$$\Phi_{\mathrm{II}}=\frac{l}{4\pi^2}\iint\frac{\gamma}{h'}dS'\sum_{k=-\infty}^{\infty}\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu'\lambda-lk/\mu'}{\lambda+lk}$$
$$\times e^{i/2(\lambda+lk)(\tau-\tau')-i/2(\lambda-lk)(\sigma-\sigma')}$$
$$\times I_{lk}(|\lambda|\mu_<)K_{lk}(|\lambda|\mu_>)d\lambda \quad\cdots\cdots(4.1.9)$$

$$\Phi_{\mathrm{I}}=\frac{l^2}{2\pi}\iint\frac{\gamma}{h'}dS'\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)$$
$$\times I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>)\sin lk(\sigma-\sigma') \quad\cdots\cdots(4.1.10)$$

のように書かれる。ここに $\mu_>$, $\mu_<$ はそれぞれ μ', μ_1 の内，大なる方および小なる方を意味する。(3.1.15) の公式を用いて $\tau\to\infty$ における Φ_{II} を求めると，それは Φ_{I} に等しくなるので，無限後方の速度ポテンシャルは，

$$\Phi_\infty=\lim_{\tau\to\infty}\Phi_{\mathrm{II}}+\Phi_{\mathrm{I}}=2\Phi_{\mathrm{I}} \quad\cdots\cdots(4.1.11)$$

となる。

(4.1.9), (4.1.10) などは線型理論の (3.1.13), (3.1.14) と同形に見えるが，内容はかなり異なるもので，その理由は伴流プロペラの項において詳しく述べる。

μ_1, σ は r' の関数であるから，無限後方の流場には螺旋移動を行なったとき，流場を不変に保つような螺旋は存在しない。したがって (4.1.10) は (3.10.5) の微分方程式を満足しない。

4.2. 境界条件

境界条件式には (3.3.2) を用いる。Φ を Φ_{I} と Φ_{II} とに分け，(3.3.4) などを参照すると，

$$(\Omega r+w_t)\frac{\partial f}{r\partial\theta}-(V+w_a)=\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial x}-\frac{\partial f}{r\partial\theta}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{r\partial\theta}$$
$$=-\frac{1}{\cos\varepsilon_0}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial \boldsymbol{n}_0} \quad\cdots\cdots(4.2.1)$$

となる。(4.1.1) より，

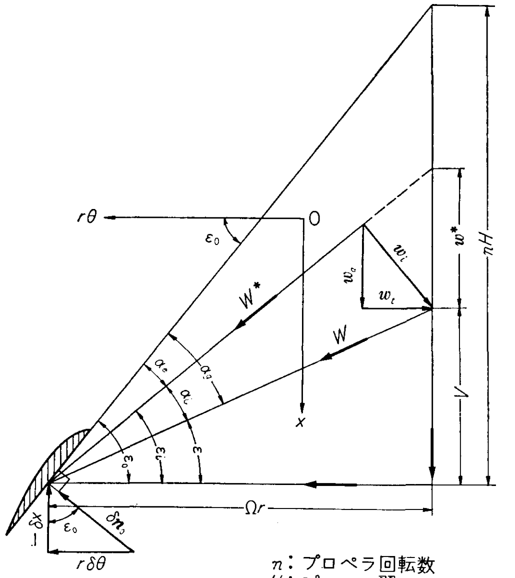
$$\left.\begin{aligned}&\cos\varepsilon_i=(\Omega r+w_t)/W^*,\\&\sin\varepsilon_i=(V+w_a)/W^*\\&W^*=\sqrt{(V+w_a)^2+(\Omega r+w_t)^2}\end{aligned}\right\}\cdots(4.2.2)$$

であるから，(4.2.1) の両辺に $\cos\varepsilon_0/W^*$ を乗じて整理すると，

$$\sin(\varepsilon_0-\varepsilon_i)=-\frac{1}{W^*}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial\boldsymbol{n}_0} \quad\cdots\cdots(4.2.3)$$

が得られる。近似的に，

注：図 7 の矢印は現実の流れの方向を示すもので，w_i, w_t の正の方向は図の矢印とは逆になる。w^* は矢印の方向を正と仮定する。



n：プロペラ回転数
H：プロペラ翼のピッチ

図 7

$$\left.\begin{aligned}&\sin(\varepsilon_0-\varepsilon_i)\doteqdot\varepsilon_0-\varepsilon_i,\\&\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial\boldsymbol{n}_0}\doteqdot\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial\boldsymbol{n}_i}\\&\varepsilon_i-\varepsilon=-\frac{w_i}{W^*}=-\frac{1}{W^*}\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}}{\partial\boldsymbol{n}_i}\end{aligned}\right\}\cdots(4.2.4)$$

と置いても大差ないから，

$$\varepsilon_0-\varepsilon=\varepsilon_0-\varepsilon_i+\varepsilon_i-\varepsilon$$
$$=-\frac{1}{W^*}\left(\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial\boldsymbol{n}_i}+\frac{\partial\Phi_{\mathrm{I}}}{\partial\boldsymbol{n}_i}\right) \quad\cdots\cdots(4.2.5)$$

と書かれる。これを線型理論の場合の式 (3.3.6) と比較するとほとんど変わりがない。いずれも吹き上げとしては渦面に対する法線流速をとり，プロペラ翼素に対する流入速度は線型理論が W であるのに対し，非線型理論では W^* となっている。

4.3. 定ピッチ非線型理論

螺旋渦のピッチが一定でないとすると，線型プロペラ理論に見られるような理論の簡潔さと一貫性が失なわれ，はなはだ繁雑なものとなる。このことは第5章の伴流プロペラ理論の中に見ることができる。螺旋渦のピッチを一定と仮定すると，非線型理論とはいっても，線型理論と展開式はほとんど変わりなく，線型理論の簡潔さはそのまま保存される。

螺旋渦のピッチは (4.1.1) に示した h の半方向の平均値をとり，

$$h=\frac{V+\overline{w_a}}{\Omega+\overline{w_t/r}} \quad \text{または} \quad h=\overline{r\tan(\varepsilon+\alpha_i)} \qquad \cdots\cdots(4.3.1)$$

と仮定する。ただし $\overline{w_a}$, $\overline{w_t/r}$ はそれぞれ w_a, w_t/r の平均値を意味する。

このようにすると，4.1 節で区別した h と h' は等しくなり，無限後方の流場は (3.10.5) の微分方程式を満足する。

境界条件として (4.2.5) の W^* に含まれる w_a, w_t/r の代りにその平均値を用いることにすると，循環分布 γ を求める積分方程式は線型理論の場合と同形になるし，また Munk の定理は成り立つ。したがって線型理論の場合に行なった解析の結果はそのまま非線型理論に適用することができる。

揚力分布密度と循環分布密度の関係は Kutta-Joukowski の定理を用いると，

$$\text{揚力分布密度:} \quad \rho W^*\gamma \qquad \cdots\cdots(4.3.2)$$

である。

プロペラが単位時間に流体に対してなす仕事 P は，

$$P=-l\rho\iint\frac{\partial\Phi}{\partial n_i}\Big|_{\sigma=\sigma'}W^*\gamma dS' \quad \cdots(4.3.3)$$

である。これは線型理論の (3.6.19) に対応する式である。

線型理論の場合と同様に (4.3.3) の中の Φ_{II} に関する項は消失する。$\partial/\partial n_i$ の演算に (4.1.5) を用いると，(4.3.3) は

$$\begin{aligned}P&=l\rho\iint(\Omega r+w_t)w_a\gamma dS'\\&\quad-l\rho\iint(V+w_a)w_t\gamma dS'\\&=l\rho\int_0^{r_0}(\Omega r+w_t)w_a\Gamma dr\\&\quad-l\rho\int_0^{r_0}(V+w_a)w_t\Gamma dr\\&=l\rho\Omega\int_0^{r_0}(V+w_a)\Gamma r dr\\&\quad-l\rho V\int_0^{r_0}(\Omega r+w_t)\Gamma dr \qquad \cdots\cdots(4.3.4)\end{aligned}$$

