

重力不安定による液体の拡散

I—水面上への油の流出の研究

渡 辺 健 次*

“Diffusion” of Liquid Caused by Gravitational Instability

I—The Investigations of Oil Flow on the Water Surface

By

Kenji Watanabe

The unsteady flow of oil caused by the gravitational instability is investigated. Oil diffuses one-dimensionally on the water surface.

A formula of motion of the oil front is obtained, and the calculated results agree approximately with the data from test, but further study is necessary to the value of coefficients in the formula.

It is shown that the speed of the oil front is determined by the density, the viscosity, the surface tension, and the wave drag, and influenced by wind and water wave.

1. は し が き

交通機関からの有害かつ危険物の流出にさいし、それらがどのようなはやさで拡がっていくかを調べることは、汚染防止対策上重要な問題である。しかし、実際には流出する機構、流出する物質の種類によって、種々多様のことなったりあつかいが必要である。たとえば、排気ガスの拡散、廃油の流出、液化ガスの噴出などでは、それぞれ異なった物理的条件が支配的である。ゆえに、これら流出物の物性に関する基礎的なデータを得るとともに、おのおの物理的条件のもとでの流出物のふるまいを明らかにする基礎実験を積みかさねていかなければならぬ。

ここでは特に原油の流出などのような、重力による液体の拡がりについて研究することにする。液体は自身のもつ重力のポテンシャルエネルギーが減少するように運動するから、ここでは重力が支配的である。ある境界面上に、液体のかたまりが突然おかれたとき、重力不安定が生じ液体は四方に拡がっていく。この現象はつぎのようにいくつかに分類できる。

定常問題と非定常問題；定常問題は時間的に変動し

ないような流れをもつ場合で、自由表面をもつ流れなど、わりに多くの研究がなされている。後者は過渡現象も含み、流れのみならず、自由表面も時間的に変動する。

境界面が液体の場合と固体の場合；水面上に油が流出するとき、油の下面は水面と接しているが、この境界自身がまた変動するので、問題の解決はさらに困難となる。境界が固体の場合は、ダムの決壊の問題などのように比較的研究されていて、境界条件も簡単なのでとりあつかいやすい。

一次元問題と二次元問題；液体が一方のみひろがっていく場合と、境界面上を四方にひろがっていく場合とで、それほど本質的な違いはないが、それぞれ一次元および二次元の拡散となづける。二次元の場合がより現実的であるが、一次元の方がとりあつかいやすい。

さて、ここではさきに述べたように、境界面に液体のかたまりが突然おかれたとき、すなわち非定常の問題を考察する。また境界面は液体、すなわち具体的には水面におかれた油の運動について、主として実験的に研究する。これはタンカー事故のさいの油流出にた

* 共通工学部

いする対策の研究の一環としておこなわれたものである。数種類、いろいろの量の油を水面に流し、その拡がる速度を測定した。この結果を統一的に説明するための理論式について考察し、ほぼよい結果をえたので報告する。そのほか、風や波の影響など、今後研究をすすめるべきいくつかの問題点についても報告する。

2. 水面上に流出した油の運動

油の拡がっていく運動の源は第一に重力のポテンシャルエネルギーであるが、水面を基準としたときに、水面から上にある部分と水面下の部分とでは、ちがった考え方を必要とする。水面から高さ h のところにある油は単位体積あたり ρgh のポテンシャルエネルギーをもつ。ところが水面下 h' のところにある油は、比重差による浮力によって、単位体積あたり $(1-\rho)g$ の上向きの力をうける。ゆえに、この油は水面に対し

$$(1-\rho)gh'$$

のポテンシャルエネルギーをもつ。運動を発生させるポテンシャルエネルギーについてはこの二とおりの考え方をすることができる。油が拡がってうすくなるにつれて、このポテンシャルエネルギーは減少し、油の層は運動エネルギーを得る。

油の運動エネルギーは、他の原因によっても供給される。風や波、表面張力などである。風や波は、逆に油の運動をおさえるようにはたらくような複雑な効果をもたらすから、この効果をしらべるには、現象の注意深い観察からおこなう以外に方法はない。表面張力の効果は、水の表面エネルギーが油の表面エネルギーよりも大きいため、油の面積を大きくすることによって、水が油にそのエネルギー差の分だけ、運動エネルギーをあたえるという形ではたらく。

これらの運動エネルギーは、つぎのような機構で減衰する。

まず、運動エネルギーは水にも伝達される。そのひとつの形は、油が水をおしのけてすすむ結果、波が発生して、油の運動エネルギーの減少をもたらすようなものである。すなわち造波抵抗が生じる。また、油と水の境界における摩擦によって水の流れが生じる。

また、油の粘性、水との摩擦によるエネルギーの消費があり、さらに油の運動は一様でなく、乱流運動がおこってエネルギーの消費がおこなわれる。

このようにおこなわれるエネルギーの収支を、ひとつの方程式であらわすことができれば、油の流出の問題を一般的に解くことができるはずである。問題は拡

がりの問題となっているが、内容的には純然なる流体力学の問題で、連続の方程式、Navier-Stokes の方程式が用いられるはずである。

しかし、ここではまず、適当な近似のもとで、エネルギー方程式をつくり、特に拡がっていく油の前端の運動を考察することとする。エネルギーの式は、

$$\begin{aligned} & (\text{ポテンシャルエネルギー}) + (\text{運動エネルギー}) \\ & - (\text{表面張力エネルギー}) + (\text{粘性消散エネルギー}) \\ & + (\text{造波エネルギー}) - (\text{外部供給エネルギー}) = \text{一定} \end{aligned}$$

