alpha_{2i} + 2f_i/c \cdot \xi \\ &\quad \dots\dots(2.8.5) \end{aligned}$$

と置き, これを (2.8.3) に代入し, (2.7.2) の公式を利用して ξ' に関する積分を行なうと,

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{V} &= 2(\alpha_0 - \alpha_i - \alpha_{2i}) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + \frac{4}{c} (f_0 - f_i) \sqrt{1-\xi^2} \\ &\quad \dots\dots(2.8.6) \end{aligned}$$

となる。この式の右辺第 1 項は翼前縁で無限大となるものであるから, shock free entry の条件は,

$$\alpha_0 - \alpha_i - \alpha_{2i} = 0 \quad \dots\dots(2.8.7)$$

である。

(2.8.6) を x について l_1 より l_2 まで積分すると, Γ として (1.1.1) と同形の表示式

$$\Gamma = 2\pi c V (k_1 \alpha_0 - \alpha_i + k_2 f_0/c) \quad \dots\dots(2.8.8)$$

が得られる。ここに k_1, k_2 は

$$k_1 = 1 - \alpha_{2i}/\alpha_0, \quad k_2 = 1 - f_i/f_0 \quad \dots\dots(2.8.9)$$

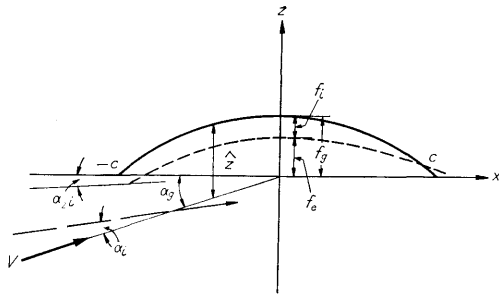


図 3

で表わされるもので、プロペラでピッチ修正係数，キャンバー修正係数といわれるものに相当する。(1.1.1)は(2.8.8)において $k_1=k_2=1$, $\alpha_{0g}=\alpha_0+f_0/c$, $2\pi=dC_L/d\alpha$ としたものである。

$f_e=f_g-f_i$, $\alpha_e=\alpha_0-\alpha_i-\alpha_{2i}$ で表わされる f_e , α_e をそれぞれ有効矢高 (effective camber) および有効迎角 (effective angle of attack) という。

この区分けにしたがって，(2.8.2) の吹き上げの表示式を分けると，

$$\left. \begin{aligned} w &= w_e + w_i \\ -w/V &= -\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\pi V} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\gamma}{x-x'} dx' \\ &+ \alpha_i + u \\ -w_e/V &= \frac{1}{2\pi V} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\gamma}{x-x'} dx' \\ -w_i/V &= \alpha_i + u \end{aligned} \right\} (2.8.10)$$

である。

k_1, k_2 を求めるには揚力面を解かねばならないのであるが，数種の代表的な翼についてあらかじめ計算しておけば，個々の翼の計算には，それらを流用することで間に合う場合が多いであろう。 k_1, k_2 を簡単に求めるには圧力分布を，

$$\gamma = a_0(\eta) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + a_1(\eta) \sqrt{1-\xi^2}$$

と仮定し，

$$k_1 = 1 - u/\alpha_0|_{\xi=0} = \frac{w_e - V\alpha_i}{w} \Big|_{\xi=0} \dots\dots(2.8.11)$$

$$k_2 = 1 - \frac{\partial u/\partial \xi}{\partial \alpha_0/\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{\partial w_e/\partial \xi}{\partial w/\partial \xi} \Big|_{\xi=0} \dots\dots(2.8.12)$$

によって計算するのがよい。

k_1, k_2 の値を計算するには $a_0(\eta), a_1(\eta)$ の翼幅方向の分布形がわかっていなければならない。したがってこの方法は「翼理論の第一境界値問題」を解くのに適し

ている。翼が前後対称で，揚力分布密度が翼弦方向に前後対称のときは $k_1=1$ ，揚力分布密度が前後反対称のときは $k_2=1$ である。このことはプロペラの場合にも成り立つ。

2.9. 揚力線の積分方程式の数値解法

Prandtl の揚力線の積分方程式 (2.6.8) は特定の平面形の翼に対して解析解が見出されていて⁴³⁾ [pp. 220] その方法は解析的に興味深いものがあるが，プロペラ揚力線の場合には応用できそうもない。数値解法としては Prandtl-Glauert の方法⁴³⁾ [pp. 200] が古くから知られているもので，プロペラ揚力線にもしばしば利用されているが⁴¹⁾，最近の揚力面の計算では Multhopp の数値解法⁴⁷⁾ を応用したものが多く，この方法を簡単に紹介する。

Prandtl 揚力線の積分方程式 (2.6.8) を

$$\left. \begin{aligned} G &= \Gamma/(bV), \quad \eta = y/b = \cos \varphi, \quad \lambda = b/c \\ \alpha_{0g} &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \left(-\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \right) d\xi' \end{aligned} \right\} (2.9.1)$$

の無次元量を用いて，無次元形に書くと，

$$\frac{G}{2\pi/\lambda} + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{dG/d\varphi'}{\cos \varphi' - \cos \varphi} d\varphi' = \alpha_{0g} \dots\dots(2.9.2)$$

である。

最小二乗法の内挿式を用いて，

$$G(\varphi) = \frac{2}{m+1} \sum_{n=1}^m G_n \sum_{k=1}^m \sin k\varphi_n \sin k\varphi \dots\dots(2.9.3)$$

と置く。ただし， $\varphi_n = n\pi/(m+1)$, $G_n = G(\varphi_n)$ である。

(2.9.3) を (2.9.2) に代入して， φ' に関する積分を行ない， k に関する総和を行って， $\varphi = \varphi_n = \nu\pi/(m+1)$ と置くと，(2.9.2) は

$$\frac{G_\nu}{\pi/\lambda_\nu} + b_{\nu\nu} G_\nu - \sum_{n=1}^m b'_{\nu n} G_n = 2\alpha_{0g\nu} \quad (2.9.4)$$

と書かる。ただし $\lambda_\nu = \lambda(\varphi_\nu)$, $\alpha_{0g\nu} = \alpha_{0g}(\varphi_\nu)$ であり， Σ' は $n=\nu$ を除いた n の総和を意味する。 $b_{\nu\nu}, b'_{\nu n}$ は Multhopp 行列といわれ，

$$\left. \begin{aligned} b_{\nu\nu} &= \frac{m+1}{4 \sin \varphi_\nu} \\ b'_{\nu n} &= \frac{1 - (-1)^{n-\nu}}{2(m+1)} \frac{\sin \varphi_n}{(\cos \varphi_n - \cos \varphi_\nu)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.9.5)$$

で与えられる。これの数値表は Multhopp によって作られている。

(2.9.4) の代数方程式を G_ν について解けば，揚力

分布が直接求められる。

Multhopp の方法は積分方程式を、揚力分布を未知数とする代数方程式に変換しているところにその特徴がある。

3. 線型プロペラ理論

線型プロペラ理論は線型の仮定を出発点として、全体が一貫した形で記述されるもので、その形は美しく、魅力に富んでいる。この完備した理論を基準として、非線型理論、伴流プロペラ理論などへの発展を計れば、理論を簡素に表現するのに役立つであろう。

現在のプロペラ理論は、その多くが線型理論の枠内に止まり、ほんのわずかに非線型理論の領域に踏み込んでいるに過ぎない。

3.1. 速度ポテンシャル

プロペラによって攪乱される流場のポテンシャルを加速度ポテンシャルの方法によって求めてみる。プロペラは x 軸の負の向きに一定角速度 Ω で回転しながら、 x 軸の負の方向に一定速度 V で直進しているものとする。

加速度ポテンシャル理論は線型理論であるから、軽荷重プロペラに適用される。翼を表わす特異点は、直進翼の場合と同様に、プロペラ翼の運動軌跡面上に分布させて解析を進めるが、それによる誤差は2次以下の微小量である。この特異点の分布面は基準面と呼ば

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta' - 2m\pi/l)} \\ = h \sqrt{(\tau - \tau' - \sigma + \sigma')^2/4 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos\{(\tau - \tau' + \sigma - \sigma')/2 - 2m\pi/l\}} \quad \dots\dots(3.1.4)$$

のように表わされる。(3.1.3) の面積分は一つの翼の基準面の片面全体について行なうものとする。

(3.1.3) を (3.1.2) に代入すると、

$$\Phi(\tau, \sigma, \mu) = \frac{1}{8\pi\rho\Omega} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \Pi dS' \\ \times \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\mu(\tau-T)/2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{R} \right) d\mathbf{T} \quad \dots\dots(3.1.5)$$

注) $\mu' = 0$ とおくと (3.1.1) は、

$$\frac{\phi}{V} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \quad \dots\dots(A)$$

と書かれる。この式を Φ について解くと、

$$\Phi = \frac{1}{\Omega} \int_{-\infty}^{\theta} \phi\{x-h(\theta-\Theta), r, \Theta\} d\Theta \quad \dots\dots(B)$$

が得られる。多くの論文で、速度ポテンシャルは (B) 式の形で表わされているが、(3.1.2) のように変数を τ にすると便利ことが多い。

れる。

Rayleigh にならって流速に比例する流体摩擦を仮想すると運算に便利ことが多い³⁰⁾ [pp. 399]。これの摩擦係数 μ' は物理的には意味のないもので、単に計算の便宜上挿入され、解析の途上適時 $\mu' \rightarrow 0$ として差支えない。

この流場をプロペラ翼に固定した座標系について考えると、時間的変化はないから、速度と加速度のポテンシャルの間には、

$$\phi = V \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \Omega \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} + \mu'\Phi = 2\Omega \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} + \mu'\Phi \quad \dots\dots(3.1.1)$$

の関係がある。(3.1.1) を Φ に関する微分方程式とみなして、解けば

$$\Phi(\tau, \sigma, \mu) = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{\tau} \exp\left(-\frac{\mu'}{2\Omega}(\tau-T)\right) \\ \times \phi(T, \sigma, \mu) dT \quad \dots\dots(3.1.2)$$

である。(3.1.1), (3.1.2) は直進翼の (2.2.1) に相当するものである。

加速度場の不連続面は翼面上だけにあるので、対称プロペラの場合、任意点の加速度ポテンシャルは

$$\phi(\tau, \sigma, \mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \iint (\phi_u - \phi_l) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{R} \right) dS' \quad \dots\dots(3.1.3)$$

ただし、

と書かれる。これが定常プロペラの速度ポテンシャルの基礎式である。

図 5 を参照すると、

$$\left. \begin{aligned} \sin \varepsilon' &= V/W' = 1/\sqrt{1+\mu'^2} \\ \cos \varepsilon' &= \Omega r'/W' = \mu'/\sqrt{1+\mu'^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(3.1.6)$$

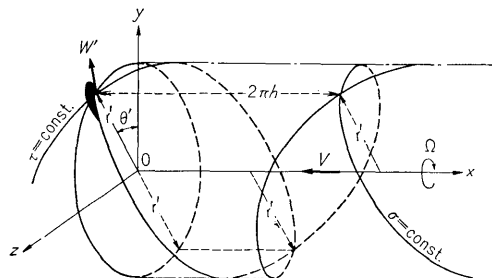


図 4

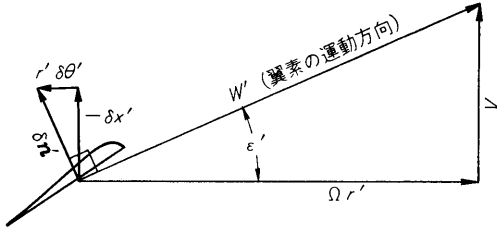


図 5

であるから、法線微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial \tau'} - \frac{\partial}{\partial \sigma'} \right), \\ \frac{\partial}{r' \partial \theta'} &= \frac{1}{h \mu'} \left(\frac{\partial}{\partial \tau'} + \frac{\partial}{\partial \sigma'} \right)\end{aligned}$$

の関係を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n'} &= -\cos \varepsilon' \frac{\partial}{\partial x'} + \sin \varepsilon' \frac{\partial}{r' \partial \theta'} \\ &= \frac{1}{h \sqrt{1+\mu'^2}} \left\{ \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma'} \right. \\ &\quad \left. - \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \tau'} \right\} \quad \dots\dots(3.1.7)\end{aligned}$$

のように τ' , σ' を通して行なう形に書き表わされる。

(3.1.5) の $1/R$ の代わりに Green 関数を用いると、流場の性質を理解するのに好都合なことが多い。プロペラ流場の解析には、Green 関数としては、

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{\pi h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i/2(\lambda+n)(\tau-\tau')-i/2(\lambda-n)(\sigma-\sigma')-i2n\pi/l} \\ &\quad \times I_n(|\lambda|\mu) K_n(|\lambda|\mu') d\lambda, \quad \mu' > \mu \quad (3.1.8)\end{aligned}$$

が適しているようである⁴⁸⁾ [pp. 103],⁴⁹⁾。ここに I_n , K_n は変形ベッセル関数である。これを (3.1.5) に代入して整理すると、

$$\begin{aligned}\Phi(\tau, \sigma, \mu) &= \frac{1}{4\pi^2 h} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \gamma dS' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu' \lambda - n |\mu'|}{\lambda + n - i\mu} \\ &\quad \times e^{i/2(\lambda+n)(\tau-\tau')-i/2(\lambda-n)(\sigma-\sigma')-i2n\pi/l} \\ &\quad \times I_n(|\lambda|\mu_{<}) K_n(|\lambda|\mu_{>}) d\lambda \quad \dots\dots(3.1.9)\end{aligned}$$

となる。ただし $\mu_{>}$, $\mu_{<}$ はそれぞれ、 μ , μ' のうち大なる方および小なる方を意味する。

$$\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2n\pi/l} = \begin{cases} 0, & n \neq kl \\ l, & n = kl \end{cases}, \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots(3.1.10)$$

の公式を用いると、(3.1.9) は

(230)

$$\begin{aligned}\Phi(\tau, \sigma, \mu) &= \frac{l}{4\pi^2 h} \iint \gamma dS' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu' \lambda - l k |\mu'|}{\lambda + l k - i\mu} \\ &\quad \times e^{i/2(\lambda+l k)(\tau-\tau')-i/2(\lambda-l k)(\sigma-\sigma')} \\ &\quad \times I_k(|\lambda|\mu_{<}) K_k(|\lambda|\mu_{>}) d\lambda \quad \dots\dots(3.1.11)\end{aligned}$$

となる。ここで $\mu \rightarrow +0$ とし、 λ の積分について Poisson の特異積分を行なうと、(3.1.11) は

$$\Phi = \Phi_{\text{I}} + \Phi_{\text{II}} \quad \dots\dots(3.1.12)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{II}} &= \frac{l}{4\pi^2 h} \iint \gamma dS' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu' \lambda - l k |\mu'|}{\lambda + l k} \\ &\quad \times e^{i/2(\lambda+l k)(\tau-\tau')-i/2(\lambda-l k)(\sigma-\sigma')} \\ &\quad \times I_k(|\lambda|\mu_{<}) K_k(|\lambda|\mu_{>}) d\lambda \quad \dots\dots(3.1.13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{I}} &= \frac{l^2}{2\pi h} \iint \gamma dS' \sum_{k=1}^{\infty} k(\mu'+1|\mu') \\ &\quad \times I_k(l k \mu_{<}) K_k(l k \mu_{>}) \sin l k (\sigma - \sigma') \\ &\quad \dots\dots(3.1.14)\end{aligned}$$

となる。

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i/2 T(\lambda+n)}}{\lambda+n} f(\lambda) d\lambda = i\pi f(-n) \quad \dots\dots(3.1.15)$$

の公式を用いて、 $\tau \rightarrow +\infty$ における Φ_{II} を求めると、それは Φ_{I} に等しくなる。したがって、無限後方の速度の速度ポテンシャル Φ_{∞} は、

$$\Phi_{\infty} = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Phi_{\text{II}} + \Phi_{\text{I}} = 2\Phi_{\text{I}} \quad \dots\dots(3.1.16)$$

となる。

3.2. 渦理論

(3.1.5) は線型理論によって導かれたものである。これを自由渦の変形を考える非線型理論にまで拡張して利用するには、(3.1.5) を渦系の表示式に改めておく必要がある。

(3.1.5) でまず $\mu=0$ とおき、積分変数 \mathbf{T} をこれと $\mathbf{T}-\tau'=\tau-\mathbf{T}'$ の関係にある \mathbf{T}' に変えたと、

$$\begin{aligned}\Phi(\tau, \sigma, \mu) &= \frac{h}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\tau_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} ds' \\ &\quad \times \int_{\tau'}^{\infty} \frac{\partial}{\partial n''} \frac{1}{R} d\mathbf{T}' \quad \dots\dots(3.2.1)\end{aligned}$$

となる。ただし $\partial/\partial n''$ は (3.1.7) の $\partial/\partial \tau'$ の代わりに $\partial/\partial \mathbf{T}'$ と置いた演算を意味し、 s を螺旋に沿って測った長さとする、 s_1, s_2 は翼の前後縁の s 座標である。

s は τ と、

$$\begin{aligned}ds &= dx \operatorname{cosec} \varepsilon = r d\theta \sec \varepsilon \\ &= \frac{W}{2\Omega} \left(d\theta + \frac{dx}{h} \right) = \frac{h}{2} \sqrt{1+\mu^2} d\tau \\ &\quad \dots\dots(3.2.2)\end{aligned}$$

の関係にある。これを利用すると、 \mathbf{T}' の積分を s'' の積分に変えることができる。その式で Dirichlet 変換を用いて s'' , s' の積分順序を交換するか、あるいはまた s' について部分積分するかのいずれの方法をとってもよい。その結果として、

$$\Phi(\tau, \sigma, \mu) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{r_0} dr' \int_{s_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}''} \frac{1}{R} ds' \int_{s_1}^{s''} \gamma ds'' \quad \dots\dots(3.2.3)$$

が得られる。(3.1.1), (3.2.2) より、

$$\phi = W \partial \Phi / \partial s \quad \dots\dots(3.2.4)$$

であるから、

$$\int_{s_1}^{s'} \gamma ds = \int_{s_1}^{s'} \frac{\phi_u - \phi_l}{W} ds = \Phi_u - \Phi_l = \Gamma(s', r) \quad \dots\dots(3.2.5)$$

