プロペラの基礎理論

(特に Munk の定理と揚力線理論について)

花 岡 達 郎*

Fundamental Theory of a Screw Propeller

(Especially on Munk's Theorem and Lifting-Line Theory)

By

Tatsuro Hanaoka

The purpose of the present paper is to give a fundamental theory of hydrodynamics concerning a screw propeller on the status of both potential and vortex theory.

Chapter 1 is a brief description regarding historical aspect of the recent development in propeller theory.

Chapter 2 is devoted to the theory of a wing with finite span. We have been made familiar with propeller theory through wing theory. The description will be useful for us to understand the remainder of this paper.

In this paper the propeller theory consists of three parts. The first deals with the fundamentals of the theory in the frame of linearized theory in Chapter 3.

In Chapter 4 and 5, the theory previously discussed is developed to nonlinear theory and theory of wake-adapted propellers.

はしがき

プロペラ理論は翼の理論の中で最も複雑な形をしているものの一つであるが，さらに問題の性質上線型理論だけでは済まされないため，記述は繁雑なものとなり，時として理論の全容を理解するのにかなりの努力を必要とすることがある。

本文はプロペラ理論を直進翼の理論と比較対照しながら，Munk の定理と揚力線理論を中心にして，基本的事項を述べたもので，その目的はこれまで十分に吟味されないまま利用されてきた部分を補い，基礎理論をできるだけ一貫した形で記述することにある。

最近は高速電子計算機が普及しているので，諸種の応用問題が計算される気運にあり，そのため，プロペラ理論は今までにも増して複雑なものが取り上げられるようになっている。それにもかかわらず，ここで，すでに論じつくされたかのごとく思われている Munk の定理と揚力線理論を中心に解析を試みたのは，単に回顧的な意味からではなく，理論の基礎を的確に捕え，将来の発展への基礎固めとしたいと考えたからである。

本文中に他の研究者の業績を紹介した部分がいくつか含まれているが，これらは理論の全般を理解するのに役立つであろう。

内　容

* 運動性能部

記　　号

x, y, z: 直交座標
x, r, θ: 円壔座標
（$(x, y, z), (x, r, \theta)$ は任意点の座標。$(x', y', z'), (x', r', \theta')$ は特異点分布の座標）

ρ: 流体密度
p: 流体圧力
$\boldsymbol{q}$: 攪乱流の速度ベクトル
ϕ: 加速度ポテンシャル
Φ: 速度ポテンシャル
Φ_∞: 無限後方の速度ポテンシャル
ϕ_u, ϕ_l: 翼上下面の加速度ポテンシャル（負圧側を ϕ_u とする）
Φ_u, Φ_l: 翼上下面の速度ポテンシャル
$\Pi=\rho(\phi_u-\phi_l)$: 揚力分布密度（線型理論）
$\delta \boldsymbol{n}$: 翼の運動軌跡面への法線素片（揚力の働く方向を正とする）
w: 吹上げ (upwash)
w_i: 翼の位置における自由渦の吹上げ（Prandtl 揚力線の場合）
$w_{i\infty}$: 無限後方の吹上げ
C_L: 翼型の揚力係数

直　進　翼

α_g: 翼弦の幾何学的迎角
α_{0g}: 零揚力角より測った幾何学的迎角
V: 前進速度
b: 半翼幅
l_1, l_2: 翼断面の前後縁の x 座標
$2c=l_2-l_1$: 翼弦長
$\gamma=\Pi/(\rho V)$: 循環分布密度
$\Gamma=\int_{l_1}^{l_2}\gamma dx$: 翼断面の全循環
$\alpha_i=-w_i/V$: 誘導迎角

プ ロ ペ ラ

V: 前進速度
Ω: 回転角速度
r_0: プロペラ半径
r_b: ボス半径
l: 翼数
s: 渦の分布する螺旋に沿って測った長さ
s_1, s_2: 翼の前後縁の s 座標
$2c=s_2-s_1$: 翼弦長
γ: 循環分布密度（線型理論の場合は $\Pi/(\rho W)$）
$\Gamma=\int_{s_1}^{s_2}\gamma ds$: 翼断面の全循環
$2\pi h$: 螺旋渦のピッチ（線型理論の場合は $h=V/\Omega$）
$\boldsymbol{\mu}', \boldsymbol{\mu}=\boldsymbol{\mu}'/\Omega$: Rayleigh の仮想摩擦係数

$W=\sqrt{V^2+\Omega^2r^2}$
$\sigma=\theta-x/h$
$\tau=\theta+x/h$
$\mu=r/h$
$\tan\varepsilon=V/(\Omega r)$
$w_a=\partial\Phi_I/\partial x|_{\sigma=\sigma'}$, 自由渦の軸方向誘導速度
$w_t=\partial\Phi_I/(r\partial\theta)|_{\sigma=\sigma'}$, 自由渦の接線方向誘導速度
$x=f(\theta, r)$ 翼素の平均矢高面の方程式
$\tan\varepsilon_0=\partial f/(r\partial\theta)$
$\tan\varepsilon_i=(V+w_a)/(\Omega r+w_t)$
$\tilde{\alpha}_g=\sin(\varepsilon_0-\varepsilon)\fallingdotseq\varepsilon_0-\varepsilon$

1. 序　　論

1.1. プロペラ理論の発展

直進翼とプロペラの流場の相違は単に渦の分布する

面が平面状であるか，または螺旋面状であるかというだけのことで，理論の内容としては類似する部分が多い。実際にプロペラ理論は直進翼の理論を model として発展してきたものであるから，この両者を対比しながら，発展の過程をたどることは，理論の内容を理解するのに少なからず役立つものと思う。

三次元の翼理論では翼を渦面で置換え，翼の流場を解くということは，流れが翼面に沿って流れるような循環分布を求めることである。直進翼についての Prandtl の揚力線理論は，翼を一本の渦で置換え，自由渦に関する渦定理と，(1) 流れは各翼断面内で二次元的である，(2) 翼の位置における自由渦による吹上げ w_i は，無限後方のそれの半分である，という二つの仮説をもとにして，翼形状と循環分布の関係を定める方程式を組み立てたもので，翼形状を与えて循環分布を求めたいときは，これは積分方程式を解く問題となる。

Kutta-Joukowski の定理と，Prandtl の仮説 (1) により，翼の各断面で

$$\rho V\Gamma=\frac{1}{2}\rho V^2\cdot 2cC_L=\rho V^2 c\frac{dC_L}{d\alpha}\cdot(\alpha_{0g}-\alpha_i) \qquad \cdots\cdots(1.1.1)$$

の関係が成り立つ。二次元薄翼理論によれば，$dC_L/d\alpha=2\pi$ であるが，実用的には $dC_L/d\alpha=2k\pi$ $(k<1)$ のように表わし，k の値は翼型試験の結果を参考にして定める。

(1.1.1) の α_i は仮説 (2) により，

$$\alpha_i=-\frac{1}{2}\frac{w_{i\infty}}{V}=\frac{1}{4\pi V}\int_{-b}^{b}\frac{d\Gamma/dy'}{y-y'}dy' \qquad \cdots\cdots(1.1.2)$$

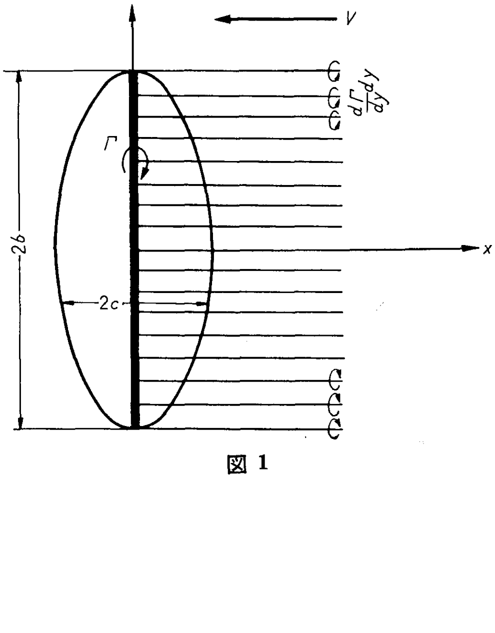

図 1

で与えられる。この表示式は Biot-Savart の法則を用いると容易に導かれる。

(1.1.2) を (1.1.1) に代入すると循環分布 Γ を求めるための Prandtl の積分方程式が得られる。この方程式によって計算した結果は，縦横比が 4 より大きい翼については実験値とよく一致することが知られている。

この理論は極めて簡明直截なもので，その考え方は初期のプロペラ渦理論にそのまま応用された。ただ，プロペラの場合は α_i の表示式として，螺旋状の自由渦の誘導速度によるものを用いねばならない。守屋[1] はプロペラの w_i として Biot-Savart の法則による誘導速度を螺旋面に沿って，翼の位置より無限後方まで積分したものを用い，一方河田[2] は Goldstein の理想プロペラの理論[3] の解析的手法を応用して，$w_{i\infty}$ の表示式をポテンシャル論的に求め，その半分を w_i として用いた。

理想プロペラ（エネルギー損失極小のプロペラ）の問題を渦理論によって解く方法を初めて考えたのは Betz[4] であった。この少し前 Munk[5] [II, pp. 132] は直進翼の誘導抵抗の極小問題に関連して 3 つの定理を導いた。Betz の理論はプロペラにおいても Munk の定理が成り立つものと仮定したもので，この考えは守屋，河田の理論にも踏襲され，また現在の最適プロペラ設計の基礎をなす仮定となっている。

近藤[6,7] は Prandtl の加速度ポテンシャル理論[8] の方法をプロペラに応用し，はじめて揚力面プロペラの流場を導き，Munk の定理Ⅲに相当するものを証明するなどして，理論を飛躍的に発展させたが，数値計算には守屋，河田と同じ Prandtl 揚力線の形を用いた。Sparenberg の揚力面理論[9] の着想は近藤の理論と同じものと考えてよい。

Ginzel and Ludwieg[10] は揚力面の自由渦による吹上げが翼面上で翼弦方向に一様でないことに着目し，揚力線に対する揚力面補正としてキャンバー修正の考えを導入して，揚力線理論を縦横比の比較的小さいプロペラにも適用できる方法を考えた。この研究はプロペラ理論に一紀元を画したもので，舶用プロペラの渦理論は，ここからはじまるといってもよい。

線型理論は自由渦が翼の運動軌跡面上に分布すると仮定するものであるが，現実の流れでは，自由渦は付近の誘導速度にしたがって流され，渦面は変形を受ける。そして揚力が大きく，また縦横比が小さいほど，その影響は著しい。この影響を翼理論に取り入れたも

のが非線型翼理論である。プロペラの渦系の誘導速度は直進翼のそれに比べるとかなり大きいので，中程度の荷重または大荷重のプロペラ理論としては非線型翼理論の方法を採用するのが望ましいが，それはなかなかむつかしい。中程度の荷重のプロペラ理論の場合は普通単に螺旋渦のピッチが誘導速度にしたがって変化すると仮定している[11,12]。この方法はまた伴流プロペラ理論に応用されたりしているが，この方面の研究はあまり進展を見せていない。一定ピッチ螺旋渦の非線型理論は，導かれる式の形が線型理論のものとあまり違いはなく，ピッチを求めるための逐次近似計算の手数を除けば，数値計算は線型理論の場合とほぼ同じように行なうことができる。

直進翼の Prandtl 揚力線理論では束縛渦の位置で境界条件を満足するものと定められているが，翼平面形に対する束縛渦の相対位置は規定されない。このため，Prandtl 揚力線は翼の後退角などの影響についてなんらの解答を与えてくれないという欠点がある。これを補うため，別種の揚力線理論が Weissinger[13] によって考えられた。平面翼の二次元流では，翼を一本の渦で置換え，それを前縁より 1/4 弦長点におくと，3/4 弦長点における誘導速度は，流れの方向が翼面の接線方向と一致するようになる。Weissinger の理論は二次元流のこの関係を三次元翼に適用したもので，Prandtl 揚力線に比べると，翼弦方向のひろがりの影響がある程度加味されているので，簡易揚力面理論ともいわれる。Lawrence[14] は weight function の方法を用い，揚力面の2変数積分方程式を1変数のものに変換し，翼の縦横比に応じて核を簡略化すると，Prandtl, Weissinger などの積分方程式が導かれることを示した。Lawrence の方法は Flax[15] によって揚力面を解く方法へと発展されている。Weissinger 揚力線および Lawrence の方法はプロペラ理論に広く応用されている[12,16,17]。

Prandtl 揚力線にしても Weissinger の理論にしても，翼を一本の束縛渦で置換えたものであるから，揚力の翼弦方向の分布の中に自由渦の局所的影響が含まれていない。これを改善するため，最近では翼を2本以上の束縛渦で置換えるいわゆる渦格子のプロペラ理論[18,19]，さらに揚力面を直接計算する方法などが考えられている[20,21]。

揚力面を計算するには計算技術上困難な点が多く，直進定常翼ですらも，問題なく計算できるという状態になっていない。その理由の主なところは，揚力面の積分方程式が複雑な形をした特異核をもつため，それを含む数値積分がなかなか精度よく行ない得ないというところにあるように思われる。この困難は渦格子の流体模型を用いることで，ある程度回避することができるが，電子計算機の利用が一般化してきたので，プロペラ揚力面の計算が次第に増えることであろう[21]。しかし技術的工学的立場から考えれば，揚力線プロペラ理論は極めて便利な方法であるから，今後とも消え去るものではなく，また本文中に述べるような逐次近似法によって揚力線理論を介して揚力面上の揚力分布を計算することもできる。

1.2. Prandtl の翼理論における三つの境界値問題

プロペラ理論の応用される問題の種類は広汎なものであるが，単独プロペラの性能に限って問題を考察するときは，それらを Prandtl の「翼理論における三つの境界値問題」[22] [pp. 179～180] にしたがって分類するのが最も合理的である。

Prandtl の三つの境界値問題とは

第一の問題，与えられた揚力分布を得るためには翼の平面形および迎角の分布をいかにすべきか。

第二の問題，全揚力と翼幅が定められた場合，誘導抵抗（エネルギー損失）が極小になる揚力分布を見出すこと。

第三の問題，翼平面形および迎角の分布が与えられた場合，揚力分布を求めること。

である。

「第三の問題」は複雑な積分方程式を取り扱うものであるから，最もむつかしいもので，翼およびプロペラ理論発展の中心にあった。これは与えられた作動状態におけるプロペラの性能を求めたいときに遭遇する問題で，これまで主として揚力線理論によって研究が進められてきた。キャビテーションの問題のように翼表面の圧力分布を正確に知りたいものに対して，プロペラ理論は薄翼理論であるから，たとえ揚力面を解いたとしても，そのままでは実際問題に適用できない。その対策として，相当キャンバーを求め，二次元ポテンシャル理論を応用するなどの方法が考えられる[21]。あるいは薄翼理論の渦分布に，翼厚に相当する吹き出しを加えて圧力分布を計算するとかなりよい結果の得られることが二次元理論で知られているので[23]，これを利用するのも一つの方法である。最適プロペラ設計のための迎角修正として翼厚を考慮する試みはあるが[24]，「第三の問題」では揚力面理論がようやく緒に

ついたところで，まだ翼厚を考えて圧力分布を計算するまでにはいたらない。

「第二の問題」は直進翼の場合では単純なもので，Munk 以後取り立てて研究を進める必要はなかったようであるが，プロペラでは実用的に重要ないわゆる理想プロペラの理論がこれに相当し，直進翼に比べると問題はむつかしく，かつ多様で，かなり沢山の研究が残されている。この問題は Betz[4] がその基本的な条件を与え，Goldstein[3] によって解かれた。最適プロペラの設計に便利なチャートは Kramer[25], Eckhardt and Morgan[26] らによって作られている。Goldstein と同じ方法でボスの径が有限な場合，円壔中のプロペラなどについて「第二の問題」を解いたものがある[27,28]。

最適プロペラの設計法に関する研究が最近では目立って多い。これは Eckhardt and Morgan らのチャートを利用して，「第一の問題」を解くことにほかならない。

直進翼理論とプロペラ理論の発展における著しい相違の一つは，飛行機翼の研究が「第三の問題」を中心としているのに対し，船用プロペラの研究は「第一の問題」に重点の置かれていることである。それは恐らく，飛行機と船舶に対する社会的要請の相違に基づくものであろう。

2. 直進翼の理論

ここでは三次元翼理論の中で，特にプロペラ理論と関係のある部分を選んで解析を行なう。

2.1. 加速度ポテンシャル理論の基礎

揚力系の渦理論は渦系の流体模型を介して理論が組み立てられるものであるから，まずその流体模型を理解するという繁雑な負担は免れない。特に非定常翼では，束縛渦，自由渦の分布状態が Prandtl の渦保存則[22] [pp. 151～152],[5] [pp. 280] に規制されて，時々刻々変わるものであるから，プロペラのように渦面の形状が複雑なものでは一般の理解に適しない。それに比べると，加速度ポテンシャルの方法は簡単な仮説と，明快な運算により理論が展開されるので，理論の体系を理解するのは容易である。ただ加速度ポテンシャルの方法は線型理論であるから，非線型的取り扱いを行なうには，導かれた式を渦系の表示式に変換してから，非線型要素を加味する必要がある。

まず加速度ポテショルの方法の基本的考え方から解説をはじめることにする。

完全流体の Euler の運動方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}+\boldsymbol{q}\cdot\nabla\boldsymbol{q}=-\frac{1}{\rho}\nabla p \qquad \cdots\cdots(2.1.1)$$