である。はじめにポテンシャルエネルギーと粘性消散エネルギーを考慮した方程式をつくり、その解と実験結果の比較から、他の要因をおぎなって議論していくという方法をとることにする。

2-1 油前端の運動方程式

一次元の拡がりの問題をまずとりあげ、簡単のために、次のようなモデルをとる。

一様な厚さ Z 、長さ X の油の層があり、 y 方向に無限にのびているとする。油は x 軸の正の方向に拡がっていくものとし、もう一方の端は、 $x=0$ の面に限られているものとする。実際には、厚さは一様でなく、ある勾配をもっているはずであるが、流出後ある時間がたつと、ほとんど厚みが一定になると考えてよい。流出の瞬間については過渡現象として、後に研究することとする。すなわち、ここでは、準定常的な現象と考えるのである。

速度分布として、まず時間の関数 $f(t)$ を用いて

$$v_x = xf(t), \quad v_z = -zf(t)$$

と仮定する。ただし高さ z は油の下面から上方にはかるものとする。上の分布は連続の方程式を満足する。

$$\partial v_x / \partial x + \partial v_z / \partial z = 0$$

このとき y 方向の単位幅あたり運動エネルギーは

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \int_0^Z \int_0^X (v_x^2 + v_z^2) dx dz \\ &= \frac{1}{2} \rho f^2 \left(\frac{X^3 Z}{3} + \frac{XZ^3}{3} \right) \end{aligned}$$

ここで油の前端の速度を

$$(v_x)_{x=X} = \frac{dX}{dt}$$

とすると、

$$\frac{dX}{dt} = Xf$$

となる。単位幅あたりの油の体積を V とすると、これは面積の次元をもち、

$$XZ = V = \text{const}$$

であるから、結局

$$T = \frac{1}{6} \rho \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 \left(V + \frac{V^3}{X^4} \right) \quad \dots\dots (1)$$

となる。

y 方向の単位幅あたりのポテンシャルエネルギーは、水面をポテンシャルの基準にとり、水面上の部分に対して、

$$\begin{aligned} V_1 &= \rho g \int_0^X \int_0^h z \, dz \, dx \\ &= \frac{1}{2} \rho g X h^2 \end{aligned}$$

水面下の部分に対し、

$$\begin{aligned} V_2 &= (1-\rho) g \int_0^X \int_0^{h'} z \, dz \, dx \\ &= \frac{1}{2} (1-\rho) g X h'^2 \end{aligned}$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} g X [\rho h^2 + (1-\rho) h'^2]$$

ここで、 h 、 h' はそれぞれ水面上および水面下の部分の厚みである。準定常現象とみなしているから、油は圧力がバランスするように水面下に沈んでいるとして、

$$h + h' = Z, \quad h = (1-\rho)Z, \quad h' = \rho Z$$

であるから

$$V = \frac{1}{2} \rho (1-\rho) g X Z^2 = \frac{1}{2} \rho (1-\rho) g \frac{V^2}{X} \quad \dots\dots (2)$$

ただし、上式で ρ は油の密度であるのに対し、 $(1-\rho)$ は比重の差で無次元の量である。

つぎに、単位時間あたりの粘性消散エネルギーは、 y 方向単位幅あたり

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -\frac{1}{2} \eta \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV \\ &= -\frac{1}{2} \eta \int_0^X \int_0^Z (4f^2 + 4f'^2) dx \, dz \\ &= -\frac{1}{2} \eta' 8f^2 XZ \\ &= -4\eta \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 \frac{Z}{X} \\ &= -4\eta \frac{V}{X^2} \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 \quad \dots\dots (3) \end{aligned}$$

ただし η は粘性係数である。

ここで

$$\frac{d}{dt} (T + V) - \dot{E} = 0$$

が成立するから $\nu \equiv \eta/\rho$ とすると、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \left(V + \frac{V^3}{X^4} \right) \frac{d^2 X}{dt^2} - \frac{dX}{dt} - \frac{2}{3} \frac{V^3}{X^5} \left(\frac{dX}{dt} \right)^3 \\ &\quad - \frac{1}{2} g (1-\rho) \frac{V^2}{X^2} \frac{dX}{dt} + 4\nu \frac{V}{X^2} \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

となる。簡単にすると、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \left(1 + \frac{V^2}{X^4} \right) \frac{d^2 X}{dt^2} - \frac{2}{3} \frac{V^2}{X^5} \left(\frac{dX}{dt} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} g (1-\rho) \frac{V}{X^2} + \frac{4\nu}{X^2} \frac{dX}{dt} = 0 \end{aligned}$$

となる。

$$X/\sqrt{V} \equiv \xi, \quad g^{1/2}t/V^{1/4} \equiv \tau, \quad g^{1/2}V^{3/4}/\nu = R$$

とおくと、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{\xi^4} \right) \frac{d^2 \xi}{d\tau^2} - \frac{2}{3\xi^5} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (1-\rho) \frac{1}{\xi^2} + \frac{4}{R\xi^2} \frac{d\xi}{d\tau} = 0 \end{aligned}$$

となる。 R はレイノルズ数に比すべきもので、重力と粘性項の比のめやすとなる。また、

$$\xi = X/\sqrt{V} = \sqrt{X/Z}$$

であるから、初期をのぞけば、かなり大きい。したがって、 $1/\xi^4$ 、 $1/\xi^5$ の項を省略すると、

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \frac{3}{2} (1-\rho) \frac{1}{\xi^2} - \frac{12}{R\xi^2} \frac{d\xi}{d\tau} = 0 \quad \dots\dots (4)$$

