

揚力面の積分方程式の新しい数値解法

花 岡 達 郎*

A New Method for Calculating the Hydrodynamic
Load Distributions on a Lifting Surface

By

Tatsuro Hanaoka

In this paper a new method is given for calculating the hydrodynamic load distributions on wings of any plan-form in both steady and unsteady motion.

The basis of the method is to convert the two-dimensional integral equation of a lifting-surface into simultaneous one-dimensional integral equations, by expanding the two-variable integral equation in power series of one-variable by Taylor's theorem and equating to zero the coefficient functions of successive powers.

The procedure may be similar to Flax's method²⁾⁴⁾, but present method seems to be fairly simple and more economical for numerical calculations than Flax's.

緒 言

三次元の翼理論では翼を渦面で置換える。翼表面の流速はその渦の循環分布密度を積分記号内に含む形の表示式で与えられるものであるから、翼の形状、姿勢及び運動状態を与えて、翼面上の循環分布密度を求めたいときは、これは積分方程式を解く問題に帰着する。この積分方程式を揚力面の積分方程式という。

揚力面の積分方程式は一般に解析的に解くことのできないものであるから、それを多元連立1次方程式に書改めて、数値的に解くのが普通である。その際、連立方程式の元数をできるだけ少くして、精度をよくする様に工夫するのが解法の要点となっている。

揚力面の数値解法として、最適標点法¹⁾、Flaxの方法²⁾、最小二乗法の方法³⁾、の三つのものが知られているが⁴⁾、この中で最適標点法は計算が容易なため、最も普及している。然しこの方法は翼面上の有限個の標点において境界条件を満足する循環分布密度を求めるといふ、いわゆる局所適合法であるから、得られた循環分布密度が適合標点の拘束を受け過ぎて、波状の誤差を生じる様な結果になることが屢々あるといわれる。この難点は試行錯誤的に標点数を選択することに

よって回避されている⁵⁾。この様な数値計算上の蹉跌はFlaxの方法及び最小二乗法の方法には現われなれないと思われるが、それ等の方法では代数方程式の係数の計算に手間取るため、利用されることが少ない。

そこで、ここでは局所適合法ではなくて、しかも代数方程式の係数の演算が容易である様な方法を考えてみた。Flaxの方法は積分方程式の両辺を直交関数系で展開したとき、その対応する係数関数が等しくなるとしたものであるが⁴⁾、ここで述べる方法は積分方程式の両辺を冪級式に展開したとき、その係数関数が等しくなると思つたものである。この方法によると代数方程式の係数関数は発散積分の形で表わされ、その被積分関数は高位の極をもつことになるが、その有限部分をとる。

本文には数値計算例はないが、二次元翼について、この方法で解いたものと、解析解が一致することが示されている。これは当然の結果であるが、その解析の中に発散積分の処理法に関して三次元翼の計算に参考となる事項が幾つか含まれている。又定常翼について稍詳しい解析がなされているが、それ等の殆んどが非定常翼の解析にそのまま役立つものである。

本文で取扱うのは非圧縮性、非粘性の無限流体中における定常及び非定常の直進翼に関する揚力面であるが、プロペラ等の場合に応用することもできる。

* 運動性能力部

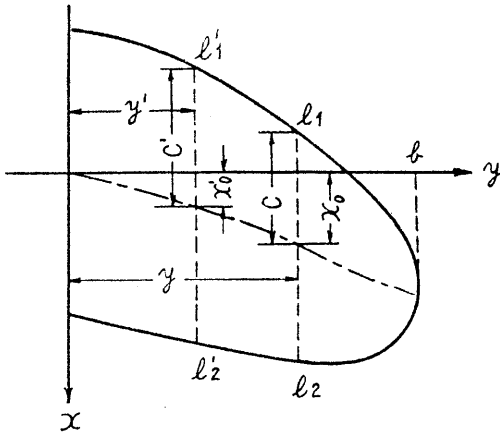


Fig. 1

- 記号
- x, y, z 任意点の座標
 - x', y', z' 特異点の座標
 - ρ 流体密度
 - Π 揚力分布密度
 - $\gamma = \Pi / (\rho V)$ 循環分布密度
 - w 翼面上の吹上げ速度
 - V 前進速度
 - b 翼幅
 - l_1, l_2 y 位置の前後縁の x 座標
 - l'_1, l'_2 y' 位置の前後縁の x 座標
 - $c = (l_2 - l_1) / 2, \quad x_0 = (l_1 + l_2) / 2$
 - $c' = (l'_2 - l'_1) / 2, \quad x'_0 = (l'_1 + l'_2) / 2$
 - $\xi = (x - x_0) / c, \quad \xi' = (x' - x'_0) / c'$
 - $\xi_m = (x_0 - x'_0) / c'$
 - $\beta = c / c'$
 - $\lambda = b / c'$
 - $\eta = y / b, \quad \eta' = y' / b$
 - $Y = \lambda |\eta - \eta'|$
 - $\omega = \nu c(\eta) / V, \nu$ は振動率である。

1. 定常揚力面

1.1 揚力面の積分方程式

翼が一定速度 V で x 軸の負の方向に進むときの揚力面の積分方程式は、吹上げを w とすると

$$-w(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2} \gamma(x', y') dx' dy' \times \int_{-\infty}^x \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{\sqrt{(X-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \Big|_{z=z'} dX \quad (1.1.1)$$

(2)

である。但し γ は循環分布密度で、これは揚力分布密度 Π と $\gamma = \Pi / (\rho V)$ の関係にある。

翼の平均矢高面の z 座標を \hat{z} とすると、翼表面の境界条件より

$$w(x, y) = V \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \quad (1.1.2)$$

である。

(1.1.1) の X の積分を行うと、揚力面の積分方程式は

$$-w(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2'} \frac{\gamma}{(y-y')^2} \times \left\{ \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} + 1 \right\} dx' dy' \quad (1.1.3)$$

となる。これは発散積分で表わされているから、収斂型に改めると

$$-w(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2'} \frac{\gamma}{y-y'} \times \left\{ \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}{x-x'} + 1 \right\} dx' dy' \quad (1.1.4)$$

とも書かれる。

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= (x' - x'_0) / c', & \xi'_0 &= x'_0 / c', \\ x'_0 &= (l'_1 + l'_2) / 2, & c' &= (l'_2 - l'_1) / 2 \\ \xi &= (x - x_0) / c, & \xi_0 &= x_0 / c, \\ x_0 &= (l_1 + l_2) / 2, & c &= (l_2 - l_1) / 2 \\ \eta &= y / b, & \eta' &= y' / b, & \Xi &= (X - x_0) / 2 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.5)$$

の無次元量を用いて (1.1.1), (1.1.3), (1.1.4) を書改めると

$$-w(\xi, \eta) = \frac{bc}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma c' d\xi' d\eta' \times \int_{-\infty}^{\xi} \frac{d\Xi}{[c(\Xi + \xi_0) - c'(\xi' + \xi'_0)]^2 + b^2(\eta - \eta')^2}^{3/2} \quad (1.1.6)$$

$$-w(\xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma c'}{b(\eta - \eta')^2} \times \left\{ \frac{c(\xi + \xi_0) - c'(\xi' + \xi'_0)}{\sqrt{[c(\xi + \xi_0) - c'(\xi' + \xi'_0)]^2 + b^2(\eta - \eta')^2}} + 1 \right\} d\xi' d\eta' \quad (1.1.7)$$

$$-w(\xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma c'}{-b(\eta - \eta')} \times \left\{ \frac{\sqrt{[c(\xi + \xi_0) - c'(\xi' + \xi'_0)]^2 + b^2(\eta - \eta')^2}}{c(\xi + \xi_0) - c'(\xi' + \xi'_0)} + 1 \right\} d\xi' d\eta' \quad (1.1.8)$$

である。

1.2 連立積分方程式

$w(\xi, \eta)$ が $-1 < \xi < 1$ の区間で有界連続なものと仮定すると、(1.1.6) 又は (1.1.7) の左右両辺をそれ

それξについて Taylor 展開したもののξの同次の項の係数関数は等しくなければならない。よって

$$\begin{aligned}
 -w(0, \eta) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma \lambda}{\lambda^2(\eta-\eta')^2} \\
 &\quad \left\{ \frac{-(\xi'-\xi_m)}{\sqrt{(\xi'-\xi_m)^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2}} + 1 \right\} d\xi' d\eta' \\
 -w^{(1)}(0, \eta) &= \frac{1}{4\pi} \\
 &\quad \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma \lambda \beta}{\{(\xi'-\xi_m)^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2\}^{3/2}} d\xi' d\eta' \\
 -w^{(2)}(0, \eta) &= \frac{3}{4\pi} \\
 &\quad \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\gamma \lambda \beta^2 (\xi'-\xi_m)}{\{(\xi'-\xi_m)^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2\}^{5/2}} d\xi' d\eta' \right. \\
 -w^{(3)}(0, \eta) &= -\frac{3}{4\pi} \\
 &\quad \times \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma \lambda \beta^3}{\{(\xi'-\xi_m)^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2\}^{5/2}} d\xi' d\eta' \\
 &\quad + \frac{15}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma \lambda \beta^3 (\xi'-\xi_m)^2}{\{(\xi'-\xi_m)^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2\}^{7/2}} d\xi' d\eta' \\
 &\quad \dots\dots\dots, \\
 &\quad \dots\dots\dots(1.2.1)
 \end{aligned}$$

である。但し

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda &= b/c', \quad \beta = c/c', \quad \xi_m = (x_0 - x_0')/c' \\
 w^{(k)}(\xi, \eta) &= \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^k w(\xi, \eta)
 \end{aligned} \right\} \dots(1.2.2)$$

とする。

(1.2.1) の n 番目の方程式迄って以下を省略し、

$$\gamma = \sum_{r=0}^{n-1} A_r(\eta) v_r(\xi) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \dots\dots\dots(1.2.3)$$

と置いて、これを(1.2.1)に代入してξ'について積分を行うと、(1.2.1)はAr(η)についてのn元の連立積分方程式となる。但しvr(ξ)はξについてr次の多項式とする。