である。翼の迎角が小さく，また厚みも小さいときは，$\boldsymbol{q}$ は翼の前進速度に比べて小さいので，それの2次以上の項は省略しても大差ない。そのとき (2.1.1) は，

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}=\nabla\phi,\quad \phi=-\frac{p}{\rho} \qquad \cdots\cdots(2.1.2)$$

となる。すなわち加速度は圧力に比例するポテンシャル ϕ をもつ。この式を t で積分すると，

$$\boldsymbol{q}=\mathrm{grad}\left\{\int_{t_0}^{t}\phi dt+F(t)\right\} \qquad \cdots\cdots(2.1.3)$$

が得られる。これはベクトル $\boldsymbol{q}$ がスカラー量の勾配になっていることを示すもので，このスカラー量を速度ポテシャルとよび Φ で表わすことにする。

無限前時間，すなわち翼の無限前方で流体が静止していることを考慮すると，$t_0\to-\infty$ のとき $F(t)=\mathrm{const.}$ でなければならない。よって，

$$\Phi=\int_{-\infty}^{t}\phi dt,\quad \phi=\frac{\partial\Phi}{\partial t} \qquad \cdots\cdots(2.1.4)$$

のように表わされる。これは流体に対し，静止した座標系について表わした速度と加速度のポテンシャルの関係式である。

線型理論では rot $\boldsymbol{q}$ を含む $\boldsymbol{q}\cdot\nabla\boldsymbol{q}$ の項を省略しているので，必然的に速度ポテンシャルが導かれるが，非線型理論では速度ポテンシャルの存在を認めるには，流場が無渦であることを仮定する必要がある。

連続の方程式により Φ は Laplace の方程式を満足するものであるから，(2.1.4) の関係によって，ϕ も Laplace の方程式を満足しなければならない。

翼の速度場では，翼面のほかに自由渦面でも速度ポテンシャルは不連続になるが，加速度場は翼面以外のいたる所で連続であるから，まず加速度場のポテンシャルを求め，それを積分して速度場を求める方が，直接速度場を解析するより容易である。

2.2. 加速度ポテンシャル理論と渦理論

翼は x 軸の負の方向に一定速度 V で直進するものとする。

(2.1.4) を翼とともに前進する座標系に関するものに書き改めると，

$$\Phi(x,\ y,\ z)=\frac{1}{V}\int_{-\infty}^{x}\phi(X,\ y,\ z)dX,\ \phi=V\frac{\partial\Phi}{\partial x} \qquad \cdots\cdots(2.2.1)$$

となる。

翼の厚さを無視しても大差ないほど薄い翼のときは，圧力場は翼の平均矢高面の位置に圧力飛躍がある

ほかは，流体の全領域にわたって連続である。よって翼は加速度場の複源分布で表わされ，そのモーメントは Π/ρ である。

線型理論は翼の迎角の小さい場合に適用されるものであるから，複源分布の位置を，平均矢高面の位置から，それの運動軌跡面上への投影面上に移して考えても，それによる誤差は二次以下の微小量である。このように翼を表わす特異点を翼の運動軌跡面上に移して解析することは線型理論の一つの特徴で，もしこうしないと，流場に渦のほかに吹き出し分布が現われて，加速度ポテンシャルの方法は渦理論の方法と結果の表示式が一致しない。

翼の加速度ポテンシャルは，

$$\phi(x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi\rho}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\Pi(x',\ y')\frac{\partial}{\partial z'}\times\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\times dx'dy' \qquad \cdots\cdots(2.2.2)$$

のように表わされる。ただし揚力の働く方向は z 軸の正の方向である。

(2.2.2) を (2.2.1) の第1式に代入すると

$$\Phi(x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi\rho V}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\Pi(x',\ y')dx'dy'\int_{-\infty}^{x}\frac{\partial}{\partial z'}\times\frac{1}{\sqrt{(X-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dX \qquad \cdots\cdots(2.2.3)$$

が得られる。これが加速度ポテンシャルの方法によって求めた速度ポテンシャルであるが，次にこれを渦系の表示式に変換してみる。

(2.2.3) の積分変数 X を，これと $X-x=x'-X'$ の関係にある X' に変えると，

$$\Phi(x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi\rho V}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\Pi(x',\ y')dx'dy'\int_{x'}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z'}\times\frac{1}{\sqrt{(x-X')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dX' \qquad \cdots\cdots(2.2.4)$$

となる。$l_2<x$ では $\Pi=0$ であるから，x' に関する積分の上限を ∞ としても結果に変わりはない。x', X' についての二重積分に Dirichlet 変換[29] を適用して，積分順序を交換すると，

$$\Phi(x,\ y,\ z)=\frac{1}{4\pi\rho V}\int_{-b}^{b}dy'\int_{l_1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z'}\times\frac{1}{\sqrt{(x-X')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dX'\times\int_{l_1}^{X'}\Pi(x',\ y')dx' \qquad \cdots\cdots(2.2.5)$$

と書かれる。

(2.2.1) を参照すると，

$$\int_{l_1}^{X'}\frac{\Pi}{\rho V}dx'=\frac{1}{V}\int_{l_1}^{X'}(\phi_u-\phi_l)dx'=\Phi_u-\Phi_l=\Gamma(X',\ y') \cdots(2.2.6)$$

である。(2.2.5) は翼の運動軌跡面上に循環が $\Gamma(X',\ y')$ の渦が分布しているときの速度ポテンシャルである[30] [pp. 211]。(2.2.6) は Kutta-Joukowski の定理を表わし，$X'<l_2$ では $\Gamma=\text{const.}$ であることがわかる。これが自由渦である。このように加速度ポテンシャルの方法により求めた速度ポテンシャルは渦系の表示式に変換することができる。

2.3. Munk の定理

(2.2.3) の積分変数 X を，これと $X^*=X-x'$ の関係にある X^* に変え，これの積分を $[0,\ x-x']$, $[-\infty,\ 0]$ の二つの区間に分けて

$$\Phi=\Phi_{\rm II}+\Phi_{\rm I} \qquad \cdots\cdots(2.3.1)$$

$$\Phi_{\rm II}=\frac{1}{V}\int_{0}^{x-x'}\phi dX^*=\frac{1}{4\pi\rho V}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\Pi(x',\ y')(z-z')(x-x')}{\{(y-y')^2+(z-z')^2\}\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}dx'dy' \qquad \cdots\cdots(2.3.2)$$

$$\Phi_{\rm I}=\frac{1}{V}\int_{-\infty}^{0}\phi dX^*=\frac{1}{4\pi}\int_{-b}^{b}\frac{\Gamma(y')\cdot(z-z')}{(y-y')^2+(z-z')^2}dy' \qquad \cdots\cdots(2.3.3)$$

のように表わす。ただし $\Gamma(y')$ は (2.2.6) の $\Gamma(l_2,\ y')$ を意味する。

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}=1$$

であるから，

$$\lim_{x\to\infty}\Phi_{\rm II}=\Phi_{\rm I},\quad \Phi_\infty=2\Phi_{\rm I} \qquad \cdots\cdots(2.3.4)$$

となる。

(2.3.2) はまた，

$$\Phi_{\rm II}=\frac{1}{4\pi\rho V}\frac{\partial}{\partial y}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\Pi(x',\ y')\times\tan^{-1}\left\{\frac{y-y'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\times\frac{x-x'}{z-z'}\right\}dx'dy' \qquad \cdots\cdots(2.3.5)$$

と書かれる。さらに $\Gamma(y)$ が翼端が消失することを考慮して，(2.3.3) の y' について部分積分すると，

$$\Phi_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\Phi_{\infty}=\frac{1}{4\pi}\int_{-b}^{b}\frac{d\Gamma}{dy'}\tan^{-1}\frac{y-y'}{z-z'}dy' \quad \cdots\cdots(2.3.6)$$

となる。

(2.3.6) から，翼の無限後方では流れは翼の進行方向に垂直な平面内の二次元運動で，翼正面形の射影に沿い密度 $d\Gamma/dy$ の渦が分布していることがわかる。そしてこの速度ポテンシャルは $z-z'$ に関して奇関数となっている。

翼の縦横比が大きいときは，

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\fallingdotseq|y-y'| \quad \cdots\cdots(2.3.7)$$

と置いても誤差は少ない。このとき (2.3.5) は

$$\Phi_0=\frac{1}{2\pi\rho V}\int_{l_1}^{l_2}\Pi(x',y)\tan^{-1}\frac{x-x'}{z-z'}dx' \quad \cdots\cdots(2.3.8)$$

となる。これは二次元薄翼の速度ポテンシャルである。

(2.3.8)，(2.3.4) は 1.1 節に述べた Prandtl の (1) および (2) の仮説と同等のことを表わしているので，その2つの仮説は (2.3.7) に集約される。以上の解析から，Prandtl 揚力線の近似の程度を推察することができる。

線型理論では翼表面の境界条件は近似的に

$$\frac{\partial\hat{z}}{\partial x}=\frac{1}{V}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\bigg|_{z=z'}=\frac{w}{V} \quad \cdots\cdots(2.3.9)$$

とする。ただし $\hat{z}$ は平均矢高面の z 座標である。

翼の誘導抵抗 D_i は，(2.3.9) を用いると，

$$D_i=-\iint\Pi\frac{\partial\hat{z}}{\partial x}dxdy=\frac{-1}{V}\iint\Pi\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial z}\bigg|_{z=z'}dxdy+\frac{-1}{V}\iint\Pi\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}}{\partial z}\bigg|_{z=z'}dxdy \quad \cdots\cdots(2.3.10)$$

である。

$$\frac{1}{V}\iint\Pi\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial z}\bigg|_{z=z'}dxdy=\frac{1}{4\pi\rho V^2}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\Pi(x,y)\times dxdy\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\Pi(x',y')\cdot(x-x')}{(y-y')^2\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\times dx'dy' \quad \cdots\cdots(2.3.11)$$

であるから，右辺の二つの面積分の順序を交換し，x, x', y, y' の記号を交換すると，符号だけ異なり形のまったく等しい式となるから，これは0である。したがって D_i は (2.3.10) の右辺第2項だけで表わされることになる。すなわち，

$$D_i=-\rho\int_{-b}^{b}\Gamma\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}}{\partial z}\bigg|_{z=z'}dy \quad \cdots(2.3.12)$$

$$\frac{1}{V}\iint\Pi\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial z}\bigg|_{z=z'}dxdy=0 \quad \cdots(2.3.13)$$

である。

(2.3.4)，(2.3.12)，(2.3.13) は Munk の定理で

Ⅰ．揚力系の全誘導抵抗は揚力要素を前後に移動しても変わらない。

Ⅱ．2点の束縛渦が互に影響してひき起こす誘導抵抗は互に打ち消す。

Ⅲ．揚力要素を前後に移動して，揚力系の運動方向と直交する一平面上に集めたとき，その面内の吹き上げは無限後方の吹き上げの 1/2 である。

のようにいい表わされる。普通これを Munk の変位定理といっている。これは定常翼理論の基本となる重要定理であるが，最近では演算技法にのみとらわれ，この定理の意味するところを忘れがちであることは注意を要する。

Munk の定理は，「揚力面の束縛渦はこれを前後に移動しても，また循環分布密度を変えても，断面の全循環さえ変えなければ，誘導抵抗は不変である」ことを表わしている。したがって翼を一本または数本の束縛渦で置換えても誘導抵抗の計算に物理的不都合は生じない。すなわちエネルギー損失極小の翼を揚力線理論によって設計しても差し支えないわけである。

このようにして，仮説から導かれた Prandtl の揚力線理論は Munk の定理によって確固たる理論的根拠が与えられた。非定常翼やまた後に述べるプロペラの非線型理論のように Φ_∞ が，流場を自由渦面に沿って移動させたとき変化するものでは Munk の定理は成り立たない。このような場合について揚力線理論を組み立てるには，Munk の定理が Prandtl 揚力線に果たした役割を理解して，誤りのないように工夫しなければならない。

2.4. 揚力面理論

直進翼については揚力線理論はすでに過去のものとなり，現在では揚力面を計算するのが常識とされている。その理由は直進翼では誘導抵抗よりも揚力分布，モーメントなどに重点が置かれているためである。

揚力面を計算する場合，積分方程式の核関数の特異性をよく知っておかないと，数値計算のとき，思わぬ誤差に災されて，精度のよい結果の得られないことが

しばしばある。プロペラの積分方程式の核関数の特異性は直進翼のそれによく似たところがあるから，直進翼の核関数の特異性を熟知しておくことは，プロペラの計算に当って極わめて好都合なことである。

(2.3.2)，(2.3.3) を z で微分して，$z=z'$ と置くと，

$$w=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=z'}=\frac{1}{4\pi}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{(y-y')^2}\times\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}dx'dy'+\frac{1}{4\pi}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{(y-y')^2}dx'dy' \quad\cdots(2.4.1)$$

となる。これの y' に関する積分は発散するが，Hadamard の意味の有限部分[31]をとる。この発散積分の有限部分を計算する方法として Mangler[32] のものが知られている。すなわち，

$$w=\frac{1}{4\pi}\left[\left\{\int_{-b}^{y-\varepsilon}+\int_{y+\varepsilon}^{b}\right\}dy'\int_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{(y-y')^2}\times\left\{\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}+1\right\}dx'-\frac{2}{\varepsilon}\int_{l_1}^{l_2}\gamma(x',\ y)\{\mathrm{sgn}\,(x-x')+1\}\,dx'\right] \quad\cdots\cdots(2.4.2)$$

である。ここに ε は正の小さな数とする。

数値計算には (2.4.1) を

$$w=\frac{1}{4\pi}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma\cdot\bar{K}(x,\ x';\ y,\ y')}{(y-y')^2}dx'dy' \quad\cdots\cdots(2.4.3)$$

ただし，

$$\bar{K}=\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}+1\cdots(2.4.4)$$

のように表わし，$\gamma\bar{K}$ を近似的に最小二乗法の公式などで置換えて，x', y' の積分を行なうのが普通見られる解法である。

$\bar{K}$ は，

$$\bar{K}(x,\ x';\ y,\ y')|_{y=y'}=\begin{pmatrix}2, & x-x'>0\\ 1, & x-x'=0\\ 0, & x-x'<0\end{pmatrix} \quad (2.4.5)$$

のように $y=y'$, $x=x'$ のところで不連続になる。このような不連続関数の数値積分を精度よく行なうにはかなり工夫を要するもので，揚力面の計算のむつかしいところは主としてこの辺にある。

無次元量

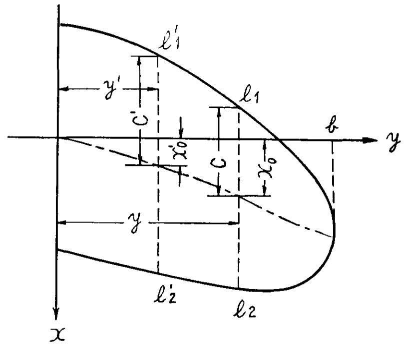

図 2

$$\left.\begin{aligned}&\xi'=(x'-x_0')/c',\ \ \xi_0'=x_0'/c',\\&x_0'=(l_1'+l_2')/2,\ \ c'=(l_2'-l_1')/2,\\&\xi=(x-x_0)/c,\ \ \xi_0=x_0/c,\\&x_0=(l_1+l_2)/2,\ \ c=(l_2-l_1)/2,\\&\eta=y/b,\ \ \eta'=y'/b\end{aligned}\right\}\quad(2.4.6)$$

を用いると (**図 2** 参照)，(2.4.1) は

$$-\frac{\partial\hat{z}}{\partial x}=-\frac{1}{4\pi V}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma c'}{b(\eta-\eta')^2}\times\left\{\frac{c(\xi+\xi_0)-c'(\xi'+\xi_0')}{\sqrt{\{c(\xi+\xi_0)-c'(\xi'+\xi_0')\}^2+b^2(\eta-\eta')^2}}+1\right\}d\xi'd\eta' \quad\cdots\cdots(2.4.7)$$

と書かれる。

二次元流の解より類推して，γ を

$$\frac{\gamma}{V}=\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\eta)\xi^n \quad\cdots\cdots(2.4.8)$$

のように表わすと，(2.4.7) の中の ξ' に関する積分は，

$$B_n(\xi,\ Y)=\int_{-1}^{1}\frac{\xi'^n(1-\xi')}{\sqrt{1-\xi'^2}}\times\frac{c(\xi+\xi_0)-c'(\xi'+\xi_0')}{\sqrt{\{c(\xi+\xi_0)-c'(\xi'+\xi_0')\}^2+Y^2}}d\xi' \quad\cdots\cdots(2.4.9)$$

ただし　$Y=b(\eta-\eta')$

の形の積分の和で表わされる。これは楕円積分で，$\eta=\eta'$ に対数特異点をもつ。したがって (2.4.9) の和で表わした積分方程式の η' の被積分関数は $\eta=\eta'$ に 2 位の極と対数特異点をもつことになる。すなわち (2.4.5) に示した核関数のもつ不連続は，以上の運算で対数特異点に形を変えたわけで，数値計算に当って，これらの特異点を含む核関数をいかに処理するかが，揚力面の計算の一つの要点になっている。

対数特異点の計算法として Mangler and Spencer[33] のものがよく用いられる。最近の Garner の計算[34] に

よると，対数特異点について，特にこれにとらわれないで計算したものと，Mangler and Spencer の計算法を適用したものとでは，同じ精度を得るのに，前者では標点の数をかなり多くとらねばならないことが報告されている。