となるから，Kutta-Joukowski の定理を用いると，

$$P=\Omega Q-VS \qquad \cdots\cdots(4.3.5)$$

となり，線型理論の場合と同様に P はプロペラのエネルギー損失を表わす。

要するに線型理論と非線型理論とでは，下表のように記号が変わっただけで，全体の表示式にはほとんど変化がない。

	線　型　理　論	非　線　型　理　論
翼素への流入速度	$W=\sqrt{V^2+\Omega^2r^2}$	$W^*=\sqrt{(V+\overline{w_a})^2+r^2(\Omega+\overline{w_t/r})^2}$
法　線　微　分	$\dfrac{\partial}{\partial n}=-\cos\varepsilon\dfrac{\partial}{\partial x}+\sin\varepsilon\dfrac{\partial}{r\partial\theta}$	$\dfrac{\partial}{\partial n_i}=-\cos\varepsilon_i\dfrac{\partial}{\partial x}+\sin\varepsilon_i\dfrac{\partial}{r\partial\theta}$
ピ　ッ　チ　角	$\dfrac{h}{r}=\tan\varepsilon=\dfrac{V}{\Omega r}$	$\dfrac{h}{r}=\tan\varepsilon_i=\dfrac{V+\overline{w_a}}{r(\Omega+\overline{w_t/r})}$
揚 力 分 布 密 度	$\Pi=\rho W\gamma$	$\rho W^*\gamma$

4.4. 最適プロペラ

最適プロペラを求めることは実用上極わめて重要なことであるから，プロペラ理論の研究の大半はこの問題に関連している。しかし最適プロペラの設計にプロペラ理論が有力な手段であるという実証は少ないようである。プロペラ理論は完全流体に関するものであるのに，実際のプロペラは粘性影響がかなりあるうえ，さらに複雑な船体伴流の中で作動するものであるから，理論を実際に近付けることはなかなかむつかしい。しかしプロペラ理論は最適プロペラ設計の一つの重要な拠り所であるし，また理論そのものとしても興味深いものであるから，今後の発展が望まれるところである。

定ピッチ非線型理論における最適プロペラの計算法はプロペラを揚力面として取り扱うとか，翼厚の影響を考慮するとかの新しい試みはあるが，Betz, Goldstein, Kramer, Ginzel and Ludwieg などの研究によって，現在その大綱はほぼ定まったものとなっている。以下にその概略を述べる。

最適プロペラの理論は，これを二つの段階に分けることができる。その一つはエネルギー損失極小の循環分布を求める「翼理論の第二境界値問題」である。他

の一つは上記問題で求められた循環分布をもち, shock free entry などの条件を満足するプロペラ翼の平面形, ピッチ分布などを求める「翼理論の第一境界値問題」である。

(1) プロペラ翼の第二境界値問題

この問題を具体的に述べると,「プロペラの半径, 翼数, 作動状態および軸馬力が与えられたとき, 推力馬力が最大になる循環分布を見い出すこと」である。これは (4.3.5) の右辺の第1項を一定に保ちながら, エネルギー損失 P を極小にすることであるから, 変分問題で周知のように, Pを極小にする条件は, (4.3.4) により,

$$l\rho\int_{r_b}^{r_0}\{k\Omega r(V+w_a)-V(\Omega r+w_t)\}\,\delta\Gamma dr=0 \qquad \cdots\cdots(4.4.1)$$

から導かれる。ただし k は Lagrange の常数である。

$\delta\Gamma$ は任意にとることができるから, (4.4.1) の $\delta\Gamma$ の係数関数は0でなければならない。したがって常数 k は,

$$k=\frac{V(\Omega r+w_t)}{\Omega r(V+w_a)}=\frac{\tan\varepsilon}{\tan\varepsilon_i} \quad \cdots(4.4.2)$$

となる。

図 7 を参照すると,

$$\frac{V+w_a}{\Omega r+w_t}=\frac{V+w^*}{\Omega r}$$

であるから, これを (4.4.2) に適用すると,

$$k=\frac{V}{V+w^*} \quad \text{または} \quad w^*=\frac{V(1-k)}{k} \qquad \cdots\cdots(4.4.3)$$

が得られる。k は常数であるから, エネルギー損失極小の場合, w^* は一定である。

非線型理論で仮に Munk の定理IIが成り立つものとすると, エネルギー損失は (4.3.4) の右辺で与えられ, 上記の解析によって, エネルギー損失極小であるためには, 螺旋渦のピッチは半径方向に一定でなければならないことになる。このことから, 最適プロペラとして設計されたプロペラの軽荷重および中荷重状態に定ピッチ非線型理論を適用することは当を得たものというべきであろう。

$$\left.\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial n_i}\right|_{\sigma=\sigma'}=2w_i=-2w^*\cos\varepsilon_i$$
$$=-\frac{2(1-k)}{k}\cdot V\cos\varepsilon_i \qquad \cdots\cdots(4.4.4)$$

であるから, 無限後方の流場を対照として考えると, 一定ピッチの自由渦の全螺旋面が剛体のように軸方向に一定速度 w^* で進行するとき生じる面に垂直な分速度に相当して, 吹き上げが分布される場合, エネルギー損失極小となる。これが Betz の条件である。

(4.4.4) の左辺に (4.1.6) を適用し, $2w^*h=1$ とおくと,

$$\left.\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial\sigma}\right|_{\sigma=\sigma'}=-\frac{\mu^2}{1+\mu^2} \qquad \cdots\cdots(4.4.5)$$

となる。

(4.4.5) を境界条件とする微分方程式 (3.10.5) の解を求めると, エネルギー損失極小の循環分布 Γ_i が得られる。この問題は Goldstein によってはじめて解かれた。

エネルギー損失極小の条件を満足する無限翼数プロペラの循環分布を Γ_∞ とすると,

$$\kappa=l\Gamma_i/\Gamma_\infty \qquad \cdots\cdots(4.4.6)$$

により定義される κ を Goldstein function と呼んでいる。

Goldstein の解は h をパラメターとするものであるが, 最適プロペラの設計に当たって, 最初は h は未知量である。これを求めるのに便利な図表が Kramer によって考えられた。

(4.4.2) より,

$$k\Omega r(V+w_a)\Gamma_i=V(\Omega r+w_t)\Gamma_i$$

である。これの両辺を r で r_b より r_0 まで積分すると,

$$k\Omega Q=VS \qquad \cdots\cdots(4.4.7)$$

であるから, k はエネルギー損失極小のプロペラの効率 η_i を意味する。したがって (4.4.2) は,

$$\eta_i=\lambda/\lambda_i=\lambda_0/\lambda_{0i},\ \lambda=\tan\varepsilon,\ \lambda_i=\tan\varepsilon_i=1/\mu,$$
$$\lambda_0=\lambda r/r_0,\ \lambda_{0i}=\lambda_i r/r_0=1/\mu_0 \qquad \cdots\cdots(4.4.8)$$

と書かれる。

ここで推力係数 C_T およびパワー係数 C_P をそれぞれ,

$$C_T=8S/(\pi\rho V^2D^2),\ C_P=8\Omega Q/(\pi\rho V^3D^2) \qquad \cdots\cdots(4.4.9)$$

のように定義すると, C_T, C_P は λ_0 と λ_{0i} の関数であるが, (4.4.8) の関係により, λ_0 と η_i の関数と考えてもよい。したがって Goldstein の解から, $C_T-\eta_i-\lambda_0$, $C_P-\eta_i-\lambda_0$ の関係を図表に表わすことができる。これが Kramer の図表である。