の関係を導くことができる。

したがって (3.2.3) はプロペラ翼の軌跡螺旋面上に循環 Γ の渦が分布していることを示し、また (3.2.5) は Kutta-Joukowski の定理を表わしている。 Γ は $s > s_2$ では一定であるから、翼後縁より後方では渦糸はプロペラの運動軌跡と平行に並んでいることになる。これが自由渦である。ある点の循環は流速の線積分を翼弦に沿って行なっても、半径方向に行なっても等しいはずであるから、自由渦の循環分布密度は $d\Gamma/dr$ でなければならない。(3.2.1) は τ' の位置の束縛渦の循環が γds の揚力線を s_1 より s_2 まで螺旋面に沿って並らべたときの速度場を表わしている。したがって束縛渦の循環分布密度は γ であり、かつ自由渦は翼面上にも存在することがわかる。

螺旋渦のピッチは h の値によって定まるものであるから、非線型理論的取り扱いをするため、螺旋渦のピッチを変えたいときは、(3.2.2), (3.2.3) の h を V/Ω とは直接には関係のない、単に螺旋渦のピッチを与えるパラメータとみなし、束縛渦の循環分布密度 γ も $\Pi/(\rho W)$ とは異なるものとして流場を表わし、揚力分布密度は Kutta-Joukowski の定理から求めるようにする。

プロペラの渦系を束縛渦、自由渦に分け、Biot-Savart の法則を用いて誘導速度を計算する方法をとった研究は多いが、(3.2.3) を微分して流速を求めた結果と変わりはない⁵⁰⁾ [pp. 59~61]。束縛渦、自由渦に分ける表現は揚力面の渦格子による解法の中にしばしば見られる。

3.3. 境界条件と揚力面の積分方程式

プロペラの半径 r の位置の翼素の平均矢高面の x

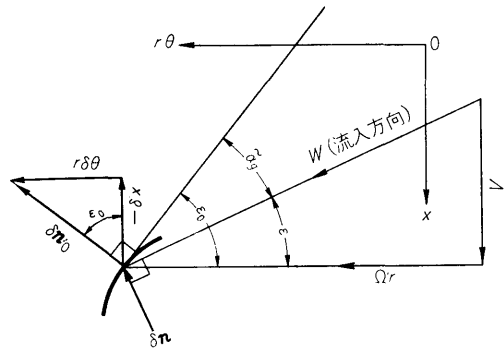


図 6

座標が θ の関数として、

$$x = f(\theta, r) \quad \dots\dots(3.3.1)$$

で与えられるものとする、翼表面の境界条件は、

$$\frac{\partial f}{r \partial \theta} = \frac{V + \partial \Phi / \partial x}{\Omega r + \partial \Phi / (r \partial \theta)} \quad \dots\dots(3.3.2)$$

である。

$$\partial f / (r \partial \theta) = \tan \epsilon_0 \quad \dots\dots(3.3.3)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_0} &= -\cos \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial x} + \sin \epsilon_0 \frac{\partial}{r \partial \theta} \\ &= -\cos \epsilon_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{r \partial \theta} \frac{\partial}{r \partial \theta} \right) \quad \dots\dots(3.3.4) \end{aligned}$$

となる。(3.3.4) を (3.3.2) に適用すると、

$$\begin{aligned} \Omega r \cdot \frac{\partial f}{r \partial \theta} - V &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial f}{r \partial \theta} \frac{\partial \Phi}{r \partial \theta} \\ &= -\frac{1}{\cos \epsilon_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}_0} \end{aligned}$$

となる。この式の両辺に $\cos \epsilon_0 / W$ を乗じ、(3.1.6) を参照して整理すると、

$$\sin(\epsilon_0 - \epsilon) = -\frac{1}{W} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}_0} \quad \dots\dots(3.3.5)$$

となる。

線型理論では $\partial / \partial \mathbf{n}_0 \approx \partial / \partial \mathbf{n}$ としても大差ないから、(3.3.5) は近似的に、

$$\begin{aligned} \sin(\epsilon_0 - \epsilon) &= -\frac{w}{W} = -\frac{1}{W} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} \\ &= -\frac{1}{W} \left[\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial \mathbf{n}} + \frac{\partial \Phi_I}{\partial \mathbf{n}} \right]_{\sigma=\sigma'} \quad \dots\dots(3.3.6) \end{aligned}$$

のように表わされる。これが線型理論の境界条件式である。ただし $\partial / \partial \mathbf{n}$ は基準面に対する法線微分で、(3.1.7) の “'” を除いた演算である。

(3.1.13) より $\partial\Phi_{11}/\partial\mathbf{n}|_{\sigma=\sigma'}$ を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_{11}}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= \frac{-il}{4\pi^2 h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \int \gamma dS' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu'\lambda - lk|\mu')(\mu\lambda - lk|\mu)}{\lambda + lk} \\ &\times e^{i/2(\lambda+lk)(\tau-\tau')} I_{lk}(|\lambda|\mu<) K_{lk}(|\lambda|\mu>) d\lambda \\ &\dots\dots(3.3.7) \end{aligned}$$

となる。ここで λ の代わりに $-\lambda$, k の代わりに $-k$ とおくと、全体の符号と $\tau-\tau'$ の係数の符号が逆になるだけで他は変わらない。それと (3.3.7) を加えて、 $1/2$ を乗じたもので $\partial\Phi_{11}/\partial\mathbf{n}$ を表わすと

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_{11}}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= \frac{l}{4\pi^2 h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \int \gamma dS' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu'\lambda - lk|\mu')(\mu\lambda - lk|\mu)}{\lambda + lk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \sin \frac{1}{2}(\lambda+lk)(\tau-\tau') I_{lk}(|\lambda|\mu<) \\ &\times K_{lk}(|\lambda|\mu>) d\lambda \quad \dots\dots(3.3.8) \end{aligned}$$

となる。また (3.1.14) より $\partial\Phi_1/\partial\mathbf{n}|_{\sigma=\sigma'}$ を求めると

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= \frac{l^3}{2\pi h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \int \gamma dS' \sum_{k=1}^{\infty} \\ &\times k^2(\mu'+1/\mu')(\mu+1/\mu) \\ &\times I_{lk}(lk\mu<) K_{lk}(lk\mu>) \quad \dots\dots(3.3.9) \end{aligned}$$

である。

(3.2.2) を利用して基準面に沿う面積分を $\mu'\tau'$ の積分で表わすと、

$$\int_0^{\tau_0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} dS' = \frac{h^2}{2} \int_0^{\mu_0} \sqrt{1+\mu'^2} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau' \quad \dots\dots(3.3.10)$$

である。ただし τ_1, τ_2 は翼の前後縁の τ 座標とする。

したがって (3.3.8), (3.3.9) は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_{11}}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= \frac{l}{8\pi^2 \sqrt{1+\mu^2}} \int_0^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} d\tau' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu'\lambda - lk|\mu')(\mu\lambda - lk|\mu)}{\lambda + lk} \\ &\times \sin \frac{1}{2}(\lambda+lk)(\tau-\tau') I_{lk}(|\lambda|\mu<) K_{lk}(|\lambda|\mu>) d\lambda \quad \dots\dots(3.3.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_1}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= \frac{l^3}{4\pi \sqrt{1+\mu^2}} \int_0^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} d\tau' \sum_{k=1}^{\infty} k^2(\mu'+1/\mu')(\mu+1/\mu) \\ &\times I_{lk}(lk\mu<) K_{lk}(lk\mu>) \quad \dots\dots(3.3.12) \end{aligned}$$

と書かれる。

これらを (3.3.6) に代入すると

$$\sin(\varepsilon_0 - \varepsilon) = \frac{1}{W} \int_0^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma K\left(\frac{\tau-\tau'}{2}; \mu, \mu'\right) d\tau' \quad \dots\dots(3.3.13)$$

の形の $\gamma(\mu, \tau)$ に関する積分方程式が得られる。これの核関数 K は、

$$\begin{aligned} K\left(\frac{\tau-\tau'}{2}; \mu, \mu'\right) &= -\frac{l\sqrt{1+\mu'^2}}{8\pi^2 \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu'\lambda - lk|\mu')(\mu\lambda - lk|\mu)}{\lambda + lk} \\ &\times \sin \frac{1}{2}(\lambda+lk)(\tau-\tau') I_{lk}(|\lambda|\mu<) K_{lk}(|\lambda|\mu>) d\lambda \\ &- \frac{l^3 \sqrt{1+\mu'^2}}{4\pi \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{k=1}^{\infty} k^2(\mu'+1/\mu')(\mu+1/\mu) I_{lk}(lk\mu<) K_{lk}(lk\mu>) \quad \dots\dots(3.3.14) \end{aligned}$$

であって、 $(1+\mu^2)K$ は μ, μ' に関して対称となる。

3.4. 核関数

核関数 (3.3.14) はそのままの形ではその数値を計算することがむづかしいので、実際の数値計算には速度ポテンシャル (3.1.5) を微分して吹き上げ w を求め、その式を利用するのがよい。

吹き上げの表示式の原形は

$$w = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{h}{8\pi} \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}} \sum_{m=0}^{l-1} \int \int \gamma \sqrt{1+\mu'^2} dS' \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}'} \left(\frac{1}{R} \right) d\mathbf{T} \quad \dots\dots(3.4.1)$$

である。(3.1.7) を用いて法線微分の運算を行なうと、

$$w = \frac{\mu+1/\mu}{8\pi \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int \int \gamma \sqrt{1+\mu'^2} dS' \frac{\partial}{\partial\sigma} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}'} \left(\frac{1}{R} \right) d\mathbf{T} \Big|_{\sigma=\sigma'}$$

$$-\frac{\mu-1/\mu}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \gamma \sqrt{1+\mu'^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{\sigma=\sigma'} dS' \quad \dots\dots(3.4.2)$$

であるが,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \frac{1}{R} d\mathbf{T} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= -\frac{\partial}{\partial \sigma} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{1}{h\sqrt{1+\mu'^2}} \left\{ \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} - \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \right\} \frac{1}{R} d\mathbf{T} \Big|_{\sigma=\sigma'} \\ &= -\frac{\mu'+1/\mu'}{h\sqrt{1+\mu'^2}} \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \frac{1}{R} d\mathbf{T} \Big|_{\sigma=\sigma'} + \frac{\mu'-1/\mu'}{h\sqrt{1+\mu'^2}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} \end{aligned} \quad \dots\dots(3.4.3)$$

であるから, (3.4.2) は

$$\begin{aligned} w &= \frac{\mu-1/\mu}{8\pi h\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \gamma \left\{ -\left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma'} + \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \tau'} \right\} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} dS' \\ &\quad + \frac{\mu+1/\mu}{8\pi h\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) \gamma \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} dS' \\ &\quad - \frac{\mu+1/\mu}{8\pi h\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \gamma dS' \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} d\mathbf{T} \\ &= \frac{1}{8\pi h\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \gamma \left\{ \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) + \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} dS' \\ &\quad - \frac{\mu-1/\mu}{8\pi h\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) \gamma \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} dS' \\ &\quad - \frac{\mu+1/\mu}{8\pi h\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \gamma dS' \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} d\mathbf{T} \end{aligned} \quad \dots\dots(3.4.4)$$

となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= \frac{(\tau-\tau')/2 - \mu\mu' \sin(\tau-\tau')/2 - 2m\pi/l}{2h \{ (\tau-\tau')^2/4 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(\tau-\tau')/2 - 2m\pi/l \}^{3/2}} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= -\frac{(\tau-\tau')/2 + \mu\mu' \sin(\tau-\tau')/2 - 2m\pi/l}{2h \{ (\tau-\tau')^2/4 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(\tau-\tau')/2 - 2m\pi/l \}^{3/2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= \frac{3}{4h} \frac{\{ -(\mathbf{T}-\tau')/2 + \mu\mu' \sin(\mathbf{T}-\tau')/2 - 2m\pi/l \}^2}{\{ (\mathbf{T}-\tau')^2/4 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(\mathbf{T}-\tau')/2 - 2m\pi/l \}^{5/2}} \\ &\quad - \frac{1}{4h} \frac{1 + \mu\mu' \cos(\mathbf{T}-\tau')/2 - 2m\pi/l}{\{ (\mathbf{T}-\tau')^2/4 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(\mathbf{T}-\tau')/2 - 2m\pi/l \}^{3/2}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(3.4.5)$$

である。

$$(\tau-\tau')/2 = v \quad (\mathbf{T}-\tau')/2 = t \quad \dots\dots(3.4.6)$$

と書くと,

$$\begin{aligned} w &= \frac{-1}{8\pi h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \gamma \frac{\{ \mu\mu' - 1/(\mu\mu') \} \{ -v + \mu\mu' \sin(v-2m\pi/l) \}}{\{ v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(v-2m\pi/l) \}^{3/2}} dS' \\ &\quad + \frac{\mu-1/\mu}{16\pi h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \gamma \frac{(\mu'-1/\mu') \{ v + \mu\mu' \sin(v-2m\pi/l) \}}{\{ v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(v-2m\pi/l) \}^{3/2}} dS' \\ &\quad - \frac{\mu+1/\mu}{16\pi h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \gamma dS' \int_{-\infty}^v \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \left\{ \frac{3 \{ -t + \mu\mu' \sin(t-2m\pi/l) \}^2}{\{ t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(t-2m\pi/l) \}^{5/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 + \mu\mu' \cos(t-2m\pi/l)}{\{ t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(t-2m\pi/l) \}^{3/2}} \right\} dt \end{aligned} \quad \dots\dots(3.4.7)$$

となる。

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^v \frac{1 + \mu\mu' \cos(t-2m\pi/l)}{\{ t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(t-2m\pi/l) \}^{3/2}} dt \\ &= \frac{v + \mu\mu' \sin(v-2m\pi/l)}{\{ v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(v-2m\pi/l) \}^{3/2}} + \int_{-\infty}^v \frac{3 \{ t + \mu\mu' \sin(t-2m\pi/l) \}^2}{\{ t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(t-2m\pi/l) \}^{5/2}} dt \end{aligned}$$

であるから, これを (3.4.7) に適用すると,

$$\begin{aligned}
w = & \frac{-1}{8\pi h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \gamma \frac{\{\mu\mu' - 1/(\mu\mu')\} \{-v + \mu\mu' \sin(v-2m\pi/l)\}}{\{v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(v-2m\pi/l)\}^{3/2}} dS' \\
& + \frac{1}{8\pi h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \gamma \frac{\{\mu\mu' + 1/(\mu\mu')\} \{v + \mu\mu' \sin(v-2m\pi/l)\}}{\{v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(v-2m\pi/l)\}^{3/2}} dS' \\
& + \frac{3(\mu+1/\mu)}{4\pi h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \iint \gamma dS' \int_{-\infty}^v \frac{(\mu'+1/\mu')t\mu\mu' \sin(t-2m\pi/l)}{\{t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(t-2m\pi/l)\}^{5/2}} dt
\end{aligned}$$

となる。さらに (3.3.10) によって基準面の面積分を μ' , τ' の積分に改め、まとめて書くと、

$$\begin{aligned}
w = & \frac{1}{8\pi \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} \frac{\mu\mu'v + \sin(v-2m\pi/l)}{\{v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(v-2m\pi/l)\}^{3/2}} d\tau' \\
& + \frac{3(1+\mu^2)}{8\pi \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma (1+\mu'^2)^{3/2} d\tau' \int_{-\infty}^v \frac{t \sin(t-2m\pi/l)}{\{t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(t-2m\pi/l)\}^{5/2}} dt
\end{aligned} \quad \dots\dots (3.4.8)$$

のように整理された形になる。したがって (3.3.13) の積分方程式の核関数は、

$$\begin{aligned}
K(v; \mu, \mu') = & -\frac{\sqrt{1+\mu'^2}}{8\pi \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{\mu\mu'v + \sin(v-2m\pi/l)}{\{v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(v-2m\pi/l)\}^{3/2}} \\
& - \frac{3\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{-\infty}^v \frac{t \sin(t-2m\pi/l)}{\{t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos(t-2m\pi/l)\}^{5/2}} dt \quad \dots\dots (3.4.9)
\end{aligned}$$

のように表わされる。

(3.3.14) と (3.4.9) は同じもので、(3.3.14) から直接 (3.4.9) を導くこともできる。核関数の数値は (3.4.9) を数値積分して求めるのがよいであろう。(3.4.9) の K には $\mu=\mu'$ に 2 位の極のあることが定常翼の場合から類推されるので

$$K(v; \mu, \mu') = \frac{\bar{K}(v; \mu, \mu')}{(\mu-\mu')^2} \dots (3.4.10)$$

のように置き、 $\bar{K}(v; \mu, \mu')$ の数値表を作るようにするのが実用上便利である。 \bar{K} は翼数 l と $v; \mu, \mu'$ の関数で、プロペラの作動状態は μ, μ' の中に含まれ、

表面には現われない。

3.5. 核関数の特異性

積分方程式 (3.3.13) は核関数が $\mu=\mu'$ に特異点をもつ特異積分方程式である。(3.3.13) の積分は発散積分で Hadamard の意味の有限部分をとるものであるが、数値積分を正確に行なうため、核関数の特異性を明らかにしておく必要がある。

(3.4.9) の m に関する総和の内、 $m \neq 0$ の項には特異性がないので、 \bar{K} の中の $m \neq 0$ の項は $\mu=\mu'$ の近傍では非常に小さい。したがって、 $\mu=\mu'$ の近傍では、

$$\begin{aligned}
\bar{K}(v; \mu, \mu') \simeq & -\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \frac{\mu\mu'v + \sin v}{(v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos v)^{3/2}} \\
& - \frac{3(\mu-\mu')^2 \sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi} \int_{-\infty}^v \frac{t \sin t}{\{t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos t\}^{5/2}} dt \quad \dots\dots (3.5.1)
\end{aligned}$$

である。

t の小さな値に対して、

$$\frac{t \sin t}{\{t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos t\}^{5/2}} \simeq \frac{t \sin t}{\{t^2(1+\mu\mu') + (\mu-\mu')^2\}^{5/2}}$$

であるから、(3.5.1) を

$$\begin{aligned}
\bar{K}(v; \mu, \mu') \simeq & -\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \frac{\mu\mu'v + \sin v}{(v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos v)^{3/2}} \\
& - \frac{3(\mu-\mu')^2 \sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi} \int_{-\infty}^v \frac{t \sin t}{\{t^2(1+\mu\mu') + (\mu-\mu')^2\}^{5/2}} dt
\end{aligned}$$

$$-\frac{3(\mu-\mu')^2\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi}\int_{-\infty}^v\left\{\frac{t\sin t}{\{t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos t\}^{3/2}}-\frac{t\sin t}{\{t^2(1+\mu\mu')+(\mu-\mu')^2\}^{3/2}}\right\}dt \quad \dots\dots(3.5.2)$$