揚力面を解く方法としては現在，最適標点法[32,35]，Flax の方法[15]，最小二乗法の方法[36,37] の三つが代表的なものである[38]。揚力面の問題を加速度場におけるポテンシャルの境界値問題として，円盤および楕円盤揚力面が Kinner[39]，Krienes[40] および Schade[41] によって解かれている。これらの研究は揚力面理論の古典として永く残るものであろうし，また揚力面の数値解法の精度を確かめる一つの基準として尊重されるであろう。上記の理論を統合して記述したものに Küssner[42] の研究がある。

2.5. Lawrence の揚力線理論

Flax の理論[15] が示すように，もし翼幅方向の揚力分布ないしは全揚力だけが知りたいときは，揚力面を解かなくても，揚力線を計算するだけでほぼ目的が達せられる。揚力線理論を統一的に研究したのが Lawrence[14] である。

揚力面の積分方程式 (2.4.1) を収斂型の積分で表わすと

$$\frac{\partial \hat{z}}{\partial x}=\frac{-1}{4\pi V}\frac{\partial}{\partial y}\oint_{-b}^{b}\oint_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{y-y'}\times\left\{\frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}{x-x'}+1\right\}dx'dy' \quad \cdots\cdots(2.5.1)$$

である。

Lawrence はこの式の両辺に $\sqrt{l_2-x}/\sqrt{x-l_1}$ を乗じ，x で l_1 より l_2 まで積分して，2変数の積分方程式を1変数のものに近似表現した。これが Lawrence の weight function の方法である。その式で，近似的に

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\fallingdotseq|y-y'| \cdots(2.5.2)$$

のようにおくと，(1.1.1) と同じ Prandtl の揚力線の積分方程式が得られる。ただしその式では (1.1.1) の $dC_L/d\alpha$ を 2π にとった形となる。また近似的に

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}=\sqrt{c^2+(y-y')^2} \quad \cdots\cdots(2.5.3)$$

のようにおくと，Weissinger 揚力線の積分方程式が得られる。(2.5.2)，(2.5.3) を比較してみると，Weissinger 揚力線は翼弦方向の拡がりを幾分加味したものであることが理解できる。

このように Lawrence の理論は揚力線の近似の程度が明らかにされていることと，揚力面から単なる演算操作によって揚力線が導かれるところに近代性を感じとることができる。

2.6. Prandtl 揚力線の積分方程式

Prandtl 揚力線は束縛渦を x の位置に集めて，翼を一本の渦系で表わしたものであるが，こうすると，束縛渦の位置では $\partial\Phi_{II}/\partial z|_{x=x'}=0$ であるから，Φ_{II} による吹き上げは零となる。したがって速度ポテンシャルを直接 (2.3.9) の境界条件式に代入したのでは，束縛渦による吹き上げを理論に取り入れることができない。古典的の Prandtl 揚力線理論ではこの難点は二次元翼の関係式 (1.1.1) を導入することで解決されている。(1.1.1) は Prandtl 揚力線の象徴的表示式であって，プロペラ理論にも用いられたし，また後述の揚力面補正の考えもこの式を念頭において α_{0g} を補正するという方法がとられている。

Lawrence の方法よりももっと演繹的な方法によって Prandtl 揚力線の積分方程式を導くことができる。この方法は揚力線に対する揚力面補正を考えたり，また揚力線の解法を利用して揚力面を逐次近似的に解くのに役立つ。

(2.2.3) の X に関する積分は初等的に行うことができるが，プロペラの場合にはできない。X に関する積分が行なわれた後の形で考える方が理解しやすいのであるが，プロペラの場合に参考になるように積分を行なわないままの形で解析を進めることにする。

$$w=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\gamma dx'dy'\times\int_{-\infty}^{x}\frac{y-y'}{(X-x')^2\sqrt{(X-x')^2+(y-y')^2}}dX \quad \cdots\cdots(2.6.1)$$

である。(2.5.1) はこの式の X に関する積分を行なったものである。

(2.6.1) の $x=x'$ における特異性を分離して

$$w=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\gamma dx'dy'\int_{\varepsilon\,\mathrm{sgn}(x-x')}^{x-x'}\frac{\mathrm{sgn}(y-y')}{X^2}dX+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\gamma dx'dy'\int_{\varepsilon\,\mathrm{sgn}(x-x')}^{x-x'}\times\left\{\frac{y-y'}{X^2\sqrt{X^2+(y-y')^2}}-\frac{\mathrm{sgn}(y-y')}{X^2}\right\}dX+\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\gamma dx'dy'\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{y-y'}{X^2\sqrt{X^2+(y-y')^2}}dX \quad \cdots\cdots(2.6.2)$$

のように表わす。ε は正の非常に小さな数とする。このように ε を有限にとることは，(2.5.1) で Cauchy の主値をとることと同等である。

(2.5.2) の近似が成り立つものとすると，(2.6.2) の右辺第2項は消失する。第1項，第3項の X に関する積分と y に関する微分を行なうと，(2.6.2) は

$$-\frac{\partial\hat{z}}{\partial x}=\frac{1}{2\pi V}\oint_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{x-x'}dx'+\frac{1}{4\pi V}\int_{-b}^{b}\frac{d\Gamma/dy'}{y-y'}dy' \quad \cdots\cdots(2.6.3)$$

のように簡単な形に表わされる。右辺第2項は(1.1.2) の α_i である。ここで無次元量

$$\xi=(x-x_0)/c,\ \ c=(l_2-l_1)/2,\ \ x_0=(l_2+l_1)/2 \quad \cdots\cdots(2.6.4)$$

を用いると，(2.6.3) は

$$-\frac{\partial\hat{z}}{\partial x}-\alpha_i=\frac{1}{2\pi V}\oint_{-1}^{1}\frac{\gamma}{\xi-\xi'}d\xi' \quad (2.6.5)$$

と書かれる。

(2.6.5) を γ に関する積分方程式とみなし，Kutta の流出条件が充たされるものとして解を求めると[43) [pp. 212]

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{V}&=-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\frac{-\partial\hat{z}/\partial x-\alpha_i}{\xi-\xi'}d\xi'\\&=-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\frac{-\partial\hat{z}/\partial x}{\xi-\xi'}d\xi'\\&\quad-2\alpha_i\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \quad \cdots\cdots(2.6.6)\end{aligned}$$

である。この式の両辺を x で l_1 より l_2 まで積分すると

$$\frac{\Gamma}{V}=\frac{c}{V}\int_{-1}^{1}\gamma d\xi=2c\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\times\left(-\frac{\partial\hat{z}}{\partial x}\right)d\xi'-2\pi c\alpha_i \quad \cdots\cdots(2.6.7)$$

が得られる。α_i を (2.6.3) の右辺第2項の形にもどして表わすと

$$\frac{\Gamma}{2\pi cV}+\frac{1}{4\pi V}\int_{-b}^{b}\frac{d\Gamma/dy'}{y-y'}dy'=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\left(-\frac{\partial\hat{z}}{\partial x}\right)d\xi' \quad \cdots\cdots(2.6.8)$$

となる。右辺は薄翼理論によると，零揚力角から測った幾何学的迎角 α_{0g} であるから，(2.6.8) は (1.1.1)，(1.1.2) の積分方程式と一致する。このように Prandtl 揚力線の積分方程式は揚力面の積分方程式から演繹的に導くことができるので，揚力面に対する誤差を正確に評価できるという際立った特徴をもっている。

2.7. Weissinger 揚力線

Weissinger の揚力線理論は Prandtl 揚力線理論以後に最も広く利用されてきたもので，プロペラ理論でもこの方法を採用した例は数知れない。ここで Weissinger 理論の要点を簡単に述べる。

まず翼の二次元流の場合を考えることにすると，γ は，

$$\frac{\gamma}{V}=a_0\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}+a_1\sqrt{1-\xi^2}+a_2\xi\sqrt{1-\xi^2}+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots(2.7.1)$$

のように表わされる。この級数は Birnbaum[44) が二次元薄翼の積分方程式を数値的に解くに当ってはじめて用いたので，普通 Birnbaum 級数と呼ばれる。

二次元薄翼の積分方程式は (2.6.5) で $\alpha_i=0$ と置いた式である。(2.7.1) をその積分方程式に代入し，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-\xi'^2}(\xi-\xi')}=0\\&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\xi'^n}{\sqrt{1-\xi'^2}(\xi'-\xi)}d\xi'\\&\quad=b_{n-1}+b_{n-2}\xi+\cdots\cdots+b_1\xi^{n-2}\\&\quad+b_0\xi^{n-1}\\&b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi\\&\quad=\begin{cases}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots n} & (n:\ 偶数)\\0 & (n:\ 奇数)\end{cases}\\&b_0=1\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.7.2)$$

の公式[43) [pp. 209] を用いて ξ' に関する積分を行なうと，

$$-\frac{d\hat{z}}{dx}=\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2}\xi+\frac{a_2}{2}\left(-\frac{1}{2}+\xi^2\right)+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots(2.7.3)$$

となる。

次に (2.6.5) の γ が一点 ξ' に集中し，その強さが (2.7.1) を翼弦全体に積分したものであるとすると

$$-\frac{d\hat{z}}{dx}=\frac{1}{\xi-\xi'}\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\xi-\xi'}\frac{a_1}{4}+0+\cdots \quad (2.7.4)$$

である。

ξ を圧力中心位置にとるという考えを捨てて，形式的に $\xi=1/2$，$\xi'=-1/2$ とすると，(2.7.3) と (2.7.4) は第2項まで一致する。したがって Weissinger の 1/4〜3/4 弦長法は平板翼と円弧翼の場合に適用できることがわかる。

翼弦上の 1/4, 3/4 弦長点の x 座標を $x_{1/4}$, $x_{3/4}$ で表わすと，Weissinger 揚力線の積分方程式は，(2.5.1) より，

$$-\frac{\partial\hat{z}}{\partial x}\bigg|_{x=x_{3/4}}=\frac{1}{4\pi V}\frac{\partial}{\partial y}\oint_{-b}^{b}\frac{\Gamma}{y-y'}\times\frac{\sqrt{(x_{3/4}-x_{1/4})^2+(y-y')^2}}{x_{3/4}-x_{1/4}}dy'+\alpha_i \quad \cdots\cdots(2.7.5)$$

のように表わさる。矩形翼の場合には，

$$\sqrt{(x_{3/4}-x_{1/4})^2+(y-y')^2}=\sqrt{c^2+(y-y')^2}$$

であるから，Lawrence の weight function の方法による積分方程式と (2.7.5) とは (2.7.3) の右辺第2項までをとる限り同等となる。

普通に用いられる翼の平均矢高線の形状は円弧状より複雑なものは少ないし，また揚力面の誘導曲り流れも ξ の1次以上の項は小さいようであるから，Weissinger 揚力線によって揚力分布を計算すれば，かなりよい結果の得られることが想像できる。

Weissinger 揚力線は矩形翼の場合を除けば，一般には前節に述べた Prandtl 揚力線の場合のような演繹的な方法によってその積分方程式を導くことができない。

解の精度をよくするため，翼面をいくつかの区画に分割して，それに 1/4～3/4 弦長法を適用するいわゆる渦格子の方法がとられることがあるが，それよりは Multhopp の最適標点法[32,35]の方が解析的に洗練された理論というべきであろう。しかし数値計算の結果は大差ないようである[45]。

2.8. Prandtl 揚力線に対する揚力面補正

Prandtl 揚力線と揚力面とが同じ揚力分布をもつときの吹き上げ分布の相違をはじめて具体的に示したのは Blenk[46] である。プロペラ理論で Ginzel and Ludwieg[10] はこの相違をキャンバー修正係数と呼ばれるもので表わし，Prandtl 揚力線に揚力面補正を行なった。その考えの根底をなすものを以下に解説する。

2.6 節では (2.6.2) の右辺第2項を省略して揚力線理論を導いたが，これを揚力面補正項として取り上げる。それを $-Vu$ で表わすことにし，(2.6.2)の右辺第2項を整理すると，

$$u=\frac{-1}{4\pi V}\int_{-b}^{b}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{(y-y')^2}\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}\times dx'dy'-\frac{1}{2\pi V}\oint_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{x-x'}dx' \quad \cdots\cdots(2.8.1)$$

と書かれる。揚力面の積分方程式は (2.6.3) の右辺に u が加わったものであるから，

$$-\frac{\partial\hat{z}}{\partial x}=\frac{1}{2\pi V}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{x-x'}dx'+\alpha_i+u \quad (2.8.2)$$

のように表わされる。

u を既知と仮定し，2.6 節にならって，(2.8.2) より γ を求めると，

$$\frac{\gamma}{V}=-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\frac{-\partial\hat{z}/\partial x-u}{\xi-\xi'}d\xi'-2\alpha_i\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \quad \cdots\cdots(2.8.3)$$

となる。さらにこれから揚力線の積分方程式を求めると，

$$\frac{\Gamma}{2\pi cV}+\frac{1}{4\pi V}\int_{-b}^{b}\frac{d\Gamma/dy'}{y-y'}dy'=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\left(-\frac{\partial\hat{z}}{\partial x}-u\right)d\xi' \cdots\cdots(2.8.4)$$

となる。

u の第1近似を0として，(2.8.4) を解くと Γ および α_i が求められ，その α_i を (2.8.3) に代入すると第1近似の γ が得られる。その γ を用いると，(2.8.1) によって第2近似の u が得られる。その u を利用して (2.8.4), (2.8.3) を計算すると，第2近似の γ が得られる。以下この操作を繰り返せば，揚力面の解を求めることができる。

一般に $\partial\hat{z}/\partial x$, u は ξ の多項式で表わすことが可能である。簡単のため，ξ の一次の項で止めて，

$$-\frac{\partial\hat{z}}{\partial x}=\alpha_g+2f_g/c\cdot\xi,\quad u=\alpha_{2i}+2f_i/c\cdot\xi \quad \cdots\cdots(2.8.5)$$

と置き，これを (2.8.3) に代入し，(2.7.2) の公式を利用して ξ' に関する積分を行なうと，

$$\frac{\gamma}{V}=2(\alpha_g-\alpha_i-\alpha_{2i})\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}+\frac{4}{c}(f_g-f_i)\sqrt{1-\xi^2} \quad \cdots\cdots(2.8.6)$$

となる。この式の右辺第1項は翼前縁で無限大となるものであるから，shock free entry の条件は，

$$\alpha_g-\alpha_i-\alpha_{2i}=0 \quad \cdots\cdots(2.8.7)$$

である。

(2.8.6) を x について l_1 より l_2 まで積分すると，Γ として (1.1.1) と同形の表示式

$$\Gamma=2\pi cV(k_1\alpha_g-\alpha_i+k_2f_g/c) \cdots(2.8.8)$$

が得られる。ここに k_1, k_2 は

$$k_1=1-\alpha_{2i}/\alpha_g,\quad k_2=1-f_i/f_g \quad \cdots(2.8.9)$$

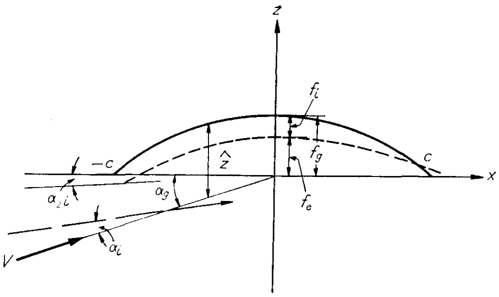

図 3

で表わされるもので，プロペラでピッチ修正係数，キャンバー修正係数といわれるものに相当する。(1.1.1) は (2.8.8) において $k_1=k_2=1$, $\alpha_{0g}=\alpha_g+f_g/c$, $2\pi=dC_L/d\alpha$ としたものである。

$f_e=f_g-f_i$, $\alpha_e=\alpha_g-\alpha_i-\alpha_{2i}$ で表わされる f_e, α_e をそれぞれ有効矢高 (effective camber) および有効迎角 (effective angle of attack) という。

この区分けにしたがって，(2.8.2) の吹き上げの表示式を分けると，

$$\left.\begin{aligned} &w=w_e+w_i\\ &-w/V=-\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2\pi V}\oint_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{x-x'}dx'\\ &+\alpha_i+u\\ &-w_e/V=\frac{1}{2\pi V}\oint_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{x-x'}dx'\\ &-w_i/V=\alpha_i+u \end{aligned}\right\}\quad(2.8.10)$$

である。

k_1, k_2 を求めるには揚力面を解かねばならないのであるが，数種の代表的な翼についてあらかじめ計算しておけば，個々の翼の計算には，それらを流用することで間に合う場合が多いであろう。k_1, k_2 を簡単に求めるには圧力分布を，

$$\gamma=a_0(\eta)\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}+a_1(\eta)\sqrt{1-\xi^2}$$

と仮定し，

$$k_1=1-u/\bar{\alpha}_g|_{\xi=0}=\left.\frac{w_e-V\alpha_i}{w}\right|_{\xi=0}\quad\cdots\cdots(2.8.11)$$

$$k_2=1-\left.\frac{\partial u/\partial\xi}{\partial\bar{\alpha}_g/\partial\xi}\right|_{\xi=0}=\left.\frac{\partial w_e/\partial\xi}{\partial w/\partial\xi}\right|_{\xi=0}\quad\cdots(2.8.12)$$

によって計算するのがよい。

k_1, k_2 の値を計算するには $a_0(\eta)$, $a_1(\eta)$ の翼幅方向の分布形がわかっていなければならい。したがってこの方法は「翼理論の第一境界値問題」を解くのに適している。翼が前後対称で，揚力分布密度が翼弦方向に前後対称のときは $k_1=1$, 揚力分布密度が前後反対称のときは $k_2=1$ である。このことはプロペラの場合にも成り立つ。