(1.2.1)でw^(n-1)の式迄とったとき、(1.2.3)がそれに対応する揚力分布として適当か否かは容易に確かめられないが、二次元定常流ではw^(n-1)迄とったときの揚力分布は(1.2.3)に対応するので、縦横比が大きいときは誤差は少いであろう。翼が平板に近い様な簡単なもので、連立方程式(1.2.1)の1~2番目の式以下で左辺が0になる場合でも、それに関係なく(1.2.3)の項数は多くとり、連立方程式の元数は減らさない方が精度がよくなる。

vr(ξ)の形は場合に応じて計算しやすい形のものを選ぶとよい。たとえば

$$v_0(\xi) = 1, \quad v_r(\xi) = \xi^{r-1}(1+\xi) \dots\dots\dots(1.2.4)$$

とすると、(1.2.3)は

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma}{V} &= A_0(\eta) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + A_1(\eta) \sqrt{1-\xi^2} \\
 &\quad + A_2(\eta) \sqrt{1-\xi^2} + \dots\dots\dots \\
 &\quad + A_{n-1}(\eta) \xi^{n-2} \sqrt{1-\xi^2} \dots\dots\dots(1.2.5)
 \end{aligned}$$

の様に Birnbaum 級数となる。

前後対称の翼では、連立方程式(1.2.1)の核関数はξ'について交互に奇関数、偶関数となるので(1.2.5)を用いると、(1.2.1)の各式ではArの奇数項、偶数項を含むものが交互に0になって、演算子の数が少なくてすむという利点がある。

1.3 二次元定常翼

二次元定常翼では解析解が知られているので、上述の方法で求めたものを、それと比較することができる。

二次元定常翼の積分方程式は

$$-w(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi-\xi'} d\xi' \dots\dots\dots(1.3.1)$$

である。Kutta の流出条件を満たすこの方程式の解析解は

$$\begin{aligned}
 \gamma &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \frac{-w(\xi')}{\xi-\xi'} d\xi' \\
 &\quad \dots\dots\dots(1.3.2)
 \end{aligned}$$

である⁰⁾。

計算を簡単にするため、w(ξ)を Taylor 展開し、3項迄とって、以下を省略し

$$-w(\xi)/V = a^0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 \dots\dots\dots(1.3.3)$$

とおく。

(1.3.3)を(1.3.2)に代入し

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi \\
 &= \begin{cases} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n}, & n : \text{偶数} \\ 0, & n : \text{奇数} \\ 1, & n = 1 \end{cases} \\
 &\quad \left. \begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\xi^r}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi-\xi')} d\xi' \\ &= b_{r-1} + b_{r-2}\xi + \dots + b_1\xi^{r-2} + b_0\xi^{r-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.3.4)
 \end{aligned}$$

の公式⁰⁾を用いてξ'に関する積分を行うと

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma}{V} &= (2a_0 + a_2) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + (2a_1 + a_3) \sqrt{1-\xi^2} \\
 &\quad + 2a_2\xi \sqrt{1-\xi^2} + 2a_3\xi^2 \sqrt{1-\xi^2} \dots\dots\dots(1.3.5)
 \end{aligned}$$

となる。

一方 (1.3.1) の両辺を Taylor 展開して, ξ の同次の項の係数を等値すると

$$\left. \begin{aligned} -w(0) &= Va_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi'} d\xi' \\ -w^{(1)}(0) &= Va_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi'^2} d\xi' \\ -w^{(2)}(0) &= 2Va_2 = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi'^3} d\xi' \\ -w^{(3)}(0) &= 6Va_3 = -\frac{3}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi'^4} d\xi' \end{aligned} \right\} \dots(1.3.6)$$

である。

$$\frac{\gamma}{V} = A_0 \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + A_1 \sqrt{1-\xi^2} + A_2 \xi \sqrt{1-\xi^2} + A_3 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} \dots(1.3.7)$$

と置き, これを (1.3.6) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{A_0}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{A_2}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} d\xi \\ a_1 &= -\frac{A_0}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi^2 \sqrt{1-\xi^2}} - \frac{A_1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^2} d\xi \\ &\quad - \frac{A_3}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} d\xi \\ a_2 &= \frac{A_0}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi^2 \sqrt{1-\xi^2}} - \frac{A_2}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^2} d\xi \\ a_3 &= -\frac{A_0}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\xi^4 \sqrt{1-\xi^2}} d\xi \\ &\quad - \frac{A_1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^4} d\xi - \frac{A_2}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^2} d\xi \end{aligned} \right\} \dots(1.3.8)$$

となる。

これ等の積分の中で有限値をとるものは

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi &= \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} d\xi &= \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \dots(1.3.9)$$

である。 $1/\xi^{2n}$ (n : 正整数) を被積分関数に含むものは発散積分であるが, その有限部分をとる。この操作の妥当であることは, 翼近傍の吹上げの表示式から, その極限值として翼面上の吹上げを求めることで検証することができる。発散積分の有限部分を意味する為に特別な積分記号が用いられることがあるが, ここでは普通の積分記号のまま, 発散積分は常にその有限部分を意味するものとする。以下の積分は発散積分であるが, その有限部分を計算すると

(4)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^2} d\xi &= -\frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \right]_{-1}^1 \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi^2 \sqrt{1-\xi^2}} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \right\} d\xi \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^4} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{3} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^3} \right]_{-1}^1 \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi^2 \sqrt{1-\xi^2}} = 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi^4 \sqrt{1-\xi^2}} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\xi^2} \left\{ \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^2} + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \right\} d\xi = 0 \end{aligned} \right\} \dots(1.3.10)$$

である。これらを (1.3.8) に適用すると

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{A_0}{2} - \frac{A_2}{4}, & a_2 &= \frac{A_2}{2} \\ a_1 &= -\frac{A_1}{2} - \frac{A_3}{4}, & a_3 &= \frac{A_3}{2} \end{aligned} \right\} \dots(1.3.11)$$

が得られる。これを A_n について解くと

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 2a_0 + a_2, & A_1 &= 2a_1 + a_3 \\ A_2 &= 2a_2, & A_3 &= 2a_3 \end{aligned} \right\} \dots(1.3.12)$$

となって解析解の (1.3.5) に一致する。

1.4 三次元翼の連立方程式の核関数

三次元翼の循環分布密度 γ が仮に Birnbaum 級数 (1.2.5) の 4 項迄で近似的に表わされるものとして, 連立積分方程式の核関数を整理してみる。

$$Y = \lambda |\eta - \eta'|, \quad \xi = \xi' - \xi_m \dots(1.4.1)$$

と書くことにする。

(1.2.1) の第 3 式, 第 4 式は又

$$\left. \begin{aligned} -w^{(2)}(0, \eta) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma \lambda \beta^2 \frac{\partial}{\partial \xi'} \frac{1}{(\xi^2 + Y^2)^{3/2}} d\xi' d\eta' \\ -w^{(3)}(0, \eta) &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma \lambda \beta^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} \frac{1}{(\xi^2 + Y^2)^{3/2}} d\xi' d\eta' \end{aligned} \right\} \dots(1.4.2)$$

とも書かれる。

(1.2.5) を (1.2.1) に代入し、積分変数 ξ' を ξ と書くことにすると

$$\left. \begin{aligned}
 -w(0, \eta) &= -\frac{V}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ A_0 \frac{1-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right. \\
 &\quad \left. + A_1 \sqrt{1-\xi^2} + A_2 \xi \sqrt{1-\xi^2} + A_3 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} \right\} \\
 &\quad \times \frac{\lambda}{Y^2} \left\{ \frac{-\bar{\xi}}{\sqrt{\bar{\xi}^2 + Y^2}} + 1 \right\} d\xi d\eta' \\
 -w^{(1)}(0, \eta) &= -\frac{V}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ A_0 \frac{1-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right. \\
 &\quad \left. + A_1 \sqrt{1-\xi^2} + A_2 \xi \sqrt{1-\xi^2} + A_3 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} \right\} \\
 &\quad \times \frac{\lambda\beta}{(\bar{\xi}^2 + Y^2)^{3/2}} d\xi d\eta' \\
 -w^{(2)}(0, \eta) &= -\frac{V}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ A_0 \frac{1-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right. \\
 &\quad \left. + A_1 \sqrt{1-\xi^2} + A_2 \xi \sqrt{1-\xi^2} + A_3 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} \right\} \\
 &\quad \times \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \frac{\lambda\beta^2}{(\bar{\xi}^2 + Y^2)^{3/2}} d\xi d\eta' \\
 -w^{(3)}(0, \eta) &= -\frac{V}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ A_0 \frac{1-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right. \\
 &\quad \left. + A_1 \sqrt{1-\xi^2} + A_2 \xi \sqrt{1-\xi^2} + A_3 \xi^2 \sqrt{1-\xi^2} \right\} \\
 &\quad \times \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}^2} \frac{\lambda\beta^3}{(\bar{\xi}^2 + Y^2)^{3/2}} d\xi d\eta'
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.4.3)$$

である。

(1.4.3) の第 3 式, 第 4 式の A_1 以下の項で部分積分を行うと

$$\begin{aligned}
 -w^{(2)}(0, \eta) &= \frac{V}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda\beta^2 \left[A_0 \frac{1-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right. \\
 &\quad \times \frac{3\bar{\xi}}{(\bar{\xi}^2 + Y^2)^{5/2}} + \left\{ -A_1 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + A_2 \left(\sqrt{1-\xi^2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) + A_3 \left(2\xi \sqrt{1-\xi^2} - \frac{\xi^3}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right\} \\
 &\quad \times \frac{1}{(\bar{\xi}^2 + Y^2)^{3/2}} d\xi d\eta' \dots\dots\dots(1.4.4) \\
 -w^{(3)}(0, \eta) &= -\frac{V}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda\beta^3 A_0 \frac{1-\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{-3}{(\bar{\xi}^2 + Y^2)^{5/2}} - \frac{15\bar{\xi}^2}{(\bar{\xi}^2 + Y^2)^{7/2}} \right\} d\xi d\eta' \\
 &\quad - \frac{V}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda\beta^3 \left\{ -A_1 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} - A_2 \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad \left. -A_3 \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right\} \frac{-3\bar{\xi}}{(\bar{\xi}^2 + Y^2)^{5/2}} d\xi d\eta' \\
 &\quad + \frac{V}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \lambda\beta^3 \left\{ -A_2 \frac{2\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right. \\
 &\quad \left. + 3A_3 \left(\sqrt{1-\xi^2} - \frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \right\} \\
 &\quad \times \frac{1}{(\bar{\xi}^2 + Y^2)^{3/2}} d\xi d\eta' \dots\dots\dots(1.4.5)
 \end{aligned}$$