なる油前端的運動方程式が得られる。

同様にして、

$$v_x = xzf, \quad v_z = -\frac{z^2}{2}f$$

および

$$v_x = xz(2Z-z)f, \quad v_z = \left(-Zz^2 + \frac{z^3}{3} \right) f$$

のかたちの速度分布を仮定すれば、それぞれ

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \frac{9}{2} (1-\rho) \frac{1}{\xi^2} - \frac{3}{R} \xi^2 \frac{d\xi}{d\tau} \quad \dots\dots (5)$$

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \frac{45}{16} (1-\rho) \frac{1}{\xi^2} - \frac{5}{2R} \xi^2 \frac{d\xi}{d\tau} \quad \dots\dots (6)$$

がえられる。(5)、(6) は (4) とくらべると粘性項に ξ^2 に比例する項が加わり、 $1/\xi^2$ の項を省略したので、異なっている。この違いは、速度分布の仮定によるもので、(4) の場合は油が水面上をスリップするのに対し、(5)、(6) の場合は、普通の粘性流体のとりあつかいのように、境界において速度ゼロという境界条件をおいたことによる。どちらがより実際に近いかは、詳細な研究によってのみ明らかにされるであろうが、つぎのように推測することができる。

(4) の場合と (5), (6) の場合の境界条件は、両極端の理想的な状態である。実際には油と水の境界では、水も油もともに動き、速度分布としては油と水の両方をふくめたものをとらなければならない。しかし、水の粘性は小さいから、粘性消散のエネルギーに水はたいしてあずからず、結果的には水と油の境界においてスリップが存在するのと同じことになる。しかし、速度の z 方向の勾配が油層中に、小さいながら存在するから、 ξ^2 の項はこのころが、その係数は上で計算したものより小さいことであろう。

また、油のポテンシャルエネルギーの減少は、単に油の運動エネルギーのみならず、水の運動エネルギーも増加させるから、結局のところ、ポテンシャル項の係数も上よりは小さくなるであろう。

これらの考察から、一般に方程式を

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{(1-\rho)C_1}{\xi^2} - \frac{C_2}{R} \xi^2 \frac{d\xi}{d\tau} \dots\dots(7)$$

の形とし、係数 C_1, C_2 の値を実験的にもとめるという方法をとることとする。

2-2 実験¹⁾との比較

一次元の油流出の実験は、幅 1 m, 長さ 10 m, 高さ 1 m の水槽の一端から適当な距離のところに、シャッターをいれ、シャッターと水槽端のあいだに油をいれ、シャッターをひきぬいて油を流出させ、その前端

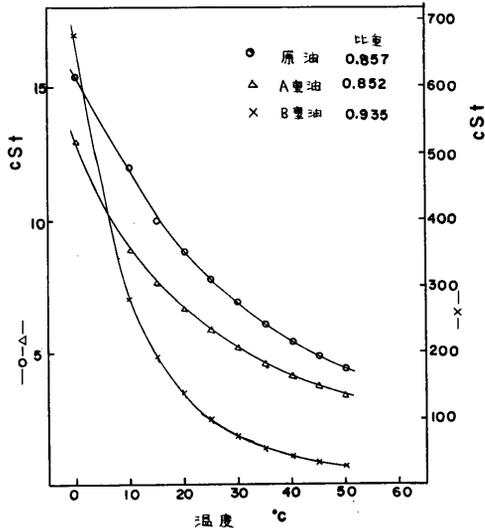


図 1 使用した油の粘性

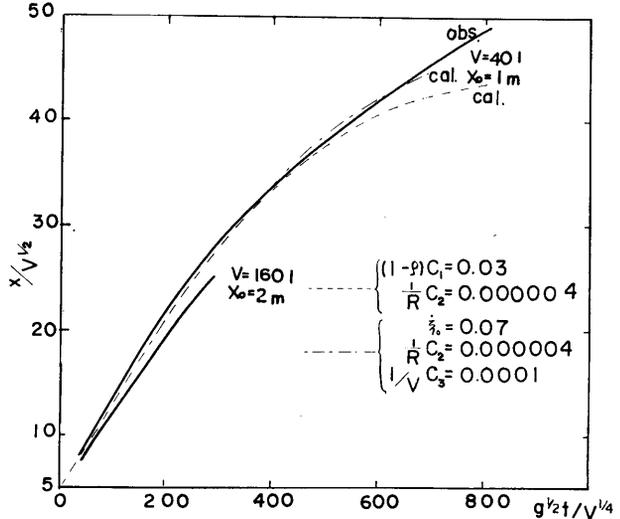


図 2 基準にとった実験曲線と、それに合わせた計算曲線

の運動を写真によって記録した。使用した油は、A重油およびB重油で、比重はそれぞれ約 0.85, 0.95, 粘性は図 1 に示すようなものであった。油の量およびシャッターと水槽端の距離をいろいろに変えて実験を行なった。前に定義した ξ をもちいると、シャッターと水槽端の距離が X_0 であれば $\xi_0 = X_0 / \sqrt{V}$ となる。ここで V は単位幅あたりの体積を示めし、面積の次元をもつ。 X_0 を初期拡がりとして名づけよう。

実験によって得られた結果を、 ξ および τ を用いてプロットした曲線と、初期条件 $\xi = \xi_0, d\xi/d\tau = (d\xi/d\tau)_0$ のもとで方程式 (7) を解いた結果が一致するように、方程式 (7) における係数を定めることができればよいわけである。

方程式 (7) によって、この現象のすべてを記述できるならば、初期条件と R 数が同じであるなら、同じ実験結果が得られるはずである。そのために、まず、とくに初期条件のみを考える。図 2 は B 重油を用い、 V と X_0 はことなるけれども ξ_0 は同じである二つの実験を比較したものである。二つの実線は実験結果をあらわしているが、ほとんど一致している。 R 数はもちろん異なるが、曲線の間の違いは、粘性によるものよりは、造波抵抗および表面張力によるものの方が大きいと思われる。