と書くと、この式の右辺第3項の被積分関数は $\mu=\mu'$ に対して特異点をもたないので、 $\mu=\mu'$ の近傍では第3項は非常に小さく、除外してよい。(3.5.2) の右辺第2項を部分積分すると、

$$\begin{aligned} \bar{K}(v; \mu, \mu') \simeq & -\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}}\frac{\mu\mu'v+\sin v}{(v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos v)^{3/2}} \\ & +\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}\sin v}{(1+\mu\mu')\{v^2(1+\mu\mu')+(\mu-\mu')^2\}^{3/2}} \\ & -\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{1+\mu\mu'}\int_{-\infty}^v\frac{\cos t}{\{t^2(1+\mu\mu')+(\mu-\mu')^2\}^{3/2}}dt \quad \dots\dots(3.5.3) \end{aligned}$$

となる。 $\mu=\mu'$ 、 $v\rightarrow 0$ のとき (3.5.3) の右辺第1項と第2項は消し合って0になるので、 K の特異性は (3.5.3) の最終項の中だけに含まれることになり、 $\mu=\mu'$ の近傍では、

$$\bar{K}(v; \mu, \mu') \simeq -\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{1+\mu\mu'}\int_{-\infty}^v\frac{\cos t}{\{t^2(1+\mu\mu')+(\mu-\mu')^2\}^{3/2}}dt \quad \dots\dots(3.5.4)$$

で表わされる。

(3.5.4) から次のことがわかる。

- (1) $v < 0$ のとき、 K には特異性はない。
- (2) $v \geq 0$ のとき、 K は $\mu=\mu'$ に特異点を持ち、
 $v > 0$ のときの特異性は $v=0$ のときの特異性

の2倍である。

変形ベッセル関数の積分公式⁴⁸⁾ [pp. 52]

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)^{3/2}}dx=\frac{K_1(a)}{a} \quad \dots(3.5.5)$$

を用いると、

$$\bar{K}(0; \mu, \mu') \simeq -\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{(1+\mu\mu')^{3/2}}\frac{K_1(|\mu-\mu'|/\sqrt{1+\mu\mu'})}{|\mu-\mu'|/\sqrt{1+\mu\mu'}} \quad \dots\dots(3.5.6)$$

である。 $K_1(x)$ の $x=0$ の近傍における展開式は、

$$\frac{K_1(x)}{x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x}{2}+\dots\dots$$

であるから、

$$\bar{K}(0; \mu, \mu') \simeq -\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\left\{\frac{1+\mu^2}{(\mu-\mu')^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{|\mu-\mu'|}{\sqrt{1+\mu^2}}\right\}$$

のように表わされる。

したがって $\mu=\mu'$ の近傍では、

$$\bar{K}(v; \mu, \mu') \simeq \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{4\pi}\left\{\sqrt{1+\mu^2}+\frac{(\mu-\mu')^2}{2\sqrt{1+\mu^2}}\ln|\mu-\mu'|\right\}, v > 0 \\ -\frac{1}{8\pi}\left\{\sqrt{1+\mu^2}+\frac{(\mu-\mu')^2}{2\sqrt{1+\mu^2}}\ln|\mu-\mu'|\right\}, v = 0 \\ 0, v < 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots(3.5.7)$$

となる。

このように \bar{K} が $\mu=\mu'$ のとき $v=0$ で不連続になり、 K の特異性が $v \geq 0$ のときに現われることは直進翼の性質と同じである。ただ揚力面の核関数だけを比較すると、その特異性は直進翼では2位の極だけであ

るのに対し、プロペラでは2位の極のほかに対数特異点をもつという相違がある。これは自由渦の彎曲に由来するものである⁵⁾ [II, pp. 313]。しかしこの対数特異点の係数は2位の極の係数の $1/(1+\mu^2)$ であるから、普通の作動状態では、翼面上の大部分のところで、

その影響は極わめて少ない。これまでの揚力線の数値計算では、この対数特異点に対して Mangler and Spencer の方法³³⁾ のような対数特異点対策を講じた例はないようである。

次に積分方程式 (3.3.13) を直進翼の (2.5.1) のような収斂型の積分で表わしたときの核関数の特異性について調べてみる。

$$\left. \begin{aligned} B(v, \mu') &= v^2 + \mu'^2 \sin^2 \varphi \\ R(v; \mu, \mu') &= \sqrt{v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos \varphi} \\ (\mu - \mu' \cos \varphi)^2 &= R^2 - B(v, \mu') \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.5.8)$$

と置くと、

である。そして、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu\mu'v + \sin \varphi}{R^3} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{-\mu'vB(v, \mu') + (\mu'^2v \cos \varphi + \sin \varphi)(\mu - \mu' \cos \varphi)}{B(v, \mu') \cdot R} \right] \\ \frac{3}{R^5} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{\mu - \mu' \cos \varphi}{B(v, \mu') \cdot R} \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{2}{B(v, \mu')} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.5.9)$$

であるから、(3.4.9) は、

$$\begin{aligned} K(v; \mu, \mu') &= -\frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{-\mu'vB(v, \mu') + (\mu'^2v \cos v_m + \sin v_m)(\mu - \mu' \cos v_m)}{B(v, \mu') \cdot R} \right] \\ &\quad - \frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_{-\infty}^v t \sin t_m \left[\frac{\mu - \mu' \cos t_m}{B(t, \mu') \cdot R} \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{1}{B(t, \mu')} \right\} \right] dt \end{aligned} \dots\dots (3.5.10)$$

と書かれる。ただし、

$$v_m = v - 2m\pi/l, \quad t_m = t - 2m\pi/l$$

である。

v, t の小さな値に対して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\mu'^2v \cos v + \sin v)(\mu - \mu' \cos v)}{B(v, \mu') \cdot R} &\approx \frac{\operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{v} \\ \frac{2t \sin t \cdot (\mu - \mu' \cos t)}{B^2 \cdot R} &\approx \frac{2 \operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{t^2(1+\mu'^2)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.5.11)$$

であるから、(3.5.10) を、

$$\begin{aligned} K(v; \mu, \mu') &= -\frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{v} - \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+\mu'^2}} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_{\varepsilon \operatorname{sgn} v}^v \frac{\operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{t^2} dt \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ \sum_{m=0}^{l-1} \frac{-\mu'vB(v, \mu') + (\mu'^2v \cos v_m + \sin v_m)(\mu - \mu' \cos v_m)}{B(v, \mu') \cdot R} - \frac{\operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{v} \right\} \\ &\quad - \frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_{\varepsilon \operatorname{sgn} v}^v \left[\sum_{m=0}^{l-1} \frac{t \sin t_m \cdot (\mu - \mu' \cos t_m)}{B(t, \mu') \cdot R} \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{2}{B(t, \mu')} \right\} - \frac{2 \operatorname{sgn}(\mu - \mu')}{t^2(1+\mu'^2)^2} \right] dt \\ &\quad - \frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{t \sin t_m \cdot (\mu - \mu' \cos t_m)}{B(t, \mu') \cdot R} \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{2}{B(t, \mu')} \right\} dt \end{aligned} \dots\dots (3.5.12)$$

と書く。これは直進翼の (2.6.2) と同じ形の式で、 K の $v=0$ における特異性は (3.5.12) の右辺第1項、第2項に含まれ、第3項以下には特異性がない。 ε は正の小さい数で、これを有限にとったのは、直進翼の

場合に述べたように、積分方程式 (3.3.13) で発散積分の有限部分をとることと同等である。

3.6. エネルギー定理

プロペラが単位時間に流体に対してなす仕事と、単位時間に後方に置き去る流体の全エネルギー (損失エネルギーという) とは等しいという一般的定理が、こ

注: 文献⁴⁹⁾ の中では (3.5.9) に対応する式の計算に誤りがあった。

れまで導いてきた諸式の間になり立っているかどおかを確かめてみる。

損失エネルギーは普通、プロペラの前後遠く離れたところに二つの検査面を置き、単位時間にここを通過する流体の全エネルギーから計算するが、ここではそれを Lamb⁵¹⁾ にしたがって、Rayleigh の流場の消散関数を用いて計算する。この方法は演算技法として非常に優れたものであるが、理論的根拠に不安をもつ向きもあって、これまで造波現象の理論の個々の問題について検証が行なわれてきたが、不都合の生じた例は見当らない。まずこの方法の原理から解説する。

Euler の運動方程式に Rayleigh の仮想摩擦を導入すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} + \mu' u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{Dv}{Dt} + \mu' v &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{Dw}{Dt} + \mu' w &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \right\} \dots(3.6.1)$$

である。この式の両辺にそれぞれ u, v, w を乗じて、加え合わせ、考える流体領域全体に体積積分を行なうと、

$$\frac{DT}{Dt} + 2F = \iint q_n p dS \dots(3.6.2)$$

が得られる。ただし T は運動エネルギー、 $2F$ は消散関数で、

$$T = \frac{\rho}{2} \iiint (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz \dots(3.6.3)$$

$$2F = \mu' \rho \iiint (u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz \dots(3.6.4)$$

によって与えられる。また q_n は領域境界における内向法線方向の流速である。表面波を伴うときは運動エネルギーに波のポテンシャルエネルギーを加えた全エネルギーを T の代わりに用いる必要があるが、こ

こでは波は考えない。

プロペラのように自由渦を伴うものでは $\mu' = 0$ ならば、 T は無限大になるので、単位時間に検査面を通過する運動エネルギーをもって $DT/(Dt)$ に充当する。 S_e を検査面、 S_w を物体表面とすると、(3.6.2) は

$$E = \frac{DT}{Dt} - \iint_{S_e} q_n p dS = \iint_{S_w} q_n p dS = P \dots(3.6.5)$$

と書かれる。この式の右辺は物体が単位時間に流体に対してなす仕事で、左辺は損失エネルギーである。

仮に μ' が有限とし、流体領域を包む境界を物体から遠く離れたところにとれば、その上で $q_n = 0$ であり、また境界内で $T = \text{const.}$ であるから、(3.6.2) は

$$2F = \iint_{S_w} q_n p dS \dots(3.6.6)$$

となる。したがって $2F$ の表示式を求めて、 $\mu' \rightarrow 0$ とすれば、 $2F$ は損失エネルギー E に転化しなければならない。すなわち、

$$E = \lim_{\mu' \rightarrow 0} 2F = \iint_{S_w} q_n p dS \dots(3.6.7)$$

が成立する。

渦なしの流場にはポテンシャルが存在するから、そのときの消散関数 $2F$ は、(3.6.4) より面積分の形、

$$2F = -\mu' \rho \iint \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \dots(3.6.8)$$

に書改められる。ただし $\partial \phi / \partial n$ は境界面における流体の内向法線方向の流速である。 ϕ は翼面および自由渦面上で不連続であるから、(3.6.8) の面積分はこれらの面全体に行なうものである。

(3.6.8) の螺旋面に沿う面積分を上側(翼の負圧側)および下側(翼の正圧側)のそれぞれに沿うものに分け、前者を E_u 、後者を E_l で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} E_l &= -\mu \rho \frac{\Omega h^2}{2} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\mu_0} \sqrt{1+\mu^2} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \left[-\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{\sigma-\sigma' \rightarrow -0} d\tau \\ E_u &= -\mu \rho \frac{\Omega h^2}{2} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\mu_0} \sqrt{1+\mu^2} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} \left[\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right]_{\sigma-\sigma' \rightarrow +0} d\tau \\ E &= \lim_{\mu \rightarrow 0} (E_l + E_u) \end{aligned} \right\} \dots(3.6.9)$$

である。これらの式の中の ϕ は (3.1.11) で表わされる Φ に含まれる変数 τ, σ を $\tau + 2m\pi/l, \sigma + 2m\pi/l$ で置き換えたものである。

(3.1.11) で $\lambda + lk$ を λ で置換えると、

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau_m, \sigma_m, \mu) &= \frac{l}{4\pi^2 h} \iint \gamma dS' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu'(\lambda-lk)-lk|\mu'}{\lambda-i\mu} \\
&\times \exp\left\{\frac{i}{2}\lambda(\tau_m-\tau')-\frac{i}{2}(\lambda-2lk)(\sigma_m-\sigma')\right\} \\
&\times I_{lk}(|\lambda-lk|\mu_<)K_{lk}(|\lambda-lk|\mu_>)d\lambda
\end{aligned} \tag{3.6.10}$$

である。ただし、

$$\tau_m = \tau + 2m\pi/l, \quad \sigma_m = \sigma + 2m\pi/l$$

である。

(3.6.10) の k, λ の代わりに $-k, -\lambda$ と置き、 $\partial/\partial \mathbf{n}$ の演算を行なうと、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(\tau_m, \sigma_m, \mu) &= \frac{il}{4\pi^2 h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \iint \gamma dS' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\{\mu'(\lambda-lk)-lk|\mu'\}}{\lambda+i\mu} \\
&\times \{\mu(\lambda-lk)-lk|\mu\} \exp\left\{-\frac{i}{2}\lambda(\tau_m-\tau')+\frac{i}{2}(\lambda-2lk)(\sigma_m-\sigma')\right\} \\
&\times I_{lk}(|\lambda-lk|\mu_<)K_{lk}(|\lambda-lk|\mu_>)d\lambda
\end{aligned} \tag{3.6.11}$$

である。(3.6.10), (3.6.11) を (3.6.9) に代入し、

$$\int_a^b f(\tilde{\lambda}) d\tilde{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i/2\tau(\tilde{\lambda}-\lambda)} d\tau = 4\pi f(\lambda), \quad a < \lambda < b \tag{3.6.12}$$

の公式を用いて τ に関する積分を行なうと、

$$\begin{aligned}
E_l &= \lim_{\varepsilon \rightarrow -0} i2\pi\mu\rho\Omega h^2 \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\mu_0} d\mu \frac{l}{4\pi^2 h} \iint \gamma dS' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu'(\lambda-lk)-lk|\mu'}{\lambda^2+\mu^2} \\
&\times e^{i/2(\tau''-\tau')-i/2(\lambda-2lk)\varepsilon-i2m(k-k'')\tau} I_{lk}(|\lambda-lk|\mu_<)K_{lk}(|\lambda-lk|\mu_>) \\
&\times \frac{l}{4\pi^2 h^2} \iint \gamma'' dS'' \sum_{k''=-\infty}^{\infty} \{\mu''(\lambda-lk'')-lk''|\mu''\} \{\mu(\lambda-lk'')-lk''|\mu\} \\
&\times e^{i/2(\lambda-2lk'')\varepsilon} I_{lk''}(|\lambda-lk''|\mu''_<)K_{lk''}(|\lambda-lk''|\mu''_>)d\lambda
\end{aligned} \tag{3.6.13}$$

となる。ただし $\mu_>, \mu_<$ は μ, μ' の内大なる方および小なる方、 $\mu''_>, \mu''_<$ は μ, μ'' の内大なる方および小なる方を意味する。また γ'' は τ'' を関数とする循環分布密度、 dS'' は τ'' を含む面積素片を意味する。

(3.6.13) で $\mu \rightarrow 0$ とし、 λ の積分について Poisson の特異積分を行なうと、

$$\begin{aligned}
E_l &= 4\pi^2 \rho\Omega h^2 \int_0^{\mu_0} d\mu \frac{l}{4\pi^2 h} \iint \gamma dS' \sum_{k=1}^{\infty} lk(\mu'+1/\mu') \sin lk\varepsilon \\
&\times I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>) \frac{2l}{4\pi^2 h^2} \iint \gamma'' dS'' \sum_{k''=1}^{\infty} l^2 k''^2 (\mu''+1/\mu'') \\
&\times (\mu+1/\mu) \cos lk''\varepsilon I_{lk''}(lk''\mu''_<)K_{lk''}(lk''\mu''_>)
\end{aligned} \tag{3.6.14}$$

となる。

(3.1.14), (3.1.16) で示される Φ_∞ の表示式を参照すると、(3.6.14) は Φ_∞ を含む積分で表わされる。 E_u についても同形の式が導かれる。すなわち、

$$\begin{aligned}
E_l &= -E_u = \rho\Omega h^2 \int_0^{\mu_0} \Phi_\infty(\sigma-\sigma'=\varepsilon, \mu) d\mu \cdot \frac{l}{2\pi h^2} \iint \gamma dS' \\
&\times \sum_{k=1}^{\infty} l^2 k^2 (\mu'+1/\mu') (\mu+1/\mu) \cos lk\varepsilon I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>)
\end{aligned} \tag{3.6.15}$$

が得られる。

$\Phi_{u\infty}, \Phi_{l\infty}$ を無限後方における螺旋面の上下面の速度ポテンシャルとすると、

$$\left. \begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow -0} \Phi_\infty(\sigma-\sigma'=\varepsilon, \mu) &= \Phi_{l\infty} \\
\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \Phi_\infty(\sigma-\sigma'=\varepsilon, \mu) &= \Phi_{u\infty}
\end{aligned} \right\} \tag{3.6.16}$$

である。(3.2.5) より,

$$\Phi_{u\infty} - \Phi_{l\infty} = \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds \quad \dots\dots(3.6.17)$$

であるから, (3.6.15) を (3.6.9) の第3式に適用して, E の表示式を求めると,

$$\begin{aligned} E = & \frac{-l^2 \rho V}{2\pi h^2} \iint \gamma dS \\ & \times \iint \gamma dS' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\mu' + 1/\mu') (\mu + 1/\mu) \\ & \times I_{ik}(lk\mu<) K_{ik}(lk\mu>) \quad \dots\dots(3.6.18) \end{aligned}$$

となる。これが損失エネルギーである。

プロペラが単位時間に流体に対してなす仕事 P は (3.6.5) の右辺で表わされる。 \mathbf{q}_n は吹き上げおよび吹き下しで, その面積分は翼の上下両面に沿って行なう。 \mathbf{q}_n は翼の上下面に絶対値は等しく, 符号は逆であるから, 翼の片面に沿う面積分に改めると,

$$P = \iint_{S_w} \mathbf{q}_n p dS = -l \iint \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma=\sigma'} \Pi dS' \quad \dots\dots(3.6.19)$$