である。

計算の便宜上

$$k_s^{(j)} = \int_{-1}^1 \frac{(\xi-a)^j}{\sqrt{1-\xi^2} \{(\xi-a)^2 + Y^2\}^s} d\xi \dots(1.4.6)$$

で定義される関数を用いる。

$$\left. \begin{aligned}
 &\int_{-1}^1 \frac{\xi(\xi-a)^j}{\sqrt{1-\xi^2} \{(\xi-a)^2 + Y^2\}^s} d\xi \\
 &\quad = k_s^{(j+1)} + a k_s^{(j)} \\
 &\int_{-1}^1 \frac{\xi^2(\xi-a)^j}{\sqrt{1-\xi^2} \{(\xi-a)^2 + Y^2\}^s} d\xi \\
 &\quad = k_s^{(j+2)} + 2a k_s^{(j+1)} + a^2 k_s^{(j)} \\
 &\int_{-1}^1 \frac{\xi^3(\xi-a)^j}{\sqrt{1-\xi^2} \{(\xi-a)^2 + Y^2\}^s} d\xi \\
 &\quad = k_s^{(j+3)} + 3a k_s^{(j+2)} + 3a^2 k_s^{(j+1)} + a^3 k_s^{(j)}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.4.7)$$

の様に表わされるから、これ等を (1.4.3), (1.4.4), (1.4.5) に適用すると、連立積分方程式の核関数は $k_s^{(j)}$ の和で表わすことができる。

連立方程式 (1.4.3) を

$$\left. \begin{aligned}
 -\frac{w(0, \eta)}{V} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{r=0}^3 A_r K_{0r} d\eta' \\
 -\frac{w^{(1)}(0, \eta)}{V} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{r=0}^3 A_r K_{1r} d\eta' \\
 -\frac{w^{(2)}(0, \eta)}{V} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{r=0}^3 A_r K_{2r} d\eta' \\
 -\frac{w^{(3)}(0, \eta)}{V} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{r=0}^3 A_r K_{3r} d\eta'
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.4.8)$$

の様に書くと、核関数は

$$\begin{aligned}
 K_{00} &= \frac{\lambda}{2Y^2} \left\{ (1-\xi_m) k_{1/2}^{(1)} - k_{1/2}^{(2)} - \pi \right\} \\
 K_{01} &= \frac{\lambda}{2Y^2} \left\{ (1-\xi_m^2) k_{1/2}^{(1)} - k_{1/2}^{(3)} - 2\xi_m k_{1/2}^{(2)} - \frac{\pi}{2} \right\} \\
 K_{02} &= \frac{\lambda}{2Y^2} \left\{ \xi_m (1-\xi_m^2) k_{1/2}^{(1)} + (1-3\xi_m^2) k_{1/2}^{(2)} \right. \\
 &\quad \left. - 3\xi_m k_{1/2}^{(3)} - k_{1/2}^{(4)} \right\} \\
 K_{03} &= \frac{\lambda}{2Y^2} \left\{ \xi_m^2 (1-\xi_m^2) k_{1/2}^{(1)} + 2\xi_m (1-2\xi_m^2) k_{1/2}^{(2)} \right. \\
 &\quad \left. + (1-6\xi_m^2) k_{1/2}^{(3)} - 4\xi_m k_{1/2}^{(4)} - k_{1/2}^{(5)} - \frac{\pi}{8} \right\} \\
 K_{10} &= \frac{\lambda\beta}{2} \left\{ (1-\xi_m) k_{3/2}^{(0)} - k_{3/2}^{(1)} \right\} \\
 K_{11} &= \frac{\lambda\beta}{2} \left\{ (1-\xi_m)^2 k_{3/2}^{(0)} - 2\xi_m k_{3/2}^{(1)} - k_{3/2}^{(2)} \right\} \\
 K_{12} &= \frac{\lambda\beta}{2} \left\{ \xi_m (1-\xi_m^2) k_{3/2}^{(0)} + (1-3\xi_m^2) k_{3/2}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. - 3\xi_m k_{3/2}^{(2)} - k_{3/2}^{(3)} \right\} \\
 K_{13} &= \frac{\lambda\beta}{2} \left\{ \xi_m^2 (1-\xi_m^2) k_{3/2}^{(0)} + 2\xi_m (1-2\xi_m^2) k_{3/2}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. + (1-6\xi_m^2) k_{3/2}^{(2)} - 4\xi_m k_{3/2}^{(3)} - k_{3/2}^{(4)} \right\} \\
 K_{20} &= \frac{9\lambda\beta^2}{2} \left\{ (1-\xi_m) k_{5/2}^{(1)} - k_{5/2}^{(2)} \right\} \\
 K_{21} &= -\frac{3\lambda\beta^2}{2} \left\{ \xi_m k_{5/2}^{(0)} - k_{5/2}^{(1)} \right\} \\
 K_{22} &= \frac{3\lambda\beta^2}{2} \left\{ (1-2\xi_m^2) k_{5/2}^{(0)} - 4\xi_m k_{5/2}^{(1)} - 2k_{5/2}^{(2)} \right\} \\
 K_{23} &= \frac{3\lambda\beta^2}{2} \left\{ (\xi_m (2-\xi_m^2) k_{5/2}^{(0)} + (2-9\xi_m^2) k_{5/2}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. - 9\xi_m k_{5/2}^{(2)} - 3k_{5/2}^{(3)} \right\} \\
 K_{30} &= -\frac{3\lambda\beta^3}{2} \left\{ (1-\xi_m) k_{5/2}^{(0)} - k_{5/2}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. - 5\xi_m^2 (1-\xi_m) k_{5/2}^{(0)} - 5\xi_m (2-3\xi_m) k_{5/2}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. - 5(1-3\xi_m) k_{5/2}^{(2)} + 5k_{5/2}^{(3)} \right\} \\
 K_{31} &= -\frac{3\lambda\beta^3}{2} \left\{ k_{5/2}^{(2)} + \xi_m k_{5/2}^{(1)} \right\} \\
 K_{32} &= -\frac{3\lambda\beta^3}{2} \left\{ k_{5/2}^{(1)} + \frac{2}{3} k_{5/2}^{(1)} + \frac{2}{3} \xi_m k_{5/2}^{(0)} \right\} \\
 K_{33} &= \frac{3\lambda\beta^3}{2} \left\{ (1-2\xi_m^2) k_{5/2}^{(0)} - 4\xi_m k_{5/2}^{(1)} - 2k_{5/2}^{(2)} \right. \\
 &\quad \left. - \xi_m k_{5/2}^{(1)} - k_{5/2}^{(2)} \right\} \\
 &\dots\dots\dots(1.4.9)
 \end{aligned}$$

の様に表わされる。但し (1.4.6) で定義した $k_s^{(j)}$ の一つの変数 a はここでは ξ_m である。

$k_s^{(j)}$ の数値表を作っておくと、(1.4.9) によって連

(6)

立方方程式 (1.4.8) の核関数の数値は容易に計算することができる。この核関数は Y について2位の極と対数特異点をもつから (1.7 節 参照) Mangler & Spencer⁷⁾ の方法によって (1.4.8) の η' の積分を数値的に行うと、それを近似度の高い代数方程式の形に表わすことができる。その連立代数方程式を作り、又それを解く方法は従来行われているものを踏襲すればよいので、その計算は省略する。

1.5 $k_s^{(j)}$ の循環式

(1.4.6) に示す関数 $k_s^{(j)}$ は定常翼ばかりでなく非定常翼の連立積分方程式にも現われる関数で、これの数値表を作っておくと積分方程式の計算に便利である。 $k_s^{(j)}$ の表示式の中で Y は他の項に比べて大きい値をとることが多いので、 s が大きくなるに従って $k_s^{(j)}$ は急に小さくなる。従って $k_s^{(j)}$ の関数表を作るよりも、これと

$$\begin{aligned}
 K_s^{(j)} &= Y^{2s} k_s^{(j)} \\
 &= Y^{2s} \int_{-1}^1 \frac{(\xi-a)^j}{\sqrt{1-\xi^2} \{(\xi-a)^2 + Y^2\}^s} d\xi \\
 &\dots\dots\dots(1.5.1)
 \end{aligned}$$

の関係にある関数 $K_s^{(j)}$ の関数表を作っておく方が作表上好都合である。

(1.5.1) より $K_s^{(j)}$ には

$$K_s^{(j)} = Y^2 (K_{s-1}^{(j-2)} - K_s^{(j-2)}) \dots\dots\dots(1.5.2)$$

の循環式のあることがわかる。従って、 $j > 1$ に対する $K_s^{(j)}$ は $K_s^{(0)}$ 、 $K_s^{(1)}$ の値から、容易にその値が計算できるので、数値表としては $K_s^{(0)}$ 、 $K_s^{(1)}$ のものだけで充分である。

(1.5.1) の積分変数を $\xi = \cos \theta$ と置いて θ の積分に書改めると

$$K_s^{(j)} = Y^{2s} \int_0^\pi \frac{(\cos \theta - a)^j}{\{(\cos \theta - a)^2 + Y^2\}^s} d\theta \dots\dots(1.5.3)$$

となる。 $K_s^{(0)}$ 、 $K_s^{(1)}$ の値はこの式を数値積分して求めるとよい。

$k_s^{(j)}$ の循環式を求めてみる。

先づ (1.5.2) を $k_s^{(j)}$ の循環式に書改めると

$$k_s^{(j)} = k_{s-1}^{(j-2)} - Y^2 k_s^{(j-2)} \dots\dots\dots(1.5.4)$$

である。

更に

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\theta} \frac{(\cos \theta - a)^j \sin \theta}{\{\cos \theta - a\}^2 + Y^2} \\ &= [(\cos \theta - a)^j (\cos \theta - a + a) - j(\cos \theta - a)^{j-1} \\ & \quad \{1 - a^2 - 2a(\cos \theta - a) - (\cos \theta - a)^2\}] / \\ & \quad \{(\cos \theta - a)^2 + Y^2\}^s \\ &+ 2s(\cos \theta - a)^{j+1} \{1 - a^2 - 2a(\cos \theta - a) \\ & \quad - (\cos \theta - a)^2\} / \{(\cos \theta - a)^2 + Y^2\}^{s+1} \end{aligned}$$