図 2 の場合ともに $\xi_0 = 5$ である。 $(1-\rho)C_1 = 0.03, C_2/R = 0.000004$ として方程式 (7) を $\xi_0 = 5, (d\xi/d\tau)_0 = 0$ の初期条件のもとで解いた結果を図 2 の破線で示す。

方程式(6)の数値をいれると $(1-\rho)C_1=0.14$, $C_2/R=0.0004\sim 0.0012$ で相当のくい違いがある。しかし、前に考察したように実際の係数は小さくなるはずだし、また表面張力や造波抵抗の項を無視したために、実際の値より小さくなる。すなわち、初期の段階ではポテンシャル項および造波抵抗の項が大ききいてくるが、造波抵抗の項を無視するため、その分だけポテンシャル項の係数を小さくすることが必要となる。表面張力と粘性抵抗は、油が広がった後期の段階できいてくる。これも表面張力を無視したために、その分だけ粘性項の係数を小さくとらざるをえない。

この $(1-\rho)C_1$, C_2/R の値を採用して、他の一連の実験について比較を行なったのが図の 3, 4, 5, 6 で

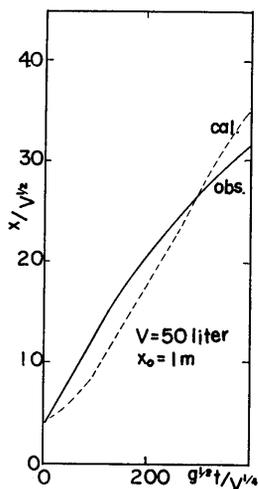


図 3 実験と計算の比較

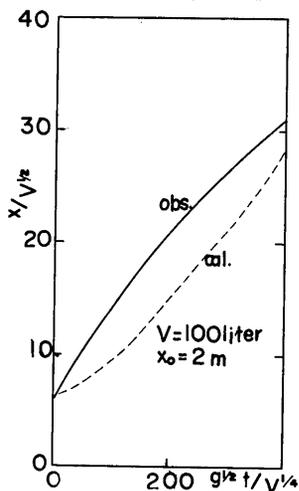


図 4 実験と計算の比較

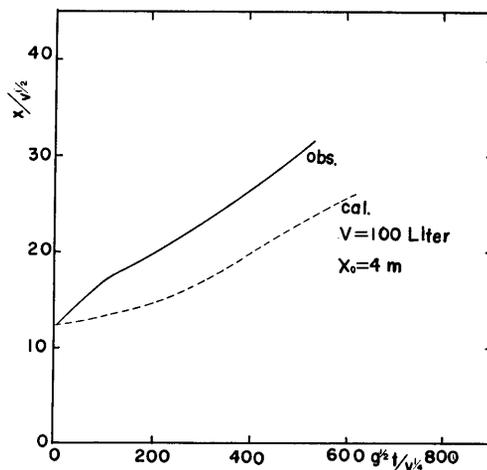


図 5 実験と計算の比較

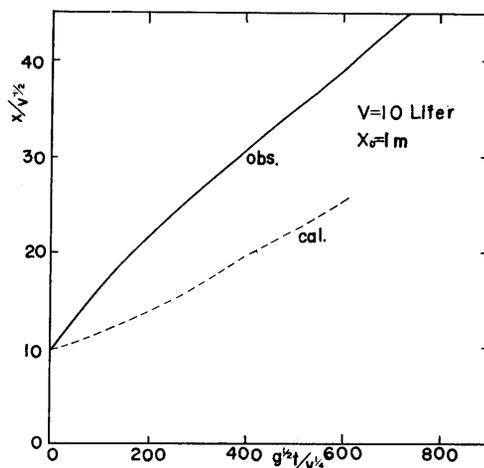


図 6 実験と計算の比較

ある。あまりよく一致していない。特に初期速度の値があっていない。これは計算において初期速度をゼロとしたからである。

2-3 初期流出速度

この実験について、もう少しよく考察してみよう。シャッターがあげられた瞬間に重力の不安定が生じ、それから油は流れだす。不安定が生じた瞬間における加速度は、方程式(7)のように有限な値をもたない。加速度は瞬間的に無限大となり、速度は不連続のとびを生じ、結局、初期速度ゼロとすることは不適當となる。この速度の不連続は、後方に伝播し、水槽端に到達してから、油層全体が動きだすようになる。この初期における油層の運動をしらべるために、つぎのよう

な近似をする。

流体運動に関する Euler の方程式は、

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - g \vec{k}$$

油は x 方向に拡がり、油層内においては x 方向の速度にくらべて、垂直方向の速度 v_z が無視できるとすると、

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned} \right.$$

厚さ $h(x, t)$ とすると、油層内における圧力は、 $p = p_0 + \rho g(h - z)$ であらわされる。ただし静圧のみを考え、 p_0 は大気圧である。また連続の条件から、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h v_x) = 0$$

となる。

結局、 $v_x = u$ とおいて、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

となる。

水面上の油を考え、簡単のため、水面を固体境界におきかえる。原点にシャッターがあり、 x の負の方向に厚さ h_0 の油があるものとする。方程式を特性づける x 方向の長さがふくまれていないから相似流とみなされ u は h の関数となる。(8) 式は、

$$\left. \begin{aligned} u' \frac{\partial h}{\partial t} + uu' \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + hu' \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)'$$