プロペラの作動状態および推力が与えられたとすると, Kramer の図表より η_i が求められ, (4.4.8) により λ_{0i}, (4.4.3) により w^* が定まる。

Goldstein function κ は λ_{0i} をパラメターとして図表にされているので，直ちに κ の値を読みとることができる。無限翼数のときの循環分布 Γ_∞ は

$$\frac{\Gamma_\infty}{Vr_0}=4\pi\cdot\frac{w^*}{V}\frac{\lambda_i\cdot(r/r_0)}{\lambda_i^2+1}=\frac{4\pi w^*}{V\mu_0}\frac{\mu^2}{1+\mu^2} \quad \cdots\cdots(4.4.10)$$

であるから，エネルギー損失極小の循環分布は，すでに読みとった κ と (4.4.6)，(4.4.10) を用いると，簡単に求めることができる。

(2) プロペラ翼の第一境界値問題

プロペラの半径，翼数，作動状態，推力が与えられたときの最適プロペラの循環分布は，エネルギー損失極小の条件によって定まる。この循環分布に適合し，shock free entry の条件を充たす翼平面形，ピッチ分布，キャンバー分布を求めるのが，プロペラで普通遭遇する第一境界値問題である。

揚力線理論を用いると，その解答は簡単に得られるので，実用的に極わめて好都合である。

この問題を渦格子の方法によって解いている例が最近多くなっているが[19,20]，それらの研究はほとんどピッチ修正係数およびキャンバー修正係数のさらに正確な値を得ようとの目的によって進められている。

shock free entry の条件は (3.9.6) であるから，(3.9.8) のピッチ修正係数を既知とすると

$$\alpha_g=\alpha_i/k_1 \quad \cdots\cdots(4.4.11)$$

である。

$$\alpha_i=-\frac{w_i}{W^*}=\frac{w^*\cos\varepsilon_i}{W^*}=\frac{V(1-\eta_i)}{W^*\sqrt{\lambda^2+\eta_i^2}}$$

$$\begin{aligned}W^*&=(V-w_i\cos\varepsilon_i)\sqrt{1+\mu^2}\\&=(V+w^*\cos^2\varepsilon)\sqrt{1+\mu^2}\\&=V\left\{1+\frac{\eta_i(1-\eta_i)}{\lambda^2+\eta_i^2}\right\}\frac{\sqrt{\lambda^2+\eta_i^2}}{\lambda}=\frac{V}{\lambda}\frac{\lambda^2+\eta_i}{\sqrt{\lambda^2+\eta_i^2}}\end{aligned} \quad \cdots\cdots(4.4.12)$$

であるから，

$$\alpha_i=\frac{\lambda(1-\eta_i)}{\lambda^2+\eta_i}=\frac{1-\eta_i}{\lambda+1/\lambda_i}=\frac{\lambda_i-\lambda}{1+\lambda\lambda_i} \quad \cdots\cdots(4.4.13)$$

のように表わされる。したがってピッチ分布は，

$$\alpha_g=\frac{1}{k_1}\frac{\lambda_i-\lambda}{1+\lambda\lambda_i} \quad \cdots\cdots(4.4.14)$$

によって計算することができる。

非線型理論では (3.9.7) の W を W^* で置換えたものであるから，(4.4.11) を満足する循環分布は，

$$\Gamma_i=2\pi c^*W^*k_2f_g/c^* \quad \cdots\cdots(4.4.15)$$

のように表わされる。エネルギー損失極小の循環分布 Γ_i は定まっているので，k_2 を既知とすると，翼平面形を与えれば，キャンバー分布 f_g/c^* は (4.4.15) によって定まる。

以上のように揚力線理論を用いると，最適プロペラを簡単に求めることができるが，これらの理論がほとんど Munk の定理によって支えられていることを忘れてはならない。

4.5. 直進翼とプロペラの縦横比

Pistolesi[5)] [IV, pp. 249] はプロペラ性能を翼素理論によって計算するときの有効迎角 α_e を推定するのに，これを直進翼の有効迎角と対応させ，両者が等しくなるような直進翼の縦横比を近似的に求め，これをプロペラの相当縦横比と呼んだ。

非線型理論の螺旋渦面は有効迎角に沿ったもので，そのピッチは未知量であるから，相当縦横比の考えを利用して，その第0近似を求めるのがよいであろう。

Pistolesi の相当縦横比は運動量定理を用いて求めたものであるから，翼数の影響が含まれていない。ここではプロペラの循環分布を Goldstein 分布と仮定し，Kutta-Joukowski の定理を用いて相当縦横比を求める[53)]。

直進平板楕円翼の場合に

$$\frac{\alpha_e}{\alpha_g}=\frac{\alpha_g-\alpha_i}{\alpha_g}=\frac{1}{1+\dfrac{dC_L}{d\alpha}\cdot\dfrac{1}{\pi A}},\quad A=\frac{4b^2}{F} \quad \cdots\cdots(4.5.1)$$

の関係のあることが知られている[5)] [II, pp. 169]。ただし F は翼面積で，A は縦横比である。$dC_L/d\alpha=2\pi$ とすると，(4.5.1) より，

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_g}=\frac{1}{1+A/2} \quad \cdots\cdots(4.5.2)$$

が得られる。

次にプロペラの循環分布を Goldstein 分布と仮定して，

$$\frac{\Gamma}{Vr_0}=\frac{w^*G(\mu)}{V} \quad \cdots\cdots(4.5.3)$$

のように表わす。このときの誘導迎角 α_i は，

$$\alpha_i=w^*\cos\varepsilon_i/W^* \quad \cdots\cdots(4.5.4)$$

である。(4.5.3)，(4.5.4) より w^* を消去すると，

$$\Gamma=\alpha_iW^*r_0G(\mu)/\cos\varepsilon_i \quad \cdots\cdots(4.5.5)$$

となる。Kutta-Joukowski の定理によると $\Gamma=c^*W^*C_L$ であるから，これを (4.5.5) に適用すると，

$$\frac{c^*\cos\varepsilon_i\cdot C_L}{r_0G(\mu)}=\alpha_i \qquad \cdots\cdots(4.5.6)$$

が得られる。この式の両辺に α_e を加え，両辺を α_e で除すと，

$$\frac{c^*\cos\varepsilon_i}{r_0G(\mu)}\frac{C_L}{\alpha_e}+1=\frac{\alpha_g}{\alpha_e}\cdots\cdots(4.5.7)$$

が得られる。

プロペラのピッチ H を一定とし，(4.2.5) と図 7 を参照すると，

$$\alpha_g=-\frac{w}{W^*}=\frac{(nH-V)\cos\varepsilon_0}{W^*}\cdots(4.5.8)$$

である。 $\cos\varepsilon_0\fallingdotseq\cos\varepsilon_i$ と置いても大差ないから，(4.5.4) と (4.5.8) とより，

$$\frac{\alpha_g}{\alpha_e}=\frac{nH-V}{nH-V-w^*}=\text{const.}\cdots\cdots(4.5.9)$$

となる。すなわち α_g/α_e は半径方向に一定であるし，また $C_L/\alpha_e=dC_L/d\alpha=2\pi$ であるから，(4.5.7) より $c^*\cos\varepsilon_i/G(\mu)=\text{const.}$ でなければならない。それで，

$$c^*=\bar{c}G(\mu)/\cos\varepsilon_i,\quad \bar{c}=\text{const.}\quad\cdots(4.5.10)$$

とおくと，(4.5.7) より，

$$\frac{\alpha_e}{\alpha_g}=\frac{1}{1+\dfrac{dc_L}{d\alpha}\dfrac{\bar{c}}{r_0}}\qquad\cdots\cdots(4.5.11)$$