2.9. 揚力線の積分方程式の数値解法

Prandtl の揚力線の積分方程式 (2.6.8) は特定の平面形の翼に対して解析解が見出されていて[43) [pp. 220]] その方法は解析的に興味深いものがあるが，プロペラ揚力線の場合には応用できそうもない。数値解法としては Prandtl-Glauert の方法[43) [pp. 200]] が古くから知られているもので，プロペラ揚力線にもしばしば利用されているが[11)]，最近の揚力面の計算では Multhopp の数値解法[47)] を応用したものが多いので，この方法を簡単に紹介する。

Prandtl 揚力線の積分方程式 (2.6.8) を

$$\left.\begin{aligned} &G=\Gamma/(bV),\ \eta=y/b=\cos\varphi,\ \lambda=b/c\\ &\alpha_{0g}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\left(-\frac{\partial\hat{z}}{\partial x}\right)d\xi' \end{aligned}\right\}\quad(2.9.1)$$

の無次元量を用いて，無次元形に書くと，

$$\frac{G}{2\pi/\lambda}+\frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{dG/d\varphi'}{\cos\varphi'-\cos\varphi}d\varphi'=\alpha_{0g}\quad\cdots\cdots(2.9.2)$$

である。

最小二乗法の内挿式を用いて，

$$G(\varphi)=\frac{2}{m+1}\sum_{n=1}^{m}G_n\sum_{k=1}^{m}\sin k\varphi_n\sin k\varphi\quad\cdots\cdots(2.9.3)$$

と置く。ただし，$\varphi_n=n\pi/(m+1)$, $G_n=G(\varphi_n)$ である。

(2.9.3) を (2.9.2) に代入して，φ' に関する積分を行ない，k に関する総和を行って，$\varphi=\varphi_\nu=\nu\pi/(m+1)$ と置くと，(2.9.2) は

$$\frac{G_\nu}{\pi/\lambda_\nu}+b_{\nu\nu}G_\nu-\sum_{n=1}^{m}{}'b_{\nu n}G_n=2\alpha_{0g\nu}\quad(2.9.4)$$

と書かる。ただし $\lambda_\nu=\lambda(\varphi_\nu)$, $\alpha_{0g\nu}=\alpha_{0g}(\varphi_\nu)$ であり，$\sum'$ は $n=\nu$ を除いた n の総和を意味する。$b_{\nu\nu}$, $b_{\nu n}$ は Multhopp 行列といわれ，

$$\left.\begin{aligned} &b_{\nu\nu}=\frac{m+1}{4\sin\varphi_\nu}\\ &b_{\nu n}=\frac{1-(-1)^{n-\nu}}{2(m+1)}\frac{\sin\varphi_n}{(\cos\varphi_n-\cos\varphi_\nu)^2} \end{aligned}\right\}\cdots(2.9.5)$$

で与えられる。これの数値表は Multhopp によって作られている。

(2.9.4) の代数方程式を G_ν について解けば，揚力

分布が直接求められる。

Multhopp の方法は積分方程式を，揚力分布を未知数とする代数方程式に変換しているところにその特徴がある。

3.　線型プロペラ理論

線型プロペラ理論は線型の仮定を出発点として，全体が一貫した形で記述されるもので，その形は美しく，魅力に富んでいる。この完備した理論を基準として，非線型理論，伴流プロペラ理論などへの発展を計れば，理論を簡素に表現するのに役立つであろう。

現在のプロペラ理論は，その多くが線型理論の枠内に止まり，ほんのわずか非線型理論の領域に踏み込んでいるに過ぎない。

3.1.　速度ポテンシャル

プロペラによって撹乱される流場のポテンシャルを加速度ポテンシャルの方法によって求めてみる。プロペラは x 軸の負の向きに一定角速度 Ω で回転しながら，x 軸の負の方向に一定速度 V で直進しているものとする。

加速度ポテンシャル理論は線型理論であるから，軽荷重プロペラに適用される。翼を表わす特異点は，直進翼の場合と同様に，プロペラ翼の運動軌跡面上に分布させて解析を進めるが，それによる誤差は2次以下の微小量である。この特異点の分布面は基準面と呼ばれる。

Rayleigh にならって流速に比例する流体摩擦を仮想すると運算に便利なことが多い[30] [pp. 399]。これの摩擦係数 $\boldsymbol{\mu}'$ は物理的には意味のないもので，単に計算の便宜上挿入され，解析の途上適時 $\boldsymbol{\mu}'\to 0$ として差支えない。

この流場をプロペラ翼に固定した座標系について考えると，時間的変化はないから，速度と加速度のポテンシャルの間には，

$$\phi=V\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\Omega\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}+\boldsymbol{\mu}'\Phi=2\Omega\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}+\boldsymbol{\mu}'\Phi \qquad \cdots\cdots(3.1.1)$$

の関係がある。(3.1.1) を Φ に関する微分方程式とみなして，解けば

$$\Phi(\tau,\sigma,\mu)=\frac{1}{2\Omega}\int_{-\infty}^{\tau}\exp\left(-\frac{\boldsymbol{\mu}'}{2\Omega}(\tau-\boldsymbol{T})\right)\times\phi(\boldsymbol{T},\sigma,\mu)d\boldsymbol{T} \qquad \cdots\cdots(3.1.2)$$

である。(3.1.1)，(3.1.2) は直進翼の (2.2.1) に相当するものである。

加速度場の不連続面は翼面上だけにあるので，対称プロペラの場合，任意点の加速度ポテンシャルは

$$\phi(\tau,\sigma,\mu)=\frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^{l-1}\iint(\phi_u-\phi_l)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}'}\left(\frac{1}{R}\right)dS' \qquad \cdots\cdots(3.1.3)$$

ただし，

$$\begin{aligned}R&=\sqrt{(x-x')^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta'-2m\pi/l)}\\&=h\sqrt{(\tau-\tau'-\sigma+\sigma')^2/4+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos\{(\tau-\tau'+\sigma-\sigma')/2-2m\pi/l\}}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(3.1.4)$$

のように表わされる。(3.1.3) の面積分は一つの翼の基準面の片面全体について行なうものとする。

(3.1.3) を (3.1.2) に代入すると，

$$\Phi(\tau,\sigma,\mu)=\frac{1}{8\pi\rho\Omega}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\Pi dS'\times\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\mu(\tau-T)/2}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}'}\left(\frac{1}{R}\right)d\boldsymbol{T} \qquad \cdots(3.1.5)$$

と書かれる。これが定常プロペラの速度ポテンシャルの基礎式である。

図 5 を参照すると，

$$\left.\begin{aligned}\sin\varepsilon'&=V/W'=1/\sqrt{1+\mu'^2}\\\cos\varepsilon'&=\Omega r'/W'=\mu'/\sqrt{1+\mu'^2}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots(3.1.6)$$

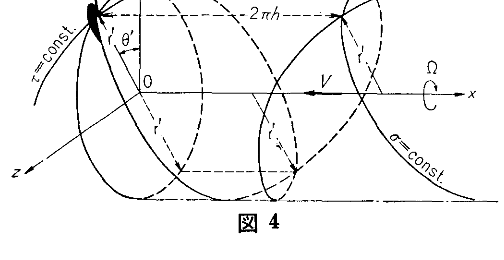

図 4

注) $\boldsymbol{\mu}'=0$ とおくと (3.1.1) は，

$$\frac{\phi}{V}=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{1}{h}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \qquad \cdots\cdots(\mathrm{A})$$

と書かれる。この式を Φ について解くと，

$$\Phi=\frac{1}{\Omega}\int_{-\infty}^{\theta}\phi\{x-h(\theta-\Theta),r,\Theta\}d\Theta \qquad \cdots(\mathrm{B})$$

が得られる。多くの論文で，速度ポテンシャルは (B) 式の形で表わされているが，(3.1.2) のように変数を τ にすると便利なことが多い。

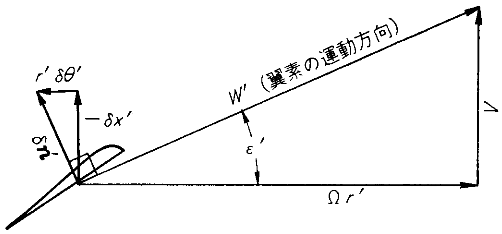

図 5

であるから，法線微分は

$$\frac{\partial}{\partial x'}=\frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial \tau'}-\frac{\partial}{\partial \sigma'}\right),$$

$$\frac{\partial}{r'\partial \theta'}=\frac{1}{h\mu'}\left(\frac{\partial}{\partial \tau'}+\frac{\partial}{\partial \sigma'}\right)$$

の関係を用いると，

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}'}=-\cos\varepsilon'\frac{\partial}{\partial x'}+\sin\varepsilon'\frac{\partial}{r'\partial\theta'}$$

$$=\frac{1}{h\sqrt{1+\mu'^2}}\left\{\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\sigma'}-\left(\mu'-\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\tau'}\right\} \qquad \cdots\cdots(3.1.7)$$

のように τ', σ' を通して行なう形に書き表わされる。

(3.1.5) の $1/R$ の代わりに Green 関数を用いると，流場の性質を理解するのに好都合なことが多い。プロペラ流場の解析には，Green 関数としては，

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\pi h}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{i/2(\lambda+n)(\tau-\tau')-i/2(\lambda-n)(\sigma-\sigma')-i2nm\pi/l}\times I_n(|\lambda|\mu)K_n(|\lambda|\mu')d\lambda,\ \mu'>\mu \quad (3.1.8)$$

が適しているようである[48] [pp. 103],[49]。ここに I_n, K_n は変形ベッセル関数である。これを (3.1.5) に代入して整理すると，

$$\Phi(\tau,\sigma,\mu)=\frac{1}{4\pi^2 h}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\gamma dS'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu'\lambda-n/\mu'}{\lambda+n-i\mu}\times e^{i/2(\lambda+n)(\tau-\tau')-i/2(\lambda-n)(\sigma-\sigma')-i2nm\pi/l}\times I_n(|\lambda|\mu_<)K_n(|\lambda|\mu_>)d\lambda \qquad \cdots\cdots(3.1.9)$$

となる。ただし $\mu_>$, $\mu_<$ はそれぞれ，μ, μ' のうち大なる方および小なる方を意味する。

$$\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2nm\pi/l}=\begin{pmatrix}0, & n\neq kl\\ l, & n=kl\end{pmatrix},\ (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\cdots) \qquad \cdots\cdots(3.1.10)$$

の公式を用いると，(3.1.9) は

$$\Phi(\tau,\sigma,\mu)=\frac{l}{4\pi^2 h}\iint\gamma dS'\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu'\lambda-lk/\mu'}{\lambda+lk-i\mu}\times e^{i/2(\lambda+lk)(\tau-\tau')-i/2(\lambda-lk)(\sigma-\sigma')}\times I_{lk}(|\lambda|\mu_<)K_{lk}(|\lambda|\mu_>)d\lambda \qquad \cdots\cdots(3.1.11)$$

となる。ここで $\mu\to+0$ とし，λ の積分について Poisson の特異積分を行なうと，(3.1.11) は

$$\Phi=\Phi_{\mathrm{I}}+\Phi_{\mathrm{II}} \qquad \cdots\cdots(3.1.12)$$

$$\Phi_{\mathrm{II}}=\frac{l}{4\pi^2 h}\iint\gamma dS'\sum_{k=-\infty}^{\infty}\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu'\lambda-lk/\mu'}{\lambda+lk}\times e^{i/2(\lambda+lk)(\tau-\tau')-i/2(\lambda-lk)(\sigma-\sigma')}\times I_{lk}(|\lambda|\mu_<)K_{lk}(|\lambda|\mu_>)d\lambda \qquad \cdots\cdots(3.1.13)$$

$$\Phi_{\mathrm{I}}=\frac{l^2}{2\pi h}\iint\gamma dS'\sum_{k=1}^{\infty}k(\mu'+1/\mu')\times I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>)\sin lk(\sigma-\sigma') \qquad \cdots\cdots(3.1.14)$$

となる。

$$\lim_{T\to+\infty}\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i/2T(\lambda+n)}}{\lambda+n}f(\lambda)d\lambda=i\pi f(-n) \qquad \cdots\cdots(3.1.15)$$

の公式を用いて，$\tau\to+\infty$ における Φ_{II} を求めると，それは Φ_{I} に等しくなる。したがって，無限後方の速度の速度ポテンシャル Φ_∞ は，

$$\Phi_\infty=\lim_{\tau\to+\infty}\Phi_{\mathrm{II}}+\Phi_{\mathrm{I}}=2\Phi_{\mathrm{I}} \cdots\cdots(3.1.16)$$

となる。

3.2. 渦理論

(3.1.5) は線型理論によって導かれたものである。これを自由渦の変形を考える非線型理論にまで拡張して利用するには，(3.1.5) を渦系の表示式に改めておく必要がある。

(3.1.5) でまず $\mu=0$ とおき，積分変数 $\boldsymbol{T}$ をこれと $\boldsymbol{T}-\tau'=\tau-\boldsymbol{T}'$ の関係にある $\boldsymbol{T}'$ に変えると，

$$\Phi(\tau,\sigma,\mu)=\frac{h}{8\pi}\sum_{m=0}^{l-1}\int_0^{r_0}dr'\int_{s_1}^{s_2}\gamma\sqrt{1+\mu'^2}ds'\times\int_{\tau'}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}''}\frac{1}{R}d\boldsymbol{T}' \qquad \cdots\cdots(3.2.1)$$

となる。ただし $\partial/\partial\boldsymbol{n}''$ は (3.1.7) の $\partial/\partial\tau'$ の代わりに $\partial/\partial\boldsymbol{T}'$ と置いた演算を意味し，s を螺旋に沿って測った長さとすると，s_1, s_2 は翼の前後縁の s 座標である。

s は τ と，

$$ds=dx\,\mathrm{cosec}\,\varepsilon=rd\theta\sec\varepsilon=\frac{W}{2\Omega}\left(d\theta+\frac{dx}{h}\right)=\frac{h}{2}\sqrt{1+\mu^2}d\tau \qquad \cdots\cdots(3.2.2)$$

の関係にある。これを利用すると，$\boldsymbol{T}'$ の積分を s'' の積分に変えることができる。その式で Dirichlet 変換を用いて s'', s' の積分順序を交換するか，あるいはまた s' について部分積分するかのいずれの方法をとってもよい。その結果として，

$$\Phi(\tau,\ \sigma,\ \mu)=\frac{1}{4\pi}\int_0^{r_0}dr'\int_{s_1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}''}\frac{1}{R}ds'\int_{s_1}^{s'}\gamma ds'' \qquad \cdots\cdots(3.2.3)$$

が得られる。(3.1.1)，(3.2.2) より，

$$\phi=W\partial\Phi/\partial s \qquad \cdots\cdots(3.2.4)$$

であるから，

$$\int_{s_1}^{s'}\gamma ds=\int_{s_1}^{s'}\frac{\phi_u-\phi_l}{W}ds=\Phi_u-\Phi_l=\Gamma(s',\ r) \qquad \cdots\cdots(3.2.5)$$

の関係を導くことができる。

したがって (3.2.3) はプロペラ翼の軌跡螺旋面上に循環 Γ の渦が分布していることを示し，また (3.2.5) は Kutta-Joukowski の定理を表わしている。Γ は $s>s_2$ では一定であるから，翼後縁より後方では渦糸はプロペラの運動軌跡と平行に並んでいることになる。これが自由渦である。ある点の循環は流速の線積分を翼弦に沿って行なっても，半径方向に行なっても等しいはずであるから，自由渦の循環分布密度は $d\Gamma/dr$ でなければならない。(3.2.1) は τ' の位置の束縛渦の循環が γds の揚力線を s_1 より s_2 まで螺旋面に沿って並らべたときの速度場を表わしている。したがって束縛渦の循環分布密度は γ であり，かつ自由渦は翼面上にも存在することがわかる。

螺旋渦のピッチは h の値によって定まるものであるから，非線型理論的取り扱いをするため，螺旋渦のピッチを変えたいときは，(3.2.2)，(3.2.3) の h を V/Ω とは直接には関係のない，単に螺旋渦のピッチを与えるパラメターとみなし，束縛渦の循環分布密度 γ も $\Pi/(\rho W)$ とは異なるものとして流場を表わし，揚力分布密度は Kutta-Joukowski の定理から求めるようにする。

プロペラの渦系を束縛渦，自由渦に分け，Biot-Savart の法則を用いて誘導速度を計算する方法をとった研究は多いが，(3.2.3) を微分して流速を求めた結果と変わりはない[50) [pp. 59～61]。束縛渦，自由渦に分ける表現は揚力面の渦格子による解法の中にしばしば見られる。

3.3. 境界条件と揚力面の積分方程式

プロペラの半径 r の位置の翼素の平均矢高面の x 座標が θ の関数として，

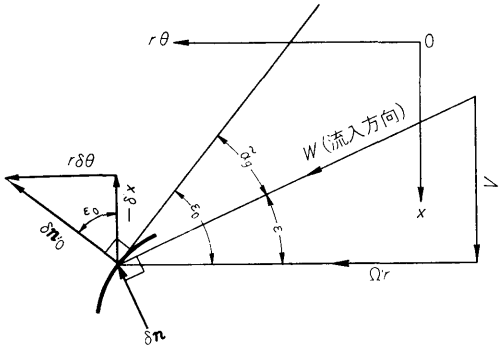

図 6

$$x=f(\theta,\ r) \qquad \cdots\cdots(3.3.1)$$

で与えられるものとすると，翼表面の境界条件は，

$$\frac{\partial f}{r\partial\theta}=\frac{V+\partial\Phi/\partial x}{\Omega r+\partial\Phi/(r\partial\theta)} \qquad \cdots\cdots(3.3.2)$$