となる。この式の $\partial \Phi / \partial \mathbf{n}$ に (3.3.8), (3.3.9) を代入し, 面積分を (3.3.10) によって μ と τ の二重積分に改めると,

$$\begin{aligned} P = & -\frac{h^2 l^2 \rho V}{16\pi^2} \int_0^{\mu_0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu^2} d\tau d\mu \int_0^{\mu_0} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} d\tau' d\mu' \\ & \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu'\lambda - lk/\mu')(\mu\lambda - lk/\mu)}{\lambda + lk} \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') I_{ik}(|\lambda| \mu<) K_{ik}(|\lambda| \mu>) d\lambda \\ & - \frac{l^2 \rho V}{2\pi h^2} \iint \gamma dS \iint \gamma dS' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\mu' + 1/\mu') (\mu + 1/\mu) I_{ik}(lk\mu<) K_{ik}(lk\mu>) \quad \dots\dots(3.6.20) \end{aligned}$$

となる。(3.6.20) の右辺第1項の τ, μ と τ', μ' との積分順序を交換し, τ, μ と τ', μ' の記号を交換すると, まったく同形で符号のみが異なる式となるから, この項は0でなければならない。ここで μ' の積分は $\mu' = \mu$ を境として $\mu' < \mu$ と $\mu' > \mu$ の領域で被積分関数が異なるので, μ と μ' の積分順序の交換に際して Dirichlet 変換²⁹⁾ を利用する必要がある。

(3.6.20) の右辺第2項は (3.6.18) の右辺と一致するから, (3.1.11) で表わされる流場で, (3.6.5) が成り立つことが確かめられた。

(3.6.20) の右辺第1項が消失するので, P は

$$\begin{aligned} P = & -l\rho \iint \left. \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma=\sigma'} \gamma W dS' \\ = & -\frac{l\rho}{2} \iint \left. \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma=\sigma'} \gamma W dS' \quad (3.6.21) \end{aligned}$$

のように表わされる。

(3.6.19) に (3.3.6) の境界条件を代入すると,

$$\begin{aligned} P = & l \iint \Pi W \sin(\varepsilon_0 - \varepsilon) dS' \\ = & l\Omega \iint \Pi r \sin \varepsilon_0 dS' - lV \iint \Pi \cos \varepsilon_0 dS' \\ = & \Omega Q - VS \quad \dots\dots(3.6.22) \end{aligned}$$

となる。ただし Q, S はそれぞれプロペラのトルクおよび推力である。したがって P は完全流体中で作動

するプロペラの流体力によるエネルギー損失を表わし, それが (3.6.18) に示される損失エネルギーに等しくなる。これがプロペラの流場のエネルギー定理である。

(3.6.20) の右辺第1項の被積分関数は (3.5.12) の第1項, 第2項に示す特異性をもっている。したがって Π が前縁で無限大になるときは (3.6.20) の第1項から有限値が導かれるが, これが翼前縁に働く推力と消し合って0になることは二次元翼の場合で証明されているので³⁰⁾ [pp. 41], ここでも同じように考えて, その項を無視する。

3.7. Munk の定理

直進定常翼の場合に成り立つ Munk の三つの定理はこれまでプロペラにしばしば利用されてきたもので, 恐らくプロペラ理論の中で最も重要な定理と考えられるが, プロペラの流場について, この定理はまだよく吟味されていない。線型理論の枠内でも, プロペラにおける Munk の定理は直進翼のものより制限が多い。

プロペラ理論では非線型理論を用いるのが普通であるが, その理論が不完全であるために, 表示式相互の間でエネルギー定理も Munk の定理も成り立たないのが一般である。その場合に線型理論を参考にして, 許される範囲で仮定を設け, Munk の定理が成り立つ

ようにできれば極めて好都合なことである。

以下にプロペラの流場で、Munk の定理に相当するものを導いてみる。

(3.6.18) は (3.2.5) を利用すると、

$$E = -\frac{l^4 \rho \Omega}{2\pi h} \int_0^{r_0} \Gamma(r) dr \\ \times \int_0^{r_0} \Gamma(r') dr' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\mu' + 1/\mu') (\mu + 1/\mu) \\ \times I_{kk}(lk\mu < K_{kk}(lk\mu >) \quad \dots\dots (3.7.1)$$

と書かれる。ただし $\Gamma(r)$ は翼素の全循環である。この式から Munk の定理 I に相当するものが得られる。すなわち、

定理 I プロペラの損失エネルギーは揚力要素を前後に移動しても変わらない。

(3.6.20) の第 2 項は無限後方におよぶ流体攪乱に基づくものであるが、第 1 項には局所的攪乱に基づくものが含まれている。したがって束縛渦の影響は第 1 項の中にだけ存在する。この項が 0 になることはすでに 3.6 節で証明したので、Munk の定理 II に相当するものが得られる。すなわち、

定理 II 2 点の束縛渦が互に影響してひき起す損失エネルギーは互に打消す。

(3.3.8) より、

$$\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} = 0 \quad \dots\dots (3.7.2)$$

ただし、

$$\alpha_i = -\frac{1}{8\pi} \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{W} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma (1+\mu'^2)^{3/2} d\tau' \\ \times \int_{-\infty}^{-\epsilon} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{t \sin t_m (\mu - \mu' \cos t_m)}{B(t, \mu') \cdot R} \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{2}{B(t, \mu')} \right\} dt \quad \dots\dots (3.8.2)$$

$$u = -\frac{1}{8\pi} \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{W} \frac{\partial}{\partial \mu} \int_0^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} d\tau' \\ \times \left[\frac{1}{1+\mu^2} \left\{ \sum_{m=0}^{l-1} \frac{-\mu' v B(v, \mu') + (\mu'^2 v \cos v_m + \sin v_m) (\mu - \mu' \cos v_m)}{B(v, \mu') \cdot R} - \frac{\text{sgn}(\mu - \mu')}{v} \right\} \right. \\ \left. + (1+\mu'^2) \int_{\epsilon \text{sgn } v}^v \left\{ \sum_{m=0}^{l-1} \frac{t \sin t_m (\mu - \mu' \cos t_m)}{B(t, \mu') \cdot R} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{2}{B(t, \mu')} \right) - \frac{2 \text{sgn}(\mu - \mu')}{t^2 (1+\mu'^2)^2} \right\} dt \right] \\ \dots\dots (3.8.3)$$

のように表わされる。ここに $\tilde{\alpha}_\theta = \sin(\epsilon_0 - \epsilon) \doteq \epsilon_0 - \epsilon$ である。

(240)

であるから、(3.1.16) の関係を用いると、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{\partial \Phi_I}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} \quad \dots\dots (3.7.3)$$

となる。よって Munk の定理 III に相当するものとして、次の定理が得られる。

定理 III 対称プロペラの場合、揚力要素を螺旋面に沿って前後に移動して、プロペラの進行方向と直交する一平面上に集めて揚力線を作ったとき、揚力線上の吹き上げは無限後方の螺旋渦面上の吹き上げの 1/2 である。

定理 I および II は損失エネルギーに関するものであるから、プロペラが対称でない場合にも成り立ち、直進翼のものと同内容に変わりはないが、定理 III は Munk の定理 III とはかなり異なることに注意しなければならない。しかし実際問題では非対称プロペラの用いられることは少ないし、また必要なものは渦面上の吹き上げであるから、直進翼の Munk の定理とほとんど同じように定理 III を利用することができる。

3.8. Prandtl 揚力線の積分方程式

直進翼の揚力線について、2.6 節で述べたものと同じ方法でプロペラ揚力線の積分方程式を導くことができる。ここでは揚力面補正項を省略しないで解析を進める。

揚力面の積分方程式 (3.3.13) の核関数として、(3.5.12) の形を採用すると、

(3.8.1) は (2.8.2) と同形の式である。プロペラ翼の縦横比が大きいときは、直進翼の場合と同様に u は他の項に比べて小さい。

無次元量

$$\xi = (\tau - \tau_0) / \bar{\tau}, \quad \bar{\tau} = (\tau_2 - \tau_1) / 2, \quad \tau_0 = (\tau_1 + \tau_2) / 2 \quad \dots\dots (3.8.4)$$

を用いると、(3.8.1) は、

$$\tilde{\alpha}_g - \alpha_i - u = \frac{1}{2\pi W} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi - \xi'} d\xi' \quad \dots\dots (3.8.5)$$

と書かれる。これより γ を求めると、

$$\frac{\gamma}{W} = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \frac{\tilde{\alpha}_g - u}{\xi - \xi'} d\xi' - 2\alpha_i \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \quad \dots\dots (3.8.6)$$

となる。この式の両辺を s で s_1 より s_2 まで積分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{W} &= \frac{1}{W} \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds \\ &= \frac{\bar{\tau} h \sqrt{1+\mu^2}}{2W} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma d\tau \\ &= \frac{\bar{\tau} h \sqrt{1+\mu^2}}{2W} \int_{-1}^1 \gamma d\xi \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{\Gamma}{W} = 2c^* \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} (\tilde{\alpha}_g - u) d\xi' - 2\pi c^* \alpha_i \quad \dots\dots (3.8.7)$$

ただし $c^* = 1/2 \cdot \bar{\tau} h \sqrt{1+\mu^2}$

となる。(3.2.2) によると、 $2c^*$ はプロペラ翼素の翼

弦長を意味するから、(3.8.7) は (2.6.7) と同形で、(1.1.1) に対応する。

Munk の定理 III より、

$$\alpha_i = -\frac{w}{W} \Big|_{\tau-\tau'=0} = -\frac{1}{W} \frac{\partial \Phi_I}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} \quad \dots\dots (3.8.8)$$

であるから、(3.3.9) または (3.4.8) より、

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{l^3 \sqrt{1+\mu^2}}{2\pi W h \mu} \int_0^{\mu_0} \Gamma(\mu') \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) d\mu' \\ &\quad \times \sum_{k=1}^{\infty} k^2 I_{ik}(lk\mu_{<}) K_{ik}(lk\mu_{>}) \quad \dots\dots (3.8.9) \end{aligned}$$

または、

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{3\sqrt{1+\mu^2}}{4\pi W h} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\mu_0} \Gamma(\mu') (1+\mu'^2) d\mu' \\ &\quad \times \int_{-\infty}^0 \frac{t \sin t_m}{(t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos t_m)^{5/2}} dt \quad \dots\dots (3.8.10) \end{aligned}$$

のように表わされる。これらの式は (3.8.2) から直接導くこともできる。

(3.8.7) と (3.8.9) または (3.8.10) を組み合わせたものがプロペラ揚力線の積分方程式である。

3.9. 揚力線に対する揚力面補正

揚力面補正の方法についてはすでに直進翼の項で述べた。プロペラの場合は核関数が複雑になるが、基本的なところはほとんど変わらない。

u は (3.3.6), (3.8.5), (3.8.8) を参照すると、

$$u = -\frac{1}{W} \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} - \frac{1}{2\pi W} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi - \xi'} d\xi' \quad \dots\dots (3.9.1)$$

のように表わされるから、(3.3.8) および (3.4.8) により、

$$\begin{aligned} u &= -\frac{l}{8\pi^2 W \sqrt{1+\mu^2}} \int_0^{\mu_0} \sqrt{1+\mu'^2} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma d\tau' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu'\lambda - lk/\mu')(\mu\lambda - lk/\mu)}{\lambda + lk} \\ &\quad \times \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') \cdot I_{ik}(|\lambda| \mu_{<}) K_{ik}(|\lambda| \mu_{>}) d\lambda - \frac{1}{2\pi W} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi - \xi'} d\xi' \quad \dots\dots (3.9.2) \end{aligned}$$

または、

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{8\pi W \sqrt{1+\mu^2}} \int_0^{\mu_0} \sqrt{1+\mu'^2} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma d\tau' \sum_{m=0}^{l-1} \frac{\mu'\nu + \sin \nu_m}{(\nu^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos \nu_m)^{3/2}} \\ &\quad - \frac{3\sqrt{1+\mu^2}}{8\pi W} \int_0^{\mu_0} (1+\mu'^2)^{3/2} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma d\tau' \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{\nu} \frac{t \sin t_m}{(t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos t_m)^{5/2}} dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi W} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi - \xi'} d\xi' \quad \dots\dots (3.9.3) \end{aligned}$$

と書かれる。

直進翼の場合と同じように、近似的に

$$\tilde{\alpha}_g = \alpha_g + 2f_g/c^* \cdot \xi, \quad u = \alpha_{2i} + 2f_i/c^* \cdot \xi \quad \dots\dots (3.9.4)$$

のように表わされるものとして、これを (3.8.6) に代入すると、

$$\frac{\gamma}{W} = 2(\alpha_g - \alpha_i - \alpha_{2i}) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + \frac{4}{c^*} (f_g - f_i) \sqrt{1-\xi^2} \quad \dots\dots(3.9.5)$$

となる。

shock free entry の条件は γ の分布形に $\sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$ のように前縁で無限大になるものが含まれてはならないことであるから、それを満足するためには、

$$\alpha_g - \alpha_i - \alpha_{2i} = 0 \quad \dots\dots(3.9.6)$$

でなければならない。

また (3.9.4) を (3.8.7) に代入すると、(2.8.8) と同じに、

$$\Gamma = 2\pi c^* W (k_1 \alpha_g - \alpha_i + k_2 f_g / c^*) \dots\dots(3.9.7)$$

が得られる。ここに k_1 および k_2 はピッチ修正係数、キャンパー修正係数であって、

$$k_1 = 1 - \alpha_{2i} / \alpha_g, \quad k_2 = 1 - f_i / f_g \dots\dots(3.9.8)$$

である。

$$f_e = f_g - f_i, \quad \alpha_e = \alpha_g - \alpha_i - \alpha_{2i} \dots\dots(3.9.9)$$

で表わされる f_e , α_e をそれぞれ effective camber および effective angle of attack という。

k_1 , k_2 を計算するには、上記の分け方にしたがって吹き上げを幾何学的なものとして effective なものに分けると好都合である。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} w_g &= w_e + w_i \\ \tilde{\alpha}_g &= -\frac{w_g}{W} = -\frac{1}{2\pi W} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\gamma}{\tau - \tau'} d\tau' \\ &\quad + \alpha_i + u \\ -w_e &= \frac{1}{2\pi W} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{\gamma}{\tau - \tau'} d\tau' \\ -w_i / W &= \alpha_i + u \end{aligned} \right\} \quad (3.9.10)$$

のように書く。この定義にしたがうと、 k_1 , k_2 は、

$$k_1 = 1 - \frac{u}{\tilde{\alpha}_g} \Big|_{\xi=0} = \left[\frac{-w_g / W - u}{-w_g / W} \right]_{\xi=0} = \left[\frac{w_e / W - \alpha_i}{w_g / W} \right]_{\xi=0} \quad \dots\dots(3.9.11)$$

$$k_2 = 1 - \frac{\partial u / \partial \xi}{\partial \tilde{\alpha}_g / \partial \xi} \Big|_{\xi=0} = \left[\frac{\partial w_e / \partial \xi}{\partial w_g / \partial \xi} \right]_{\xi=0} \quad \dots\dots(3.9.12)$$

で与えられる。

最適プロペラの場合には、循環分布が半径方向には (242)

Goldstein 分布、翼弦方向には shock free entry の条件により楕円分布と定められるので、 k_1 , k_2 の数表を作ることは容易で、実際に k_2 の値はかなり広範囲にわたって計算されている²⁶⁾。

(3.9.2) の u の表示式を (3.9.11) に代入すると、翼弦方向の循環分布が前後対称で、翼平面形が前後対称のとき $u|_{\xi=0} = 0$ であるから、次の定理が得られる。

「翼平面形および循環分布密度が前後対称のとき、ピッチ修正係数は 1 である。」

このことはすでに数値計算によって検証されている²²⁾。

3.10. 無限後方の流場と河田の理論

無限後方の流場は揚力線理論やエネルギー損失極小の循環分布を求めることに利用され、古典的プロペラ理論の時代には多くの研究者の関心を集めたもので、現在でもその重要性に変わりはない。

(3.1.14) と (3.1.16) とを参照すると

$$\Phi_\infty = \frac{l^2}{\pi} \int_0^{\mu_0} \Gamma(\mu') d\mu' \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \times I_{lk}(lk\mu') K_{lk}(lk\mu') \sin lk(\sigma - \sigma') \quad \dots\dots(3.10.1)$$

のように表わされる。

$\Gamma(\mu)$ が $\mu=0$, μ_0 において消失することを考慮し、またベッセル関数に関する公式、

$$\left. \begin{aligned} &\int_{\mu_1}^{\mu_2} n \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) I_n(n\mu') d\mu' \\ &= [\mu' I_n'(n\mu')]_{\mu_1}^{\mu_2}, \\ &\int_{\mu_1}^{\mu_2} n \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) K_n(n\mu') d\mu' \\ &= [\mu' K_n'(n\mu')]_{\mu_1}^{\mu_2}, \\ &I_n'(n\mu) K_n(n\mu) - I_n(n\mu) \\ &\quad \times K_n'(n\mu) = 1/(n\mu) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(3.10.2)$$

および

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin lk(\sigma - \sigma') = \frac{l}{2} \left(\frac{\pi}{l} - \sigma + \sigma' \right), \quad 0 < \sigma - \sigma' < \frac{2\pi}{l} \quad \dots\dots(3.10.3)$$

を用いて、(3.10.1) の μ' について部分積分すると、

$$\Phi_\infty = \frac{l\Gamma}{2\pi} \left(\frac{\pi}{l} - \sigma + \sigma' \right) - \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\mu} \mu' \Gamma'(\mu') I_{lk}'(lk\mu') K_{lk}(lk\mu') d\mu' + \int_{\mu}^{\mu_0} \mu' \Gamma'(\mu') K_{lk}'(lk\mu') \right.$$

$$\times I_{lk}(lk\mu)d\mu' \left. \right\} \sin lk(\sigma-\sigma'),$$

$$0 < \sigma - \sigma' < 2\pi/l, \quad \mu < \mu_0 \quad \dots (3.10.4)$$

となって、近藤の速度ポテンシャルが得られる。ただし $\Gamma'(\mu) = d\Gamma/d\mu$, $I_n'(x) = dI_n/dx$, $K_n'(x) = dK_n/dx$ である。

(3.10.4) の右辺第 2 項の級数は絶対収斂で連続であるが、第 1 項は (3.10.3) の級数が $\sigma - \sigma'$ の正負で π の飛躍があるので、 Φ_∞ は $\sigma = \sigma'$ のところで Γ だけ飛躍する。これが自由渦面である。