が得られる。

(4.5.1) と (4.5.11) とはほとんど同形である。楕円翼と Goldstein 分布のプロペラで， $A=r_0/(\pi\bar{c})$ のとき α_e/α_g が等しくなる。すなわち $r_0/(\pi\bar{c})$ がプロペラの相当縦横比である。これが定まれば，(4.5.2) によって第 0 近似の α_i/α_g を計算することができる。

(4.4.6)，(4.4.10)，(4.5.3) より，$G(\mu)$ は

$$G(\mu)=\frac{4\pi}{l\mu_0}\frac{\kappa\mu^2}{1+\mu^2}\qquad\cdots\cdots(4.5.12)$$

のように表わされる。これと (4.5.10) とより，

$$c^*=\bar{c}\cdot\frac{4\pi}{lr_0}\frac{\kappa r}{\sqrt{1+\mu^2}}\cdots\cdots(4.5.13)$$

となる。

展開面積比を a_a，ボス比を d_b で表わすと，プロペラ翼の幾何学的縦横比 A_g は，

$$A_g=\frac{(r_0-r_b)^2}{\int_{r_b}^{r_0}c^*dr}=\frac{l(r_0-r_b)^2}{a_a\pi r_0^2}=\frac{l}{\pi a_a}(1-d_b)^2 \qquad\cdots\cdots(4.5.14)$$

である。(4.5.14) の c^* に (4.5.13) の右辺を代入すると，

$$A_g=(r_0-r_b)^2\Big/\left\{\frac{4\pi\bar{c}}{lr_0}\int_{r_b}^{r_0}\frac{\kappa r}{\sqrt{1+\mu^2}}dr\right\}$$

であるから，相当縦横比 $r_0/(\pi\bar{c})$ と幾何学的縦横比との関係は，

$$\frac{r_0}{\pi\bar{c}}=\frac{4/l}{(r_0-r_b)^2}\int_{r_b}^{r_0}\frac{\kappa r}{\sqrt{1+\mu^2}}dr\cdot A_g \qquad\cdots\cdots(4.5.15)$$

である。このように相当縦横比は翼数およびプロペラの作動状態によって変化する。

実際のプロペラの平面形は必ずしも (4.5.13) で与えられるものとは一致しないが，A_g を (4.5.14) を用いてプロペラ平面形より求め，(4.5.15) によって $r_0/(\pi\bar{c})$ を計算するのがよいであろう。κ を求める際の螺旋渦のピッチは線型理論の値をとって $h=V/\Omega$ とする。

4 翼プロペラで相当縦横比を $3/\pi$ とすると，$V/(nD)=0.8$ のとき，(4.5.13) で与えられる翼輪郭は Troost の B 型 4 翼，$a_a=0.4$ のプロペラの翼輪郭に極わめて近い形となる。このプロペラの幾何学的縦横比は 2.2 である。すなわち，プロペラが直進翼と幾何学的縦横比が同程度な場合であっても，相当縦横比はかなり小さいので，プロペラの誘導迎角は直進翼のものより遙かに大きい。このことから，プロペラに非線型理論の必要なことが理解できるであろう。

4.6. 揚力線による揚力面の逐次近似計算法

プロペラにおける「翼理論の第三境界値問題」は (3.3.13) の形の積分方程式を解くことである。すでに述べたようにこの方程式の性質は直進揚力面のそれに非常によく似ているので，直進揚力面で研究されてきた方法を応用することができる。

プロペラの性能を求めるだけならば，揚力線理論でもかなりよい結果の得られることが知られている。揚力線の計算法には，連続な循環分布を用いる守屋の方法[1]（誘起係数の方法といわれる）と，階段状の循環分布を仮定する河田の方法[2]（渦格子法の源泉と考えられる）の二つの系列に分けることができる。この二つの方法はそれぞれに長所をもっていて，その優劣はつけ難い。しかし最近はプロペラ性能ばかりでなく，プロペラ表面の圧力分布を求めることにも一部の関心が集まりつつあるので，揚力面の計算は次第に活発になるであろう。

非線型理論では螺旋渦のピッチを逐次近似計算法で求めなければならない。この逐次近似計算が避けられないならば，揚力面を揚力線の逐次近似計算で解く方

法[53]をとり，その逐次近似の途上で，螺旋渦のピッチも順次正確なものを導入するようにすれば，計算の手数は半減する。以下に定ピッチ非線型理論による揚力面を揚力線によって逐次近似で解く方法の概略を解説する。

定ピッチ非線型理論の積分方程式は境界条件（4.2.5）と線型理論の積分方程式（3.3.13）を参照すると，

$$\varepsilon_0-\varepsilon=\frac{1}{W^*}\int_{\mu_b}^{\mu_0}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma K\left(\frac{\tau-\tau'}{2};\ \mu,\ \mu'\right)d\tau' \quad \cdots\cdots(4.6.1)$$

のように書かれる。これの核関数 K は（3.3.14），（3.4.9），（3.5.12）などで表わされるものである。またピッチを表わすパラメター h は（4.3.1）で与えられる。

（4.6.1）を Prandtl 揚力線の積分方程式の形に書き改めるのであるが，その方法は 3.8 節および 3.9 節の運算とまったく同じである。ただそこで W と書かれているものを W^* に書き改めればよい。すなわち，（4.6.1）は，

$$\tilde{\alpha}_g=\frac{1}{2\pi W^*}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma}{\xi-\xi'}d\xi'+\alpha_i+u \quad \cdots\cdots(4.6.2)$$

のように表わされる。ただし，

$$\alpha_i=-\frac{l^3\sqrt{1+\mu^2}}{2\pi W^*h\mu}\int_{\mu_b}^{\mu_0}\Gamma(\mu')\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)d\mu'\sum_{k=1}^{\infty}k^2I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>) \quad \cdots\cdots(4.6.3)$$

$$\begin{aligned}u=&-\frac{1}{8\pi W^*\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu_b}^{\mu_0}\sqrt{1+\mu'^2}\,d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma\,d\tau'\sum_{m=0}^{l-1}\frac{\mu\mu'v+\sin v_m}{(v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos v_m)^{3/2}}\\&-\frac{3\sqrt{1+\mu^2}}{8\pi W^*}\int_{\mu_b}^{\mu_0}(1+\mu'^2)^{3/2}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma\,d\tau'\sum_{m=0}^{l-1}\int_0^v\frac{t\sin t_m}{(t^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos t_m)^{5/2}}dt\\&-\frac{1}{2\pi W^*}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma}{\xi-\xi'}d\xi'\end{aligned} \quad \cdots\cdots(4.6.4)$$

である。

（4.6.2）を γ について解くと，（3.8.6）のように，

$$\frac{\gamma}{W^*}=-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\oint_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\frac{\tilde{\alpha}_g-u}{\xi-\xi'}d\xi'-2\alpha_i\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \quad \cdots\cdots(4.6.5)$$

と書かれる。この式の両辺を積分して全循環を求めると，

$$\frac{\Gamma}{2\pi c^*W^*}+\alpha_i=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}(\tilde{\alpha}_g-u)d\xi \quad \cdots\cdots(4.6.6)$$

と書かれる。

$$W^*=(V-w_i\cos\varepsilon_i)\sqrt{1+\mu^2}=(V+W^*\alpha_i\cos\varepsilon_i)\sqrt{1+\mu^2}$$

であるから，

$$W^*=\frac{V\sqrt{1+\mu^2}}{1-\sqrt{1+\mu^2}\,\alpha_i\cos\varepsilon_i}=\frac{V}{\sin\varepsilon_i-\alpha_i\cos\varepsilon_i} \quad \cdots\cdots(4.6.7)$$

である。W^* はこの式によって計算するのがよいであろう。h は w_a, w_t/r の平均値を用いて計算するのであるが，（4.3.1）の第2式を用いてもよい。