であるから、これの両辺を θ で 0 より π 迄積分すると、左辺は 0 となり

$$\begin{aligned} & k_s^{(j+1)} + ak_s^{(j)} + (1-a^2)\{2sk_{s+1}^{(j+1)} - jk_s^{(j-1)}\} \\ & - 2a\{2sk_{s+1}^{(j+2)} - jk_s^{(j)}\} - \{2sk_{s+1}^{(j+3)} - jk_s^{(j+1)}\} = 0 \\ & \dots\dots\dots(1.5.5) \end{aligned}$$

の循環式が得られる。この式はあまり簡単ではないが、(1.5.4) と (1.5.5) によって、 $k_s^{(0)}$ 、 $k_s^{(1)}$ の s の数個の値に対応する $k_s^{(j)}$ の値から j の任意の正整数値、 s の半奇数値に対応する $k_s^{(j)}$ の値を求めることができる。

(1.5.4) を用いて (1.5.5) の $k_{s+1}^{(j+2)}$ 、 $k_{s+1}^{(j+3)}$ を $k_s^{(j)}$ 、 $k_s^{(j+1)}$ 等で表わすと

$$\begin{aligned} & k_s^{(j+1)} + ak_s^{(j)} + (1-a^2)\{2sk_{s+1}^{(j+1)} - jk_s^{(j-1)}\} \\ & - 2a\{2sk_s^{(j)} - 2sY^2k_{s+1}^{(j)} - jk_s^{(j)}\} \\ & - \{2sk_s^{(j+1)} - 2sY^2k_{s-1}^{(j+1)} - jk_s^{(j+1)}\} = 0 \\ & \dots\dots\dots(1.5.6) \end{aligned}$$

と書かれる。ここで $j=0$ と置くと

$$\begin{aligned} & (2s-1)k_s^{(1)} - 2s(Y^2+1-a^2)k_{s+1}^{(1)} + a(4s-1)k_s^{(0)} \\ & - 4saY^2k_{s+1}^{(0)} = 0 \quad \dots\dots\dots(1.5.7) \end{aligned}$$

が得られる。

再び (1.5.4) を用いて (1.5.6) の $k_s^{(j+1)}$ を $k_s^{(j-1)}$ 等で表わすと

$$\begin{aligned} & (2s-1-j)\{k_{s-1}^{(j-1)} - Y^2k_s^{(j-1)}\} - 2s(Y^2+1-a^2) \\ & \times \{k_s^{(j-1)} - Y^2k_{s+1}^{(j-1)}\} + a(4s-1-2j)k_s^{(j)} \\ & 4saY^2k_{s+1}^{(j)} + j(1-a^2)k_s^{(j-1)} = 0 \quad \dots\dots\dots(1.5.8) \end{aligned}$$

となる。この式で $j=1$ と置くと

$$\begin{aligned} & a(4s-3)k_s^{(1)} - 4saY^2k_{s+1}^{(1)} + 2(s-1)k_{s-1}^{(0)} \\ & - (2s-1)(2Y^2+1-a^2)k_s^{(0)} \\ & + 2sY^2(Y^2+1-a^2)k_{s+1}^{(0)} = 0 \quad \dots\dots\dots(1.5.9) \end{aligned}$$

が得られる。

(1.5.7)、(1.5.9) を

$$\left. \begin{aligned} (2s-1)k_s^{(1)} - 2s(Y^2+1-a^2)k_{s+1}^{(1)} &= U_s \\ a(4s-3)k_s^{(1)} - 4saY^2k_{s+1}^{(1)} &= V_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.5.10)$$

但し

$$\left. \begin{aligned} U_s &= -a(4s-1)k_s^{(0)} + 4saY^2k_{s+1}^{(0)} \\ V_s &= -2(s-1)k_{s-1}^{(0)} + (2s-1)(2Y^2+1-a^2)k_s^{(0)} \\ & - 2sY^2(Y^2+1-a^2)k_{s+1}^{(0)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.5.11)$$

の様を表わすと、 U_s 、 V_s の中には $k_s^{(0)}$ のみが含まれ、 $k_s^{(1)}$ の系列の関数は存在しない。

(1.5.10) を $k_s^{(1)}$ 、 $k_{s+1}^{(1)}$ について解くと

$$k_s^{(1)} = \frac{2aY^2U_s - (Y^2+1-a^2)V_s}{2aY^2(2s-1) - (Y^2+1-a^2)a(4s-3)} \dots\dots\dots(1.5.12)$$

$$k_{s+1}^{(1)} = \frac{a(4s-3)U_s - (2s-1)V_s}{4saY^2(2s-1) - 2s(Y^2+1-a^2)a(4s-3)} \dots\dots\dots(1.5.13)$$

である。

(1.5.12) の s の代わりに $s+1$ とおくと (1.5.12) と (1.5.13) は等しくなる筈であるから

$$\begin{aligned} & \frac{2aY^2U_{s+1} - (Y^2+1-a^2)V_{s+1}}{2Y^2(2s+1) - (Y^2+1-a^2)(4s+1)} \\ & = \frac{a(4s-3)U_s - (2s-1)V_s}{4sY^2(2s-1) - 2s(Y^2+1-a^2)(4s-3)} \\ & \dots\dots\dots(1.5.14) \end{aligned}$$

が得られる。これが $k_s^{(0)}$ の漸化式である。

(1.5.14) において $s=1/2$ とすると

$$\frac{2aY^2U_{3/2} - (Y^2+1-a^2)V_{3/2}}{4Y^2-3(Y^2+1-a^2)} = -\frac{aU_{1/2}}{Y^2+1-a^2} \dots\dots\dots(1.5.15)$$

となる。この式を用いると $k_{1/2}^{(0)}$ 、 $k_{3/2}^{(0)}$ の値から $k_{5/2}^{(0)}$ の

値を計算することができる。更に (1.5.14) において $s=3/2$ とおくと, $k_{1/2}^{(0)}, k_{3/2}^{(0)}, k_{5/2}^{(0)}$ の値から $k_{7/2}^{(0)}$ の値を求めることができる。この様にして $k_s^{(0)}$ の値が求められれば, (1.5.12) によって $k_s^{(1)}$ の値を計算することができる。積分方程式の計算には s の負の値に対する $k_s^{(0)}$ 等の数値も必要であるが, それ等に対しても以上の循環式が適用される。

1.6 前後対称な翼の $k_s^{(j)}$ と核関数

前後非対称な翼の連立方程式は複雑なものであるが, 前後対称な翼の場合は $k_s^{(j)}$ が完全楕円積分で表わされ, $k_s^{(j)}$ の循環式は非常に簡単になるので, それに伴って連立積分方程式の核関数は整った形に書表わされる。これは核関数の一典型として一般の場合の参考になる。

前後対称の翼では $\xi_m=0$ であるから, $k_s^{(2n+1)}=0$ (n : 整数) である。従って (1.4.9) の核関数は

$$\left. \begin{aligned} K_{00} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{Y^2} (-k_{1/2}^{(2)} - \pi) \\ K_{01} &= -\frac{\pi}{4} \frac{\lambda}{Y^2} \\ K_{02} &= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{Y^2} (k_{1/2}^{(2)} - k_{1/2}^{(4)}) \\ K_{03} &= -\frac{\pi}{16} \frac{\lambda}{Y^2} \\ K_{10} &= \frac{\lambda\beta}{2} k_{3/2}^{(0)} \\ K_{11} &= \frac{\lambda\beta}{2} (k_{3/2}^{(0)} - k_{3/2}^{(2)}) \\ K_{12} &= 0 \\ K_{13} &= \frac{\lambda\beta}{2} (k_{3/2}^{(2)} - k_{3/2}^{(4)}) \\ K_{20} &= -\frac{3\lambda\beta^2}{2} k_{5/2}^{(2)} \\ K_{21} &= 0 \\ K_{22} &= \frac{\lambda\beta^2}{2} (k_{3/2}^{(0)} - 2k_{3/2}^{(2)}) \\ K_{23} &= 0 \\ K_{30} &= -\frac{3\lambda\beta^3}{2} (k_{5/2}^{(0)} - 5k_{5/2}^{(2)}) \\ K_{31} &= -\frac{3\lambda\beta^3}{2} k_{5/2}^{(2)} \\ K_{32} &= 0 \\ K_{33} &= -\frac{3\lambda\beta^3}{2} (k_{5/2}^{(2)} - k_{3/2}^{(0)} + 2k_{3/2}^{(2)}) \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.6.1)$$

である。

(8)

(1.5.9) において $k_s^{(1)}, k_{s-1}^{(1)}$ が共に 0 であるから

$$\begin{aligned} 2(s-1)k_{s-1}^{(0)} - (2s-1)(2Y^2+1)k_s^{(0)} \\ + 2sY^2(Y^2+1)k_{s+1}^{(0)} = 0, \quad a=0 \dots\dots(1.6.2) \end{aligned}$$

となる。これが $a=0$ のときの $k_s^{(0)}$ の漸化式である。

いま新たに

$$g_s(Y) = \frac{(1+Y^2)^s}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}(\xi^2+Y^2)^s} \dots\dots(1.6.3)$$

で定義される関数を導入すると, これは $a=0$ のときの $k_s^{(j)}$ と

$$g_s(Y) = \frac{(1+Y^2)^s}{2} k_s^{(0)}, \quad a=0 \dots\dots(1.6.4)$$

の関係にある。

(1.6.2), (1.6.4) より g_s の漸化式を求めると

$$\begin{aligned} 2(s-1)(1+Y^2)g_{s-1} - 2(s-1)(1+2Y^2)g_s \\ + 2sY^2g_{s+1} = 0 \dots\dots(1.6.5) \end{aligned}$$

である。

$$k^2 = 1/(1+Y^2), \quad k'^2 = 1-k^2 = Y^2/(1+Y^2) \dots\dots(1.6.6)$$

で定義される k' を用いて (1.6.5) を書改めると

$$\begin{aligned} 2(s-1)g_{s-1} - (2s-1)k'^2g_s \\ = (2s-1)g_s - 2sk'^2g_{s+1} \dots\dots(1.6.7) \end{aligned}$$

となる。この式の両辺を $(1+Y^2)^s$ で割ると

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+Y^2} \left\{ \frac{2(s-1)g_{s-1}}{(1+Y^2)^{s-1}} - \frac{(2s-1)Y^2g_s}{(1+Y^2)^s} \right\} \\ = \frac{(2s-1)g_s}{(1+Y^2)^s} - \frac{2sY^2g_{s+1}}{(1+Y^2)^{s+1}} \dots\dots(1.6.8) \end{aligned}$$