である。

$$\partial f/(r\partial\theta)=\tan\varepsilon_0 \qquad \cdots\cdots(3.3.3)$$

であるから，

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}_0}&=-\cos\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varepsilon_0\frac{\partial}{r\partial\theta}\\&=-\cos\varepsilon_0\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial f}{r\partial\theta}\frac{\partial}{r\partial\theta}\right)\cdots(3.3.4)\end{aligned}$$

となる。(3.3.4) を (3.3.2) に適用すると，

$$\begin{aligned}\Omega r\cdot\frac{\partial f}{r\partial\theta}-V&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial f}{r\partial\theta}\frac{\partial\Phi}{r\partial\theta}\\&=-\frac{1}{\cos\varepsilon_0}\frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{n}_0}\end{aligned}$$

となる。この式の両辺に $\cos\varepsilon_0/W$ を乗じ，(3.1.6) を参照して整理すると，

$$\sin(\varepsilon_0-\varepsilon)=-\frac{1}{W}\frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{n}_0} \qquad \cdots\cdots(3.3.5)$$

となる。

線型理論では $\partial/\partial\boldsymbol{n}_0\fallingdotseq\partial/\partial\boldsymbol{n}$ としても大差ないから，(3.3.5) は近似的に，

$$\begin{aligned}\sin(\varepsilon_0-\varepsilon)&=-\frac{w}{W}=-\frac{1}{W}\frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{\sigma=\sigma'}\\&=-\frac{1}{W}\left[\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial \boldsymbol{n}}+\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}}{\partial \boldsymbol{n}}\right]_{\sigma=\sigma'} \qquad \cdots\cdots(3.3.6)\end{aligned}$$

のように表わされる。これが線型理論の境界条件式である。ただし $\partial/\partial\boldsymbol{n}$ は基準面に対する法線微分で，(3.1.7) の “$'$” を除いた演算である。

(3.1.13) より $\partial\Phi_{\mathrm{II}}/\partial\boldsymbol{n}|_{\sigma=\sigma'}$ を求めると

$$\left.\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial\boldsymbol{n}}\right|_{\sigma=\sigma'}=\frac{-il}{4\pi^2h^2\sqrt{1+\mu^2}}\iint\gamma dS'\sum_{k=-\infty}^{\infty}\times\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mu'\lambda-lk/\mu')(\mu\lambda-lk/\mu)}{\lambda+lk}\times e^{i/2(\lambda+lk)(\tau-\tau')}I_{lk}(|\lambda|\mu_<)K_{lk}(|\lambda|\mu_>)d\lambda \quad \cdots\cdots(3.3.7)$$

となる。ここで λ の代わりに $-\lambda$, k の代わりに $-k$ とおくと，全体の符号と $\tau-\tau'$ の係数の符号が逆になるだけで他は変わりない。それと (3.3.7) を加えて，1/2 を乗じたもので $\partial\Phi_{\mathrm{II}}/\partial\boldsymbol{n}$ を表わすと

$$\left.\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial\boldsymbol{n}}\right|_{\sigma=\sigma'}=\frac{l}{4\pi^2h^2\sqrt{1+\mu^2}}\iint\gamma dS'\sum_{k=-\infty}^{\infty}\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mu'\lambda-lk/\mu')(\mu\lambda-lk/\mu)}{\lambda+lk}\times\sin\frac{1}{2}(\lambda+lk)(\tau-\tau')I_{lk}(|\lambda|\mu_<)\times K_{lk}(|\lambda|\mu_>)d\lambda \quad \cdots\cdots(3.3.8)$$

となる。また (3.1.14) より $\partial\Phi_{\mathrm{I}}/\partial\boldsymbol{n}|_{\sigma=\sigma'}$ を求めると

$$\left.\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}}{\partial\boldsymbol{n}}\right|_{\sigma=\sigma'}=\frac{l^3}{2\pi h^2\sqrt{1+\mu^2}}\iint\gamma dS'\sum_{k=1}^{\infty}\times k^2(\mu'+1/\mu')(\mu+1/\mu)\times I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>) \quad \cdots\cdots(3.3.9)$$

である。

(3.2.2) を利用して基準面に沿う面積分を $\mu'\tau'$ の積分で表わすと，

$$\int_0^{\tau_0}\int_{s_1}^{s_2}dS'=\frac{h^2}{2}\int_0^{\mu_0}\sqrt{1+\mu'^2}\,d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau' \quad \cdots\cdots(3.3.10)$$

である。ただし τ_1, τ_2 は翼の前後縁の τ 座標とする。

したがって (3.3.8), (3.3.9) は,

$$\left.\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial\boldsymbol{n}}\right|_{\sigma=\sigma'}=\frac{l}{8\pi^2\sqrt{1+\mu^2}}\int_0^{\mu_0}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma\sqrt{1+\mu'^2}\,d\tau'\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mu'\lambda-lk/\mu')(\mu\lambda-lk/\mu)}{\lambda+lk}\times\sin\frac{1}{2}(\lambda+lk)(\tau-\tau')I_{lk}(|\lambda|\mu_<)K_{lk}(|\lambda|\mu_>)d\lambda \quad \cdots\cdots(3.3.11)$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}}{\partial\boldsymbol{n}}\right|_{\sigma=\sigma'}=\frac{l^3}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_0^{\mu_0}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma\sqrt{1+\mu'^2}\,d\tau'\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\mu'+1/\mu')(\mu+1/\mu)\times I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>) \quad \cdots\cdots(3.3.12)$$

と書かれる。

これらを (3.3.6) に代入すると

$$\sin(\varepsilon_0-\varepsilon)=\frac{1}{W}\int_0^{\mu_0}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma K\left(\frac{\tau-\tau'}{2};\mu,\ \mu'\right)d\tau' \quad \cdots\cdots(3.3.13)$$

の形の $\gamma(\mu,\ \tau)$ に関する積分方程式が得られる。これの核関数 K は,

$$K\left(\frac{\tau-\tau'}{2};\mu,\ \mu'\right)=-\frac{l\sqrt{1+\mu'^2}}{8\pi^2\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mu'\lambda-lk/\mu')(\mu\lambda-lk/\mu)}{\lambda+lk}\times\sin\frac{1}{2}(\lambda+lk)(\tau-\tau')I_{lk}(|\lambda|\mu_<)K_{lk}(|\lambda|\mu_>)d\lambda-\frac{l^3\sqrt{1+\mu'^2}}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\mu'+1/\mu')(\mu+1/\mu)I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>) \quad \cdots\cdots(3.3.14)$$

であって，$(1+\mu^2)K$ は μ, μ' に関して対称となる。

3.4. 核 関 数

核関数 (3.3.14) はそのままの形ではそれの数値を計算することがむつかしいので，実際の数値計算には速度ポテンシャル (3.1.5) を微分して吹き上げ w を求め，その式を利用するのがよい。

吹き上げの表示式の原形は

$$w=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right|_{\sigma=\sigma'}=\frac{h}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\gamma\sqrt{1+\mu'^2}\,dS'\int_{-\infty}^{\tau}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}'}\left(\frac{1}{R}\right)d\boldsymbol{T} \quad \cdots\cdots(3.4.1)$$

である。(3.1.7) を用いて法線微分の運算を行なうと,

$$w=\frac{\mu+1/\mu}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\gamma\sqrt{1+\mu'^2}\,dS'\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}'}\left(\frac{1}{R}\right)d\boldsymbol{T}\Big|_{\sigma=\sigma'}$$

$$-\frac{\mu-1/\mu}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\gamma\sqrt{1+\mu'^2}\,\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}'}\left(\frac{1}{R}\right)\bigg|_{\sigma=\sigma'}dS' \qquad\cdots\cdots(3.4.2)$$

であるが，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}'}\frac{1}{R}d\boldsymbol{T}\bigg|_{\sigma=\sigma'}=-\frac{\partial}{\partial\sigma}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{1}{h\sqrt{1+\mu'^2}}\left\{\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\sigma}-\left(\mu'-\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{T}}\right\}\frac{1}{R}d\boldsymbol{T}\bigg|_{\sigma=\sigma'}\\
&=-\frac{\mu'+1/\mu'}{h\sqrt{1+\mu'^2}}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\frac{1}{R}d\boldsymbol{T}\bigg|_{\sigma=\sigma'}+\frac{\mu'-1/\mu'}{h\sqrt{1+\mu'^2}}\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'} \qquad\cdots\cdots(3.4.3)
\end{aligned}$$

であるから，(3.4.2) は

$$\begin{aligned}
w=&\frac{\mu-1/\mu}{8\pi h\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\gamma\left\{-\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\sigma'}+\left(\mu'-\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\tau'}\right\}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'}dS'\\
&+\frac{\mu+1/\mu}{8\pi h\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\left(\mu'-\frac{1}{\mu'}\right)\gamma\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'}dS'\\
&-\frac{\mu+1/\mu}{8\pi h\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\gamma dS'\int_{-\infty}^{\tau}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'}d\boldsymbol{T}\\
=&\frac{1}{8\pi h\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\gamma\left\{\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)+\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\left(\mu'-\frac{1}{\mu'}\right)\right\}\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'}dS'\\
&-\frac{\mu-1/\mu}{8\pi h\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\left(\mu'-\frac{1}{\mu'}\right)\gamma\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'}dS'\\
&-\frac{\mu+1/\mu}{8\pi h\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\gamma dS'\int_{-\infty}^{\tau}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'}d\boldsymbol{T} \qquad\cdots\cdots(3.4.4)
\end{aligned}$$

となる。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'}=\frac{(\tau-\tau')/2-\mu\mu'\sin(\overline{\tau-\tau'}/2-2m\pi/l)}{2h\{(\tau-\tau')^2/4+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(\overline{\tau-\tau'}/2-2m\pi/l)\}^{3/2}}\\
&\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'}=-\frac{(\tau-\tau')/2+\mu\mu'\sin(\overline{\tau-\tau'}/2-2m\pi/l)}{2h\{(\tau-\tau')^2/4+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(\overline{\tau-\tau'}/2-2m\pi/l)\}^{3/2}}\\
&\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'}=\frac{3}{4h}\frac{\{-(\boldsymbol{T}-\tau')/2+\mu\mu'\sin(\overline{\boldsymbol{T}-\tau'}/2-2m\pi/l)\}^2}{\{(\boldsymbol{T}-\tau')^2/4+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(\overline{\boldsymbol{T}-\tau'}/2-2m\pi/l)\}^{5/2}}\\
&\qquad\qquad\qquad-\frac{1}{4h}\frac{1+\mu\mu'\cos(\overline{\boldsymbol{T}-\tau'}/2-2m\pi/l)}{\{(\boldsymbol{T}-\tau')^2/4+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(\overline{\boldsymbol{T}-\tau'}/2-2m\pi/l)\}^{3/2}}
\end{aligned}\right\} \qquad\cdots\cdots(3.4.5)$$

である。

$$(\tau-\tau')/2=v \qquad (\boldsymbol{T}-\tau')/2=t \qquad\cdots\cdots(3.4.6)$$

と書くと，

$$\begin{aligned}
w=&\frac{-1}{8\pi h^2\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\gamma\frac{\{\mu\mu'-1/(\mu\mu')\}\{-v+\mu\mu'\sin(v-2m\pi/l)\}}{\{v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(v-2m\pi/l)\}^{3/2}}dS'\\
&+\frac{\mu-1/\mu}{16\pi h^2\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\gamma\frac{(\mu'-1/\mu')\{v+\mu\mu'\sin(v-2m\pi/l)\}}{\{v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(v-2m\pi/l)\}^{3/2}}dS'\\
&-\frac{\mu+1/\mu}{16\pi h^2\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\gamma dS'\int_{-\infty}^{v}\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\left\{\frac{3\{-t+\mu\mu'\sin(t-2m\pi/l)\}^2}{\{t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(t-2m\pi/l)\}^{5/2}}\right.\\
&\left.-\frac{1+\mu\mu'\cos(t-2m\pi/l)}{\{t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(t-2m\pi/l)\}^{3/2}}\right\}dt \qquad\cdots\cdots(3.4.7)
\end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{v}\frac{1+\mu\mu'\cos(t-2m\pi/l)}{\{t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(t-2m\pi/l)\}^{3/2}}dt\\
&=\frac{v+\mu\mu'\sin(v-2m\pi/l)}{\{v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(v-2m\pi/l)\}^{3/2}}+\int_{-\infty}^{v}\frac{3\{t+\mu\mu'\sin(t-2m\pi/l)\}^2}{\{t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(t-2m\pi/l\}^{5/2}}dt
\end{aligned}$$

であるから，これを (3.4.7) に適用すると，

$$w=\frac{-1}{8\pi h^2\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\gamma\frac{\{\mu\mu'-1/(\mu\mu')\}\{-v+\mu\mu'\sin(v-2m\pi/l)\}}{\{v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(v-2m\pi/l)\}^{3/2}}dS'$$
$$+\frac{1}{8\pi h^2\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\gamma\frac{\{\mu\mu'+1/(\mu\mu')\}\{v+\mu\mu'\sin(v-2m\pi/l)\}}{\{v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(v-2m\pi/l)\}^{3/2}}dS'$$
$$+\frac{3(\mu+1/\mu)}{4\pi h^2\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\gamma dS'\int_{-\infty}^{v}\frac{(\mu'+1/\mu')t\mu\mu'\sin(t-2m\pi/l)}{\{t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(t-2m\pi/l)\}^{5/2}}dt$$

となる。さらに (3.3.10) によって基準面の面積分を μ', τ' の積分に改め，まとめて書くと，

$$w=\frac{1}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\int_0^{\mu_0}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma\sqrt{1+\mu'^2}\frac{\mu\mu'v+\sin(v-2m\pi/l)}{\{v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(v-2m\pi/l)\}^{3/2}}d\tau'$$
$$+\frac{3(1+\mu^2)}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\int_0^{\mu_0}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma(1+\mu'^2)^{3/2}d\tau'\int_{-\infty}^{v}\frac{t\sin(t-2m\pi/l)}{\{t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(t-2m\pi/l)\}^{5/2}}dt \quad \cdots\cdots(3.4.8)$$

のように整理された形になる。したがって (3.3.13) の積分方程式の核関数は，

$$K(v;\ \mu,\ \mu')=-\frac{\sqrt{1+\mu'^2}}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\frac{\mu\mu'v+\sin(v-2m\pi/l)}{\{v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(v-2m\pi/l)\}^{3/2}}$$
$$-\frac{3\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi}\sum_{m=0}^{l-1}\int_{-\infty}^{v}\frac{t\sin(t-2m\pi/l)}{\{t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos(t-2m\pi/l)\}^{5/2}}dt \quad \cdots\cdots(3.4.9)$$

のように表わされる。

(3.3.14) と (3.4.9) は同じもので，(3.3.14) から直接 (3.4.9) を導くこともできる。核関数の数値は (3.4.9) を数値積分して求めるのがよいであろう。(3.4.9) の K には $\mu=\mu'$ に2位の極のあることが定常翼の場合から類推されるので

$$K(v;\ \mu,\ \mu')=\frac{\overline{K}(v;\ \mu,\ \mu')}{(\mu-\mu')^2}\cdots(3.4.10)$$

のように置き，$\overline{K}(v;\ \mu,\ \mu')$ の数値表を作るようにするのが実用上便利である。$\overline{K}$ は翼数 l と $v;\ \mu,\ \mu'$ の関数で，プロペラの作動状態は μ, μ' の中に含まれ，表面には現われない。

3.5. 核関数の特異性

積分方程式 (3.3.13) は核関数が $\mu=\mu'$ に特異点をもつ特異積分方程式である。(3.3.13)の積分は発散積分で Hadamard の意味の有限部分をとるものであるが，数値積分を正確に行なうため，核関数の特異性を明らかにしておく必要がある。

(3.4.9) の m に関する総和の内，$m\neq0$ の項には特異性がないので，$\overline{K}$ の中の $m\neq0$ の項は $\mu=\mu'$ の近傍では非常に小さい。したがって，$\mu=\mu'$ の近傍では，

$$\overline{K}(v;\ \mu,\ \mu')\simeq-\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}}\frac{\mu\mu'v+\sin v}{(v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos v)^{3/2}}$$
$$-\frac{3(\mu-\mu')^2\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi}\int_{-\infty}^{v}\frac{t\sin t}{(t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos t)^{5/2}}dt \quad \cdots\cdots(3.5.1)$$

である。

t の小さな値に対して，

$$\frac{t\sin t}{(t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos t)^{5/2}}\simeq\frac{t\sin t}{\{t^2(1+\mu\mu')+(\mu-\mu')^2\}^{5/2}}$$

であるから，(3.5.1) を

$$\overline{K}(v;\ \mu,\ \mu')\simeq-\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}}\frac{\mu\mu'v+\sin v}{(v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos v)^{3/2}}$$
$$-\frac{3(\mu-\mu')^2\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi}\int_{-\infty}^{v}\frac{t\sin t}{\{t^2(1+\mu\mu')+(\mu-\mu')^2\}^{5/2}}dt$$

$$-\frac{3(\mu-\mu')^2\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi}\int_{-\infty}^{v}\left\{\frac{t\sin t}{(t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos t)^{5/2}}\right.$$

$$\left.-\frac{t\sin t}{\{t^2(1+\mu\mu')+(\mu-\mu')^2\}^{5/2}}\right\}dt \qquad \cdots\cdots(3.5.2)$$