第 j 近似の α_i, u, γ, Γ, h などを $\alpha_i^{(j)}$, $u^{(j)}$, $\gamma^{(j)}$, $\Gamma^{(j)}$, $h^{(j)}$ で表わすことにする。

$\alpha_i^{(0)}$ は 4.5 節の方法によって計算し，それを用いて，$W^{*(0)}$, $h^{(0)}$ を求める。

まづ $u^{(1)}=0$ として，（4.6.6）の積分方程式を解くと $\alpha_i^{(1)}$，さらに $h^{(1)}$, $W^{*(1)}$ が求められる。それを（4.6.5）に代入すると，$\gamma^{(1)}$ が得られる。これが第1近似の循環分布密度である。$\gamma^{(1)}$, $h^{(1)}$, $W^{*(1)}$ を（4.6.4）に代入すると $u^{(2)}$ が得られる。$u^{(2)}$‘ $h^{(1)}$, $W^{*(1)}$ を用いて再ぶ（4.6.6）を解くと，$\alpha_i^{(2)}$, $h^{(2)}$, $W^{*(2)}$ が得られる。以下この計算を繰り返すと，γ の正確な値を求めることができる。

以上の計算の中で u の計算が最も工夫を要する所であろう。もしこれの計算が正確にできなければ，逐次近似計算は発散して解が得られない結果に終わるこ

とがある。

(4.6.4) の u は

$$u=\int_{\mu_b}^{\mu_0}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma J(v,\ \mu,\ \mu')d\tau' -\frac{1}{2\pi W^*}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma}{\xi-\xi'}d\xi' \quad \cdots\cdots(4.6.8)$$

のように表わされる。したがって第 $j+1$ 近似の u は

$$u^{(j+1)}=\int_{\mu_b}^{\mu_0}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma^{(j)}J^{(j)}(v,\ \mu,\ \mu')d\tau' -\frac{1}{2\pi W^{*(j)}}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma^{(j)}}{\xi-\xi'}d\xi' \quad \cdots(4.6.9)$$

である。これと同じ記法を (4.6.2) に用いると,

$$\tilde{\alpha}_g-\alpha_i^{(j)}-u^{(j)}=\frac{1}{2\pi W^{*(j)}}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma^{(j)}}{\xi-\xi'}d\xi' \quad \cdots\cdots(4.6.10)$$

である。(4.6.9) と (4.6.10) とを辺々加えると,

$$\beta^{(j)}=u^{(j+1)}-u^{(j)}+\tilde{\alpha}_g-\alpha_i^{(j)} =\int_{\mu_b}^{\mu_0}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma^{(j)}J^{(j)}(v,\ \mu,\ \mu')d\tau' \quad \cdots(4.6.11)$$

と書かれる。これはまた,

$$u^{(j+1)}=u^{(j)}+\beta^{(j)}+\alpha_i^{(j)}-\tilde{\alpha}_g \cdots(4.6.12)$$

と書かれるから, $\beta^{(j)}$ を計算すれば, $u^{(j+1)}$ の値が求められる。

元の積分方程式 (4.6.1) を参照すると,

$$\beta^{(j)}+\alpha_i^{(j)} =\frac{1}{W^{*(j)}}\int_{\mu_b}^{\mu 0}d\mu'\int_{\tau_1}^{\tau_2}\gamma^{(j)}K^{(j)}(v,\ \mu,\ \mu')d\tau' =\tilde{\alpha}_g^{(j)} \quad \cdots\cdots(4.6.13)$$

であるから, (4.6.12) と (4.6.13) とより,

$$\varDelta u^{(j)}=u^{(j+1)}-u^{(j)}=\tilde{\alpha}_g^{(j)}-\tilde{\alpha}_g \cdots(4.6.14)$$

の関係が得られる。これは重要な関係式である。すなわち $\varDelta u^{(j)}$ を計算すると, 吹き上げの誤差が確認できる。

$\beta(\xi,\ \mu)$ を ξ について Taylor 展開して,

$$\beta(\xi,\ \mu)=\beta(0,\ \mu)+\beta'(0,\ \mu)\xi +\frac{1}{2!}\beta''(0,\ \mu)\xi^2+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots(4.6.15)$$

と書き, β', β'', …などを計算して (4.6.15) によって $\beta(\xi,\ \mu)$ の値を求めるようにすると計算は容易であろう。

$$\beta'=\frac{\partial\beta}{\partial\xi}=\mp\frac{\partial\beta}{\partial\tau} \quad \cdots\cdots(4.6.16)$$

であるから, (4.6.4) の μ の中に含まれる t に関する積分は (4.6.15) の右辺第2項以下の係数の計算には現われないので, 数値計算には好都合である。

5. 伴流プロペラの理論

船のプロペラは普通船体と舵の間で作動しているものであるから, プロペラの性能は最終的にはそれらのものとの相互作用を含めて考える必要がある。模型船自航試験解析の目的も, 一つにはそこにあるわけである。

船体, プロペラおよび舵は作動状態と scale が非常に異なるものであるから, それを一体のものとして解析することは, 理論を繁雑にするばかりで, 成果は少ないであろう。そのため相互作用の理論解析は普通, (1) プロペラが, 船体に及ぼす影響, (2) プロペラが舵に及ぼす影響, (3) 船体および舵がプロペラに及ぼす影響の三つに分けて取り扱い, 最終的にこの三つを総合する。この他, 船体と舵の相互作用を考える必要があるが, これは主として舵の操縦性に関連して研究され, 推進性能には関係の薄いものである。

(1) は Dickmann[54] 以来幾つかの研究が公表されているが[55,56], そのほとんどがプロペラを吸込分布で置換える作動円盤の理論[57),5] [IV, pp. 365] を応用したものである。(2) はプロペラは無限翼数と仮定し, 舵についてはねじれた流れの中にある直進翼の理論として解析を行なうものである[58]。(3) は相互作用の三つの問題の中で最も重要なもので, 伴流プロペラの理論といわれる。伴流プロペラ理論は, 伴流をプロペラ軸に関して対称なものと (これを定常伴流と呼ぶことにする), そうでなく, プロペラの一回転で翼素への流入角の変わる不均一なものに分け (これを不均一伴流と呼ぶことにする), 前者については定常プロペラ理論, 後者については非定常プロペラ理論を適用するものである。船体の推進性能に関係するのは主として定常伴流である。以下では定常伴流のプロペラ理論について述べる。

定常伴流プロペラ理論は Lerbs[11] の研究が知られているが, それ以後の進展はほとんど見られない。

5.1. Fresenius の原理

Fresenius は船後プロペラの相互作用を巨視的に考察して重要な原理を導いた[59]。この原理にはなかなか味わい深い要素が含まれている。

まず無限に広がる完全流体中を流線型物体がプロペラによって一定速度 V で推進されている場合を仮想する。完全流体中では物体には抵抗は働かないから, 外部から抵抗 R を作用させる。プロペラ回転面内の平均流入速度を $\overline{V}_1$, プロペラ推力を S とすると, エ

ネルギー定理により，$VR=\overline{V}_1S$ であるから，推進係数 $\eta'=VR/(\Omega Q)$ とプロペラ効率 $\eta_p'=\overline{V}_1S/(\Omega Q)$ の間には，

$$\eta'=\eta_p' \qquad \cdots\cdots(5.1.1)$$

の関係が成立つ。

次に無限に広がる粘性流体中を厚さのない平板で作られた格子が，それより少し離れた後方に取り付けられたプロペラによって一定速度 V で推進されている場合を仮想する。この格子には摩擦抵抗だけが働らき，推力減少を無視することができる。格子の摩擦抵抗を R_f とすると，$R_f=S$ であるから，

$$\eta'=\frac{VR_f}{\Omega Q}=\frac{VS}{\Omega Q}=\frac{\overline{V}_1S}{\Omega Q}\frac{1}{1-w_f}=\frac{\eta_p'}{1-w_f} \qquad \cdots\cdots(5.1.2)$$