(3.10.4) は河田がポテンシャル論により求めた式に対応するもので、 $\Gamma = \text{const.}$ のときは、(3.10.2) を利用すれば、(3.10.1) の μ' に関する積分は直ちに行なわれて、河田の速度ポテンシャルが得られる。

河田の理論は極めて重要なものであるから、その方法について簡単に紹介しておく。

プロペラの無限後方では流れは r と σ のみの関数として表わされるはずであるから、Laplace の方程式を τ, σ, μ を変数として書き表わしたとき、 τ に関する項は除外してよい。よって、

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)^2 \Phi + (1 + \mu^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} = 0 \quad \dots (3.10.5)$$

である。

いま仮に半径 r_0 のところまで一様な循環分布 $\Gamma = \text{const.}$ の場合を考える。そして渦面が $\sigma = 2m\pi/l$ ($m=0, 1, 2, \dots, l-1$) のところにあるものとする。こ

のときの Φ に対する制限条件は、 $\mu > \mu_0$ では一様連続で、 $\mu \rightarrow \infty$ に対しては $\Phi = 0$ であり、 σ に関しては $2\pi/l$ を周期とする周期奇関数 (奇関数となることは直進翼のところでも述べた) でなければならないということである。

よって、 $\mu > \mu_0$ に対する (3.10.5) の解は、

$$\Phi_{>} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k K_{lk}(lk\mu) \sin lk\sigma, \quad \mu > \mu_0$$

$$\dots (3.10.6)$$

の形となる。ただし a_k は常数である。

次に $\mu < \mu_0$ における制限条件は、 σ に関する周期性については $\mu > \mu_0$ の場合と同じであるが、

$$\lim_{\sigma \rightarrow +0} \Phi - \lim_{\sigma \rightarrow 2\pi/l-0} \Phi = \Phi_u - \Phi_l = \Gamma \quad (3.10.7)$$

の不連続条件が加わる。そして $\mu \rightarrow 0$ のとき、 $r=0$ における直線渦のポテンシャルとならねばならない。

よって、 $\mu < \mu_0$ に対する (3.10.5) の解は、

$$\Phi_{<} = \frac{l\Gamma}{2\pi} \left(\frac{\pi}{l} - \sigma \right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k I_{lk}(lk\mu) \sin lk\sigma, \quad \mu < \mu_0$$

$$\dots (3.10.8)$$

の形となる。この式の第 1 項を (3.10.3) の左辺で置換え、 $\mu = \mu_0$ において、

$$\Phi_{>} = \Phi_{<}, \quad \partial\Phi_{>}/\partial\mu = \partial\Phi_{<}/\partial\mu$$

になるように a_k, b_k を定めると、(3.10.4) と同形の速度ポテンシャル

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{>} &= \frac{l\mu_0\Gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} I_{lk}'(lk\mu_0) K_{lk}(lk\mu) \sin lk\sigma \\ \Phi_{<} &= \frac{l\Gamma}{2\pi} \left(\frac{\pi}{l} - \sigma \right) + \frac{l\mu_0\Gamma}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} K_{lk}'(lk\mu_0) I_{lk}(lk\mu) \sin lk\sigma \end{aligned} \right\} \dots (3.10.9)$$

が得られる。この式には $r=0$ における直線渦の速度ポテンシャル $-l\Gamma\theta/2\pi$ が含まれているので、それを差引くと、無限長の一本の螺旋渦の速度ポテンシャルが得られる。

螺旋渦面のピッチが半径方向に異なる場合でも、(3.10.9) の形で表わされた一本の螺旋渦をピッチを変えて半径方向に積重ねれば、その速度場を表わすことができる。河田は連続の循環分布を近似的に階段状の分布で置換え、(3.10.9) の積重ねによって吹き上げの計算を行なった。

無限後方の流場の流れ関数が河田によって求められている。この関数は流線を計算するのに好都合であ

る。流線の計算結果は翼端に生じた空洞気洞が自由渦の中に保存される模様を推察するのに役立つであろう。

$$\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial x} = w_{a\infty}, \quad \frac{\partial\Phi_\infty}{r\partial\theta} = w_{t\infty}, \quad \frac{\partial\Phi_\infty}{\partial r} = w_{r\infty}$$

$$\dots (3.10.10)$$

と書くことにする。

τ, σ に関する微分演算は x, θ を通して行なうと、

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} = -\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

$$\dots (3.10.11)$$

である。 Φ_∞ は σ, μ のみの関数で、 τ には無関係で

あるから,

$$\left. \begin{aligned} \frac{h}{2} \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial \theta} &= \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial \tau} = 0 \\ -\frac{h}{2} \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial \theta} &= \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial \sigma} \end{aligned} \right\} \quad (3.10.12)$$

となる。この二つの式より,

$$\begin{aligned} w_{a\infty} &= -\mu w_{t\infty}, \\ \partial \Phi_{\infty} / \partial \sigma &= \partial \Phi_{\infty} / \partial \theta = r w_{t\infty} \quad \dots\dots (3.10.13) \end{aligned}$$

が得られる。この関係を用いると, (3.10.5) は,

$$\frac{\partial (r w_{r\infty})}{\partial r} + (1 + \mu^2) \frac{\partial w_{t\infty}}{\partial \sigma} = 0 \quad (3.10.14)$$

と書かれる。これが満足されるためには, $w_{r\infty}$, $w_{t\infty}$ と,

$$w_{r\infty} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma}, \quad w_{t\infty} = \frac{1}{1 + \mu^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad \dots\dots (3.10.15)$$

の関係にあるスカラー関係 Ψ が存在しなければならぬ。

次に, 流線の方程式は,

$$\frac{dr}{w_{r\infty}} = \frac{rd\theta}{w_{t\infty}} = \frac{dx}{w_{a\infty}} \quad \dots\dots (3.10.16)$$

であるが, $d\sigma = d\theta - dx/h$ であるから, (3.10.13) を用いると, 流線の方程式は,

$$\frac{dr}{w_{r\infty}} = \frac{d\theta - dx/h}{w_{t\infty}/r - w_{a\infty}/h} = \frac{rd\sigma}{(1 + \mu^2)w_{t\infty}} \quad \dots\dots (3.10.17)$$

のように表わされる。この式に (3.10.15) を適用すると,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} d\sigma = d\Psi = 0$$

となるから, $\Psi = \text{const.}$ は流線を表わすことになる。すなわち (3.10.15) で定義される Ψ は流れ関数である。

流れ関数 Ψ の表示式は速度ポテンシャル Φ_{∞} の表示式 (3.10.1) から導くことができる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} &= -w_{r\infty} = -\frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial r} = -\frac{l^3}{\pi h} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left\{ \int_0^{\mu} \Gamma(\mu') \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \right. \\ &\quad \times I_{lk}(\mu' k) d\mu' K_{lk}'(\mu' k) + \int_{\mu}^{\mu_0} \Gamma(\mu') \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) K_{lk}(\mu' k) d\mu' I_{lk}'(\mu' k) \left. \right\} \sin lk(\sigma - \sigma') \end{aligned}$$

であるから, 右辺を σ で積分すると, Ψ の表示式が求められ,

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{l^3 \mu}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} k \left\{ \int_0^{\mu} \Gamma(\mu') \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) I_{lk}(\mu' k) d\mu' K_{lk}'(\mu' k) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mu}^{\mu_0} \Gamma(\mu') \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) K_{lk}(\mu' k) d\mu' I_{lk}'(\mu' k) \right\} \cos lk(\sigma - \sigma') + f(r) \quad \dots\dots (3.10.18) \end{aligned}$$

と書かれる。この中で $f(r)$ は未知関数であるから, これの関数形を求める必要がある。

(3.10.8) を r で微分し,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \{ \mu K_{lk}'(\mu k) \} &= lk \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) K_{lk}(\mu k) \\ \frac{\partial}{\partial \mu} \{ \mu I_{lk}'(\mu k) \} &= lk \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) I_{lk}(\mu k) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (3.10.19)$$

の公式と (3.10.2) の第3式, さらに,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos lk\sigma = -\frac{1}{2}, \quad 0 < \sigma < \frac{2\pi}{l}$$

を用いて整理すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \frac{l^3}{\pi h} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \int_0^{\mu_0} \Gamma(\mu') \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) I_{lk}(\mu' k) K_{lk}(\mu' k) d\mu' \cos lk(\sigma - \sigma') \\ &\quad + \frac{l}{2\pi h} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \Gamma(\mu) + \frac{df}{dr}, \quad \mu < \mu_0 \quad \dots\dots (3.10.20) \end{aligned}$$

となる。

一方, (3.10.13) と (3.10.15) とより,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = (1 + \mu^2) w_{i\infty} = \frac{1 + \mu^2}{r} \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial \sigma}$$

の関数があるから、(3.10.1)を上式の右辺に適用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial r} &= \frac{l^3}{\pi h} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \int_0^{\mu_0} \Gamma(\mu') \\ &\times \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) I_{ik}(lk\mu<) K_{ik}(lk\mu>) d\mu' \\ &\times \cos lk(\sigma - \sigma') \quad \dots\dots (3.10.21) \end{aligned}$$

が得られる。

(3.10.20)と(3.10.21)とは一致しなければならないので、

$$\frac{df}{dr} = \frac{-l}{2\pi h} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \Gamma(\mu)$$

である。両辺を r で 0 より r まで積分すると、(3.10.18)の $f(r)$ は、

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{-l}{2\pi} \int_0^{\mu} \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \Gamma(\mu) d\mu + c \\ &\quad \dots\dots (3.10.22) \end{aligned}$$

の形となる。 c は常数であるから、これを省略しても結果に変わりはない。

(3.10.18)は近藤⁶⁾の求めた式で、 $\Gamma = \text{const}$ として、 μ について積分を行なうと河田の式が得られる。河田、近藤はこれらの式を用いて流線を計算している。

4. 非線型プロペラ理論

プロペラと直進翼の自由渦による誘導速度の大きさを比較すると、縦横比と幾何学的迎角が同程度の場合でも、前者の方が遙かに大きくなる場合が多い。したがってプロペラ理論では自由渦の位置が誘導速度によって、翼の運動軌跡面上より変位するための影響を計算に取り入れることは、計算結果の精度を向上させるのにかなりの効果がある。自由渦の半径方向の縮小を考えると、理論を複雑にするばかりで、収益は少ないので、普通はこれを無視して、単に螺旋渦のピッチだけが変化を受けるものと仮定して理論を組立てる。以下ではこれを非線型プロペラ理論と呼ぶことにして、解析を行なう。

4.1. 速度ポテンシャル

速度ポテンシャルの原型としては(3.2.3)を用い、 h は V/Ω ではなく、渦の分布する螺旋面のピッチを表わすパラメータとみなす。自由渦のピッチは普通 Prandtl の提案にしたがって

$$\frac{h(r)}{r} = \tan \varepsilon_i = \frac{V + w_a}{\Omega r + w_t} \quad \dots\dots (4.1.1)$$

のようにとる。 ε_i は流体力学的ピッチ角と呼ばれる。したがって自由渦螺旋面のピッチは半径方向に一定でないのが一般である。束縛渦だけを別に翼弦と同じピッチの螺旋面上におく場合もあるが^{12,21)}、ここでは自由渦と同じ螺旋面上におくことにする。 $h(r)$ の値は逐次近似によって求める。

線型理論の場合と同じように、

$$\begin{aligned} \tau' &= \theta' + x'/h', & \sigma' &= \theta' - x'/h', \\ \tan \varepsilon_i &= h'/r' = 1/\mu' \quad \dots\dots (4.1.2) \end{aligned}$$

と書くことにする。以下では h が r の関数のとき、 h および h' はそれぞれ、 $h' = h(r')$ 、 $h = h(r)$ を意味するものと定める。

(3.2.2)を参照すると、同じように、

$$\begin{aligned} ds' &= (r' d\theta' \sec \varepsilon_i + dx' \operatorname{cosec} \varepsilon_i)/2 \\ &= r' \sec \varepsilon_i \cdot (d\theta' + dx'/h)/2 \\ &= \sqrt{h'^2 + r'^2} d\tau'/2 = h' \sqrt{1 + \mu'^2} d\tau'/2 \\ &\quad \dots\dots (4.1.3) \end{aligned}$$

である。

(3.2.1)の $\partial/\partial \mathbf{n}''$ を近似的に、 r' における動径および螺旋への法線とみなすと、これの演算は(3.1.7)と同形になる。(3.2.3)の s'' と s' の積分順序を交換し、(4.1.3)によって s'' の積分を(4.1.2)で定義する τ' の積分に変えると、(3.2.1)と同形の速度ポテンシャル

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma h' \sqrt{1 + \mu'^2} ds' \\ &\times \int_{\tau'}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i''} \frac{1}{R} d\mathbf{T}' \quad \dots\dots (4.1.4) \end{aligned}$$

が得られる。ここに、

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i''} = -\cos \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial x'} + \sin \varepsilon_i \frac{\partial}{r' \partial \theta'} \quad \dots\dots (4.1.5)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{h' \sqrt{1 + \mu'^2}} \left\{ \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma'} \right. \\ &\quad \left. - \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \tau'} \right\} \quad \dots\dots (4.1.6) \end{aligned}$$

である。

線型理論の場合にならって、

$$\tau = \theta + x/h', \quad \sigma = \theta - x/h', \quad \mu_1 = r/h' \quad \dots\dots (4.1.7)$$

と置き、 $1/R$ を(3.1.8)で表わして、(4.1.4)の \mathbf{T}' に関する積分を行なうと、

$$\Phi = \Phi_I + \Phi_{II} \quad \dots\dots (4.1.8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{II} = & \frac{l}{4\pi^2} \iint \frac{\gamma}{h'} dS' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu' \lambda - lk / \mu'}{\lambda + lk} \\ & \times e^{i/2(\lambda + lk)(r - r') - i/2(\lambda - lk)(\sigma - \sigma')} \\ & \times I_{lk}(|\lambda| \mu_{<}) K_{lk}(|\lambda| \mu_{>}) d\lambda \quad \dots\dots (4.1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_I = & \frac{l^2}{2\pi} \iint \frac{\gamma}{h'} dS' \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \\ & \times I_{lk}(lk \mu_{<}) K_{lk}(lk \mu_{>}) \sin lk(\sigma - \sigma') \\ & \dots\dots (4.1.10) \end{aligned}$$

のように書かれる。ここに $\mu_{>}$, $\mu_{<}$ はそれぞれ μ' , μ_1 の内、大なる方および小なる方を意味する。(3.1.15) の公式を用いて $\tau \rightarrow \infty$ における Φ_{II} を求めると、それは Φ_I に等しくなるので、無限後方の速度ポテンシャルは、

$$\Phi_{\infty} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Phi_{II} + \Phi_I = 2\Phi_I \quad \dots\dots (4.1.11)$$

となる。

(4.1.9), (4.1.10) などは線型理論の (3.1.13), (3.1.14) と同形に見えるが、内容はかなり異なるもので、その理由は伴流プロペラの項において詳しく述べる。

μ_1 , σ は r' の関数であるから、無限後方の流場には螺旋移動を行なったとき、流場を不変に保つような螺旋は存在しない。したがって (4.1.10) は (3.10.5) の微分方程式を満足しない。

4.2. 境界条件

境界条件式には (3.3.2) を用いる。 Φ を Φ_I と Φ_{II} とに分け、(3.3.4) などを参照すると、

$$\begin{aligned} (\Omega r + w_i) \frac{\partial f}{r \partial \theta} - (V + w_a) &= \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} - \frac{\partial f}{r \partial \theta} \frac{\partial \Phi_{II}}{r \partial \theta} \\ &= -\frac{1}{\cos \varepsilon_0} \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n_0} \quad \dots\dots (4.2.1) \end{aligned}$$

となる。(4.1.1) より、

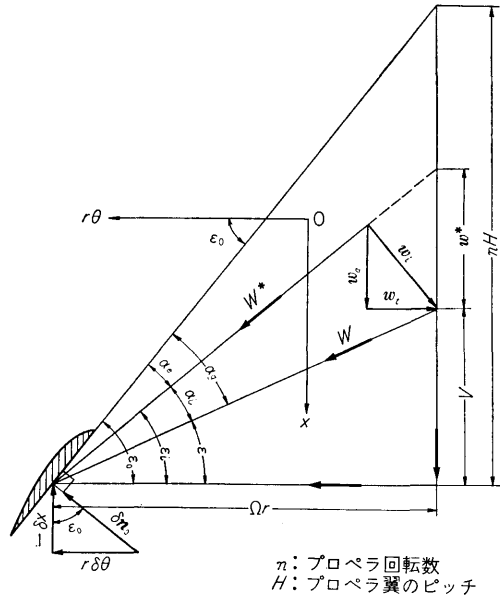
$$\left. \begin{aligned} \cos \varepsilon_i &= (\Omega r + w_i) / W^*, \\ \sin \varepsilon_i &= (V + w_a) / W^* \\ W^* &= \sqrt{(V + w_a)^2 + (\Omega r + w_i)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.2.2)$$

であるから、(4.2.1) の両辺に $\cos \varepsilon_0 / W^*$ を乗じて整理すると、

$$\sin(\varepsilon_0 - \varepsilon_i) = -\frac{1}{W^*} \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n_0} \quad \dots\dots (4.2.3)$$

が得られる。近似的に、

注：図 7 の矢印は現実の流れの方向を示すもので、 w_i , w_t の正の方向は図の矢印とは逆になる。 w^* は矢印の方向を正と仮定する。



n : プロペラ回転数
 H : プロペラ翼のピッチ

図 7

$$\left. \begin{aligned} \sin(\varepsilon_0 - \varepsilon_i) &\doteq \varepsilon_0 - \varepsilon_i, \\ \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n_0} &\doteq \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n_i} \\ \varepsilon_i - \varepsilon_0 &= -\frac{w_i}{W^*} = -\frac{1}{W^*} \frac{\partial \Phi_I}{\partial n_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.2.4)$$

と置いても大差ないから、

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 - \varepsilon_i &= \varepsilon_0 - \varepsilon_i + \varepsilon_i - \varepsilon_0 \\ &= -\frac{1}{W^*} \left(\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n_i} + \frac{\partial \Phi_I}{\partial n_i} \right) \quad \dots\dots (4.2.5) \end{aligned}$$

と書かれる。これを線型理論の場合の式 (3.3.6) と比較するとほとんど変わらない。いずれも吹き上げとしては渦面に対する法線流速をとり、プロペラ翼素に対する流入速度は線型理論が W であるのに対し、非線型理論では W^* となっている。