が得られる。これは重要な関係式である。 g_s は s が大きくなるに従って, 被積分関数の特異点の位数が高くなるが, (1.6.8) によって, その位数を低くすることができる。

(1.6.8) で $s=5/2$ 及び $s=3/2$ と置くと

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+Y^2} \left\{ \frac{3g_{3/2}}{(1+Y^2)^{3/2}} - \frac{4Y^2g_{5/2}}{(1+Y^2)^{5/2}} \right\} \\ = \frac{4g_{5/2}}{(1+Y^2)^{5/2}} - \frac{5Y^2g_{7/2}}{(1+Y^2)^{7/2}} \dots\dots(1.6.9) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+Y^2} \left\{ \frac{g_{1/2}}{\sqrt{1+Y^2}} - \frac{2Y^2 g_{3/2}}{(1+Y^2)^{3/2}} \right\} \\ = \frac{2g_{3/2}}{(1+Y^2)^{3/2}} - \frac{3Y^2 g_{5/2}}{(1+Y^2)^{5/2}} \dots\dots\dots(1.6.10)$$

である。この二つの式から

$$\frac{12g_{3/2}}{(1+Y^2)^{5/2}} - \frac{15Y^2 g_{7/2}}{(1+Y^2)^{7/2}} \\ = \frac{1}{1+Y^2} \left[\frac{g_{3/2}}{(1+Y^2)^{3/2}} + \frac{4}{1+Y^2} \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{g_{1/2}}{\sqrt{1+Y^2}} - \frac{2Y^2 g_{3/2}}{(1+Y^2)^{3/2}} \right\} \right] \dots\dots\dots(1.6.11)$$

が得られる。これは (1.6.1) を整理するとき利用される。

(1.6.3) において $\xi = \cos \theta$ と置くと

$$g_s = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1-k^2 \sin^2 \theta)^s} \dots\dots\dots(1.6.12)$$

の様に表わされる。従って、 $K(k)$, $E(k)$ を k を母数とする Legendre-Jacobi の第1種及び第2種の完全楕円積分とすると

$$g_{1/2} = K(k), \quad g_{-1/2} = E(k) \dots\dots\dots(1.6.13)$$

である。この $K(k)$, $E(k)$ と共に

$$D(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \dots\dots\dots(1.6.14)$$

で定義される積分は屢々利用されるが、これは K , E と

$$K(k) - E(k) = k^2 D(k) = D(k) / (1+Y^2) \dots\dots\dots(1.6.15)$$

の関係にある。

(1.6.7) で $s=1/2$ 及び $s=-1/2$ と置くと

$$g_{-1/2} = k'^2 g_{3/2}, \quad 3g_{-3/2} = 2(1+k'^2)g_{-1/2} - k'^2 g_{1/2}$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} g_{3/2} &= \frac{E(k)}{k'^2}, \\ g_{-3/2} &= \frac{1}{3} \{ 2(1+k'^2)E(k) - k'^2 K(k) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.6.16)$$

が得られる。

以上に導いた関係式を (1.6.1) に適用して、整理すると

$$\left. \begin{aligned} K_{00} &= \frac{\lambda}{Y^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1+Y^2}} \left\{ -E(k) + \frac{Y^2}{1+Y^2} D(k) \right\} - \frac{\pi}{2} \right] \\ K_{01} &= -\frac{\pi}{4} \frac{\lambda}{Y^2} \\ K_{02} &= \frac{\lambda \sqrt{1+Y^2}}{3Y^2} \left\{ E(k) - \frac{2Y^2}{1+Y^2} D(k) \right\} \\ K_{03} &= -\frac{\pi}{16} \frac{\lambda}{Y^2} \\ K_{10} &= \frac{\lambda \beta}{Y^2} \frac{E(k)}{\sqrt{1+Y^2}} \\ K_{11} &= \frac{\lambda \beta}{\sqrt{1+Y^2}} \left\{ \frac{E(k)}{Y^2} - \frac{D(k)}{1+Y^2} \right\} \\ K_{13} &= \frac{\lambda \beta}{\sqrt{1+Y^2}} \left\{ -E(k) + \frac{1+2Y^2}{1+Y^2} D(k) \right\} \\ K_{20} &= -\frac{\lambda \beta^2}{(1+Y^2)^{3/2}} \left\{ \frac{E(k)}{Y^2} + \frac{D(k)}{1+Y^2} \right\} \\ K_{22} &= \frac{\lambda \beta^2}{\sqrt{1+Y^2}} \left\{ \frac{E(k)}{Y^2} - \frac{2D(k)}{1+Y^2} \right\} \\ K_{30} &= \frac{\lambda \beta^3}{(1+Y^2)^{5/2}} \left\{ \frac{4D(k)}{1+Y^2} + \frac{1-3Y^2}{Y^2} E(k) \right\} \\ K_{31} &= \beta K_{20} \\ K_{33} &= \frac{\lambda \beta^3}{(1+Y^2)^{3/2}} \left\{ \frac{2+3Y^2}{Y^2} E(k) - \frac{7+6Y^2}{1+Y^2} D(k) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.6.17)$$

が得られる。従って核関数の数値は完全楕円積分の数値表を用いれば、容易に求められる。

1.7 核関数の特異性

連立積分方程式を代数方程式に書表わすには、核関数の特異性を予じめ調べておく必要がある。

完全楕円積分の $k'=0$ の近傍における展開式は、 $A=l_n A/k'$ と書くと

$$\left. \begin{aligned} K(k) &= A + \frac{A-1}{4} k'^2 + \frac{9}{64} \left(A - \frac{7}{6} \right) k'^4 + \dots\dots \\ E(k) &= 1 + \frac{1}{2} \left(A - \frac{1}{2} \right) k'^2 + \frac{3}{16} \left(A - \frac{13}{12} \right) k'^4 + \dots\dots \\ D(k) &= A - 1 + \frac{3}{4} \left(A - \frac{4}{3} \right) k'^2 + \frac{45}{64} \left(A - \frac{41}{30} \right) k'^4 + \dots\dots \end{aligned} \right\}$$

である註)。この k' と Y の関係は (1.6.6) に示すものであるから、 Y についての展開式に書改めると

註) この展開式は Jahnke u. Emde, Funktionen-tafeln に記載されている。そこでは $D(k)$ の展開式に誤植があるが、ここではそれを訂正してある。

$$\left. \begin{aligned} K(k) &= -l_n Y + l_n(4\sqrt{1+Y^2}) + \dots \\ E(k) &= 1 - \frac{Y^2}{2(1+Y^2)} l_n Y + \dots \\ D(k) &= -l_n Y + l_n(4\sqrt{1+Y^2}) - 1 + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.7.1)$$

となる。

$a=0$ のときの $k_s^{(0)}$ の $Y=0$ の近傍における展開式を (1.6.4), (1.6.13), (1.6.16) と (1.7.1) を参照して求めると

$$\left. \begin{aligned} k_{1/2}^{(0)} &= \frac{2}{\sqrt{1+Y^2}} K(k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+Y^2}} \left\{ -l_n Y + l_n(4\sqrt{1+Y^2}) + \dots \right\} \\ k_{-1/2}^{(0)} &= 2\sqrt{1+Y^2} E(k) \\ &= 2\sqrt{1+Y^2} \left\{ 1 - \frac{Y^2}{2(1+Y^2)} l_n Y + \dots \right\} \\ k_s^{(0)} &= \frac{2}{\sqrt{1+Y^2}} \frac{1}{Y^2} E(k) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+Y^2}} \left\{ \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{2(1+Y^2)} l_n Y + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.7.2)$$

となる。

(1.7.1) を (1.6.17) に適用すると、前後対称な翼の核関数は $Y=0$ に次の様な特異性をもつことがわかる。即ち

$$\left. \begin{aligned} K_{00} &\sim \lambda \left\{ -\frac{1}{Y^2} \left(1 + \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} l_n Y \right\} \\ K_{01} &= -\frac{\pi}{4} \frac{\lambda}{Y^2} \\ K_{02} &\sim \frac{\lambda}{3} \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{3}{2} l_n Y \right) \\ K_{03} &= -\frac{\pi}{16} \frac{\lambda}{Y^2} \\ K_{10} &\sim \lambda \beta \left(\frac{1}{Y^2} - \frac{1}{2} l_n Y \right) \\ K_{11} &\sim \lambda \beta \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{2} l_n Y \right) \\ K_{13} &\sim -\lambda \beta l_n Y \\ K_{20} &\sim -\lambda \beta^2 \left(\frac{1}{Y^2} - \frac{3}{2} l_n Y \right) \\ K_{22} &\sim \lambda \beta^2 \left(\frac{1}{Y^2} + \frac{3}{2} l_n Y \right) \\ K_{30} &\sim \lambda \beta^3 \left(-\frac{1}{Y^2} - \frac{9}{2} l_n Y \right) \\ K_{31} &\sim -\lambda \beta^3 \left(\frac{1}{Y^2} - \frac{3}{2} l_n Y \right) \\ K_{33} &\sim \lambda \beta^3 \left(\frac{2}{Y^2} + 6 l_n Y \right) \end{aligned} \right\} (1.7.3)$$

(10)

である。

次に前後非対称な翼の場合について考える。
 Y 及び a が小さいとき

$$\begin{aligned} k_{1/2}^{(0)} &= \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\sin \theta - a)^2 + Y^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{(\sin \theta + a)^2 + Y^2}} \right\} d\theta \\ &\simeq \int_0^\epsilon \left\{ \frac{1}{\sqrt{\theta^2 - 2a\theta + a^2 + Y^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + 2a\theta + a^2 + Y^2}} \right\} d\theta \\ &\quad + \int_\epsilon^{\pi/2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(\sin \theta - a)^2 + Y^2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{(\sin \theta + a)^2 + Y^2}} \right\} d\theta \end{aligned}$$

と書くと、右辺第2項は $Y=a=0$ のとき有限値をとる。但し ϵ は正小数とする。

従って $Y=0$ の近傍では

$$k_{1/2}^{(0)} \simeq \left[l_n (\sqrt{\theta^2 - 2a\theta + a^2 + Y^2} + \theta - a) \right. \\ \left. \times (\sqrt{\theta^2 + 2a\theta + a^2 + Y^2} + \theta + a) \right]_0^\epsilon$$