となる。 u' は u の h による微分である。したがって、

$$g|u' = hu'$$

でなければならない。ゆえに

$$u = \text{const} - 2\sqrt{gh}$$

$h = h_0$ では $u = 0$ であるから、

$$u = 2\sqrt{g}(\sqrt{h_0} - \sqrt{h})$$

の関係が得られる。これをもとの方程式に代入すると

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (2\sqrt{gh_0} - 3\sqrt{gh}) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

この方程式の一般解は、

$$h = F[x - (2\sqrt{gh_0} - 3\sqrt{gh})t]$$

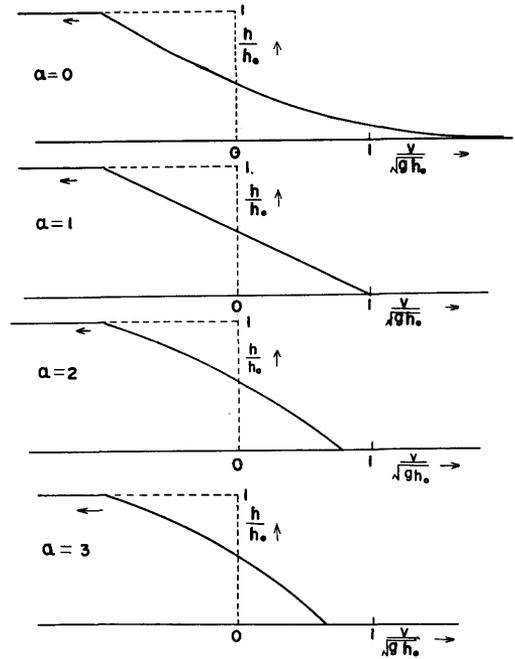


図 7 油層の初期流出状態、厚さと速度の関係

ただし F は任意関数である。この解の意味するところは、油層の厚さ h の部分が速度

$$(2\sqrt{gh_0} - 3\sqrt{gh})$$

で伝播するということである。図 7 の上の図はそのようすを示す。点線は、はじめの油層の状態を示めし、実線はシャッターがあげられたあとの運動の状態を示めす。

時間 t の後の点 x における速度は、

$$u = \frac{2}{3} \left(\frac{x}{t} + \sqrt{gh_0} \right)$$

であって、 x の一次式である。これから、前に仮定した速度分布の x への依存性がでてくる。

この結果によると、油層の先端は速度

$$2\sqrt{gh_0}$$

ですすむ。 $h_0 = (1 - \rho)Z$ であるから、

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = 2\sqrt{(1 - \rho)gZ}$$

となる。書きなおすと、

$$(d\xi/d\tau)_0 = 2\sqrt{(1 - \rho)/\xi}$$

となる。

油の水面下の部分に対しても同様のとりあつかいが

できる。油の大部分は水面下にあるから、この部分の運動が全体を支配することになる。z 座標を下向きにとり、圧力を $(1-\rho)g(h-z)$ とするところが異なるけれども $h_0 = \rho Z$ であるから、結局同じことになる。

しかし、この議論では、空気中への油層の拡がりを考えている。空気の慣性抵抗などは無視されている。水面下の油は水をおしのけて拡がらねばならない。この抵抗を、速度の二乗に比例する単位面積あたり、

$$\frac{1}{2} \alpha \rho u^2$$

のかたちにおくことが妥当と思われる。 α は定数係数である。方程式 (8) は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (1+\alpha)u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

となる。 h を u の関数とおくと、

$$\left. \begin{aligned} h' \frac{\partial u}{\partial t} + (h + uh') \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u + \alpha u + gh') \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ゆえに

$$h = \alpha h' v + gh'^2$$

$h' \equiv -p$ において v で微分すると、

$$p = \alpha p + \alpha v p' - 2g p p'$$

$p = v w$ とおくと

$$w' v (\alpha - 2g w) + (2\alpha - 1) w - 2g w^2 = 0$$

$\alpha \neq \frac{1}{2}$, $\alpha \neq 1$ ならば

$$\frac{\alpha}{2\alpha-1} \log w + \frac{\alpha-1}{2\alpha-1} \log [2g w - (2\alpha-1)] + \log v = C$$

C は積分定数である。

$$v = \frac{1}{2\alpha-1} \left[2gp - \frac{C}{p^{\alpha/\alpha-1}} \right]$$

p をパラメーターとして

$$h = -\alpha p v + gp^2$$

とあわせて、パラメーター表示の解がえられる。

$h = h_0$ で $v = 0$ の条件より C をもとめ

$$p \equiv \sqrt{\frac{h_0}{g}} q, \quad \frac{h}{h_0} \equiv H \frac{v}{\sqrt{gh_0}} \equiv V$$

とおきかえると、

$$\begin{cases} H = \frac{1}{2\alpha-1} \left(\frac{2\alpha}{q^{1/\alpha-1}} - q^2 \right) \\ V = \frac{2}{2\alpha-1} \left(q - \frac{1}{q^{\alpha/\alpha-1}} \right) \end{cases}$$

が得られる。

方程式

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (v + hv') \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

の一般解は

$$h = F[x - (v + hv')t]$$

であるから、 $v + hv'$ を計算すれば、油層の運動は明らかになる。ゆえに

$$V + H \frac{dV}{dH} = \frac{2}{2\alpha-1} \left(\frac{3}{2} q - \frac{\alpha+1}{q^{\alpha/\alpha-1}} \right)$$

とパラメーター表示を行なっておく、

$\alpha = 1$ の場合

$$\begin{cases} H = 1 - V \\ V + H \frac{dV}{dH} = 1 - 2H \end{cases}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ の場合

$$\begin{aligned} V &= -4q \log q \\ H &= q^2 (1 + 2 \log q) \\ V + H \frac{dV}{dH} &= -q(1 + \log q) \end{aligned}$$