4.3. 定ピッチ非線型理論

螺旋渦のピッチが一定でないとする、線型プロペラ理論に見られるような理論の簡潔さと一貫性が失なわれ、はなはだ繁雑なものとなる。このことは第5章の伴流プロペラ理論の中に見ることができる。螺旋渦のピッチを一定と仮定すると、非線型理論とはいっても、線型理論と展開式はほとんど変わりなく、線型理論の簡潔さはそのまま保存される。

螺旋渦のピッチは (4.1.1) に示した h の半方向の平均値をとり、

$$h = \frac{V + \overline{w_a}}{\Omega + \overline{w_i/r}} \quad \text{または} \quad h = \overline{r \tan(\varepsilon + \alpha_i)} \quad \dots\dots(4.3.1)$$

と仮定する。ただし $\overline{w_a}$, $\overline{w_i/r}$ はそれぞれ w_a , w_i/r の平均値を意味する。

このようにすると、4.1節で区別した h と h' は等しくなり、無限後方の流場は (3.10.5) の微分方程式を満足する。

境界条件として (4.2.5) の W^* に含まれる w_a , w_i/r の代りにその平均値を用いることにすると、循環分布 γ を求める積分方程式は線型理論の場合と同形になるし、また Munk の定理は成り立つ。したがって線型理論の場合に行なった解析の結果はそのまま非線型理論に適用することができる。

揚力分布密度と循環分布密度の関係は Kutta-Joukowski の定理を用いると、

$$\text{揚力分布密度: } \rho W^* \gamma \quad \dots\dots(4.3.2)$$

である。

プロペラが単位時間に流体に対してなす仕事 P は、

$$P = -l\rho \iint \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}_i} \Big|_{\sigma=\sigma'} W^* \gamma dS' \quad \dots(4.3.3)$$

である。これは線型理論の (3.6.19) に対応する式で

ある。

線型理論の場合と同様に (4.3.3) の中の Φ_{II} に関する項は消失する。 $\partial/\partial \mathbf{n}_i$ の演算に (4.1.5) を用いると、(4.3.3) は

$$\begin{aligned} P &= l\rho \iint (\Omega r + w_i) w_a \gamma dS' \\ &\quad - l\rho \iint (V + w_a) w_i \gamma dS' \\ &= l\rho \int_0^{r_0} (\Omega r + w_i) w_a \Gamma dr \\ &\quad - l\rho \int_0^{r_0} (V + w_a) w_i \Gamma dr \\ &= l\rho \Omega \int_0^{r_0} (V + w_a) \Gamma r dr \\ &\quad - l\rho V \int_0^{r_0} (\Omega r + w_i) \Gamma dr \quad \dots\dots(4.3.4) \end{aligned}$$

となるから、Kutta-Joukowski の定理を用いると、

$$P = \Omega Q - VS \quad \dots\dots(4.3.5)$$

となり、線型理論の場合と同様に P はプロペラのエネルギー損失を表わす。

要するに線型理論と非線型理論とでは、下表のように記号が変わっただけで、全体の表示式にはほとんど変化がない。

	線 型 理 論	非 線 型 理 論
翼素への流入速度	$W = \sqrt{V^2 + \Omega^2 r^2}$	$W^* = \sqrt{(V + \overline{w_a})^2 + r^2(\Omega + \overline{w_i/r})^2}$
法 線 微 分	$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = -\cos \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varepsilon \frac{\partial}{r \partial \theta}$	$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_i} = -\cos \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varepsilon_i \frac{\partial}{r \partial \theta}$
ピ ッ チ 角	$\frac{h}{r} = \tan \varepsilon = \frac{V}{\Omega r}$	$\frac{h}{r} = \tan \varepsilon_i = \frac{V + \overline{w_a}}{r(\Omega + \overline{w_i/r})}$
揚力分布密度	$\Pi = \rho W \gamma$	$\rho W^* \gamma$

4.4. 最適プロペラ

最適プロペラを求めることは実用上極めて重要なことであるから、プロペラ理論の研究の大半はこの問題に関連している。しかし最適プロペラの設計にプロペラ理論が有力な手段であるという実証は少ないようである。プロペラ理論は完全流体に関するものであるのに、実際のプロペラは粘性影響がかなりあるうえ、さらに複雑な船体伴流の中で作動するものであるから、理論を実際に近付けることはなかなかむづかしい。しかしプロペラ理論は最適プロペラ設計の一つの重要な拠り所であるし、また理論そのものとしても興味深

いものであるから、今後の発展が望まれるところである。

定ピッチ非線型理論における最適プロペラの計算法はプロペラを揚力面として取り扱うとか、翼厚の影響を考慮するとかの新しい試みはあるが、Betz, Goldstein, Kramer, Ginzler and Ludwig などの研究によって、現在その大綱はほぼ定まったものとなっている。以下にその概略を述べる。

最適プロペラの理論は、これを二つの段階に分けることができる。その一つはエネルギー損失極小の循環分布を求める「翼理論の第二境界値問題」である。他

の一つは上記問題で求められた循環分布をもち, shock free entry などの条件を満足するプロペラ翼の平面形, ピッチ分布などを求める「翼理論の第一境界値問題」である。

(1) プロペラ翼の第二境界値問題

この問題を具体的に述べると, 「プロペラの半径, 翼数, 作動状態および軸馬力が与えられたとき, 推力馬力が最大になる循環分布を見出すこと」である。これは (4.3.5) の右辺の第 1 項を一定に保ちながら, エネルギー損失 P を極小にすることであるから, 変分問題で周知のように, P を極小にする条件は, (4.3.4) により,

$$l\rho \int_{r_b}^{r_0} \{k\Omega r(V+w_a) - V(\Omega r+w_i)\} \delta\Gamma dr = 0 \quad \dots\dots(4.4.1)$$

から導かれる。ただし k は Lagrange の常数である。

$\delta\Gamma$ は任意にとることができるから, (4.4.1) の $\delta\Gamma$ の係数関数は 0 でなければならない。したがって常数 k は,

$$k = \frac{V(\Omega r+w_i)}{\Omega r(V+w_a)} = \frac{\tan \varepsilon}{\tan \varepsilon_i} \quad \dots(4.4.2)$$

となる。

図 7 を参照すると,

$$\frac{V+w_a}{\Omega r+w_i} = \frac{V+w^*}{\Omega r}$$

であるから, これを (4.4.2) に適用すると,

$$k = \frac{V}{V+w^*} \quad \text{または} \quad w^* = \frac{V(1-k)}{k} \quad \dots\dots(4.4.3)$$

が得られる。 k は常数であるから, エネルギー損失極小の場合, w^* は一定である。

非線型理論で仮に Munk の定理 II が成り立つものとする, エネルギー損失は (4.3.4) の右辺で与えられ, 上記の解析によって, エネルギー損失極小であるためには, 螺旋渦のピッチは半径方向に一定でなければならないことになる。このことから, 最適プロペラとして設計されたプロペラの軽荷重および中荷重状態に定ピッチ非線型理論を適用することは当を得たものというべきであろう。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial\Phi_\infty}{\partial n_i} \right|_{\sigma=\sigma'} &= 2w_i = -2w^* \cos \varepsilon_i \\ &= -\frac{2(1-k)}{k} \cdot V \cos \varepsilon_i \quad \dots\dots(4.4.4) \end{aligned}$$

であるから, 無限後方の流場を対照として考えると,

(248)

一定ピッチの自由渦の全螺旋面が剛体のように軸方向に一定速度 w^* で進行するとき生じる面に垂直な分速度に相当して, 吹き上げが分布される場合, エネルギー損失極小となる。これが Betz の条件である。

(4.4.4) の左辺に (4.1.6) を適用し, $2w^*h=1$ とおくと,

$$\left. \frac{\partial\Phi_\infty}{\partial\sigma} \right|_{\sigma=\sigma'} = -\frac{\mu^2}{1+\mu^2} \quad \dots\dots(4.4.5)$$

となる。

(4.4.5) を境界条件とする微分方程式 (3.10.5) の解を求めると, エネルギー損失極小の循環分布 Γ_i が得られる。この問題は Goldstein によってはじめて解かれた。

エネルギー損失極小の条件を満足する無限翼数プロペラの循環分布を Γ_∞ とすると,

$$\kappa = l\Gamma_i/\Gamma_\infty \quad \dots\dots(4.4.6)$$

により定義される κ を Goldstein function と呼んでいる。

Goldstein の解は h をパラメーターとするものであるが, 最適プロペラ的设计に当たって, 最初は h は未知量である。これを求めるのに便利な図表が Kramer によって考えられた。

(4.4.2) より,

$$k\Omega r(V+w_a)\Gamma_i = V(\Omega r+w_i)\Gamma_i$$

である。これの両辺を r で r_b より r_0 まで積分すると,

$$k\Omega Q = VS \quad \dots\dots(4.4.7)$$

であるから, k はエネルギー損失極小のプロペラの効率 η_i を意味する。したがって (4.4.2) は,

$$\begin{aligned} \eta_i = \lambda/\lambda_i = \lambda_0/\lambda_{0i}, \quad \lambda = \tan \varepsilon, \quad \lambda_i = \tan \varepsilon_i = 1/\mu, \\ \lambda_0 = \lambda r/r_0, \quad \lambda_{0i} = \lambda_i r/r_{0i} = 1/\mu_{0i} \quad \dots\dots(4.4.8) \end{aligned}$$

と書かれる。

ここで推力係数 C_T およびパワー係数 C_P をそれぞれ,

$$C_T = 8S/(\pi\rho V^2 D^2), \quad C_P = 8\Omega Q/(\pi\rho V^3 D^2) \quad \dots\dots(4.4.9)$$

のように定義すると, C_T, C_P は λ_0 と λ_{0i} の関数であるが, (4.4.8) の関係により, λ_0 と η_i の関数と考えるもよい。したがって Goldstein の解から, $C_T - \eta_i - \lambda_0, C_P - \eta_i - \lambda_0$ の関係を図表に表わすことができる。これが Kramer の図表である。

プロペラの作動状態および推力が与えられたとすると, Kramer の図表より η_i が求められ, (4.4.8) により λ_{0i} , (4.4.3) により w^* が定まる。

Goldstein function κ は $\lambda_0 i$ をパラメーターとして図表にされているので、直ちに κ の値を読みとることができる。無限翼数のときの循環分布 Γ_∞ は

$$\frac{\Gamma_\infty}{Vr_0} = 4\pi \cdot \frac{w^* \lambda_i \cdot (r/r_0)}{V \lambda_i^2 + 1} = \frac{4\pi w^* \mu^2}{V\mu_0 (1 + \mu^2)} \quad \dots\dots(4.4.10)$$

であるから、エネルギー損失極小の循環分布は、すでに読みとった κ と (4.4.6), (4.4.10) を用いると、簡単に求めることができる。

(2) プロペラ翼の第一境界値問題

プロペラの半径、翼数、作動状態、推力が与えられたときの最適プロペラの循環分布は、エネルギー損失極小の条件によって定まる。この循環分布に適合し、shock free entry の条件を充たす翼平面形、ピッチ分布、キャンパー分布を求めるのが、プロペラで普通遭遇する第一境界値問題である。

揚力線理論を用いると、その解答は簡単に得られるので、実用的に極めて都合である。

この問題を渦格子の方法によって解いている例が最近多くなっているが^{19,20)}、それらの研究はほとんどピッチ修正係数およびキャンパー修正係数のさらに正確な値を得ようとの目的によって進められている。

shock free entry の条件は (3.9.6) であるから、(3.9.8) のピッチ修正係数を既知とすると

$$\alpha_g = \alpha_i / k_1 \quad \dots\dots(4.4.11)$$

である。

$$\begin{aligned} \alpha_i &= -\frac{w_i}{W^*} = \frac{w^* \cos \varepsilon_i}{W^*} = \frac{V(1-\eta_i)}{W^* \sqrt{\lambda^2 + \eta_i^2}} \\ W^* &= (V - w_i \cos \varepsilon_i) \sqrt{1 + \mu^2} \\ &= (V + w^* \cos^2 \varepsilon_i) \sqrt{1 + \mu^2} \\ &= V \left\{ 1 + \frac{\eta_i(1-\eta_i)}{\lambda^2 + \eta_i^2} \right\} \frac{\sqrt{\lambda^2 + \eta_i^2}}{\lambda} = \frac{V}{\lambda} \frac{\lambda^2 + \eta_i}{\sqrt{\lambda^2 + \eta_i^2}} \end{aligned} \quad \dots\dots(4.4.12)$$

であるから、

$$\alpha_i = \frac{\lambda(1-\eta_i)}{\lambda^2 + \eta_i} = \frac{1-\eta_i}{\lambda + 1/\lambda_i} = \frac{\lambda_i - \lambda}{1 + \lambda\lambda_i} \quad \dots\dots(4.4.13)$$

のように表わされる。したがってピッチ分布は、

$$\alpha_g = \frac{1}{k_1} \frac{\lambda_i - \lambda}{1 + \lambda\lambda_i} \quad \dots\dots(4.4.14)$$

によって計算することができる。

非線型理論では (3.9.7) の W を W^* で置換えたものであるから、(4.4.11) を満足する循環分布は、

$$\Gamma_i = 2\pi c^* W^* k_2 f_g / c^* \quad \dots\dots(4.4.15)$$

のように表わされる。エネルギー損失極小の循環分布 Γ_i は定まっているので、 k_2 を既知とすると、翼平面形を与えれば、キャンパー分布 f_g / c^* は (4.4.15) によって定まる。

以上のように揚力線理論を用いると、最適プロペラを簡単に求めることができるが、これらの理論がほとんど Munk の定理によって支えられていることを忘れてはならない。

4.5. 直進翼とプロペラの縦横比

Pistolesi⁹⁾ [IV, pp. 249] はプロペラ性能を翼素理論によって計算するときの有効迎角 α_e を推定するのに、これを直進翼の有効迎角と対応させ、両者が等しくなるような直進翼の縦横比を近似的に求め、これをプロペラの相当縦横比と呼んだ。

非線型理論の螺旋渦面は有効迎角に沿ったもので、そのピッチは未知量であるから、相当縦横比の考えを利用して、その第0近似を求めるのがよいであろう。

Pistolesi の相当縦横比は運動量定理を用いて求めたものであるから、翼数の影響が含まれていない。ここではプロペラの循環分布を Goldstein 分布と仮定し、Kutta-Joukowski の定理を用いて相当縦横比を求める⁵³⁾。

直進平板楕円翼の場合に

$$\frac{\alpha_e}{\alpha_g} = \frac{\alpha_g - \alpha_i}{\alpha_g} = \frac{1}{1 + \frac{dC_L}{d\alpha} \cdot \frac{1}{\pi A}}, \quad A = \frac{4b^2}{F} \quad \dots\dots(4.5.1)$$

の関係のあることが知られている⁵⁾ [II, pp. 169]。ただし F は翼面積で、 A は縦横比である。 $dC_L/d\alpha = 2\pi$ とすると、(4.5.1) より、

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_g} = \frac{1}{1 + A/2} \quad \dots\dots(4.5.2)$$

が得られる。

次にプロペラの循環分布を Goldstein 分布と仮定して、

$$\frac{\Gamma}{Vr_0} = \frac{w^* G(\mu)}{V} \quad \dots\dots(4.5.3)$$

のように表わす。このときの誘導迎角 α_i は、

$$\alpha_i = w^* \cos \varepsilon_i / W^* \quad \dots\dots(4.5.4)$$

である。(4.5.3), (4.5.4) より w^* を消去すると、

$$\Gamma = \alpha_i W^* r_0 G(\mu) / \cos \varepsilon_i \quad \dots\dots(4.5.5)$$

となる。Kutta-Joukowski の定理によると $\Gamma = c^* W^* C_L$ であるから、これを (4.5.5) に適用すると、

$$\frac{c^* \cos \varepsilon_i \cdot C_L}{r_0 G(\mu)} = \alpha_i \quad \dots\dots(4.5.6)$$

が得られる。この式の両辺に α_e を加え、両辺を α_e で除すと、

$$\frac{c^* \cos \varepsilon_i \cdot C_L}{r_0 G(\mu)} \frac{C_L}{\alpha_e} + 1 = \frac{\alpha_i}{\alpha_e} \quad \dots\dots(4.5.7)$$

が得られる。

プロペラのピッチ H を一定とし、(4.2.5) と図 7 を参照すると、

$$\alpha_i = -\frac{w}{W^*} = \frac{(nH - V) \cos \varepsilon_0}{W^*} \quad \dots(4.5.8)$$

である。 $\cos \varepsilon_0 \doteq \cos \varepsilon_i$ と置いても大差ないから、(4.5.4) と (4.5.8) とより、

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_e} = \frac{nH - V}{nH - V - w^*} = \text{const.} \quad \dots\dots(4.5.9)$$

となる。すなわち α_i/α_e は半径方向に一定であるし、また $C_L/\alpha_e = dC_L/d\alpha = 2\pi$ であるから、(4.5.7) より $c^* \cos \varepsilon_i/G(\mu) = \text{const.}$ でなければならない。それで、

$$c^* = \bar{c} G(\mu) / \cos \varepsilon_i, \quad \bar{c} = \text{const.} \quad \dots(4.5.10)$$

とおくと、(4.5.7) より、

$$\frac{\alpha_e}{\alpha_i} = \frac{1}{1 + \frac{dC_L}{d\alpha} \frac{\bar{c}}{r_0}} \quad \dots\dots(4.5.11)$$

が得られる。

(4.5.1) と (4.5.11) とはほとんど同形である。楕円翼と Goldstein 分布のプロペラで、 $A = r_0/(\pi \bar{c})$ のとき α_e/α_i が等しくなる。すなわち $r_0/(\pi \bar{c})$ がプロペラの相当縦横比である。これが定まれば、(4.5.2) によって第 0 近似の α_i/α_e を計算することができる。

(4.4.6), (4.4.10), (4.5.3) より、 $G(\mu)$ は

$$G(\mu) = \frac{4\pi}{l\mu_0} \frac{\kappa\mu^2}{1+\mu^2} \quad \dots\dots(4.5.12)$$

のように表わされる。これと (4.5.10) とより、

$$c^* = \bar{c} \cdot \frac{4\pi}{lr_0} \frac{\kappa r}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad \dots\dots(4.5.13)$$