となる。ただし w_f は格子の摩擦伴流係数である。

$1/(1-w_f)>1$ であるから，推進係数 η' はプロペラ効率 η_p' より大きくなり，推進器は摩擦伴流からエネルギーを吸収して，結果的には効率を高めていることになる。これが Fresenius の原理である。これは一見不思議に見えるが，風の中で車を引張るより押した方が楽であるという事実に似たところがある。この原理は w_f が大きい方がよいといっているのではなく，摩擦伴流は利用すべきものであることを示唆しているのである。

摩擦伴流だけでなく，波浪伴流，舵の誘導速度についても，(5.1.2) と同じ関係が成立つ。船後プロペラではその効率を多少犠牲にしても，このエネルギーを利用することで良好な結果の得られる場合があるといわれる。

もし最適の伴流プロペラが得られれば，さらに推進性能の向上を計ることができるものと思われるが，現在最適の伴流プロペラを求める的確な方法は見い出されていない。このためか，伴流プロペラが普通型プロペラより優れているという実績は少ないようである。伴流プロペラ理論の発展が望まれるゆえんである。

5.2. 境界条件

プロペラ回転面における軸方向および接線方向の流入速度を V_1, $\Omega_1 r$ で表わし，

$$V_1=V\{1-w(r)\},\quad \Omega_1 r=\Omega r\{1-\omega(r)\} \qquad \cdots\cdots(5.2.1)$$

と書く。ただし，$w(r)$, $\omega(r)$ は伴流係数である。

定常伴流プロペラ理論の束縛渦および自由渦の分布する螺旋面のピッチは半径方向に一定ではなく，

$$\frac{h(r)}{r}=\tan\varepsilon_1=\frac{V_1+w_a}{\Omega_1 r+w_t} \qquad \cdots\cdots(5.2.2)$$

で定まるものと仮定する。

速度ポテンシャルは (4.1.4) の表示式を用い，$\partial/\partial \boldsymbol{n}''$ は近似的に螺旋および動径に対する法線微分で表わされるものとして，

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{n}''}\fallingdotseq-\cos\varepsilon_1\frac{\partial}{\partial x'}+\sin\varepsilon_1\frac{\partial}{r'\partial\theta'} \qquad (5.2.3)$$

とする。

境界条件式は非線型理論の場合とほとんど同じ方法でその表示式が導かれる。すなわち (4.2.1) の V, Ω を V_1, Ω_1 で置換えたもので表わされる。(4.2.1) より (4.2.5) までの運算と同じようにすれば，境界条件式として，

$$\varepsilon_0-\varepsilon^*=-\frac{1}{W_1^*}\left(\frac{\partial\Phi_{\rm II}}{\partial \boldsymbol{n}_1}+\frac{\partial\Phi_{\rm I}}{\partial \boldsymbol{n}_1}\right) \qquad (5.2.4)$$

が得られる。ただし，

$$\tan\varepsilon^*=\frac{V_1}{\Omega_1 r},$$
$$W_1^*=\sqrt{(V_1+w_a)^2+(\Omega_1 r+w_t)^2} \qquad \cdots\cdots(5.2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial n_1}=-\cos\varepsilon_1\frac{\partial}{\partial x}+\sin\varepsilon_1\frac{\partial}{r\partial\theta} \qquad (5.2.6)$$

である。

5.3. 吹上げの表示式と揚力線の仮定

伴流プロペラの速度ポテンシャルには (4.1.4) を用いればよいことは前節に述べたが，それを変換していくと，(4.1.9), (4.1.10) とまったく同形の表示式が得られる。ただし，その場合の h は (5.2.2) に定義するものである。それに (5.2.6) の演算を行なって吹き上げの表示式を求めると，

$$\frac{\partial\Phi_{\rm II}}{\partial n_1}=\frac{l}{4\pi^2\sqrt{1+\mu^2}}\iint\frac{\gamma}{h'}dS'\sum_{k=-\infty}^{\infty}$$
$$\times\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mu'\lambda-lk/\mu')(\mu\lambda/h'-lk/r)}{\lambda+lk}$$
$$\times\sin\frac{1}{2}\{(\lambda+lk)(\tau-\tau')-(\lambda-lk)(\sigma-\sigma')\}$$
$$\times I_{lk}(|\lambda|\mu_<)K_{lk}(|\lambda|\mu_>)d\lambda \qquad \cdots\cdots(5.3.1)$$

$$\frac{\partial\Phi_{\rm I}}{\partial n_1}=\frac{l^3}{2\pi\sqrt{1+\mu^2}}\iint\frac{\gamma}{h'^2}dS'\sum_{k=1}^{\infty}k^2$$
$$\times\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\left(\mu+\frac{h'}{r}\right)$$
$$\times I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>)\cos lk(\sigma-\sigma') \qquad \cdots\cdots(5.3.2)$$

ただし，$\mu=r/h$, $\mu_1=r/h'$, $\mu'=r'/h'$ であり，$\mu_>$,

$\mu_<$ はそれぞれ μ_1, μ' の内大きい方および小さい方を意味する。

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\partial\Phi_{\rm II}}{\partial n_1}=\frac{\partial\Phi_{\rm I}}{\partial n_1} \qquad \cdots\cdots(5.3.3)$$

であるから，

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}=2\frac{\partial\Phi_{\rm I}}{\partial n_1} \qquad \cdots\cdots(5.3.4)$$

となる。

(5.3.1) の変数 $\tau, \sigma, \tau', \sigma'$ を (4.1.2), (4.1.7) によって，x, θ, x', θ' にもどし，$\lambda/h'=\tilde{\lambda}$ によって積分変数 λ を $\tilde{\lambda}$ に変えると，

$$\frac{\partial\Phi_{\rm II}}{\partial n_1}=\frac{l}{4\pi^2\sqrt{1+\mu^2}}\iint h'\gamma dS'\sum_{k=-\infty}^{\infty}$$
$$\times\oint_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mu'\tilde{\lambda}-lk/r')(\mu\tilde{\lambda}-lk/r)}{\tilde{\lambda}h'+lk}$$
$$\times\sin\{\tilde{\lambda}(x-x')+lk(\theta-\theta')\}$$
$$\times I_{lk}(|\tilde{\lambda}|r_<)K_{lk}(|\tilde{\lambda}|r_>)d\tilde{\lambda} \qquad \cdots\cdots(5.3.5)$$

と書かれる。ただし $r_>$, $r_<$ はそれぞれ r, r' の内大なる方および小なる方を意味する。

揚力要素を螺旋に沿って前後に移動して，プロペラの前進方向と直交する一平面上に集めて揚力線を作ったとき，その揚力線が一つの動径と重なるとみなして差し支えない場合が多い。このときは揚力線上で

$$\left.\frac{\partial\Phi_{\rm II}}{\partial n_1}\right|_{\substack{x=x'\\ \theta=\theta'}}=0 \qquad \cdots\cdots(5.3.6)$$

となることは (5.3.5) より明らかである。また揚力線上における $\Phi_{\rm I}$ による吹き上げは，(5.3.2) より，

$$-W_1{}^*\alpha_i=\left.\frac{\partial\Phi_{\rm I}}{\partial n_1}\right|_{\sigma=\sigma'}$$
$$=\frac{l^3}{2\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{r_b}^{r_0}\frac{\Gamma}{h'^2}dr'\sum_{k=1}^{\infty}k^2$$
$$\times\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\left(\mu+\frac{h'}{r}\right)$$
$$\times I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>) \qquad \cdots\cdots(5.3.7)$$

となる。

伴流プロペラの (1.1.1) に対応する式は非線型理論の場合と同様にすれば導くことができる。それは (4.6.6) と同形で

$$\frac{\Gamma}{2\pi c^*W_1{}^*}+\alpha_i=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}}(\tilde{\alpha}_g-u)d\xi \qquad \cdots\cdots(5.3.8)$$