即ち

$$k_{1/2}^{(0)} \simeq -2 l_n Y \dots\dots\dots(1.7.4)$$

である。

同様にして、 $Y=0$ の近傍では

$$\begin{aligned} k_{-1/2}^{(0)} &\simeq \int_0^\epsilon \left\{ \sqrt{\theta^2 - 2a\theta + a^2 + Y^2} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\theta^2 + 2a\theta + a^2 + Y^2} \right\} d\theta + 2 \int_\epsilon^{\pi/2} \sin \theta d\theta \\ &\simeq \left[\frac{\theta - a}{2} \sqrt{\theta^2 - 2a\theta + a^2 + Y^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\theta + a}{2} \sqrt{\theta^2 + 2a\theta + a^2 + Y^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{Y^2}{2} l_n (\sqrt{\theta^2 - 2a\theta + a^2 + Y^2} + \theta - a) \right. \\ &\quad \left. \times (\sqrt{\theta^2 + 2a\theta + a^2 + Y^2} + \theta + a) \right]_0^\epsilon \\ &\quad + 2 \left[-\cos \theta \right]_\epsilon^{\pi/2} \end{aligned}$$

であるから

$$k_{-1/2}^{(0)} \simeq 2 - Y^2 l_n Y \dots\dots\dots(1.7.5)$$

となる。

次に $k_s^{(1)}$ の $Y=0$ の近傍の様子を調べてみる

$$\begin{aligned}
 k_{1/2}^{(1)} &= \int_0^{\pi/2} \left\{ \frac{\sin \theta - a}{\sqrt{(\sin \theta - a)^2 + Y^2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\sin \theta + a}{\sqrt{(\sin \theta + a)^2 + Y^2}} \right\} d\theta \\
 &\simeq \int_0^{\epsilon} \left\{ \frac{\theta - a}{\sqrt{\theta^2 - 2a\theta + a^2 + Y^2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\theta + a}{\sqrt{\theta^2 + 2a\theta + a^2 + Y^2}} \right\} d\theta + R \\
 &\simeq \left[\frac{\theta - a}{\sqrt{\theta^2 - 2a\theta + a^2 + Y^2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\theta + a}{\sqrt{\theta^2 + 2a\theta + a^2 + Y^2}} \right]_0^{\epsilon} + R
 \end{aligned}$$

である。 R は $Y=0$ で有界であるから、 $k_{1/2}^{(1)}$ は $Y=0$ に特異性はない。同様にして

$$\begin{aligned}
 k_{3/2}^{(1)} &\simeq \int_0^{\epsilon} \left\{ \frac{\theta - a}{(\theta^2 - 2a\theta + a^2 + Y^2)^{3/2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\theta + a}{(\theta^2 + 2a\theta + a^2 + Y^2)^{3/2}} \right\} d\theta + R \\
 &\simeq - \left[\frac{1}{\sqrt{\theta^2 - 2a\theta + a^2 + Y^2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\theta^2 + 2a\theta + a^2 + Y^2}} \right]_0^{\epsilon} + R
 \end{aligned}$$

であるから、 $k_{3/2}^{(1)}$ にも $Y=0$ に特異性はない。

従って (1.5.9) で $Y \rightarrow 0$ とし、 $s=1/2$ と置くと

$$k_{-1/2}^{(0)} \simeq Y^2 k_{3/2}^{(0)} \quad \dots\dots\dots(1.7.6)$$

となる。これと (1.7.5) とより、 $Y=0$ の近傍で $k_{3/2}^{(0)}$ は

$$k_{3/2}^{(0)} \simeq \frac{2}{Y^2} - l_n Y \quad \dots\dots\dots(1.7.7)$$

となる。

(1.7.4), (1.7.5), (1.7.7) を (1.7.2) と比較すると、 $k_{-1/2}^{(0)}$, $k_{1/2}^{(0)}$, $k_{3/2}^{(0)}$ の $Y=0$ における特異性は $a=0$ の場合のそれと一致することがわかる。又 $k_s^{(1)}$ は $Y=0$ のとき 0 となるので、 $k_s^{(0)}$ の循環式(1.5.9) を用いることによって、次のことが明らかになる。

定常翼の連立積分方程式の核関数の特異性は、翼が前後非対称であっても、対称な翼のものと全く同形である。

このために (1.7.3) は一般の翼の場合の参考として極めて重要な式である。

1.8 揚力線理論

Prandtl の揚力線の積分方程式を連立積分方程式から導いてみる。揚力面は揚力線理論の逐次近似によって解くことが可能なものである⁸⁾。その方法と本文の方法とはかなり密接な関係があるので、本文の方法から揚力線理論を導くことは、逐次近似法に参考となる所が少くないものとする。

揚力線を導くには (1.1.8) の積分方程式を利用する。(1.1.8) の両辺を ξ について Taylor 展開し、 ξ の同次の項の係数関数を等値して (1.2.1) に相当する連立積分方程式を導く。その式で

$$\sqrt{(\xi' - \xi_m)^2 + \lambda^2(\eta - \eta')^2} \simeq \lambda|\eta - \eta'| \quad \dots\dots(1.8.1)$$

の近似式を採用し、更に $1/\lambda$ の 2 次以上の項を微小として省略すると、連立積分方程式は

$$\left. \begin{aligned}
 -w(0, \eta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi} \\
 &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{d[\gamma]/d\eta'}{\eta - \eta'} d\eta' \\
 -w^{(1)}(0, \eta) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi^2} d\xi \\
 -w^{(2)}(0, \eta) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi^3} d\xi \\
 -w^{(3)}(0, \eta) &= -\frac{3}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma}{\xi^4} d\xi \\
 &\dots\dots\dots(1.8.2)
 \end{aligned} \right\}$$

と書かれる。但し

$$[\gamma] = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 \gamma d\xi \quad \dots\dots\dots(1.8.3)$$

である。

(1.8.2) を (1.3.6) と比較すると、第 2 式以下は全く同形である。しかも (1.3.7) の第 2 項以下の係数 A_n は第 2 式以下だけで独立に定まり、 A_0 だけが第 1 式から求められる。

いま

$$\alpha_i = \frac{1}{4\pi V} \int_{-1}^1 \frac{d[\gamma]/d\eta'}{\eta - \eta'} d\eta' \quad \dots\dots\dots(1.8.4)$$

と書き、 $-w(\xi, \eta)/V$ 及び γ/V がそれぞれ (1.3.3), (1.3.7) の右辺で与えられるものとする、(1.8.2) は

$$\left. \begin{aligned}
 a_0 &= A_0/2 - A_2/4 + \alpha_0 \\
 a_1 &= A_1/2 - A_3/4 \\
 a_2 &= A_2/2 \\
 a_3 &= A_3/2
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.8.5)$$

となる。この式を A_n について解くと

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 2a_0 + a_2 - 2\alpha_i, & A_1 &= 2a_1 + a_3 \\ A_2 &= 2a_2, & A_3 &= 2a_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.8.6)$$

である。

(1.3.7) を (1.8.3) に代入して $[\gamma]$ を求めると

$$\begin{aligned} \frac{[\gamma]}{V} &= \frac{\pi}{\lambda} \left(A_0 + \frac{A_1}{2} + \frac{A_3}{8} \right) \\ &= \frac{\pi}{\lambda} (2a_0 + a_1 + a_2 + \frac{3}{4}a_3 - 2\alpha_i) \dots\dots(1.8.7) \end{aligned}$$

となる。これより

$$\frac{\lambda[\gamma]}{2\pi V} + \frac{1}{4\pi V} \int_{-1}^1 \frac{d[\gamma]/d\eta'}{\eta - \eta'} d\eta' = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \frac{3}{8}a_3 \dots\dots(1.8.8)$$

が得られる。

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi V} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi}{1-\xi}} w(\xi, \eta) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1+\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3) d\xi \\ &= a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} + \frac{3}{8}a_3 \end{aligned}$$

であるから、(1.8.8) は Prandtl の揚力線の積分方程式となる。

以上の計算によって、縦横比が大きいときは、連立方程式 (1.2.1) の第 2 式以下の A_0 の係数関数は翼の大部分の所で小さい値をとるものと想像される。

2 非定常揚力面

2.1 非定常揚力面の積分方程式

翼が振動率 ν で調和振動をしながら、一定速度 V で x 軸の負の方向に進むときの揚力面の積分方程式は

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{l_1}^{l_2'} \gamma_0 dx' dy' \int_{-\infty}^x e^{-i\nu \frac{(x-x')}{V}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ & \times \frac{1}{\sqrt{(X-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \Big|_{z=z'} \dots\dots(2.1.1) \end{aligned}$$

である。ここに各瞬間における翼の位置及び揚力分布密度をそれぞれ $z_0 e^{i\nu t}$, $\Pi_0 e^{i\nu t}$ とすると

$$\gamma_0 = \frac{\Pi_0}{\rho V}, \quad w_0 = (i\nu + V \frac{\partial}{\partial x}) z_0 \dots\dots(2.1.2)$$

である。

(12)

(2.1.1) を (1.1.5) の変数を用いて書改めると

$$\begin{aligned} w_0(\xi, \eta) &= -\frac{bc}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma_0 c' d\xi' d\eta' \\ & \times \int_{-\infty}^{\xi} \frac{e^{-i\omega(\xi-E)}}{[c(E+\xi_0) - c'(\xi'+\xi_0')]^2 + b^2(\eta-\eta')^2]^{3/2}} dE \dots\dots(2.1.3) \end{aligned}$$