となる。

展開面積比を a_a , ボス比を d_b で表わすと、プロペラ翼の幾何学的縦横比 A_g は、

$$A_g = \frac{(r_0 - r_b)^2}{\int_{r_b}^{r_0} c^* dr} = \frac{l(r_0 - r_b)^2}{a_a \pi r_0^2} = \frac{l}{\pi a_a} (1 - d_b)^2 \quad \dots\dots(4.5.14)$$

である。(4.5.14) の c^* に (4.5.13) の右辺を代入すると、

(250)

$$A_g = (r_0 - r_b)^2 \left\{ \frac{4\pi \bar{c}}{lr_0} \int_{r_b}^{r_0} \frac{\kappa r}{\sqrt{1+\mu^2}} dr \right\}$$

であるから、相当縦横比 $r_0/(\pi \bar{c})$ と幾何学的縦横比との関係は、

$$\frac{r_0}{\pi \bar{c}} = \frac{4/l}{(r_0 - r_b)^2} \int_{r_b}^{r_0} \frac{\kappa r}{\sqrt{1+\mu^2}} dr \cdot A_g \quad \dots\dots(4.5.15)$$

である。このように相当縦横比は翼数およびプロペラの作動状態によって変化する。

実際のプロペラの平面形は必ずしも (4.5.13) で与えられるものとは一致しないが、 A_g を (4.5.14) を用いてプロペラ平面形より求め、(4.5.15) によって $r_0/(\pi \bar{c})$ を計算するのがよいであろう。 κ を求める際の螺旋渦のピッチは線型理論の値をとって $h = V/\Omega$ とする。

4 翼プロペラで相当縦横比を $3/\pi$ とすると、 $V/(nD) = 0.8$ のとき、(4.5.13) で与えられる翼輪郭は Troost の B 型 4 翼、 $a_a = 0.4$ のプロペラの翼輪郭に極わめて近い形となる。このプロペラの幾何学的縦横比は 2.2 である。すなわち、プロペラが直進翼と幾何学的縦横比が同程度な場合であっても、相当縦横比はかなり小さいので、プロペラの誘導迎角は直進翼のものより遙かに大きい。このことから、プロペラに非線型理論の必要なことが理解できるであろう。

4.6. 揚力線による揚力面の逐次近似計算法

プロペラにおける「翼理論の第三境界値問題」は (3.3.13) の形の積分方程式を解くことである。すでに述べたようにこの方程式の性質は直進揚力面のそれに非常によく似ているので、直進揚力面で研究されてきた方法を応用することができる。

プロペラの性能を求めるだけならば、揚力線理論でもかなりよい結果の得られることが知られている。揚力線の計算法には、連続な循環分布を用いる守屋の方法¹⁾ (誘起係数の方法といわれる) と、階段状の循環分布を仮定する河田の方法²⁾ (渦格子法の源泉と考えられる) の二つの系列に分けることができる。この二つの方法はそれぞれに長所をもっていて、その優劣はつけ難い。しかし最近ではプロペラ性能ばかりでなく、プロペラ表面の圧力分布を求めることにも一部の関心が集まりつつあるので、揚力面の計算は次第に活発になるであろう。

非線型理論では螺旋渦のピッチを逐次近似計算法で求めなければならない。この逐次近似計算が避けられないならば、揚力面を揚力線の逐次近似計算で解く方

法⁵³⁾をとり、その逐次近似の途上で、螺旋渦のピッチも順次正確なものを導入するにすれば、計算の手数は半減する。以下に定ピッチ非線型理論による揚力面を揚力線によって逐次近似で解く方法の概略を解説する。

定ピッチ非線型理論の積分方程式は境界条件 (4.2.5) と線型理論の積分方程式 (3.3.13) を参照すると、

$$\varepsilon_0 - \varepsilon = \frac{1}{W^*} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma K\left(\frac{\tau - \tau'}{2}; \mu, \mu'\right) d\tau' \quad \dots\dots(4.6.1)$$

のように書かれる。この核関数 K は (3.3.14),

(3.4.9), (3.5.12) などでは表わされるものである。またピッチを表わすパラメーター h は (4.3.1) で与えられる。

(4.6.1) を Prandtl 揚力線の積分方程式の形に書き改めるのであるが、その方法は 3.8 節および 3.9 節の演算とまったく同じである。ただそこで W と書かれているものを W^* に書き改めればよい。すなわち、(4.6.1) は、

$$\tilde{\alpha}_g = \frac{1}{2\pi W^*} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi - \xi'} d\xi' + \alpha_i + u \quad \dots\dots(4.6.2)$$

のように表わされる。ただし、

$$\alpha_i = -\frac{l^3 \sqrt{1 + \mu^2}}{2\pi W^* h \mu} \int_{\mu_b}^{\mu_0} \Gamma(\mu') \left(\mu' + \frac{1}{\mu'}\right) d\mu' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 I_k(lk\mu<) K_k(lk\mu>) \quad \dots\dots(4.6.3)$$

$$\begin{aligned} u = & -\frac{1}{8\pi W^* \sqrt{1 + \mu^2}} \int_{\mu_b}^{\mu_0} \sqrt{1 + \mu'^2} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma d\tau' \sum_{m=0}^{l-1} \frac{\mu\mu'v + \sin v_m}{(v^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos v_m)^{3/2}} \\ & - \frac{3\sqrt{1 + \mu^2}}{8\pi W^*} \int_{\mu_b}^{\mu_0} (1 + \mu'^2)^{3/2} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma d\tau' \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^v \frac{t \sin t_m}{(t^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos t_m)^{5/2}} dt \\ & - \frac{1}{2\pi W^*} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi - \xi'} d\xi' \quad \dots\dots(4.6.4) \end{aligned}$$

である。

(4.6.2) を γ について解くと、(3.8.6) のように、

$$\frac{\gamma}{W^*} = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \oint_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \frac{\tilde{\alpha}_g - u}{\xi - \xi'} d\xi' - 2\alpha_i \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \quad \dots\dots(4.6.5)$$

と書かれる。この式の両辺を積分して全循環を求めると、

$$\frac{\Gamma}{2\pi c^* W^*} + \alpha_i = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} (\tilde{\alpha}_g - u) d\xi \quad \dots\dots(4.6.6)$$

と書かれる。

$$W^* = (V - w_i \cos \varepsilon_i) \sqrt{1 + \mu^2} = (V + W^* \alpha_i \cos \varepsilon_i) \sqrt{1 + \mu^2}$$

であるから、

$$W^* = \frac{V \sqrt{1 + \mu^2}}{1 - \sqrt{1 + \mu^2} \alpha_i \cos \varepsilon_i} = \frac{V}{\sin \varepsilon_i - \alpha_i \cos \varepsilon_i} \quad \dots\dots(4.6.7)$$

である。 W^* はこの式によって計算するのがよいであろう。 h は $w_a, w_i/r$ の平均値を用いて計算するのであるが、(4.3.1) の第 2 式を用いてもよい。

第 j 近似の $\alpha_i, u, \gamma, \Gamma, h$ などを $\alpha_i^{(j)}, u^{(j)}, \gamma^{(j)}, \Gamma^{(j)}, h^{(j)}$ で表わすことにする。

$\alpha_i^{(0)}$ は 4.5 節の方法によって計算し、それを用いて、 $W^{*(0)}, h^{(0)}$ を求める。

まず $u^{(1)} = 0$ とし、(4.6.6) の積分方程式を解くと $\alpha_i^{(1)}$ 、さらに $h^{(1)}, W^{*(1)}$ が求められる。それを

(4.6.5) に代入すると、 $\gamma^{(1)}$ が得られる。これが第 1 近似の循環分布密度である。 $\gamma^{(1)}, h^{(1)}, W^{*(1)}$ を (4.6.4) に代入すると $u^{(2)}$ が得られる。 $u^{(2)}, h^{(1)}, W^{*(1)}$ を用いて再び (4.6.6) を解くと、 $\alpha_i^{(2)}, h^{(2)}, W^{*(2)}$ が得られる。以下この計算を繰り返すと、 γ の正確な値を求めることができる。

以上の計算の中で u の計算が最も工夫を要する所であろう。もしこれの計算が正確にできなければ、逐次近似計算は発散して解が得られない結果に終わること

とがある。

(4.6.4) の u は

$$u = \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma J(v, \mu, \mu') d\tau' - \frac{1}{2\pi W^*} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi - \xi'} d\xi' \quad \dots (4.6.8)$$

のように表わされる。したがって第 $j+1$ 近似の u は

$$u^{(j+1)} = \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma^{(j)} J^{(j)}(v, \mu, \mu') d\tau' - \frac{1}{2\pi W^{*(j)}} \int_{-1}^1 \frac{\gamma^{(j)}}{\xi - \xi'} d\xi' \quad \dots (4.6.9)$$

である。これと同じ記法を (4.6.2) に用いると、

$$\tilde{\alpha}_g - \alpha_i^{(j)} - u^{(j)} = \frac{1}{2\pi W^{*(j)}} \int_{-1}^1 \frac{\gamma^{(j)}}{\xi - \xi'} d\xi' \quad \dots (4.6.10)$$

である。(4.6.9) と (4.6.10) とを辺々加えると、

$$\beta^{(j)} = u^{(j+1)} - u^{(j)} + \tilde{\alpha}_g - \alpha_i^{(j)} = \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma^{(j)} J^{(j)}(v, \mu, \mu') d\tau' \quad \dots (4.6.11)$$

と書かれる。これはまた、

$$u^{(j+1)} = u^{(j)} + \beta^{(j)} + \alpha_i^{(j)} - \tilde{\alpha}_g \quad \dots (4.6.12)$$

と書かれるから、 $\beta^{(j)}$ を計算すれば、 $u^{(j+1)}$ の値が求められる。

元の積分方程式 (4.6.1) を参照すると、

$$\beta^{(j)} + \alpha_i^{(j)} = \frac{1}{W^{*(j)}} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma^{(j)} K^{(j)}(v, \mu, \mu') d\tau' = \tilde{\alpha}_g^{(j)} \quad \dots (4.6.13)$$

であるから、(4.6.12) と (4.6.13) とより、

$$\Delta u^{(j)} = u^{(j+1)} - u^{(j)} = \tilde{\alpha}_g^{(j)} - \tilde{\alpha}_g \quad \dots (4.6.14)$$

の関係が得られる。これは重要な関係式である。すなわち $\Delta u^{(j)}$ を計算すると、吹き上げの誤差が確認できる。

$\beta(\xi, \mu)$ を ξ について Taylor 展開して、

$$\beta(\xi, \mu) = \beta(0, \mu) + \beta'(0, \mu)\xi + \frac{1}{2!} \beta''(0, \mu)\xi^2 + \dots \quad \dots (4.6.15)$$

と書き、 β' , β'' , ...などを計算して (4.6.15) によって $\beta(\xi, \mu)$ の値を求めるようにすると計算は容易である。

$$\beta' = \frac{\partial \beta}{\partial \xi} = \bar{\tau} \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \quad \dots (4.6.16)$$

であるから、(4.6.4) の μ の中に含まれる t に関する積分は (4.6.15) の右辺第 2 項以下の係数の計算には現われないので、数値計算には好都合である。

5. 伴流プロペラの理論

船のプロペラは普通船体と舵の間で作動しているものであるから、プロペラの性能は最終的にはそれらのものとの相互作用を含めて考える必要がある。模型船自航試験解析の目的も、一つにはそこにあるわけである。

船体、プロペラおよび舵は作動状態と scale が非常に異なるものであるから、それを一体のものとして解析することは、理論を繁雑にするばかりで、成果は少ないであろう。そのため相互作用の理論解析は普通、(1) プロペラが、船体に及ぼす影響、(2) プロペラが舵に及ぼす影響、(3) 船体および舵がプロペラに及ぼす影響の三つに分けて取り扱い、最終的にこの三つを総合する。この他、船体と舵の相互作用を考える必要があるが、これは主として舵の操縦性に関連して研究され、推進性能には関係の薄いものである。

(1) は Dickmann⁵⁴⁾ 以来幾つかの研究が公表されているが^{55, 56)}、そのほとんどがプロペラを吸込分布で置換える作動円盤の理論^{57, 5)} [IV, pp. 365] を応用したものである。(2) はプロペラは無限翼数と仮定し、舵についてはねじれた流れの中にある直進翼の理論として解析を行なうものである⁵⁸⁾。(3) は相互作用の三つの問題の中で最も重要なもので、伴流プロペラの理論といわれる。伴流プロペラ理論は、伴流をプロペラ軸に関して対称なものとして (これを定常伴流と呼ぶことにする)、そうでなく、プロペラの一回転で翼素への流入角の変わる不均一なものに分け (これを不均一伴流と呼ぶことにする)、前者については定常プロペラ理論、後者については非定常プロペラ理論を適用するものである。船体の推進性能に関係するのは主として定常伴流である。以下では定常伴流のプロペラ理論について述べる。

定常伴流プロペラ理論は Lerbs¹¹⁾ の研究が知られているが、それ以後の進展はほとんど見られない。

5.1. Fresenius の原理

Fresenius は船後プロペラの相互作用を巨視的に考察して重要な原理を導いた⁵⁹⁾。この原理にはなかなか味わい深い要素が含まれている。

まづ無限に広がる完全流体中を流線型物体がプロペラによって一定速度 V で推進されている場合を仮想する。完全流体中では物体には抵抗は働かないから、外部から抵抗 R を作用させる。プロペラ回転面内の平均流入速度を \bar{V}_1 、プロペラ推力を S とすると、エ

エネルギー定理により, $VR = \bar{V}_1 S$ であるから, 推進係数 $\eta' = VR/(\Omega Q)$ とプロペラ効率 $\eta_p' = \bar{V}_1 S/(\Omega Q)$ の間には,

$$\eta' = \eta_p' \quad \dots\dots(5.1.1)$$

の関係が成立つ。

次に無限に広がる粘性流体中を厚さのない平板で作られた格子が, それより少し離れた後方に取り付けられたプロペラによって一定速度 V で推進されている場合を仮想する。この格子には摩擦抵抗だけが働いて, 推力減少を無視することができる。格子の摩擦抵抗を R_f とすると, $R_f = S$ であるから,

$$\eta' = \frac{VR_f}{\Omega Q} = \frac{VS}{\Omega Q} = \frac{\bar{V}_1 S}{\Omega Q} \frac{1}{1-w_f} = \frac{\eta_p'}{1-w_f} \quad \dots\dots(5.1.2)$$

となる。ただし w_f は格子の摩擦伴流係数である。

$1/(1-w_f) > 1$ であるから, 推進係数 η' はプロペラ効率 η_p' より大きくなり, 推進器は摩擦伴流からエネルギーを吸収して, 結果的には効率を高めていることになる。これが Fresenius の原理である。これは一見不思議に見えるが, 風の中で車を引張るより押した方が楽であるという事実に似たところがある。この原理は w_f が大きい方がよいといっているのではなく, 摩擦伴流は利用すべきものであることを示唆しているのである。

摩擦伴流だけでなく, 波浪伴流, 舵の誘導速度についても, (5.1.2) と同じ関係が成立つ。船後プロペラではその効率を多少犠牲にしても, このエネルギーを利用することで良好な結果の得られる場合があるといわれる。

もし最適の伴流プロペラが得られれば, さらに推進性能の向上を計ることができるものと思われるが, 現在最適の伴流プロペラを求める的確な方法は見いだされていない。このためか, 伴流プロペラが普通型プロペラより優れているという実績は少ないようである。伴流プロペラ理論の発展が望まれるゆえである。

5.2. 境界条件

プロペラ回転面における軸方向および接線方向の流入速度を $V_1, \Omega_1 r$ で表わし,

$$V_1 = V(1-w(r)), \quad \Omega_1 r = \Omega r(1-\omega(r)) \quad \dots\dots(5.2.1)$$

と書く。ただし, $w(r), \omega(r)$ は伴流係数である。

定常伴流プロペラ理論の束縛渦および自由渦の分布する螺旋面のピッチは半径方向に一定ではなく,

$$\frac{h(r)}{r} = \tan \varepsilon_1 = \frac{V_1 + w_a}{\Omega_1 r + w_t} \quad \dots\dots(5.2.2)$$

で定まるものと仮定する。

速度ポテンシャルは (4.1.4) の表示式を用い, $\partial/\partial \mathbf{n}'$ は近似的に螺旋および動径に対する法線微分で表わされるものとして,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \doteq -\cos \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x'} + \sin \varepsilon_1 \frac{\partial}{r' \partial \theta'} \quad (5.2.3)$$

とする。

境界条件式は非線型理論の場合とほとんど同じ方法でその表示式が導かれる。すなわち (4.2.1) の V, Ω を V_1, Ω_1 で置換えたもので表わされる。(4.2.1) より (4.2.5) までの演算と同じようにすれば, 境界条件式として,

$$\varepsilon_0 - \varepsilon^* = -\frac{1}{W_1^*} \left(\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n_1} + \frac{\partial \Phi_I}{\partial n_1} \right) \quad (5.2.4)$$

が得られる。ただし,

$$\tan \varepsilon^* = \frac{V_1}{\Omega_1 r'}$$

$$W_1^* = \sqrt{(V_1 + w_a)^2 + (\Omega_1 r' + w_t)^2} \quad \dots\dots(5.2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_1} = -\cos \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varepsilon_1 \frac{\partial}{r \partial \theta} \quad (5.2.6)$$

である。

5.3. 吹上げの表示式と揚力線の仮定

伴流プロペラの速度ポテンシャルには (4.1.4) を用いればよいことは前節に述べたが, それを変換していくと, (4.1.9), (4.1.10) とまったく同形の表示式が得られる。ただし, その場合の h は (5.2.2) に定義するものである。それに (5.2.6) の演算を行なって吹上げの表示式を求めると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n_1} &= \frac{l}{4\pi^2 \sqrt{1+\mu^2}} \iint \frac{\gamma}{h'} dS' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu' \lambda - lk/\mu')(\mu \lambda/h' - lk/r)}{\lambda + lk} \\ &\times \sin \frac{1}{2} \{(\lambda + lk)(\tau - \tau') - (\lambda - lk)(\sigma - \sigma')\} \\ &\times I_{lk}(|\lambda| \mu <) K_{lk}(|\lambda| \mu >) d\lambda \quad \dots\dots(5.3.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_I}{\partial n_1} &= \frac{l^3}{2\pi \sqrt{1+\mu^2}} \iint \frac{\gamma}{h'^2} dS' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \\ &\times \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \left(\mu + \frac{h'}{r} \right) \\ &\times I_{lk}(lk \mu <) K_{lk}(lk \mu >) \cos lk(\sigma - \sigma') \quad \dots\dots(5.3.2) \end{aligned}$$