と書くと，この式の右辺第3項の被積分関数は $\mu=\mu'$ に対して特異点をもたないので，$\mu=\mu'$ の近傍では第3項は非常に小さく，除外してよい。(3.5.2) の右辺第2項を部分積分すると，

$$\overline{K}(v;\ \mu,\ \mu')\simeq-\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}}\frac{\mu\mu'v+\sin v}{(v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos v)^{3/2}}$$

$$+\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}\sin v}{(1+\mu\mu')\{v^2(1+\mu\mu')+(\mu-\mu')^2\}^{3/2}}$$

$$-\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{1+\mu\mu'}\int_{-\infty}^{v}\frac{\cos t}{\{t^2(1+\mu\mu')+(\mu-\mu')^2\}^{3/2}}dt \qquad \cdots\cdots(3.5.3)$$

となる。$\mu=\mu',\ v\to 0$ のとき (3.5.3) の右辺第1項と第2項は消し合って 0 になるので，K の特異性は (3.5.3) の最終項の中にだけ含まれることになり，$\mu=\mu'$ の近傍では，

$$\overline{K}(v;\ \mu,\ \mu')\simeq-\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{1+\mu\mu'}\int_{-\infty}^{v}\frac{\cos t}{\{t^2(1+\mu\mu')+(\mu-\mu')^2\}^{3/2}}dt \qquad \cdots\cdots(3.5.4)$$

で表わされる。

(3.5.4) から次のことがわかる。

(1) $v<0$ のとき，K には特異性はない。

(2) $v\geq 0$ のとき，K は $\mu=\mu'$ に特異点をもち，$v>0$ のときの特異性は $v=0$ のときの特異性の2倍である。

変形ベッセル関数の積分公式[48] [pp. 52]

$$\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)^{3/2}}dx=\frac{K_1(a)}{a} \qquad \cdots(3.5.5)$$

を用いると，

$$\overline{K}(0;\ \mu,\ \mu')\simeq-\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{(1+\mu\mu')^{5/2}}\frac{K_1(|\mu-\mu'|/\sqrt{1+\mu\mu'})}{|\mu-\mu'|/\sqrt{1+\mu\mu'}} \qquad \cdots\cdots(3.5.6)$$

である。$K_1(x)$ の $x=0$ の近傍における展開式は，

$$\frac{K_1(x)}{x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{x}{2}+\cdots\cdots$$

であるから，

$$\overline{K}(0;\ \mu,\ \mu')\simeq-\frac{(\mu-\mu')^2}{8\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\left\{\frac{1+\mu^2}{(\mu-\mu')^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{|\mu-\mu'|}{\sqrt{1+\mu^2}}\right\}$$

のように表わされる。

したがって $\mu=\mu'$ の近傍では，

$$\overline{K}(v;\ \mu,\ \mu')\simeq\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{4\pi}\left\{\sqrt{1+\mu^2}+\dfrac{(\mu-\mu')^2}{2\sqrt{1+\mu^2}}\ln|\mu-\mu'|\right\}, & v>0\\ -\dfrac{1}{8\pi}\left\{\sqrt{1+\mu^2}+\dfrac{(\mu-\mu')^2}{2\sqrt{1+\mu^2}}\ln|\mu-\mu'|\right\}, & v=0\\ 0 & v<0\end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots(3.5.7)$$

となる。

このように $\overline{K}$ が $\mu=\mu'$ のとき $v=0$ で不連続になり，K の特異性が $v\geq 0$ のときに現われることは直進翼の性質と同じである。ただ揚力面の核関数だけを比較すると，その特異性は直進翼では2位の極だけであるのに対し，プロペラでは2位の極のほかに対数特異点をもつという相違がある。これは自由渦の彎曲に由来するものである[5] [II, pp. 313]。しかしこの対数特異点の係数は2位の極の係数の $1/(1+\mu^2)$ であるから，普通の作動状態では，翼面上の大部分のところで，

それの影響は極わめて少ない。これまでの揚力線の数値計算では，この対数特異点に対して Mangler and Spencer の方法[33]のような対数特異点対策を講じた例はないようである。

次に積分方程式（3.3.13）を直進翼の（2.5.1）のような収斂型の積分で表わしたときの核関数の特異性について調べてみる。

$$\left.\begin{aligned} &B(v,\ \mu')=v^2+\mu'^2\sin^2\varphi \\ &R(v;\ \mu,\ \mu')=\sqrt{v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos\varphi} \\ &(\mu-\mu'\cos\varphi)^2=R^2-B(v,\ \mu') \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3.5.8)$$

と置くと，

である。そして，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mu\mu'v+\sin\varphi}{R^3}=\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{-\mu'vB(v,\ \mu')+(\mu'^2v\cos\varphi+\sin\varphi)(\mu-\mu'\cos\varphi)}{B(v,\ \mu')\cdot R}\right] \\ &\frac{3}{R^5}=\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{\mu-\mu'\cos\varphi}{B(v,\ \mu')\cdot R}\left\{\frac{1}{R^2}+\frac{2}{B(v,\ \mu')}\right\}\right] \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3.5.9)$$

であるから，（3.4.9）は，

$$\begin{aligned} K(v;\ \mu,\ \mu')=&-\frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}}\sum_{m=0}^{l-1}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\frac{-\mu'vB(v,\ \mu')+(\mu'^2v\cos v_m+\sin v_m)(\mu-\mu'\cos v_m)}{B(v,\ \mu')\cdot R}\right] \\ &-\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi}\sum_{m=0}^{l-1}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_{-\infty}^{v}t\sin t_m\left[\frac{\mu-\mu'\cos t_m}{B(t,\ \mu')\cdot R}\left\{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{B(t,\ \mu')}\right\}\right]dt \end{aligned} \quad \cdots\cdots(3.5.10)$$

と書かれる。ただし，

$$v_m=v-2m\pi/l,\qquad t_m=t-2m\pi/l$$

である。

$v,\ t$ の小さな値に対して，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{(\mu'^2v\cos v+\sin v)(\mu-\mu'\cos v)}{B(v,\ \mu')\cdot R}\simeq\frac{\mathrm{sgn}(\mu-\mu')}{v} \\ &\frac{2t\sin t\cdot(\mu-\mu'\cos t)}{B^2\cdot R}\simeq\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu-\mu')}{t^2(1+\mu'^2)^2} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3.5.11)$$

であるから，（3.5.10）を，

$$\begin{aligned} K(v;\ \mu,\ \mu')=&-\frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}}\frac{\partial}{\partial\mu}\frac{\mathrm{sgn}(\mu-\mu')}{v}-\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{1+\mu^2}{1+\mu'^2}}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_{\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,v}^{v}\frac{\mathrm{sgn}(\mu-\mu')}{t^2}dt \\ &-\frac{1}{8\pi}\sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}}\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}\frac{-\mu'vB(v,\ \mu')+(\mu'^2v\cos v_m+\sin v_m)(\mu-\mu'\cos v_m)}{B(v,\ \mu')\cdot R}-\frac{\mathrm{sgn}(\mu-\mu')}{v}\right\} \\ &-\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_{\varepsilon\,\mathrm{sgn}\,v}^{v}\left[\sum_{m=0}^{l-1}\frac{t\sin t_m\cdot(\mu-\mu'\cos t_m)}{B(t,\ \mu')\cdot R}\left\{\frac{1}{R^2}+\frac{2}{B(t,\ \mu')}\right\}-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu-\mu')}{t^2(1+\mu'^2)^2}\right]dt \\ &-\frac{\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\sum_{m=0}^{l-1}\frac{t\sin t_m\cdot(\mu-\mu'\cos t_m)}{B(t,\ \mu')\cdot R}\left\{\frac{1}{R^2}+\frac{2}{B(t,\ \mu')}\right\}dt \end{aligned} \quad \cdots\cdots(3.5.12)$$

と書く。これは直進翼の（2.6.2）と同じ形の式で，K の $v=0$ における特異性は（3.5.12）の右辺第1項，第2項に含まれ，第3項以下には特異性がない。ε は正の小さい数で，これを有限にとったのは，直進翼の場合に述べたように，積分方程式（3.3.13）で発散積分の有限部分をとることと同等である。

注：文献[49]の中では（3.5.9）に対応する式の計算に誤まりがあった。

3.6. エネルギー定理

プロペラが単位時間に流体に対してなす仕事と，単位時間に後方に置き去る流体の全エネルギー（損失エネルギーという）とは等しいという一般的定理が，こ

れまで導いてきた諸式の間に成り立っているかどおかを確かめてみる。

損失エネルギーは普通，プロペラの前後遠く離れたところに二つの検査面を置き，単位時間にここを通過する流体の全エネルギーから計算するが，ここではそれを Lamb[51] にしたがって，Rayleigh の流場の消散関数を用いて計算する。この方法は演算技法として非常に優れたものであるが，理論的根拠に不安をもつ向きもあって，これまで造波現象の理論の個々の問題について検証が行なわれてきたが，不都合の生じた例は見当らない。まずこの方法の原理から解説する。

Euler の運動方程式に Rayleigh の仮想摩擦を導入すると，

$$\left.\begin{aligned}\frac{Du}{Dt}+\mu' u&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{Dv}{Dt}+\mu' v&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{Dw}{Dt}+\mu' w&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\cdots(3.6.1)$$

である。この式の両辺にそれぞれ u, v, w を乗じて，加え合わせ，考える流体領域全体に体積積分を行なうと，

$$\frac{DT}{Dt}+2F=\iint q_n p\,dS \quad\cdots\cdots(3.6.2)$$

が得られる。ただし T は運動エネルギー，$2F$ は消散関数で，

$$T=\frac{\rho}{2}\iiint(u^2+v^2+w^2)dxdydz\cdots\cdots(3.6.3)$$

$$2F=\mu'\rho\iiint(u^2+v^2+w^2)dxdydz\cdots(3.6.4)$$

によって与えられる。また q_n は領域境界における内向法線方向の流速である。表面波を伴なうときは運動エネルギーに波のポテンシャルエネルギーを加えた全エネルギーを T の代わりに用いる必要があるが，ここでは波は考えない。

プロペラのように自由渦を伴なうものでは $\mu'=0$ ならば，T は無限大になるので，単位時間に検査面を通過する運動エネルギーをもって $DT/(Dt)$ に充当する。S_c を検査面，S_w を物体表面とすると，(3.6.2) は

$$E=\frac{DT}{Dt}-\iint_{S_c}q_n p\,dS=\iint_{S_w}q_n p\,dS=P \quad\cdots\cdots(3.6.5)$$

と書かれる。この式の右辺は物体が単位時間に流体に対してなす仕事で，左辺は損失エネルギーである。

仮に μ' が有限とし，流体領域を包む境界を物体から遠く離れたところにとれば，その上で $q_n=0$ であり，また境界内で $T=\text{const.}$ であるから，(3.6.2) は

$$2F=\iint_{S_w}q_n p\,dS \quad\cdots\cdots(3.6.6)$$

となる。したがって $2F$ の表示式を求めて，$\mu'\to0$ とすれば，$2F$ は損失エネルギー E に転化しなければならない。すなわち，

$$E=\lim_{\mu'\to0}2F=\iint_{S_w}q_n p\,dS \quad\cdots\cdots(3.6.7)$$

が成立する。

渦なしの流場にはポテンシャルが存在するから，そのときの消散関数 $2F$ は，(3.6.4) より面積分の形，

$$2F=-\mu'\rho\iint\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}}dS \quad\cdots\cdots(3.6.8)$$

に書改められる。ただし $\partial\Phi/\partial\boldsymbol{n}$ は境界面における流体の内向法線方向の流速である。Φ は翼面および自由渦面上で不連続であるから，(3.6.8) の面積分はこれらの面全体に行なうものである。

(3.6.8) の螺旋面に沿う面積分を上側(翼の負圧側)および下側（翼の正圧側）のそれぞれに沿うものに分け，前者を E_u，後者を E_l で表わすと，

$$\left.\begin{aligned}E_l&=-\mu\rho\frac{\Omega h^2}{2}\sum_{m=0}^{l-1}\int_0^{\mu_0}\sqrt{1+\mu^2}\,d\mu\int_{-\infty}^{\infty}\left[-\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right]_{\sigma-\sigma'\to-0}d\tau\\ E_u&=-\mu\rho\frac{\Omega h^2}{2}\sum_{m=0}^{l-1}\int_0^{\mu_0}\sqrt{1+\mu^2}\,d\mu\int_{-\infty}^{\infty}\left[\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\boldsymbol{n}}\right]_{\sigma-\sigma'\to+0}d\tau\\ E&=\lim_{\mu\to0}(E_l+E_u)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3.6.9)$$

である。これらの式の中の Φ は (3.1.11) で表わされる Φ に含まれる変数 τ, σ を $\tau+2m\pi/l, \sigma+2m\pi/l$ で置き換えたものである。

(3.1.11) で $\lambda+lk$ を λ で置換えると，

$$\Phi(\tau_m,\ \sigma_m,\ \mu)=\frac{l}{4\pi^2 h}\iint \gamma dS' \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu'(\lambda-lk)-lk/\mu'}{\lambda-i\boldsymbol{\mu}}$$
$$\times\exp\left\{\frac{i}{2}\lambda(\tau_m-\tau')-\frac{i}{2}(\lambda-2lk)(\sigma_m-\sigma')\right\}$$
$$\times I_{lk}(|\lambda-lk|\,\mu_<)K_{lk}(|\lambda-lk|\,\mu_>)d\lambda \qquad\cdots\cdots(3.6.10)$$

である。ただし，

$$\tau_m=\tau+2m\pi/l, \qquad \sigma_m=\sigma+2m\pi/l$$

である。

(3.6.10) の k, λ の代わりに $-k,\ -\lambda$ と置き，$\partial/\partial \boldsymbol{n}$ の演算を行なうと，

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}}\Phi(\tau_m,\ \sigma_m,\ \mu)=\frac{il}{4\pi^2 h^2\sqrt{1+\mu^2}}\iint \gamma dS' \sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\{\mu'(\lambda-lk)-lk/\mu'\}}{\lambda+i\boldsymbol{\mu}}$$
$$\times\{\mu(\lambda-lk)-lk/\mu\}\exp\left\{-\frac{i}{2}\lambda(\tau_m-\tau')+\frac{i}{2}(\lambda-2lk)(\sigma_m-\sigma')\right.$$
$$\times I_{lk}(|\lambda-lk|\,\mu_<)K_{lk}(|\lambda-lk|\,\mu_>)d\lambda \qquad\cdots\cdots(3.6.11)$$

である。(3.6.10)，(3.6.11) を (3.6.9) に代入し，

$$\int_a^b f(\tilde{\lambda})d\tilde{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i/2\tau(\tilde{\lambda}-\lambda)}d\tau=4\pi f(\lambda),\ \ a<\lambda<b \qquad\cdots\cdots(3.6.12)$$

の公式を用いて τ に関する積分を行なうと，

$$E_l=\lim_{\varepsilon\to-0} i2\pi\boldsymbol{\mu}\rho\Omega h^2\sum_{m=0}^{l-1}\int_0^{\mu_0}d\mu\frac{l}{4\pi^2 h}\iint\gamma dS'\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu'(\lambda-lk)-lk/\mu'}{\lambda^2+\boldsymbol{\mu}^2}$$
$$\times e^{i/2(\tau''-\tau')-i/2(\lambda-2lk)\varepsilon-i2m(k-k'')\pi}I_{lk}(|\lambda-lk|\,\mu_<)K_{lk}(|\lambda-lk|\,\mu_>)$$
$$\times\frac{l}{4\pi^2 h^2}\iint\gamma'' dS''\sum_{k''=-\infty}^{\infty}\{\mu''(\lambda-lk'')-lk''/\mu''\}\{\mu(\lambda-lk'')-lk''/\mu\}$$
$$\times e^{i/2(\lambda-2lk'')\varepsilon}I_{lk''}(|\lambda-lk''|\,\mu''_<)K_{lk''}(|\lambda-lk''|\,\mu''_>)d\lambda \qquad\cdots\cdots(3.6.13)$$

となる。ただし $\mu_>,\mu_<$ は μ,μ' の内大なる方および小なる方，$\mu''_>,\ \mu''_<$ は $\mu,\ \mu''$ の内大なる方および小なる方を意味する。また γ'' は τ'' を関数とする循環分布密度，dS'' は τ'' を含む面積素片を意味する。

(3.6.13) で $\boldsymbol{\mu}\to 0$ とし，λ の積分について Poisson の特異積分を行なうと，

$$E_l=4\pi^2\rho\Omega h^2 l\int_0^{\mu_0}d\mu\frac{l}{4\pi^2 h}\iint\gamma dS'\sum_{k=1}^{\infty}lk(\mu'+1/\mu')\sin lk\varepsilon$$
$$\times I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>)\frac{2l}{4\pi^2 h^2}\iint\gamma'' dS''\sum_{k''=1}^{\infty}l^2k''^2(\mu''+1/\mu'')$$
$$\times(\mu+1/\mu)\cos lk''\varepsilon I_{lk''}(lk''\mu''_<)K_{lk''}(lk''\mu''_>) \qquad\cdots\cdots(3.6.14)$$

となる。

(3.1.14)，(3.1.16) で示される Φ_∞ の表示式を参照すると，(3.6.14) は Φ_∞ を含む積分で表わされる。E_u についても同形の式が導かれる。すなわち，

$$E_l=-E_u=\rho\Omega h^2 l\int_0^{\mu_0}\Phi_\infty(\sigma-\sigma'=\varepsilon,\ \mu)d\mu\cdot\frac{l}{2\pi h^2}\iint\gamma dS'$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}l^2k^2(\mu'+1/\mu')(\mu+1/\mu)\cos lk\varepsilon I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>) \qquad\cdots\cdots(3.6.15)$$