となる。但し $\omega = \nu c(\eta)/V$ である。

2.2 連立積分方程式

非定常翼の場合も定常翼と同様に (2.1.3) の両辺を ξ について Taylor 展開して、 ξ の同次の項の係数関数を等値すれば、(1.2.1) の形の連立積分方程式が得られる。即ち

$$\begin{aligned} -w(0, \eta) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma_0 \lambda d\xi' d\eta' \\ & \times \int_{-\infty}^0 \frac{\beta e^{i\omega E}}{[(\beta E + \xi_m - \xi')^2 + \lambda^2(\eta - \eta')^2]^{3/2}} dE \\ -w^{(1)}(0, \eta) &= -\frac{i\omega}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma_0 \lambda d\xi' d\eta' \\ & \times \int_{-\infty}^0 \frac{\beta e^{i\omega E}}{[(\beta E + \xi_m - \xi')^2 + \lambda^2(\eta - \eta')^2]^{3/2}} dE \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma_0 \lambda \beta}{[(\xi_m - \xi')^2 + \lambda^2(\eta - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' \\ -w^{(2)}(0, \eta) &= \frac{(-i\omega)^2}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma_0 \lambda d\xi' d\eta' \\ & \times \int_{-\infty}^0 \frac{\beta e^{i\omega E}}{[(\beta E + \xi_m - \xi')^2 + \lambda^2(\eta - \eta')^2]^{3/2}} dE \\ & + \frac{-i\omega}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma_0 \lambda \beta}{[(\xi_m - \xi')^2 + \lambda^2(\eta - \eta')^2]^{3/2}} d\xi' d\eta' \\ & - \frac{3}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma_0 \lambda \beta^2 (\xi_m - \xi')}{[(\xi_m - \xi')^2 + \lambda^2(\eta - \eta')^2]^{5/2}} d\xi' d\eta' \dots\dots(2.2.1) \end{aligned}$$

である。

(2.2.1) の連立積分方程式の核関数は定常翼と同形のもので非定常翼特有の核関数

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\omega E}}{[(\beta E + \xi_m - \xi')^2 + \lambda^2(\eta - \eta')^2]^{3/2}} dE$$

が含まれ、かなり複雑である。

(2.2.1) を組変えると

$$\begin{aligned} -w_0(0, \eta) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma_0 \lambda d\xi' d\eta' \\ & \times \int_{-\infty}^0 \frac{\beta e^{i\omega E}}{[(\beta E - \xi)^2 + Y^2]^{3/2}} dE \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left\{w_0^{(1)}(0, \eta) + i\omega w_0(0, \eta)\right\} \\
 & = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma_0 \lambda \beta}{(\xi^2 + Y^2)^{3/2}} d\xi' d\eta' \\
 & -\left\{w_0^{(2)}(0, \eta) + i\omega w_0^{(1)}(0, \eta)\right\} \\
 & = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma_0 \lambda \beta^2 \frac{\partial}{\partial \xi'} \frac{1}{(\xi^2 + Y^2)^{3/2}} d\xi' d\eta' \\
 & -\left\{w_0^{(3)}(0, \eta) + i\omega w_0^{(2)}(0, \eta)\right\} \\
 & = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma_0 \lambda \beta^3 \frac{\partial^2}{\partial \xi'^2} \frac{1}{(\xi^2 + Y^2)^{3/2}} d\xi' d\eta' \\
 & \dots\dots\dots, \\
 & \dots\dots\dots(2.2.2)
 \end{aligned}$$

の様に表示される。この連立方程式の第2式以下の積分方程式は定常翼のものと同形で、計算の手数が、(2.2.1) よりかなり少くなる。これ等の式の ξ , Y は(1.4.1) に示すものである。

(2.2.2) の第1式を除いて、第2式以下を連立方程式として解いてもよさそうに見えるが、それは加速度場を解いていることになるので正しくない。その理由は、揚力面上の法線方向の流体加速度が零でも、法線流速が零とならない様な揚力分布が存在するからである。

(2.2.2) に(1.2.5)を代入し、 ξ' についての積分を行うと、 $A_n(\eta)$ に関する連立積分方程式が得られる。(2.2.2) の第2式以下では核関数が定常翼のものと全く同形の実数形であるから、方程式を未知関数 A_n の実数部、虚数部それぞれの方程式に分離することができる。このため(2.2.2)を代数方程式に変えたとき、演算子の数が他の方法によるものに比べると殆んど半減し、計算は容易になる。第1式の核関数は数値積分によってその値を求める。この積分方程式を解く方法は定常翼の場合と殆んど違いはない。

2.3 二次元非定常翼

二次元非定常翼の揚力面の積分方程式は

$$\begin{aligned}
 -w_0(\xi) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \gamma_0(\xi') d\xi' \\
 & \times \int_{-\infty}^{\xi} \frac{e^{-i\omega(\xi - \xi')}}{(\xi - \xi')^2} d\xi \dots\dots\dots(2.3.1)
 \end{aligned}$$

である。この積分方程式は Küssner & Schwarz⁹⁾ 及び Söhngen¹⁰⁾ によって Kutta の流出条件を考慮して解析的に解かれている。その結果は

$$\begin{aligned}
 \gamma_0(\xi) &= -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \\
 & \times \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}} \left\{ \frac{T(\omega)-1}{2} + \frac{1}{\xi'-\xi} \right\} w_0(\xi') d\xi' \\
 & - \frac{2i\omega}{\pi} \int_{-1}^1 A(\xi, \xi') w_0(\xi') d\xi' \dots\dots\dots(2.3.2)
 \end{aligned}$$

である。ここに

$$T(\omega) = \frac{-iH_0^{(2)}(\omega) + H_1^{(2)}(\omega)}{iH_0^{(2)}(\omega) + H_1^{(2)}(\omega)} \dots\dots\dots(2.3.3)$$

$$A(\xi, \xi') = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\xi\xi' + \sqrt{(1-\xi^2)(1-\xi'^2)}}{1-\xi\xi' - \sqrt{(1-\xi^2)(1-\xi'^2)}} \dots\dots\dots(2.3.4)$$

であって、 $H_0^{(2)}(\omega)$, $H_1^{(2)}(\omega)$ は Hankel 関数を意味する。

$-w_0/V$ が(1.3.3)と同じ様に

$$-w_0/V = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2, \quad a_n = a_{nr} + ia_{ni} \dots\dots\dots(2.3.5)$$

で与えられるものとする。 ξ の高次の項迄考えると計算が複雑になるので、簡単な為2次の項迄で止めておく。剛翼が一樣流中で非定常運動をする場合は、(2.3.5) は ξ の1次の項迄考えればよいが、不均一流中の翼に対しては ξ の高次の項迄考える必要がある。

$$\frac{d}{d\xi'} A(\xi, \xi') = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\sqrt{1-\xi'^2}(\xi-\xi')}$$

であるから、(1.3.4)の公式を利用すると

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 A(\xi, \xi') \xi'^n d\xi' &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\xi'^{n+1}}{n+1} A(\xi, \xi') \right]_{-1}^1 \\
 & - \frac{1}{\pi(n+1)} \int_{-1}^1 \xi'^{n+1} \frac{d}{d\xi'} A(\xi, \xi') d\xi' \\
 & = -\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\pi(n+1)} \int_{-1}^1 \frac{\xi'^{n+1}}{\sqrt{1-\xi'^2}(\xi-\xi')} d\xi' \\
 & = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{n+1} (b_n + b_{n-1}\xi + \dots\dots b_1 \xi^{n-1} + b_0 \xi^n) \\
 & \dots\dots\dots(2.3.6)
 \end{aligned}$$

となる。

(2.3.5) を(2.3.2)に代入し、(1.3.4)と(2.3.6)を用いて ξ' に関する積分を行うと

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma_0}{V} &= \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} (2a_0 + a_1 + a_2) \frac{T(\omega)-1}{2} \\
 & + 2\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \left(a_0 + \frac{a_2}{2} \right) + 2\sqrt{1-\xi^2} (a_1 + a_2\xi)
 \end{aligned}$$

$$+2i\omega \sqrt{1-\xi^2} \left(a_0 + \frac{a_2}{6} + \frac{a_1\xi}{2} + \frac{a_2\xi^2}{3} \right) \dots\dots\dots(2.3.7)$$

となる。これが吹上げが (2.3.5) で与えられたときの積分方程式 (2.3.1) の解析解である。

定常翼では、 w が ξ の n 次多項式のとき、 γ は Birnbaum 級数の $\xi^{n-1} \sqrt{1-\xi^2}$ の項迄で表わされたが、非定常翼では w_0 が ξ の n 次多項式のとき、 γ_0 は Birnbaum 級数の $\xi^n \sqrt{1-\xi^2}$ の項迄で表わされる。

次に (2.3.1) を 2.2 節の方法によって解いてみる。

(2.3.1) の両辺を ξ で逐次微分して、(2.2.2) の形の連立方程式を作ると

$$-w_0(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \gamma_0 d\xi' \\ -\frac{i\omega}{2\pi} \int_{-1}^1 \gamma_0 d\xi' \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\omega\xi}}{\xi-\xi'} d\xi \dots\dots\dots(2.3.8)$$

$$-\{w_0^{(1)}(0) + i\omega w_0(0)\} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_0}{\xi'^2} d\xi' \dots\dots\dots(2.3.9)$$

$$-\{w_0^{(2)}(0) + i\omega w_0^{(1)}(0)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_0}{\xi'^3} d\xi' \dots\dots\dots(2.3.10)$$

$$-\{w_0^{(3)}(0) + i\omega w_0^{(2)}(0)\} = -\frac{3}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma_0}{\xi'^4} d\xi' \dots\dots\dots(2.3.11)$$

である。

γ_0 を (1.3.7) の様に置くわけであるが、ここでは係数 A_n は複素数である。

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi'}{\sqrt{1-\xi'^2}(\xi-\xi')} = \begin{cases} 0 & , |\xi| < 1 \\ \frac{\text{sgn}(\xi)}{\sqrt{\xi^2-1}} & , |\xi| > 1 \end{cases} \dots\dots\dots(2.3.12)$$

の公式がある。

いま

$$\left. \begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-\xi'}{1+\xi'}} d\xi' \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\omega\xi}}{\xi-\xi'} d\xi \\ \Omega_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi'^2} d\xi' \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\omega\xi}}{\xi-\xi'} d\xi \\ \Omega_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi' \sqrt{1-\xi'^2} d\xi' \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\omega\xi}}{\xi-\xi'} d\xi \\ \Omega_3 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \xi'^2 \sqrt{1-\xi'^2} d\xi' \int_{-\infty}^0 \frac{e^{i\omega\xi}}{\xi-\xi'} d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3.13)$$

(14)

とおくと

$$\Omega_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\xi-\xi'+1-\xi}{\sqrt{1-\xi'^2}(\xi-\xi')} d\xi' \int_{-\infty}^0 e^{i\omega\xi} d\xi \\ = \int_{-\infty}^0 e^{i\omega\xi} d\xi - \int_1^{\infty} \sqrt{\frac{\xi+1}{\xi-1}} e^{-i\omega\xi} d\xi$$