ただし, $\mu = r/h, \mu_1 = r/h', \mu' = r'/h'$ であり, $\mu >$,

$\mu <$ はそれぞれ μ_1, μ' の内大きい方および小さい方を意味する。

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n_1} = \frac{\partial \Phi_I}{\partial n_1} \quad \dots\dots(5.3.3)$$

であるから、

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} = 2 \frac{\partial \Phi_I}{\partial n_1} \quad \dots\dots(5.3.4)$$

となる。

(5.3.1) の変数 $\tau, \sigma, \tau', \sigma'$ を (4.1.2), (4.1.7) によって, x, θ, x', θ' にもどし, $\lambda/h' = \tilde{\lambda}$ によって積分変数 λ を $\tilde{\lambda}$ に変えると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n_1} &= \frac{l}{4\pi^2 \sqrt{1+\mu^2}} \iint h' r dS' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ &\times \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{(\mu' \tilde{\lambda} - lk/r')(\mu \tilde{\lambda} - lk/r)}{\tilde{\lambda} h' + lk} \\ &\times \sin\{\tilde{\lambda}(x-x') + lk(\theta-\theta')\} \\ &\times I_{k<}(\tilde{\lambda}|r<) K_{k<}(\tilde{\lambda}|r>) d\tilde{\lambda} \quad \dots\dots(5.3.5) \end{aligned}$$

と書かれる。ただし $r_>, r_<$ はそれぞれ r, r' の内大なる方および小なる方を意味する。

揚力要素を螺旋に沿って前後に移動して、プロペラの前進方向と直交する一平面上に集めて揚力線を作ったとき、その揚力線が一つの動径と重なるのみならず差し支えない場合が多い。このときは揚力線上で

$$\left. \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial n_1} \right|_{\substack{x=x' \\ \theta=\theta'}} = 0 \quad \dots\dots(5.3.6)$$

となることは (5.3.5) より明らかである。また揚力線上における Φ_I による吹き上げは、(5.3.2) より、

$$\begin{aligned} -W_1^* \alpha_i &= \left. \frac{\partial \Phi_I}{\partial n_1} \right|_{\sigma=\sigma'} \\ &= \frac{l^3}{2\pi \sqrt{1+\mu^2}} \int_{r_0}^{r_0} \frac{\Gamma}{h'^2} dr' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \\ &\times \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \left(\mu + \frac{h'}{r} \right) \\ &\times I_{k<}(lk\mu<) K_{k<}(lk\mu>) \quad \dots\dots(5.3.7) \end{aligned}$$

となる。

伴流プロペラの (1.1.1) に対応する式は非線型理論の場合と同様にすれば導くことができる。それは (4.6.6) と同形で

$$\frac{\Gamma}{2\pi c^* W_1^*} + \alpha_i = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} (\tilde{\alpha}_\sigma - u) d\xi \quad \dots\dots(5.3.8)$$

である。

(5.3.7) の α_i を (5.3.8) に代入すると Γ に関する積分方程式が得られる。これが伴流プロペラの揚力

線の積分方程式である。Lerbs¹¹⁾ の伴流プロペラの理論にこの積分方程式の計算法が述べられている。

4.6 節の方法を用いれば、(5.3.7), (5.3.8) の積分方程式を正確に解くことができるが、その計算はかなり手数のかかるものである。

5.4. エネルギー損失極小の条件

伴流プロペラ理論では Munk の定理が成り立たないため、「翼理論の第二境界値問題」を解くのに、均一流中のプロペラのような明快さは失なわれ、極わめて雑然としたものになる。最適伴流プロペラについては van Manen⁶⁰⁾ の研究があって、Lerbs もこれを利用しているが、その論旨には説得力に乏しいところが見受けられる。以下に述べるものは、この問題に対する一つの試みであって、その適否の検証は将来の課題である。

Kutta-Joukowski の定理を用いると、翼の揚力分布密度は $\rho W_1^* \gamma$ であるから、プロペラが単位時間に流体に対してなす仕事 P は、

$$\begin{aligned} P &= -l\rho \iint \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} W_1^* \gamma S' \\ &= -l\rho \iint \frac{\partial \Phi}{\partial n_1} \frac{h}{r} \sqrt{1+\mu^2} (\Omega_1 r + w) r dS' \quad \dots\dots(5.4.1) \end{aligned}$$

である。この式に (5.3.1), (5.3.2) の吹き上げを代入したとき、 $\partial \Phi_{II}/\partial n_1$ を含む項は積分順序を交換すると、符号は逆になるが、形まで変わるので 0 にならないし、また $\partial \Phi_I/\partial n_1$ については翼面上で $\sigma - \sigma' \neq 0$ のことが多いので、Munk の定理 I および II は成り立たない。したがって損失エネルギーは循環分布密度の半径方向ばかりでなく、翼弦方向の分布にも依存することになって、Prandtl の第一、第二の境界値問題を解くことが非常にむづかしくなってくる。

実際問題では $h(r)$ の変化は緩やかな場合が多いので、 P 中の $\partial \Phi_{II}/\partial n_1$ を含む項は他の項に比べて小さいと考えて省略し、また $\cos(\sigma - \sigma') \approx 1$ として、Munk の定理 I および II が成り立つとみなしても大過ないであろう。

また (5.3.4), (5.3.6) に示すように Munk の定理 III は近似的に成り立つが、 Φ_∞ は螺旋渦のピッチが半径方向に異なるので、この流場は (3.10.5) の微分方程式を満足しない。したがって Goldstein のようにしてエネルギー損失極小の循環分布を求めることができないうわけである。 Φ_∞ が近似的に (3.10.5) を満足するとしてしまったのでは、不均一ピッチを採用した

意味が失われてしまう。結局、Munk の定理Ⅲは不均一ピッチの螺旋渦を考える流場ではあまり役に立たない。

上述のように近似的に Munk の定理Ⅰ、Ⅱが成り立つものとする、その仮定は、

$$\left. \begin{aligned} \cos(\sigma - \sigma') &= 1 \\ P &= -l\rho \int \int \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} W^* r dS' \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.4.2)$$

と同等で、かつ揚力面線で置換えても損失エネルギーに関しては解析結果が変わりはない。

$$\begin{aligned} W_1^* \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} &= -(\Omega_1 r + w_t) w_a + (V_1 + w_a) w_t \\ &= -\Omega_1 r (V_1 + w_a) + V_1 (\Omega_1 r + w_t) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} P &= l\rho \int_{r_b}^{r_0} \Omega_1 r (V_1 + w_a) \Gamma dr \\ &\quad - l\rho \int_{r_b}^{r_0} V_1 (\Omega_1 r + w_t) \Gamma dr \end{aligned} \dots\dots(5.4.3)$$

となる。

半径 r の位置の微小部分 dr に作用するトルクおよび推力の成分をそれぞれ dQ , dS で表わすと、Kutta-Joukowski の定理により、

$$\left. \begin{aligned} dQ &= l\rho r (V_1 + w_a) \Gamma dr \\ dS &= l\rho (\Omega_1 r + w_t) \Gamma dr \end{aligned} \right\} \dots\dots(5.4.4)$$

である。したがって (5.4.3) の右辺第 1 項は軸動力、第 2 項は推力動力を表わし、 P は伴流プロペラのエネルギー損失を意味することになる。

$w(r)$ は小さいことが多いので、普通は省略している。ここでは省略しないが、半径方向に一定と仮定する。そのときは (5.4.3) の右辺第 1 項は伴流プロペラの軸馬力に対応するものである。

軸馬力を与えて P を極小にする条件は、非線型理論のところでも述べたのと同様にすれば求められる。その結果は k を常数とすると、

$$k = \frac{V_1 (\Omega_1 r + w_t)}{\Omega_1 r (V_1 + w_a)} = \frac{\tan \varepsilon^*}{\tan \varepsilon_1} \dots\dots(5.4.5)$$

である。よって、

$$k = \frac{V_1}{V_1 + w^*} \quad \text{すなわち} \quad w^* = \frac{(1-k)V_1}{k} \dots\dots(5.4.6)$$

となる。 w^* は V_1 に比例するので、半径方向に一定とならない。

以上から、エネルギー損失極小の条件として、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_1} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= -w^* \cos \varepsilon_1 = -\frac{(1-k)V_1}{k} \cos \varepsilon_1 \\ &\dots\dots(5.4.7) \end{aligned} \right\}$$

が得られる。

(5.4.7) の境界条件を (5.3.7) に適用すると、エネルギー損失極小の循環分布 Γ_i に関する積分方程式が得られる。これは非線型の積分方程式であるから、数値計算にはかなりの手数を要することであろう。

結 言

副題に示すように、プロペラ揚力線理論の有用さと、Munk の定理の重要性を説こうとするのが、本文執筆に当って、筆者が意図した課題の一つであったが、その目的はほぼ達せられたように考えている。

Munk の定理の適用できない伴流プロペラの理論が解析のなかなかむづかしいものであることが理解されるであろう。しかしこの理論は実用上極めて重要なものであるから、今後の発展が切望されることである。

本文の理論には翼厚および cavity flow に関する事項は一切含まれていない。それはこれらの影響が省略しても差支えないものと考えているわけではない。これらの問題に関しては稿を改めて執筆するつもりである。

筆者は昭和42年6月、造船協会主催の「船用プロペラに関するシンポジウム」に際し、「プロペラ理論概要」のテキストを執筆した。その後、このテキストが難解であるとのご注意を直接または間接に数人の方々からいただいたが、それは多分記載されている諸式導出の途中が省略されているためと想像した。それで本稿では運算の中間をなるべく省略しないようにし、それに最近筆者の行なった研究を併わせて、全編を統一した。その結果として、旧稿の伴流プロペラの項に誤りのあったことや、またプロペラ理論でこれまで見過されてきた新しい事項を見出すことができた。ここに旧稿を読まれた多くの方々にお詫びするとともに、ご注意を下された方々に感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) Moriya, T., "On the Induced Velocity and Characteristics of a Propeller", J. of the Faculty of Engineering, Tokyo Imperial University, Vol. XX, No. 7, 1933
- 2) Kawada, S., "Calculation of Induced Velocity by Helical Vortices and Its Application to

- Propeller Theory”, Rep. of Aero. Res. Inst., Tokyo Imperial University, Vol. XIV, 1939
- 3) Goldstein, S., “On the Vortex Theory of Screw Propellers”, Proc. of Roy. Soci. (London), Series A, Vol. 63, 1929
 - 4) Betz, A., “Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust”, Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Göttingen 1927
 - 5) Durand, W.F., “Aerodynamic Theory”, Springer, Berlin, 1935
 - 6) Kondo, K., “The Potential-theoretical Fundamentals of Aerodynamics concerning the Screw Propeller”, the Memo. of Faculty of Eng. Kyushu Imperial University, Vol. IX, No. 3, 1942
 - 7) 近藤一夫, “プロペラの誘導速度に対する空気圧縮性の影響について”, 日本航空学会誌, 第11巻, 第108, 109, 110号, 1944
 - 8) Prandtl, L., “Theorie des Flugzeugtragflügels im zusammendrückbaren Medium”, Luftfahrtforschung, Bd. 13, 1936
 - 9) Sparenberg, J. A., “Application of Lifting Surface Theory to Ship Screws”, Int. Shipb. Progress, 1960
 - 10) Ginzl, I., and Ludwig, H., “On the Theory of the Broad Bladed Propeller”, U. M. 3079, A.R.C. 11,067, 1944
 - 11) Lerbs, H. W., “Moderately Loaded Propellers with a Finite Number of Blades and an Arbitrary Distribution of Circulation”, SNAME, Vol. 60, 1952
 - 12) 山崎隆介, “螺旋推進器理論について”, 造船協会論文集, 第100号, 1956
 - 13) Weissinger, J., “The Lift Distribution of Swept-Back Wings”, NACA, T.M. No. 1120, 1947
 - 14) Lawrence, H. R., “The Lift Distribution on Low Aspect Ratio Wings at Subsonic Speeds”, J. of Aero. Sci., Vol. 18, No. 10, 1951
 - 15) Flax, A. H., “General Reverse Flow and Variational Theorems in Lifting-Surface Theory”, J. of Aero. Sci., Vol. 19, No. 6, 1952
 - 16) 中島康吉, “プロペラ揚力面理論とその応用”, 造船協会論文集, 第108号, 第109号, 1960
 - 17) 西山哲男, “羽根面積の大なる螺旋推進器の揚力面理論”, 造船協会論文集, 第109号, 1961
 - 18) 西山哲男, 笹島孝夫, “プロペラ揚力面における誘導曲り流れ修正”, 造船協会論文集, 第118号, 1965
 - 19) English, J. W., “The Application of a Simplified Lifting Surface Technique to the Design of Marine Propellers”, N. P. L., 1962
 - 20) Nelson, D.M., “Lifting-Surface Propeller Design Method for High-Speed Computers”, Naval Ordinance Test Station, Jan. 1964
 - 21) 菅井和夫, “プロペラ揚力面理論の新展開”, 造船協会論文集, 第119号, 第123号, 1968
 - 22) プラントル, ティーチェンス, “航空流体力学”, 下巻, コロナ社
 - 23) Allen, H. J., “General Theory of Airfoil Sections Having Arbitrary Shape or Pressure Distribution”, NACA, T.R., No. 883, 1945
 - 24) Kerwin, J. E. and Leopold, R., “Propeller Incidence Correction Due to Blade Thickness”, Journal of Ship Research, Vol. 7 No. 2, 1963
 - 25) Kramer, K.N., “Induzierte Wirkungsgrade von Best-Luft schrauben endlicher Blattzahl”, Luftfahrtforschung, Bd. 15, 1938
 - 26) Eckhardt, M.K. and Morgan, W.B., “A Propeller Design Method”, SNAME, 1955
 - 27) Tachmindji, A.J., “The Potential Problem of the Optimum Propeller with Finite Hub”, DTMB, Rept, 1051
 - 28) Tachmindji, A.J., “The Potential Problem of the Optimum Propeller with Finite Number of Blades Operating in a Cylindrical Duct”, DTMB, Rept. 1228
 - 29) 藤原松三郎, “微分積分学”, 第1巻, 内田老鶴圃, 1941, pp. 538
 - 30) Lamb, H., “Hydrodynamics”
 - 31) Sears, W.R., “General Theory of High Speed Aerodynamics”, High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Vol. VI, Princeton, 1954, pp. 229
 - 32) Multhopp, H., “Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting Surface Theory)”, R & M, No. 2884, 1950
 - 33) Mangler, K.W. and Spencer, B. F. R., “Some Remarks on Multhopp’s Lifting-Surface Theory”, R & M, No. 2926, 1952
 - 34) Garner, H.C., “Accuracy of Downwash Evaluation by Multhopp’s Lifting-Surface Theory”, R & M, No. 3431, 1966
 - 35) Davies, D.E., “Calculation of Unsteady Generalized Airforces on a Thin Wing Oscillating Harmonically in Subsonic Flow”, R & M, No. 3409, 1963
 - 36) Formme, J. A., “Least-Squares Approach to Unsteady Kernel Function Aerodynamics”, AIAA Journal, Vol. 2, No. 7, 1964
 - 37) Revell, J.D. and Rodden, W.R., “Remarks on Numerical Solutions of the Unsteady Lifting Surface Problem”, AIAA Journal, Vol. 4, No. 1, 1966
 - 38) 花岡達郎, “揚力面の解法に関する考察 (特にFlaxの方法の理論的根拠について)”, 船研報告第5巻, 第3号, 1968
 - 39) Kinner, W., “Die kreisförmige Tragfläche auf

- potentialtheoretischer Grundlage”, Ing. Arch., Bd. 20, 1940
- 40) Krienes, K., “Die elliptische Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage”, ZAMM, Bd. 20, 1940
- 41) Schade, T., Theorie der schwingenden kreisförmigen Tragfläche auf potentialtheoretische Grundlage, I analytischer Teil”, Luftfahrtforschung, Bd. 17, 1940
- 42) Küssner, H.G., “General Method for Solving Problems of the Unsteady Lifting Surface Theory in the Subsonic Range”, J of Aero. Sci. Vol. 21, 1954.
- 43) 近藤次郎, “積分方程式とその応用”, コロナ社
- 44) Birnbaum, W., “Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie”, ZAMM, Bd. 3, 1923
- 45) Landahl, M.T., and Stark, V.J.E., “Numerical Lifting-Surface Theory—Problems and Progress”, AIAA 6th Aerospace Sciences Meeting, 1968, AIAA Journal, Vol. 6, No. 11, 1968
- 46) Blenk, H., “Der Eindecker als tragende Wirbelfläche”, ZAMM, Bd. 5, 1925
- 47) Multhopp, H., “Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln”, Luftfahrtforschung, Bd. 15, 1938
- 48) Gray, A. and Mathews, G.B., “A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics”
- 49) Hanaoka, T., “Hydrodynamics of an Oscillating Screw Propeller”, 4th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, Aug. 1962.
- 50) 谷一郎, “流体力学”, 上巻, 岩波書店
- 51) Lamb, H., “On Wave Resistance”, Roy. Soc. Proc. A, Vol. 111, 1926
- 52) van Manen, J.D. and Bakker, A.R., “Numerical Results of Sparenberg’s Lifting Surface Theory for Ship Screws”, 4th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, Aug. 1962
- 53) 花岡達郎, “部分空洞を生じた翼の三次元理論, その1”, 造船協会論文集, 第123号, 1968
- 54) Dickmann, H.E., “Schiffskörpersog, Wellenwiderstand eines Propellers and Wechselwirkung mit Schiffswellen”, Ing. Arch., Bd. 9, 1938
- 55) Nowacki, H., “Potentialtheoretische Strömungs- und Sogberechnungen für schiffsähnlicher Körper”, S.T.G. Bd. 57, 1963
- 56) 中武一明, “船体とプロペラの相互干渉について”, 西部造船会会報, 第34号, 第35号, 1968
- 57) Weinig, F., “Aerodynamik der Luftschraube”, Springer, 1940 pp. 354
- 58) 中西正治, 上田耕平, 山崎隆介, “プロペラと舵との干渉について”, 西部造船会会報, 第35号, 1968
- 59) Fresenius, R., “Das grundsätzliche Wesen der Wechselwirkung zwischen Schiffskörper und Propeller”, Schiffbau, Bd. 23, 1921
- 60) van Manen, J.D. and Troost, L., “The Design of Ship Screws of Optimum Diameter for an Unequal Velocity Field”, SNAME, Vol. 60, 1952