である。

(5.3.7) の α_i を (5.3.8) に代入すると Γ に関する積分方程式が得られる。これが伴流プロペラの揚力線の積分方程式である。Lerbs[11] の伴流プロペラの理論にこの積分方程式の計算法が述べられている。

4.6 節の方法を用いれば，(5.3.7), (5.3.8) の積分方程式を正確に解くことができるが，その計算はかなり手数のかかるものである。

5.4. エネルギー損失極小の条件

伴流プロペラ理論では Munk の定理が成り立たないため，「翼理論の第二境界値問題」を解くのに，均一流中のプロペラのような明快さは失なわれ，極わめて雑然としたものになる。最適伴流プロペラについては van Manen[60] の研究があって，Lerbs もこれを利用しているが，その論旨には説得力に乏しいところが見受けられる。以下に述べるものは，この問題に対する一つの試みであって，その適否の検証は将来の課題である。

Kutta-Joukowski の定理を用いると，翼の揚力分布密度は $\rho W_1{}^*\gamma$ であるから，プロペラが単位時間に流体に対してなす仕事 P は，

$$P=-l\rho\iint\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}W_1{}^*\gamma S'$$
$$=-l\rho\iint\frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\frac{h}{r}\sqrt{1+\mu^2}(\Omega_1 r+w_t)\gamma dS' \qquad \cdots\cdots(5.4.1)$$

である。この式に (5.3.1), (5.3.2) の吹き上げを代入したとき，$\partial\Phi_{\rm II}/\partial n_1$ を含む項は積分順序を交換すると，符号は逆になるが，形まで変わるので 0 にならないし，また $\partial\Phi_{\rm I}/\partial n_1$ については翼面上で $\sigma-\sigma'\neq0$ のことが多いので，Munk の定理 I および II は成り立たない。したがって損失エネルギーは循環分布密度の半径方向ばかりでなく，翼弦方向の分布にも依存することになって，Prandtl の第一，第二の境界値問題を解くことが非常にむつかしくなってくる。

実際問題では $h(r)$ の変化は緩やかな場合が多いので，P の中の $\partial\Phi_{\rm II}/\partial n_1$ を含む項は他の項に比べて小さいと考えて省略し，また $\cos(\sigma-\sigma')\fallingdotseq1$ として，Munk の定理 I および II が成り立つとみなしても大過ないであろう。

また (5.3.4), (5.3.6) に示すように Munk の定理 III は近似的に成り立つが，Φ_∞ は螺旋渦のピッチが半径方向に異なるので，この流場は (3.10.5) の微分方程式を満足しない。したがって Goldstein のようにしてエネルギー損失極小の循環分布を求めることができないわけである。Φ_∞ が近似的に (3.10.5) を満足するとしてしまったのでは，不均一ピッチを採用した

意味が失なわれてしまう。結局，Munk の定理IIIは不均一ピッチの螺旋渦を考える流場ではあまり役に立たない。

上述のように近似的に Munk の定理 I，IIが成り立つものとすると，その仮定は，

$$\left.\begin{aligned} &\cos(\sigma-\sigma')=1 \\ &P=-l\rho\iint\frac{\partial\Phi_I}{\partial n_1}W^*\gamma dS' \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5.4.2)$$

と同等で，かつ揚力面線で置換えても損失エネルギーに関しては解析結果に変わりはない。

$$W_1{}^*\frac{\partial\Phi_I}{\partial n_1}=-(\Omega_1 r+w_t)w_a+(V_1+w_a)w_t$$
$$=-\Omega_1 r(V_1+w_a)+V_1(\Omega_1 r+w_t)$$

であるから，

$$P=l\rho\int_{r_b}^{r_0}\Omega_1 r(V_1+w_a)\Gamma dr$$
$$-l\rho\int_{r_b}^{r_0}V_1(\Omega_1 r+w_t)\Gamma dr \quad \cdots\cdots(5.4.3)$$

となる。

半径 r の位置の微小部分 dr に作用するトルクおよび推力の成分をそれぞれ dQ, dS で表わすと，Kutta-Joukowski の定理により，

$$\left.\begin{aligned} dQ&=l\rho r(V_1+w_a)\Gamma dr \\ dS&=l\rho(\Omega_1 r+w_t)\Gamma dr \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5.4.4)$$

である。したがって (5.4.3) の右辺第1項は軸動力，第2項は推力動力を表わし，P は伴流プロペラのエネルギー損失を意味することになる。

$\omega(r)$ は小さいことが多いので，普通は省略している。ここでは省略しないが，半径方向に一定と仮定する。そのときは (5.4.3) の右辺第1項は伴流プロペラの軸馬力に対応するものである。

軸馬力を与えて P を極小にする条件は，非線型理論のところで述べたのと同様にすれば求められる。その結果は k を常数とすると，

$$k=\frac{V_1(\Omega_1 r+w_t)}{\Omega_1 r(V_1+w_a)}=\frac{\tan\varepsilon^*}{\tan\varepsilon_1} \quad \cdots(5.4.5)$$

である。よって，

$$k=\frac{V_1}{V_1+w^*} \quad \text{すなわち} \quad w^*=\frac{(1-k)V_1}{k} \quad \cdots\cdots(5.4.6)$$

となる。w^* は V_1 に比例するので，半径方向に一定とならない。

以上から，エネルギー損失極小の条件として，

$$\left.\frac{\partial\Phi_I}{\partial n_1}\right|_{\sigma=\sigma'}=-w^*\cos\varepsilon_1=-\frac{(1-k)V_1}{k}\cos\varepsilon_1 \quad \cdots\cdots(5.4.7)$$

が得られる。

(5.4.7) の境界条件を (5.3.7) に適用すると，エネルギー損失極小の循環分布 Γ_i に関する積分方程式が得られる。これは非線型の積分方程式であるから，数値計算にはかなりの手数を要することであろう。

結　　言

副題に示すように，プロペラ揚力線理論の有用さと，Munk の定理の重要性を説こうとするのが，本文執筆に当って，筆者が意図した課題の一つであったが，その目的はほぼ達せられたように考えている。

Munk の定理の適用できない伴流プロペラの理論が解析のなかなかむつかしいものであることが理解されるであろう。しかしこの理論は実用上極めて重要なものであるから，今後の発展が切望されるところである。

本文の理論には翼厚および cavity flow に関する事項は一切含まれていない。それはこれらの影響が省略しても差支えないものと考えているわけではない。これらの問題に関しては稿を改めて執筆するつもりである。

筆者は昭和42年6月，造船協会主催の「舶用プロペラに関するシンポジウム」に際し，「プロペラ理論概要」のテキストを執筆した。その後，このテキストが難解であるとのご注意を直接または間接に数人の方々からいただいたが，それは多分記載されている諸式導出の途中が省略されているためと想像した。それで本稿では運算の中間をなるべく省略しないようにし，それに最近筆者の行なった研究を併わせて，全編を統一した。その結果として，旧稿の伴流プロペラの項に誤りのあったことや，またプロペラ理論でこれまで見過されてきた新しい事項を見い出すことができた。ここに旧稿を読まれた多くの方々にお詫びするとともに，ご注意を下さった方々に感謝する次第である。

参 考 文 献

1) Moriya, T., "On the Induced Velocity and Characteristics of a Propeller", J. of the Faculty of Engineering, Tokyo Imperial University, Vol. XX, No. 7, 1933
2) Kawada, S., "Calculation of Induced Velocity by Helical Vortices and Its Application to