が得られる。

$\Phi_{u\infty},\ \Phi_{l\infty}$ を無限後方における螺旋面の上下面の速度ポテンシャルとすると，

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\varepsilon\to-0}\Phi_\infty(\sigma-\sigma'=\varepsilon,\ \mu)=\Phi_{l\infty}\\ \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\Phi_\infty(\sigma-\sigma'=\varepsilon,\ \mu)=\Phi_{u\infty}\end{array}\right\} \qquad\cdots\cdots(3.6.16)$$

である。(3.2.5) より,

$$\Phi_{u\infty}-\Phi_{l\infty}=\int_{s_1}^{s_2}\gamma ds \qquad \cdots\cdots(3.6.17)$$

であるから,(3.6.15) を (3.6.9) の第3式に適用して,E の表示式を求めると,

$$\begin{aligned}E=&\frac{-l^4\rho V}{2\pi h^2}\iint\gamma dS\\&\times\iint\gamma dS'\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\mu'+1/\mu')(\mu+1/\mu)\\&\times I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>) \qquad \cdots\cdots(3.6.18)\end{aligned}$$

となる。これが損失エネルギーである。

プロペラが単位時間に流体に対してなす仕事 P は (3.6.5) の右辺で表わされる。q_n は吹き上げおよび吹き下しで,その面積分は翼の上下両面に沿って行なう。q_n は翼の上下面で絶対値は等しく,符号は逆であるから,翼の片面に沿う面積分に改めると,

$$P=\iint_{S_W}q_n p dS=-l\iint\frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{\sigma=\sigma'}\Pi dS' \qquad \cdots\cdots(3.6.19)$$

となる。この式の $\partial\Phi/\partial\boldsymbol{n}$ に (3.3.8),(3.3.9) を代入し,面積分を (3.3.10) によって μ と τ の二重積分に改めると,

$$\begin{aligned}P=&-\frac{h^2l^2\rho V}{16\pi^2}\int_0^{\mu_0}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma\sqrt{1+\mu^2}\,d\tau d\mu\int_0^{\mu_0}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma\sqrt{1+\mu'^2}\,d\tau' d\mu'\\&\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mu'\lambda-lk/\mu')(\mu\lambda-lk/\mu)}{\lambda+lk}\sin\frac{1}{2}(\lambda+lk)(\tau-\tau')I_{lk}(|\lambda|\mu_<)K_{lk}(|\lambda|\mu_>)d\lambda\\&-\frac{l^4\rho V}{2\pi h^2}\iint\gamma dS\iint\gamma dS'\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\mu'+1/\mu')(\mu+1/\mu)I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>) \qquad \cdots\cdots(3.6.20)\end{aligned}$$

となる。(3.6.20) の右辺第1項の τ,μ と τ',μ' との積分順序を交換し,τ,μ と τ',μ' の記号を交換すると,まったく同形で符号のみが異なる式となるから,この項は0でなければならない。ここで μ' の積分は $\mu'=\mu$ を境として $\mu'<\mu$ と $\mu'>\mu$ の領域で被積分関数が異なるので,μ と μ' の積分順序の交換に際して Dirichlet 変換[29] を利用する必要がある。

(3.6.20) の右辺第2項は (3.6.18) の右辺と一致するから,(3.1.11) で表わされる流場で,(3.6.5) が成り立つことが確かめられた。

(3.6.20) の右辺第1項が消失するので,P は

$$\begin{aligned}P=&-l\rho\iint\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}}{\partial\boldsymbol{n}}\bigg|_{\sigma=\sigma'}\gamma WdS'\\=&-\frac{l\rho}{2}\iint\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial\boldsymbol{n}}\bigg|_{\sigma=\sigma'}\gamma WdS' \quad (3.6.21)\end{aligned}$$

のように表わされる。

(3.6.19) に (3.3.6) の境界条件を代入すると,

$$\begin{aligned}P=&l\iint\Pi W\sin(\varepsilon_0-\varepsilon)dS'\\=&l\Omega\iint\Pi r\sin\varepsilon_0 dS'-lV\iint\Pi\cos\varepsilon_0 dS'\\=&\Omega Q-VS \qquad \cdots\cdots(3.6.22)\end{aligned}$$

となる。ただし Q,S はそれぞれプロペラのトルクおよび推力である。したがって P は完全流体中で作動するプロペラの流体力によるエネルギー損失を表わし,それが (3.6.18) に示される損失エネルギーに等しくなる。これがプロペラの流場のエネルギー定理である。

(3.6.20) の右辺第1項の被積分関数は (3.5.12) の第1項,第2項に示す特異性をもっている。したがって Π が前縁で無限大になるときは (3.6.20) の第1項から有限値が導かれるが,これが翼前縁に働く推力と消し合って0になることは二次元翼の場合で証明されているので[50] [pp. 41],ここでも同じように考えて,その項を無視する。

3.7. Munk の定理

直進定常翼の場合に成り立つ Munk の三つの定理はこれまでプロペラにしばしば利用されてきたもので,恐らくプロペラ理論の中で最も重要な定理と考えられるが,プロペラの流場について,この定理はまだよく吟味されていない。線型理論の枠内でも,プロペラにおける Munk の定理は直進翼のものより制限が多い。

プロペラ理論では非線型理論を用いるのが普通であるが,その理論が不完全であるために,表示式相互の間でエネルギー定理も Munk の定理も成り立たないのが一般である。その場合に線型理論を参考にして,許される範囲で仮定を設け,Munk の定理が成り立つ

ようにできれば極わて好都合なことである。

以下にプロペラの流場で，Munk の定理に相当するものを導いてみる。

(3.6.18) は (3.2.5) を利用すると，

$$E=\frac{-l^4\rho\Omega}{2\pi h}\int_0^{r_0}\Gamma(r)dr \times\int_0^{r_0}\Gamma(r')dr'\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\mu'+1/\mu')(\mu+1/\mu) \times I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>) \quad \cdots\cdots(3.7.1)$$

と書かれる。ただし $\Gamma(r)$ は翼素の全循環である。この式から Munk の定理 I に相当するものが得られる。すなわち，

定理 I　プロペラの損失エネルギーは揚力要素を前後に移動しても変わらない。

(3.6.20) の第 2 項は無限後方におよぶ流体攪乱に基づくものであるが，第 1 項には局所的攪乱に基づくものが含まれている。したがって束縛渦の影響は第 1 項の中にだけ存在する。この項が 0 になることはすでに 3.6 節で証明したので，Munk の定理 II に相当するものが得られる。すなわち，

定理 II　2 点の束縛渦が互に影響してひき起す損失エネルギーは互に打消す。

(3.3.8) より，

$$\left.\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\substack{\sigma=\sigma'\\ \tau=\tau'}}=0 \quad \cdots\cdots(3.7.2)$$

であるから，(3.1.16) の関係を用いると，

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\substack{\sigma=\sigma'\\ \tau=\tau'}}=\left.\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\sigma=\sigma'}=\frac{1}{2}\left.\frac{\partial\Phi_{\infty}}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\sigma=\sigma'} \quad \cdots\cdots(3.7.3)$$

となる。よって Munk の定理 III に相当するものとして，次の定理が得られる。

定理 III　対称プロペラの場合，揚力要素を螺旋面に沿って前後に移動して，プロペラの進行方向と直交する一平面上に集めて揚力線を作ったとき，揚力線上の吹き上げは無限後方の螺旋渦面上の吹き上げの 1/2 である。

定理 I および II は損失エネルギーに関するものであるから，プロペラが対称でない場合にも成り立ち，直進翼のものと内容に変わりはないが，定理 III は Munk の定理 III とはかなり異なることに注意しなければならない。しかし実際問題では非対称プロペラの用いられることは少ないし，また必要なものは渦面上の吹き上げであるから，直進翼の Munk の定理とほとんど同じように定理 III を利用することができる。

3.8.　Prandtl 揚力線の積分方程式

直進翼の揚力線について，2.6 節で述べたものと同じ方法でプロペラ揚力線の積分方程式を導くことができる。ここでは揚力面補正項を省略しないで解析を進める。

揚力面の積分方程式 (3.3.13) の核関数として，(3.5.12) の形を採用すると，

$$\tilde{\alpha}_g=\frac{1}{2\pi W}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\gamma}{\tau-\tau'}d\tau'+\alpha_i+u \quad \cdots\cdots(3.8.1)$$

ただし，

$$\alpha_i=-\frac{1}{8\pi}\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{W}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_0^{\mu_0}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma(1+\mu'^2)^{3/2}d\tau' \times\int_{-\infty}^{-\epsilon}\sum_{m=0}^{l-1}\frac{t\sin t_m\cdot(\mu-\mu'\cos t_m)}{B(t,\mu')\cdot R}\left\{\frac{1}{R^2}+\frac{2}{B(t,\mu')}\right\}dt \quad \cdots\cdots(3.8.2)$$

$$u=-\frac{1}{8\pi}\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{W}\frac{\partial}{\partial\mu}\int_0^{\mu_0}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma\sqrt{1+\mu'^2}\,d\tau' \times\left[\frac{1}{1+\mu^2}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}\frac{-\mu' vB(v,\mu')+(\mu'^2 v\cos v_m+\sin v_m)(\mu-\mu'\cos v_m)}{B(v,\mu')\cdot R}-\frac{\mathrm{sgn}(\mu-\mu')}{v}\right\}\right. \left.+(1+\mu'^2)\int_{\epsilon\,\mathrm{sgn}\,v}^{v}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}\frac{t\sin t_m(\mu-\mu'\cos t_m)}{B(t,\mu')\cdot R}\left(\frac{1}{R^2}+\frac{2}{B(t,\mu')}\right)-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu-\mu')}{t^2(1+\mu'^2)^2}\right\}dt\right] \quad \cdots\cdots(3.8.3)$$

のように表わされる。ここに $\tilde{\alpha}_g=\sin(\varepsilon_0-\varepsilon)\fallingdotseq\varepsilon_0-\varepsilon$ である。

(3.8.1) は (2.8.2) と同形の式である。プロペラ翼の縦横比が大きいときは，直進翼の場合と同様に u は他の項に比べて小さい。

無次元量

$$\xi=(\tau-\tau_0)/\bar{\tau},\ \bar{\tau}=(\tau_2-\tau_1)/2,\ \tau_0=(\tau_1+\tau_2)/2 \qquad \cdots\cdots(3.8.4)$$

を用いると，(3.8.1) は，

$$\tilde{\alpha}_g-\alpha_i-u=\frac{1}{2\pi W}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma}{\xi-\xi'}d\xi' \qquad \cdots\cdots(3.8.5)$$

と書かれる。これより γ を求めると，

$$\frac{\gamma}{W}=-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\frac{\tilde{\alpha}_g-u}{\xi-\xi'}d\xi' -2\alpha_i\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \qquad \cdots\cdots(3.8.6)$$

となる。この式の両辺を s で s_1 より s_2 まで積分すると，

$$\frac{\Gamma}{W}=\frac{1}{W}\int_{s_1}^{s_2}\gamma ds =\frac{lh\sqrt{1+\mu^2}}{2W}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma d\tau =\frac{\bar{\tau}h\sqrt{1+\mu^2}}{2W}\int_{-1}^{1}\gamma d\xi$$

であるから，

$$\frac{\Gamma}{W}=2c^*\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}(\tilde{\alpha}_g-u)d\xi'-2\pi c^*\alpha_i \qquad \cdots\cdots(3.8.7)$$

ただし　　$c^*=1/2\cdot\bar{\tau}h\sqrt{1+\mu^2}$

となる。(3.2.2) によると，$2c^*$ はプロペラ翼素の翼弦長を意味するから，(3.8.7) は (2.6.7) と同形で，(1.1.1) に対応する。

Munk の定理Ⅲより，

$$\alpha_i=-\frac{w}{W}\bigg|_{\tau-\tau'=0}=-\frac{1}{W}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{\sigma=\sigma'} \qquad \cdots\cdots(3.8.8)$$

であるから，(3.3.9) または (3.4.8) より，

$$\alpha_i=-\frac{l^3\sqrt{1+\mu^2}}{2\pi Wh\mu}\int_0^{\mu_0}\Gamma(\mu')\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)d\mu' \times\sum_{k=1}^{\infty}k^2I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>) \qquad \cdots\cdots(3.8.9)$$

または，

$$\alpha_i=-\frac{3\sqrt{1+\mu^2}}{4\pi Wh}\sum_{m=0}^{l-1}\int_0^{\mu_0}\Gamma(\mu')(1+\mu'^2)d\mu' \times\int_{-\infty}^{0}\frac{t\sin t_m}{\{t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos t_m\}^{5/2}}dt \qquad \cdots\cdots(3.8.10)$$

のように表わされる。これらの式は (3.8.2) から直接導くこともできる。

(3.8.7) と (3.8.9) または (3.8.10) を組み合わせたものがプロペラ揚力線の積分方程式である。

3.9. 揚力線に対する揚力面補正

揚力面補正の方法についてはすでに直進翼の項で述べた。プロペラの場合は核関数が複雑になるが，基本的なところはほとんど変わりがない。

u は (3.3.6)，(3.8.5)，(3.8.8) を参照すると，

$$u=-\frac{1}{W}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial \boldsymbol{n}}\bigg|_{\sigma=\sigma'}-\frac{1}{2\pi W}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma}{\xi-\xi'}d\xi' \qquad \cdots\cdots(3.9.1)$$

のように表わされるから，(3.3.8) および (3.4.8) により，

$$u=-\frac{l}{8\pi^2W\sqrt{1+\mu^2}}\int_0^{\mu_0}\sqrt{1+\mu'^2}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma d\tau'\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mu'\lambda-lk/\mu')(\mu\lambda-lk/\mu)}{\lambda+lk} \times\sin\frac{1}{2}(\lambda+lk)(\tau-\tau')\cdot I_{lk}(|\lambda|\mu_<)K_{lk}(|\lambda|\mu_>)d\lambda-\frac{1}{2\pi W}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma}{\xi-\xi'}d\xi' \qquad \cdots\cdots(3.9.2)$$

または，

$$u=-\frac{1}{8\pi W\sqrt{1+\mu^2}}\int_0^{\mu_0}\sqrt{1+\mu'^2}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma d\tau'\sum_{m=0}^{l-1}\frac{\mu\mu'v+\sin v_m}{(v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos v_m)^{3/2}} -\frac{3\sqrt{1+\mu^2}}{8\pi W}\int_0^{\mu_0}(1+\mu'^2)^{3/2}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma d\tau'\sum_{m=0}^{l-1}\int_0^{v}\frac{t\sin t_m}{(t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos t_m)^{5/2}}dt -\frac{1}{2\pi W}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma}{\xi-\xi'}d\xi' \qquad \cdots\cdots(3.9.3)$$

と書かれる。

直進翼の場合と同じように，近似的に

$$\tilde{\alpha}_g=\alpha_g+2f_g/c^*\cdot\xi,\qquad u=\alpha_{2i}+2f_i/c^*\cdot\xi \qquad \cdots\cdots(3.9.4)$$

のように表わされるものとして，これを (3.8.6) に代入すると，

$$\frac{\gamma}{W}=2(\alpha_g-\alpha_i-\alpha_{2i})\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}+\frac{4}{c^*}(f_g-f_i)\sqrt{1-\xi^2} \quad \cdots\cdots(3.9.5)$$

となる。

shock free entry の条件は γ の分布形に $\sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$ のように前縁で無限大になるものが含まれてはならないことであるから，それを満足するためには，

$$\alpha_g-\alpha_i-a_{2i}=0 \quad \cdots\cdots(3.9.6)$$

でなければならない。

また (3.9.4) を (3.8.7) に代入すると，(2.8.8) と同じに，

$$\Gamma=2\pi c^* W(k_1\alpha_g-\alpha_i+k_2 f_g/c^*)\cdots(3.9.7)$$

が得られる。ここに k_1 および k_2 はピッチ修正係数，キャンバー修正係数であって，

$$k_1=1-\alpha_{2i}/\alpha_g,\quad k_2=1-f_i/f_g\cdots(3.9.8)$$

である。

$$f_e=f_g-f_i,\quad \alpha_e=\alpha_g-\alpha_i-\alpha_{2i}\cdots(3.9.9)$$

で表わされる f_e, α_e をそれぞれ effective camber および effective angle of attack という。

k_1, k_2 を計算するには，上記の分け方にしたがって吹き上げを幾何学的なものと effective なものに分けると好都合である。すなわち，

$$\left.\begin{aligned}&w_g=w_e+w_i\\&\tilde{\alpha}_g=-\frac{w_g}{W}=\frac{1}{2\pi W}\oint_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\gamma}{\tau-\tau'}d\tau'\\&\quad+\alpha_i+u\\&-w_e=\frac{1}{2\pi W}\oint_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\gamma}{\tau-\tau'}d\tau'\\&-w_i/W=\alpha_i+u\end{aligned}\right\}\quad(3.9.10)$$

のように書く。この定義にしたがうと，k_1, k_2 は，

$$\begin{aligned}k_1&=1-\frac{u}{\tilde{\alpha}_g}\bigg|_{\xi=0}=\left[\frac{-w_g/W-u}{-w_g/W}\right]_{\xi=0}\\&=\left[\frac{w_e/W-\alpha_i}{w_g/W}\right]_{\xi=0}\quad\cdots\cdots(3.9.11)\\k_2&=1-\frac{\partial u/\partial\xi}{\partial\tilde{\alpha}_g/\partial\xi}\bigg|_{\xi=0}=\left[\frac{\partial w_e/\partial\xi}{\partial w_g/\partial\xi}\right]_{\xi=0}\\&\quad\cdots\cdots(3.9.12)\end{aligned}$$