図 7 に α のいろいろの値に対する運動のようすがしめしてある。油前端の速度は、

$h = 0$ において、

$$\alpha \neq \frac{1}{2}, \quad v_0 = \frac{2\alpha-1/2\alpha-1}{\alpha^{2\alpha-1}} \sqrt{gh_0}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad v_0 = 2e^{-1/2} \sqrt{gh_0}$$

である。 α が十分大きければ、

$$v_0 \approx \sqrt{\frac{2}{\alpha} gh_0}$$

となる。結局、

$$(dX/dt)_0 \propto \sqrt{(1-\rho)gZ_0}$$

の比例関係がなりたつ、したがって、

$$(d\xi/d\tau)_0 = \beta \sqrt{(1-\rho)/\xi_0} \quad \dots\dots (9)$$

となる。

円形に拡がる二次元拡散の場合も、この関係がなりたつとすれば

$$(d\xi/d\tau)_0 = r \sqrt{1-\rho}/\xi_0$$

となる。半径 r として

$$\xi \equiv r/V^{1/3}$$

$\tau \equiv g^{1/2}t/V^{1/6}$ とおいたものを用いてある。 V はここでは全流出体積である。

この結果を用いて実験結果を検討する。ポテンシャル、造波抵抗は、ごく初期の段階でだけきいてくる。したがって、これらをひっくりめた形で、初期速度をえらぶ。(9) 式の β を 0.7 ぐらいにとり、その代わりにポテンシャル項を無視して計算したのが、図 8, 9, 10, 11 の破線である。一般に、粘性の過小評価があるようであるが、図 11 は他とくらべて異なった傾向を示めしている。

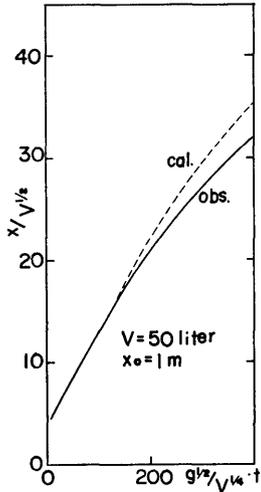


図 8 初期速度を考慮した計算（破線）曲線と実験（実線）曲線の比較

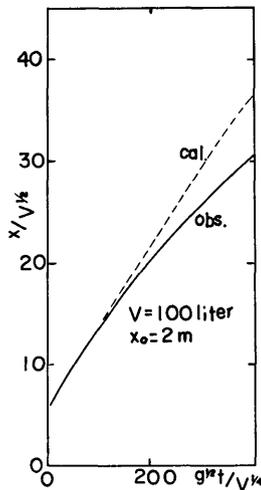


図 9 初期速度を考慮した計算（破線）曲線と実験（実線）曲線の比較

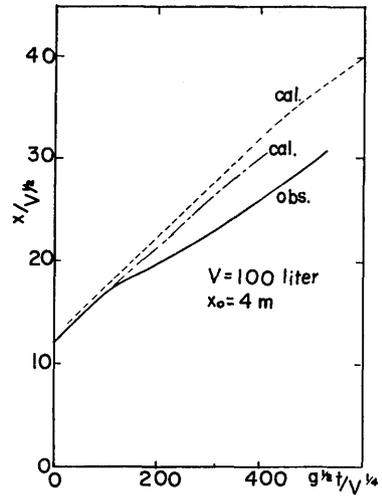


図 10 さらに表面張力を考慮にいれた計算曲線（鎖線）と実験（実線）の比較

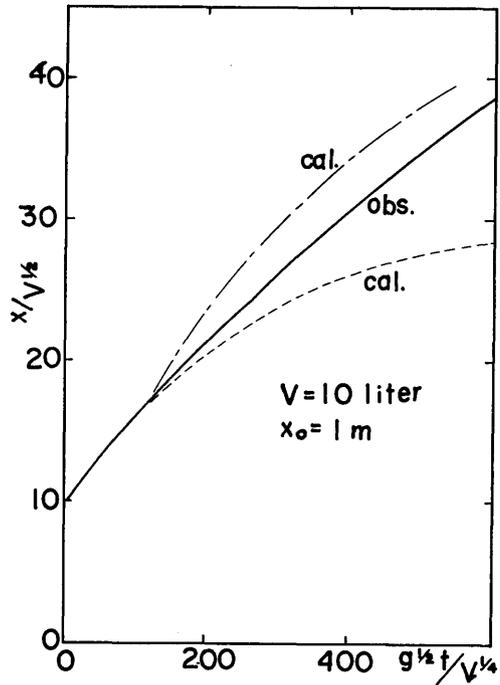


図 11 さらに表面張力を考慮にいれた計算曲線（鎖線）と実験（実線）の比較

2-4 表面張力の影響

ここで表面張力の影響について考えてみよう。図11 の場合は $V=10$ リットル、 $x_0=1$ m である。幅 1m の水槽で行なった実験であるから、はじめの油の厚みは 1cm である。この程度の厚みになると表面張力の影響

は無視できない。

水の表面張力を H_w , 油のそれを H_0 とする。油層の前端の速度を dX/dt とすると, y 方向単位長さあたりの単位時間あたり表面エネルギーの減少は,

$$(H_w - H_0) dX/dt$$

であらわされる。一方, ポテンシャルエネルギーの減少は, 前より

$$\frac{1}{2} g \rho (1 - \rho) Z^2 dX/dt$$

である。この両方の寄与が同じになるのは,

$$H_w - H_0 \sim \frac{1}{2} g \rho (1 - \rho) Z^2$$

C, G, S 単位を用い,

$$H_w = 73 \text{ ダイン/cm (18°C)}$$

$$H_0 = 26 \text{ "}$$

$$\rho = 0.9 \text{ g/cm}^3$$

とすれば $Z = 1.03 \text{ cm}$ のとき, 両方の寄与が同じになる。ゆえに図 11 の場合, 表面張力の影響は無視できない。

また, 図 2 にもどると, 計算曲線である破線は, 上方において急速に一定値へ近づいている。これは粘性項の存在のためである。しかし, 実際には表面張力の存在のためにさらに増加している。