Propeller Theory", Rep. of Aero. Res. Inst., Tokyo Imperial University, Vol. XIV, 1939
3) Goldstein, S., "On the Vortex Theory of Screw Propellers", Proc. of Roy. Soci. (London), Series A, Vol. 63, 1929
4) Betz, A., "Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust", Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Göttingen 1927
5) Durand, W.F., "Aerodynamic Theory", Springer, Berlin, 1935
6) Kondo, K., "The Potential-theoretical Fundamentals of Aerodynamics concerning the Screw Propeller", the Memo. of Faculty of Eng. Kyushu Imeperial University, Vol. IX, No. 3, 1942
7) 近藤一夫, "プロペラの誘導速度に対する空気圧縮性の影響について", 日本航空学会誌, 第11巻, 第108, 109, 110号, 1944
8) Prandtl, L., "Theorie des Flugzeugtragflügels im zusammendrückbaren Medium", Luftfahrtforschung, Bd. 13, 1936
9) Sparenberg, J. A., "Application of Lifting Surface Theory to Ship Screws", Int. Shipb. Progress, 1960
10) Ginzel, I., and Ludwieg, H., "On the Theory of the Broad Bladed Propeller", U. M. 3079, A.R.C. 11,067, 1944
11) Lerbs, H. W., "Moderately Loaded Propellers with a Finite Number of Blades and an Arbitrary Distribution of Circulation", SNAME, Vol. 60, 1952
12) 山崎隆介, "螺旋推進器理論について", 造船協会論文集, 第100号, 1956
13) Weissinger, J., "The Lift Distribution of Swept-Back Wings", NACA, T.M. No. 1120, 1947
14) Lawrence, H. R., "The Lift Distribution on Low Aspect Ratio Wings at Subsonic Speeds", J. of Aero. Sci., Vol. 18, No. 10, 1951
15) Flax, A. H., "General Reverse Flow and Variational Theorems in Lifting-Surface Theory", J. of Aero. Sci., Vol. 19, No. 6, 1952
16) 中島康吉, "プロペラ揚力面理論とその応用", 造船協会論文集, 第108号, 第109号, 1960
17) 西山哲男, "羽根面積の大なる螺旋推進器の揚力面理論", 造船協会論文集, 第109号, 1961
18) 西山哲男, 笹島孝夫, "プロペラ揚力面における誘導曲り流れ修正", 造船協会論文集, 第118号, 1965
19) English, J. W., "The Application of a Simplified Lifting Surface Technique to the Design of Marine Propellers", N. P. L., 1962
20) Nelson, D.M., "Lifting-Surface Propeller Design Method for High-Speed Computers", Naval Ordinance Test Station, Jan. 1964
21) 菅井和夫, "プロペラ揚力面理論の新展開", 造船協会論文集, 第119号, 第123号, 1968
22) プラントル, ティーチェンス, "航空流体力学", 下巻, コロナ社
23) Allen, H. J., "General Theory of Airfoil Sections Having Arbitrary Shape or Pressure Distribution", NACA, T.R., No. 883, 1945
24) Kerwin, J. E. and Leopold, R., "Propeller Incidence Correction Due to Blade Thickness", Journal of Ship Research, Vol. 7 No. 2, 1963
25) Kramer, K.N., "Induzierte Wirkungsgrade von Best-Luft schrauben endlicher Blattzahl", Luftfahrtforschung, Bd. 15, 1938
26) Eckhardt, M.K. and Morgan, W.B., "A Propeller Design Method", SNAME, 1955
27) Tachmindji, A.J., "The Potential Problem of the Optimum Propeller with Finite Hub", DTMB, Rept, 1051
28) Tachmindji, A.J., "The Potential Problem of the Optimum Propeller with Finite Number of Blades Operating in a Cylindrical Duct", DTMB, Rept. 1228
29) 藤原松三郎, "微分積分学", 第1巻, 内田老鶴圃, 1941, pp. 538
30) Lamb. H., "Hydrodynamics"
31) Sears, W.R., "General Theory of High Speed Aerodynamics", High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion, Vol. VI, Princeton, 1954, pp. 229
32) Multhopp, H., "Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting Surface Theory)", R & M, No. 2884, 1950
33) Mangler, K.W. and Spencer, B. F. R., "Some Remarks on Multhopp's Lifting-Surface Theory", R & M, No. 2926, 1952
34) Garner, H.C., "Accuracy of Downwash Evaluation by Multhopp's Lifting-Surface Theory", R & M, No. 3431, 1966
35) Davies, D.E., "Calculation of Unsteady Generalized Airforces on a Thin Wing Oscillating Harmonically in Subsonic Flow", R & M, No. 3409, 1963
36) Formme, J. A., "Least-Squares Approach to Unsteady Kernel Function Aerodynamics", AIAA Journal, Vol. 2, No. 7, 1964
37) Revell, J.D. and Rodden, W.R., "Remarks on Numerical Solutions of the Unsteady Lifting Surface Problem", AIAA Journal, Vol. 4, No. 1, 1966
38) 花岡達郎, "揚力面の解法に関する考察 (特にFlaxの方法の理論的根拠について)", 船研報告第5巻, 第3号, 1968
39) Kinner, W., "Die kreisförmige Tragfläche auf

potentialtheoretischer Grundlage", Ing. Arch., Bd. 20, 1940
40) Krienes, K., "Die elliptische Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage", ZAMM, Bd. 20, 1940
41) Schade, T., Theorie der schwingenden kreisformigen Tragfläche auf potentialtheoretische Grundlage, I analytischer Teil", Luftfahrtforschung, Bd. 17, 1940
42) Küssner, H.G., "General Method for Solving Problems of the Unsteady Lifting Surface Theory in the Subsonic Range", J of Aero. Sci. Vol. 21, 1954.
43) 近藤次郎, "積分方程式とその応用", コロナ社
44) Birnbaum, W., "Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflugeltheorie", ZAMM, Bd. 3, 1923
45) Landahl, M.T., and Stark, V.J.E., "Numerical Lifting-Surface Theory—Problems and Progress", AIAA 6th Aerospace Sciences Meeting, 1968, AIAA Journal, Vol. 6, No. 11, 1968
46) Blenk, H., "Der Eindecker als tragende Wirbelfläche", ZAMM, Bd. 5, 1925
47) Multhopp, H., "Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln", Luftfahrtforschung, Bd. 15, 1938
48) Gray, A. and Mathews, G.B., "A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics"
49) Hanaoka, T., "Hydrodynamics of an Oscillating Screw Propeller", 4th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, Aug. 1962.
50) 谷一郎, "流体力学", 上巻, 岩波書店
51) Lamb, H., "On Wave Resistance", Roy. Soc. Proc. A, Vol. 111, 1926
52) van Manen, J.D. and Bakker, A.R., "Numerical Results of Sparenberg's Lifting Surface Theory for Ship Screws", 4th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, Aug. 1962
53) 花岡達郎, "部分空洞を生じた翼の三次元理論, その 1", 造船協会論文集, 第123号, 1968
54) Dickmann, H.E., "Schiffskörpersog, Wellenwiderstand eines Propellers and Wechselwirkung mit Schiffswellen", Ing. Arch., Bd. 9, 1938
55) Nowacki, H., "Potentialtheoretische Strömungs- und Sogberechnungen fur schiffsähnlicher Körper", S.T.G. Bd. 57, 1963
56) 中武一明, "船体とプロペラの相互干渉について", 西部造船会会報, 第34号, 第35号, 1968
57) Weinig, F., "Aerodynamik der Luftschraube", Springer, 1940 pp. 354
58) 中西正治, 上田耕平, 山崎隆介, "プロペラと舵との干渉について", 西部造船会会報, 第35号, 1968
59) Fresenius, R., "Das grundsätzliche Wesen der Wechselwirkung zwischen Schiffskörper und Propeller", Schiffbau, Bd. 23, 1921
60) van Manen, J.D. and Troost, L., "The Design of Ship Screws of Optimum Diameter for an Unequal Velocity Field", SNAME, Vol. 60, 1952