で与えられる。

最適プロペラの場合は，循環分布が半径方向には Goldstein 分布，翼弦方向には shock free entry の条件により楕円分布と定められるので，k_1, k^2 の数表を作ることは容易で，実際に k_2 の値はかなり広範囲にわたって計算されている[26]。

(3.9.2) の u の表示式を (3.9.11) に代入すると，翼弦方向の循環分布が前後対称で，翼平面形が前後対称のとき $u|_{\xi=0}=0$ であるから，次の定理が得られる。

「翼平面形および循環分布密度が前後対称のとき，ピッチ修正係数は 1 である。」

このことはすでに数値計算によって検証されている[52]。

3.10. 無限後方の流場と河田の理論

無限後方の流場は揚力線理論やエネルギー損失極小の循環分布を求めることに利用され，古典的プロペラ理論の時代には多くの研究者の関心を集めたもので，現在でもその重要さに変わりはない。

(3.1.14) と (3.1.16) とを参照すると

$$\begin{aligned}\Phi_\infty=\frac{l^2}{\pi}\int_0^{\mu_0}\Gamma(\mu')d\mu'\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\\\times I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>)\sin lk(\sigma-\sigma')\\\cdots\cdots(3.10.1)\end{aligned}$$

のように表わされる。

$\Gamma(\mu)$ が $\mu=0,\mu_0$ において消失することを考慮し，またベッセル関数に関する公式，

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\mu_1}^{\mu_2}n\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)I_n(n\mu')d\mu'\\&=[\mu' I_n'(n\mu')]_{\mu_1}^{\mu_2},\\&\int_{\mu_1}^{\mu_2}n\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)K_n(n\mu')d\mu'\\&=[\mu' K_n'(n\mu')]_{\mu_1}^{\mu_2},\\&I_n'(n\mu)K_n(n\mu)-I_n(n\mu)\\&\quad\times K_n'(n\mu)=1/(n\mu)\end{aligned}\right\}\cdots(3.10.2)$$

および

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin lk(\sigma-\sigma')=\frac{l}{2}\left(\frac{\pi}{l}-\sigma+\sigma'\right),$$
$$0<\sigma-\sigma'<\frac{2\pi}{l}\quad\cdots\cdots(3.10.3)$$

を用いて，(3.10.1) の μ' について部分積分すると，

$$\begin{aligned}\Phi_\infty=\frac{l\Gamma}{2\pi}\left(\frac{\pi}{l}-\sigma+\sigma'\right)\\-\frac{l}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int_0^{\mu}\mu'\Gamma'(\mu')I_{lk}'(lk\mu')\right.\\K_{lk}(lk\mu)d\mu'+\int_{\mu}^{\mu_0}\mu'\Gamma'(\mu')K_{lk}'(lk\mu')\end{aligned}$$

$$\times I_{lk}(lk\mu)d\mu'\Big\}\sin lk(\sigma-\sigma'),$$

$$0<\sigma-\sigma'<2\pi/l,\ \ \mu<\mu_0 \quad \cdots\cdots(3.10.4)$$

となって，近藤の速度ポテンシャルが得られる。ただし $\Gamma'(\mu)=d\Gamma/d\mu$, $I_n'(x)=dI_n/dx$, $K_n'(x)=dK_n/dx$ である。

(3.10.4) の右辺第2項の級数は絶対収斂で連続であるが，第1項は (3.10.3) の級数が $\sigma-\sigma'$ の正負で π の飛躍があるので，Φ_∞ は $\sigma=\sigma'$ のところで Γ だけ飛躍する。これが自由渦面である。

(3.10.4) は河田がポテンシャル論により求めた式に対応するもので，Γ=const. のときは，(3.10.2) を利用すれば，(3.10.1) の μ' に関する積分は直ちに行なわれて，河田の速度ポテンシャルが得られる。

河田の理論は極わめて重要なものであるから，その方法について簡単に紹介しておく。

プロペラの無限後方では流れは r と σ のみの関数として表わされるはずであるから，Laplace の方程式を τ, σ, μ を変数として書き表わしたとき，τ に関する項は除外してよい。よって，

$$\left(\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)^2\Phi+(1+\mu^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma^2}=0 \quad \cdots(3.10.5)$$

である。

いま仮に半径 r_0 のところまで一様な循環分布 Γ=const. の場合を考える。そして渦面が $\sigma=2m\pi/l$ $(m=0, 1, 2, \cdots, l-1)$ のところにあるものとする。このときの Φ に対する制限条件は，$\mu>\mu_0$ では一様連続で，$\mu\to\infty$ に対しては $\Phi=0$ であり，σ に関しては $2\pi/l$ を周期とする周期奇関数（奇関数となることは直進翼のところで述べた）でなければならないということである。

よって，$\mu>\mu_0$ に対する (3.10.5) の解は，

$$\Phi_>=\sum_{k=1}^{\infty}a_kK_{lk}(lk\mu)\sin lk\sigma,\quad \mu>\mu_0 \quad \cdots\cdots(3.10.6)$$

の形となる。ただし a_k は常数である。

次に $\mu<\mu_0$ における制限条件は，σ に関する周期性については $\mu>\mu_0$ の場合と同じであるが，

$$\lim_{\sigma\to+0}\Phi-\lim_{\sigma\to2\pi/l-0}\Phi=\Phi_u-\Phi_l=\Gamma \quad (3.10.7)$$

の不連続条件が加わる。そして $\mu\to0$ のとき，$r=0$ における直線渦のポテンシャルとならねばならない。

よって，$\mu<\mu_0$ に対する (3.10.5) の解は，

$$\Phi_<=\frac{l\Gamma}{2\pi}\left(\frac{\pi}{l}-\sigma\right)+\sum_{k=1}^{\infty}b_kI_{lk}(lk\mu)\sin lk\sigma,\ \mu<\mu_0 \quad \cdots\cdots(3.10.8)$$

の形となる。この式の第1項を (3.10.3) の左辺で置換え，$\mu=\mu_0$ において，

$$\Phi_>=\Phi_<,\quad \partial\Phi_>/\partial\mu=\partial\Phi_</\partial\mu$$

になるように a_k, b_k を定めると，(3.10.4) と同形の速度ポテンシャル

$$\left.\begin{aligned}\Phi_>&=\frac{l\mu_0\Gamma}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}I_{lk}'(lk\mu_0)K_{lk}(lk\mu)\sin lk\sigma\\ \Phi_<&=\frac{l\Gamma}{2\pi}\left(\frac{\pi}{l}-\sigma\right)+\frac{l\mu_0\Gamma}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}K_{lk}'(lk\mu_0)I_{lk}(lk\mu)\sin lk\sigma\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(3.10.9)$$

が得られる。この式には $r=0$ における直線渦の速度ポテンシャル $-l\Gamma\theta/2\pi$ が含まれているので，それを差引くと，無限長の一本の螺旋渦の速度ポテンシャルが得られる。

螺旋渦面のピッチが半径方向に異なる場合でも，(3.10.9) の形で表わされた一本の螺旋渦をピッチを変えて半径方向に積重ねれば，その速度場を表わすことができる。河田は連続の循環分布を近似的に階段状の分布で置換え，(3.10.9) の積重ねによって吹き上げの計算を行なった。

無限後方の流場の流れ関数が河田によって求められている。この関数は流線を計算するのに好都合である。流線の計算結果は翼端に生じた空洞気洞が自由渦の中に保存される模様を推察するのに役立つであろう。

$$\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial x}=w_{a\infty},\quad \frac{\partial\Phi_\infty}{r\partial\theta}=w_{t\infty},\quad \frac{\partial\Phi_\infty}{\partial r}=w_{r\infty} \quad \cdots\cdots(3.10.10)$$

と書くことにする。

τ, σ に関する微分演算は x, θ を通して行なうと，

$$\frac{\partial}{\partial\tau}=\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \frac{\partial}{\partial\sigma}=-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\theta} \quad \cdots\cdots(3.10.11)$$

である。Φ_∞ は σ, μ のみの関数で，τ には無関係で

あるから，

$$\left.\begin{aligned}\frac{h}{2}\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial\theta}=\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial\tau}=0\\ -\frac{h}{2}\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial\theta}=\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial\sigma}\end{aligned}\right\}\quad(3.10.12)$$

となる。この二つの式より，

$$w_{a\infty}=-\mu w_{t\infty},$$
$$\partial\Phi_\infty/\partial\sigma=\partial\Phi_\infty/\partial\theta=r w_{t\infty}\quad\cdots\cdots(3.10.13)$$

が得られる。この関係を用いると，(3.10.5) は，

$$\frac{\partial(r w_{r\infty})}{\partial r}+(1+\mu^2)\frac{\partial w_{t\infty}}{\partial\sigma}=0\quad(3.10.14)$$

と書かれる。これが満足されるためには，$w_{r\infty}$，$w_{t\infty}$ と，

$$w_{r\infty}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma},\quad w_{t\infty}=\frac{1}{1+\mu^2}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\quad\cdots\cdots(3.10.15)$$

の関係にあるスカラー関係 Ψ が存在しなければならない。

次に，流線の方程式は，

$$\frac{dr}{w_{r\infty}}=\frac{rd\theta}{w_{t\infty}}=\frac{dx}{w_{a\infty}}\quad\cdots\cdots(3.10.16)$$

であるが，$d\sigma=d\theta-dx/h$ であるから，(3.10.13) を用いると，流線の方程式は，

$$\frac{dr}{w_{r\infty}}=\frac{d\theta-dx/h}{w_{t\infty}/r-w_{a\infty}/h}=\frac{rd\sigma}{(1+\mu^2)w_{t\infty}}\quad\cdots\cdots(3.10.17)$$

のように表わされる。この式に (3.10.15) を適用すると，

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r}dr+\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma}d\sigma=d\Psi=0$$

となるから，$\Psi=$const. は流線を表わすことになる。すなわち (3.10.15) で定義される Ψ は流れ関数である。

流れ関数 Ψ の表示式は速度ポテンシャル Φ_∞ の表示式 (3.10.1) から導くことができる。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\sigma}=-w_{r\infty}=-\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial r}=-\frac{l^3}{\pi h}\sum_{k=1}^{\infty}k^2\left\{\int_0^{\mu}\Gamma(\mu')\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\right.$$
$$\left.\times I_{lk}(lk\mu')d\mu'K_{lk}'(lk\mu)+\int_{\mu}^{\mu_0}\Gamma(\mu')\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)K_{lk}(lk\mu')d\mu'I_{lk}'(lk\mu)\right\}\sin lk(\sigma-\sigma')$$

であるから，右辺を σ で積分すると，Ψ の表示式が求められ，

$$\Psi=\frac{l^2\mu}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}k\left\{\int_0^{\mu}\Gamma(\mu')\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)I_{lk}(lk\mu')d\mu'K_{lk}'(lk\mu)\right.$$
$$\left.+\int_{\mu}^{\mu_0}\Gamma(\mu')\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)K_{lk}(lk\mu')d\mu'I_{lk}'(lk\mu)\right\}\cos lk(\sigma-\sigma')+f(r)\quad\cdots\cdots(3.10.18)$$

と書かれる。この中で $f(r)$ は未知関数であるから，これの関数形を求める必要がある。

(3.10.8) を r で微分し，

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\mu}\{\mu K_{lk}'(lk\mu)\}=lk\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)K_{lk}(lk\mu)\\ \frac{\partial}{\partial\mu}\{\mu I_{lk}'(lk\mu)\}=lk\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)I_{lk}(lk\mu)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(3.10.19)$$

の公式と (3.10.2) の第3式，さらに，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\cos lk\sigma=-\frac{1}{2},\quad 0<\sigma<\frac{2\pi}{l}$$

を用いて整理すると，

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r}=\frac{l^3}{\pi h}\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\sum_{k=1}^{\infty}k^2\int_0^{\mu_0}\Gamma(\mu')\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk_>)d\mu'\cos lk(\sigma-\sigma')$$
$$+\frac{l}{2\pi h}\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\Gamma(\mu)+\frac{df}{dr},\quad\mu<\mu_0\quad\cdots\cdots(3.10.20)$$

となる。

一方，(3.10.13) と (3.10.15) とより，

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r}=(1+\mu^2)w_{t\infty}=\frac{1+\mu^2}{r}\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial\sigma}$$

の関数があるから，(3.10.1)を上式の右辺に適用すると，

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r}=\frac{l^3}{\pi h}\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\sum_{k=1}^{\infty}k^2\int_0^{\mu_0}\Gamma(\mu')$$
$$\times\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>)d\mu'$$
$$\times\cos lk(\sigma-\sigma') \qquad \cdots\cdots(3.10.21)$$

が得られる。

(3.10.20) と (3.10.21) とは一致しなければならないので，

$$\frac{df}{dr}=\frac{-l}{2\pi h}\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\Gamma(\mu)$$

である。両辺を r で 0 より r まで積分すると，(3.10.18) の $f(r)$ は，

$$f(r)=\frac{-l}{2\pi}\int_0^{\mu}\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\Gamma(\mu)d\mu+c \qquad \cdots\cdots(3.10.22)$$

の形となる。c は常数であるから，これを省略しても結果に変わりはない。

(3.10.18) は近藤[6] の求めた式で，$\Gamma=\text{const}$ として，μ について積分を行なうと河田の式が得られる。河田，近藤はこれらの式を用いて流線を計算している。

4. 非線型プロペラ理論

プロペラと直進翼の自由渦による誘導速度の大きさを比較すると，縦横比と幾何学的迎角が同程度の場合でも，前者の方が遙かに大きくなる場合が多い。したがってプロペラ理論では自由渦の位置が誘導速度によって，翼の運動軌跡面上より変位するための影響を計算に取り入れることは，計算結果の精度を向上させるのにかなりの効果がある。自由渦の半径方向の縮小を考えることは，理論を複雑にするばかりで，収益は少ないので，普通はこれを無視して，単に螺旋渦のピッチだけが変化を受けるものと仮定して理論を組立てる。以下ではこれを非線型プロペラ理論と呼ぶことにして，解析を行なう。

4.1. 速度ポテンシャル

速度ポテンシャルの原型としては (3.2.3) を用い，h は V/Ω ではなく，渦の分布する螺旋面のピッチを表わすパラメターとみなす。自由渦のピッチは普通 Prandtl の提案にしたがって

$$\frac{h(r)}{r}=\tan\varepsilon_i=\frac{V+w_a}{\Omega r+w_t} \qquad \cdots\cdots(4.1.1)$$

のようにとる。ε_i は流体力学的ピッチ角と呼ばれる。したがって自由渦螺旋面のピッチは半径方向に一定でないのが一般である。束縛渦だけを別に翼弦と同じピッチの螺旋面上におく場合もあるが[12,21]，ここでは自由渦と同じ螺旋面上におくことにする。$h(r)$ の値は逐次近似によって求める。

線型理論の場合と同じように，

$$\tau'=\theta'+x'/h', \qquad \sigma'=\theta'-x'/h',$$
$$\tan\varepsilon_i=h'/r'=1/\mu' \qquad \cdots\cdots(4.1.2)$$

と書くことにする。以下では h が r の関数のとき，h および h' はそれぞれ，$h'=h(r')$, $h=h(r)$ を意味するものと定める。

(3.2.2) を参照すると，同じように，

$$ds'=(r'd\theta'\sec\varepsilon_i+dx'\operatorname{cosec}\varepsilon_i)/2$$
$$=r'\sec\varepsilon_i\cdot(d\theta'+dx'/h)/2$$
$$=\sqrt{h'^2+r'^2}\,d\tau'/2=h'\sqrt{1+\mu'^2}\,d\tau'/2 \qquad \cdots\cdots(4.1.3)$$

である。

(3.2.1) の $\partial/\partial\boldsymbol{n}''$ を近似的に，r' における動径および螺旋への法線とみなすと，これの演算は (3.1.7) と同形になる。(3.2.3) の s'' と s' の積分順序を交換し，(4.1.3) によって s'' の積分を (4.1.2) で定義する τ' の積分に変えると，(3.2.1) と同形の速度ポテンシャル

$$\Phi=\frac{1}{8\pi}\sum_{m=0}^{l-1}\int_0^{r_0}dr'\int_{s_1}^{s_2}\gamma h'\sqrt{1+\mu'^2}\,ds'$$
$$\times\int_{\tau'}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_i''}\frac{1}{R}\,d\boldsymbol{T}' \qquad \cdots\cdots(4.1.4)$$

が得られる。ここに，

$$\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_i''}=-\cos\varepsilon_i\frac{\partial}{\partial x'}+\sin\varepsilon_i\frac{\partial}{r'\partial\theta'} \qquad \cdots\cdots(4.1.5)$$

$$=\frac{1}{h'\sqrt{1+\mu'^2}}\left\{\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\sigma'}-\left(\mu'-\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{T}'}\right\} \qquad \cdots\cdots(4.1.6)$$

である。

線型理論の場合にならって，

$$\tau=\theta+x/h', \qquad \sigma=\theta-x/h', \qquad \mu_1=r/h' \qquad \cdots\cdots(4.1.7)$$

と置き，$1/R$ を (3.1.8) で表わして，(4.1.4) の $\boldsymbol{T}'$ に関する積分を行なうと，

$$\Phi=\Phi_{\mathrm{I}}+\Phi_{\mathrm{II}} \qquad \cdots\cdots(4.1.8)$$