ゆえに, 方程式 (7) は表面張力の項をいれたものに修正されねばならない。結果は

$$\frac{d^2 \xi}{d\tau^2} = \frac{C_1(1-\rho)}{\xi^2} - \frac{C_2}{R} \xi^2 \frac{d\xi}{d\tau} + C_3 \frac{H_w - H_0}{\rho g V} \dots (10)$$

となる。表面張力の項は体積 V に逆比例している。

$C_3 \frac{H_w - H_0}{\rho g}$ をあらためて C_3 とおき,

$$C_2/R = 0.000004, \quad C_3/V = 0.0001$$

$$(d\xi/d\tau)_0 = 0.07$$

とおいて, ポテンシャル項を無視して, 方程式を解き得られた結果が, 図 2 の鎖線である。同様に, 図の 10, 11 の鎖線が得られる。結果はかなりよく合っているが, 表面張力項の過大評価, 粘性項の過少評価がみられる。しかし, 実験誤差をも考慮にいと, これ以上, 曲線の一致をはかることに意味があるとは思えない。参考として図 12 に $V = 100$ リットル, $x_0 = 1 \text{ m}$ の場合をあげておく。この場合, 実験曲線と計算曲線は, 完全に一致した。

3. 造波の問題

以上のように理論的検討より得られた実験式をかなりよく実験と一致させることができたが, さらに現象

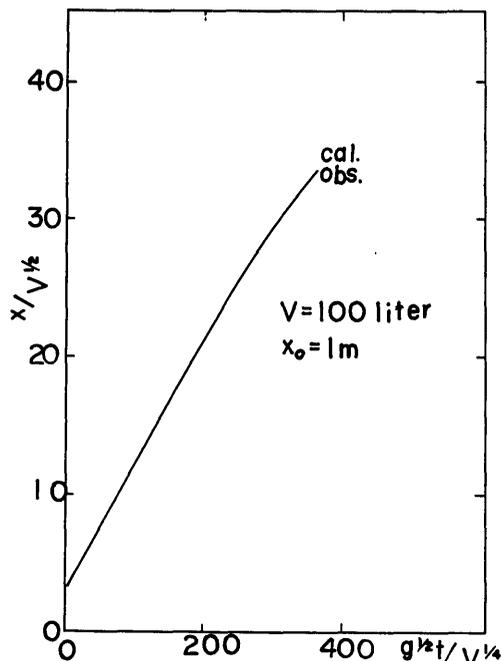


図 12 さらに表面張力を考慮にいれた計算曲線 (鎖線) と実験 (実線) の比較

の理解を深めるためには, ここで無視した諸要因の影響を, 正しく考察して行かなければならない。また方程式の中にあらわれる係数の値を正しくあたえるために, それらの諸要因についての基礎的な実験および理論的検討をおこなわねばならない。

これらの研究は今後の課題としてのこるけれども, それらのうちのいくつかについて, 簡単に考察することにする。

まず造波の問題がある。水の表面に圧力が印加されると波が発生する。油の流出の場合 2 通りの発生仕方がある。まず, 流出初期に瞬間的に生じた重力不安定による波が発生する。これは過渡的な現象である。つぎに油の前端が水をおしつけてすすむ結果, 前端に生ずる圧力により発生する波である。前者は, 初期速度に対して影響する。後者は油の拡がりに対する造波抵抗としてはたらいっている。

後者について考えてみよう。造波の問題は複雑であるが, いまの場合どのような波が発生するかは関係なく, 油層のうける抵抗さえ評価できればよい。油の前端の速度を dX/dt とすれば, 前端に生じる圧力は, この速度の二乗に比例するであろう。この圧力を油前端にわたって積分したものが, 油層のうける抵抗とな

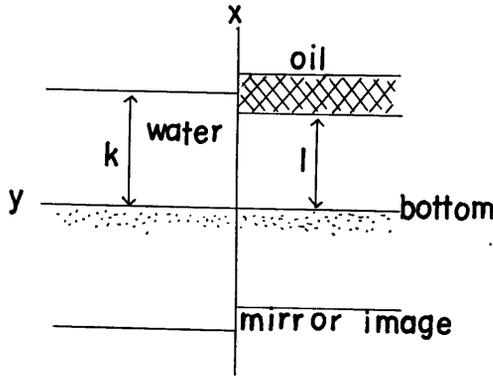


図 13 抵抗計算に用いる図

る。したがって、 y 方向単位幅あたり油層のうける抵抗は、速度の二乗および油層の厚みの関数である。

波の影響を無視して、この抵抗を計算してみよう。深さ k の水槽を考え、図 13 のように y 軸を水槽の底面にとる。底面から油層底面までの高さを l とし、 $y=0$ に油層前端があるものとする。この座標軸のとり方は便宜的なものである。油層の前端の速度を u_0 とするが、油層前端は静止して、そのかわり水が無限遠で速度 u_0 をもち、図 13 のような境界をもつポテンシャル流であるとしてもよい。図 13 のように y 軸に関し対称に境界をとり、この二つの境界にはさまれた部分のポテンシャル流をもとめることとする。