となる。この積分は個々には発散するが、2項をまとめれば発散部分は消し合って有限値となる。

発散部分を除外すれば

$$\left. \begin{aligned} H_0^{(2)}(x) &= -\frac{2}{i\pi} \int_1^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ H_1^{(2)}(x) &= -\frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{te^{-ixt}}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ iH_0^{(2)}(x) + H_1^{(2)}(x) &= -\frac{2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{t+1} e^{-ixt} dt}{t-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3.14)$$

であるから

$$\Omega_0 = \frac{1}{i\omega} + \frac{\pi}{2} \{ iH_0^{(2)}(\omega) + H_1^{(2)}(\omega) \} \dots\dots(2.3.15)$$

となる。

$\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ についても同様に

$$\frac{\sqrt{1-\xi'^2}}{\xi-\xi'} = \frac{\xi+\xi'}{\sqrt{1-\xi'^2}} + \frac{1-\xi^2}{\sqrt{1-\xi'^2}(\xi-\xi')}$$

$$\frac{\xi' \sqrt{1-\xi'^2}}{\xi-\xi'} = \frac{\xi'^2 + \xi\xi' + \xi^2 - 1}{\sqrt{1-\xi'^2}} - \frac{\xi(\xi^2-1)}{\sqrt{1-\xi'^2}(\xi-\xi')}$$

$$\frac{\xi'^2 \sqrt{1-\xi'^2}}{\xi-\xi'} = \frac{-\xi-\xi'+\xi^3 + \xi^2\xi' + \xi\xi'^2 + \xi'^3}{\sqrt{1-\xi'^2}} - \frac{\xi^2(\xi^2-1)}{\sqrt{1-\xi'^2}(\xi-\xi')}$$

の様に書き、(1.3.4)、(2.3.12) の公式を用いて先づ ξ' に関する積分を行い、次に ξ については部分積分を行うなどして、発散積分の有限部分を導く。

例えば Ω_1 については、部分積分すると

$$\Omega_1 = -\int_1^{\infty} \xi e^{-i\omega\xi} d\xi + \int_1^{\infty} \sqrt{\xi^2-1} e^{-i\omega\xi} d\xi \\ = \frac{1}{i\omega} [\xi e^{-i\omega\xi}]_0^{\infty} - \frac{1}{i\omega} [\sqrt{\xi^2-1} e^{-i\omega\xi}]_1^{\infty} \\ - \frac{1}{i\omega} \int_0^{\infty} e^{-i\omega\xi} d\xi + \frac{1}{i\omega} \int_1^{\infty} \frac{\xi e^{-i\omega\xi}}{\sqrt{\xi^2-1}} d\xi$$

となるが、この式の右辺第1項と第2項は消し合って0になり、又第3項と第4項の発散部分は消し合う。

(2.3.14) を用いると

$$\Omega_1 = \frac{1}{\omega^2} + \frac{i\pi}{2\omega} H_0^{(2)}(\omega) \dots\dots\dots(2.3.16)$$

となる。

Ω_2, Ω_3 も同様の計算により

$$\Omega_2 = \frac{2i}{\omega^3} + \frac{i}{2\omega} - \frac{\pi}{\omega^2} H_1^{(2)}(\omega) - \frac{\pi}{2\omega} H_1^{(2)}(\omega) \dots\dots\dots(2.3.17)$$

$$\Omega_3 = -\frac{6}{\omega^4} - \frac{1}{2\omega^2} + \frac{3\pi}{i\omega} \left\{ \frac{1}{\omega^2} H_1^{(2)}(\omega) - \frac{1}{2\omega} H_0^{(2)}(\omega) \right\} - \frac{\pi}{i2\omega} H_1^{(2)}(\omega) \dots\dots(2.3.18)$$

の様に表わされる。

(1.3.7) の γ_0 を (2.3.8)~(2.3.11) に代入すると

$$\left. \begin{aligned} -\frac{w_0}{V} &= \frac{A_0}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \\ &- \frac{A_2}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} d\xi - \frac{i\omega}{2} (A_0\Omega_0 \\ &+ A_1\Omega_1 + A_2\Omega_2 + A_3\Omega_3), \\ -\frac{1}{V} (w_0^{(1)} + i\omega w_0) &= -\frac{A_0}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi^2 \sqrt{1-\xi^2}} \\ &- \frac{A_1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^2} d\xi \\ &- \frac{A_3}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^2} d\xi, \\ -\frac{1}{V} (w_0^{(2)} + i\omega w_0^{(1)}) &= \frac{A_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi^2 \sqrt{1-\xi^2}} \\ &- \frac{A_2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^2} d\xi, \\ -\frac{1}{V} (w_0^{(3)} + i\omega w^{(2)}) &= -\frac{3A_0}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\xi^4 \sqrt{1-\xi^2}} \\ &- \frac{3A_1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^4} d\xi \\ &- \frac{3A_3}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi^2} d\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3.19)$$

と書かれる。これの第2式以下は (1.3.8) の第2式以下と同形で、(1.3.9), (1.3.10) を用いると ξ に関する積分が得られる。

(2.3.19) の左辺に (2.3.5) を適用すると、連立方程式は

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{A_0}{2} - \frac{A_2}{4} - \frac{i\omega}{2} (A_0\Omega_0 + A_1\Omega_1 \\ &+ A_2\Omega_2 + A_3\Omega_3) \\ a_1 + i\omega a_0 &= \frac{A_1}{2} - \frac{A_3}{4} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2a_2 + i\omega a_1 &= A_2 \\ i2\omega a_2 &= 3A_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3.20)$$

となる。これの第2式以下から A_1, A_2, A_3 を求めると

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= i2\omega a_2/3, \quad A_2 = 2a_2 + i\omega a_1 \\ A_1 &= 2a_1 + i2\omega a_0 + i\omega a_2/3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3.21)$$

である。これらを (2.3.20) の第1式に代入して A_0 を求めると

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{1-i\omega\Omega_0} \left\{ 2(1-\omega^2\Omega_1)a_0 \right. \\ &+ (i2\omega\Omega_1 + \frac{i\omega}{2} - \omega^2\Omega_2)a_1 \\ &+ \left. \left(-\frac{\omega^2}{3}\Omega_1 + 1 + i2\omega\Omega_2 - \frac{2\omega^2}{3}\Omega_3 \right) a_2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3.22)$$

となる。

(2.3.22) の Ω_0, Ω_1 等に (2.3.15)~(2.3.18) の右辺を代入して整理すると

$$A_0 = (2a_0 + a_2) + \frac{T(\omega)-1}{2} (2a_0 + a_1 + a_2) \dots\dots\dots(2.3.23)$$

となる。

(2.3.21), (2.3.23)の右辺を (1.3.7) に代入して、(2.3.7) と比較すると、二つの解が一致することがわかる。

結 言

揚力面の積分方程式を数値的に解くには非常に複雑な計算を伴うので、その誤差の評価は極めて重要なことである。最近の揚力面の解法では何れも積分方程式を代数方程式に変換する部分に極小誤差の方法が導入され、誤差を極力少くする配慮がなされている。この様な観点に立てば、本文の方法は原始的なものとの誹りを免れないであろう。しかし極小誤差の方法を導入した為に代数方程式の元数を増さねばならなくなったり、又係数行列の数値計算が複雑になったりするのでは利益は少ない。

我々が遭遇する現実の問題では、吹上げの翼弦方向の分布形は直交関数系より冪級数で表わした方が少い項数で精度のよいことが多いので、本文の方法によれ

ば連立方程式の元数は少くて済む様に思われるし、又係数行列の計算も、これ迄の方法の中で最も簡単なものであるか、代数方程式を解く際に誤差の混入することはかなり避けられるであろう。また得られた循環分布密度に対応する吹上げを計算することも容易であるから、誤差の評価も可能である。

この方法の利点を列記すると

- (1) 揚力面の積分方程式が Flax の方法と同じに Birnbaum 級数の係数を未知関数とする連立方程式の形に書改められているので、最適標点法に屢々見られる様な、翼弦方向の揚力分布に波状誤差の生じることを避けることができる。
- (2) 揚力分布の翼弦方向の試験関数(本文では Birnbaum 級数を採用した)の項数は比較的少ない数で済むので、連立方程式の元数が少くなる。
- (3) 連立積分方程式の第2式以下は定常翼でも非定常翼でも同形であるから、数値計算上両者に共通する部分があって好都合である。
- (4) 非定常翼の場合、連立積分方程式の第2式以下が実数核をもつので、未知関数である揚力分布が実数部と虚数部のそれぞれのみを含む積分方程式に分離される。そのため積分方程式を連立1次方程式に変換したとき、演算子行列の元素の数が他の方法の殆んど半分ですむので、連立1次方程式を解くのが容易になる。

であるが、翼に補助翼が附いている場合などにはこの方法は適しない。

参 考 文 献

- 1) Davies, D. E., "Calculation of Unsteady Generalized Airforces on a Thin Wing Oscillating Harmonically in Subsonic Flow," R & M, No. 3409, 1963
- 2) Flax, A. H., "General Reverse Flow and Variational Theorems in Lifting-Surface Theory," J. of Aero. Sci., Vol. 19, No. 6, 1952
- 3) Formme, J. A., "Least-Squares Approach to Unsteady Kernel Function Aerodynamics," AIAA Journal, Vol. 2, No. 7, 1964
- 4) 花岡達郎, "揚力面の解法に関する考察(特に Flax の方法の理論的根拠について)", 船研報告, 第5巻第3号, 1968
- 5) Rowe, W. S., "Collocation Method for Calculating the Aerodynamic Pressure Distributions on a Lifting Surface Oscillating in Subsonic Compressible Flow," AIAA Symposium on Structural Dynamics and Aeroelasticity, Boston, 1965
- 6) 近藤次郎, "積分方程式とその応用", コロナ社
- 7) Mangler, K. W. and Spencer, B. F. R., "Some Remarks on Multhopp Lifting-Surface Theory", R & M, No. 2926, 1952
- 8) 花岡達郎, "プロペラの基礎理論(特に Munk の定理と揚力線理論について)", 船研報告, 第5巻第6号, 1968
- 9) Küssner, H. G. und Schwarz, L., "Der Schwingende Flügel mit aerodynamisch ausgeglichenen Ruder," Luftfahrtforschung, Bd. 17, 1940
- 10) Söhngen, L., "Bestimmung der Auftribs- verteilung für beliebige instationäre Bewegungen(Ebenes Problem)," Luftfahrtforschung Bd. 17, 1940