複素ポテンシャル $W=\varphi+i\psi$ とし、複素平面 $\zeta=x+iy$ の写像を考えると、

$$\zeta = \frac{2}{\pi} \left\{ k \tan^{-1} \left(\frac{e^{2W} - a^2}{1 - e^{2W}} \right)^{1/2} + l \tan^{-1} \left[a \left(\frac{1 - e^{2W}}{e^{2W} - a^2} \right)^{1/2} \right] \right\}$$

が題意を満足する。ただし、 $a=l/k$ 単位幅あたりの流量を π とした。

点 A, B 間の速度分布は、上で $y=0, \varphi=0$ とおいて

$$x = \frac{2}{\pi} \left\{ k \tan^{-1} \left(\frac{e^{2\varphi} - a^2}{1 - e^{2\varphi}} \right)^{1/2} + l \tan^{-1} \left[a \left(\frac{1 - e^{2\varphi}}{e^{2\varphi} - a^2} \right)^{1/2} \right] \right\}$$

両辺を x で微分することによって、

$$\varphi_x = \frac{\pi}{2k} \sqrt{\frac{1 - e^{2\varphi}}{e^{2\varphi} - a^2}}$$

油前端の受ける抵抗は、

$$\begin{aligned} \int_B^A p dx &= \int_B^A \left(\frac{1}{2} \rho_w u_0^2 - \frac{1}{2} \rho_w \varphi_x^2 \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \rho_w u_0^2 \int_B^A \left(1 - \frac{1 - e^{2\varphi}}{e^{2\varphi} - a^2} \right) \frac{dx}{d\varphi} d\varphi \end{aligned}$$

(268)

$$= \frac{1}{2} \rho_w u_0^2 k \left(a + \frac{1}{a} - 2 \right)$$

となる。 ρ_w は水の密度である。

書きなおすと、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \rho_w u_0^3 k \left(\frac{k^3 + l^2 - 2kl}{kl} \right) \\ &= \frac{1}{2} \rho_w u_0^2 \frac{h^2}{l} \end{aligned}$$

h は水面下の油の厚みである。したがって全体の油の厚みでおきかえると、

$$\frac{1}{2} \rho_w u_0^2 \frac{\rho_0^2 Z^2}{l}$$

となる。これより造波抵抗は速度の二乗および厚みの二乗に比例することが大きざっぱにわかる。これを書かえると、

$$C_4 V^{1/2} \frac{1}{\xi^2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \right)^2$$

なる項が方程式 (10) につけ加わることになる。注意すべきことは、以上の計算が、地面効果を計算したにすぎないということである。すなわち水槽の深さを無限大にすれば、これはゼロとなる。正しい抵抗をもとめるためにはポテンシャル流として取り扱うことは不適当である。

しかし、いつれにせよ、造波抵抗は大きざっぱにいて、厚みに比例するかまたはその二乗に比例する程度である。どちらの場合も、ごく流出の初期の段階できいてくる。

4. 外から与えられる波の影響

風や波など気象的要因の、油の拡がりにおよぼす影響は、はっきりわかっていない。しかし、実験によれば、ある種の波によって、油の前端の速度は変化させられる。図 14 は定常波をおこさせたとき、A および B 重油の波のない場合との比較である。影響はたしかに存在する。この問題については、さらに研究をすすめて行く予定である。

5. む す び

水面上に流出した油の層が、拡がって行く速さを求めるために、各種の実験が行なわれ理論的検討を加えることによって、(7) 式のような実験式を得た。

限られた条件、すなわち次元非定常の拡散に対して、この実験式はかなりよい一致をみせた。

さらに、異なった条件に対しても一致する式を得る

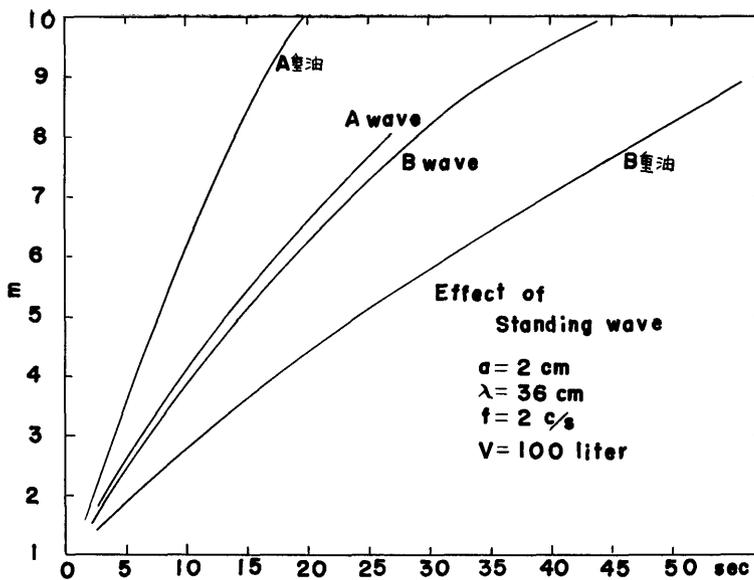


図 14 波の影響

ために、さらに以下の問題点を解明しなければならない。

- (1) 油層内の速度分布：これは、方程式の各項の係数にすべて影響するから、すくなくとも係数のオーダーをあたえ得る程度に速度分布の実態を把握せねばならない。
- (2) 二次元の拡散
- (3) 初期過渡現象：油層の厚みがかなりうすいものとして、とりあつかってきたが、大量の油が一時に流れだす場合は、瞬間的にかなり違った現象が

おこるものと考えられる。

- (4) 造波の問題
- (5) 風波の影響
- (6) 源をもつ定常な拡散などである。

参考文献

- 1) タンカー油流出事故対策特別研究：科学技術庁研究調整局，昭和43年10月発行予定