

非定常プロペラ揚力面の数値解法 (その1 基礎理論)

花岡達郎

Numerical Lifting-Surface Theory of a Screw Propeller in Non-Uniform Flow

(Part 1 Fundamental Theory)

By

Tatsuro Hanaoka

In this paper a detailed description is given of a method for calculating the hydrodynamic load distributions on the blades of a screw propeller in non-uniform flow.

The velocity potential is derived by means of vortex theory. So we can introduce the nonlinear effects in the theory. The integral equation that relates a prescribed upwash distribution to an unknown lift distribution is the same form with that which the author presented in his previous paper¹⁾.

The numerical method for solving the equation is built on the foundations of the method²⁾ which was proposed by the author.

は し が き

筆者が修学時代、非定常翼理論の研究に没頭していた頃、この理論は将にその黎明期にあったのであるが、それから四半世紀、連続として非定常翼理論が多くの研究者の心を捉えて来たのは、実際問題として、これが重要研究課題であったばかりではなく、理論の華麗さに魅せられたためでもあろうか。

Küssner の“一般揚力面理論”³⁾は任意平面形の非定常揚力面に空気圧縮性を考慮して理論を具体化した最初のもので、重要文献とみなされているが、この中に揚力面を揚力線に変換する方法が述べられている。

筆者が非定常翼理論の方法を利用して非定常プロペラ理論を展開してみようと考えたのはかなり以前のことであるが、プロペラでは自由渦が螺旋状であるため、Küssner 揚力線のような手法を適用することができないという点で行き止った。当時は三次元翼は揚力線理論により数値計算を行なうというのが常識とされた時代であった。

講和条約後、外国文献が徐々に手に入るようになり、

Flax⁴⁾, Dengler and Goland⁵⁾, Lawrence and Gerber⁶⁾等の新しい揚力線理論に接して、非定常プロペラ揚力線に対する上記の障壁は除かれたが、船用プロペラの中に非定常プロペラ理論を必要とするような研究課題が存在するであろうかという現実の問題に行き当たった。たまたま Lerbs 教授の解説文⁷⁾の中に伴流プロペラの性能の面から非定常プロペラ理論の必要性の説かれていることを見出し、これに刺激されて非定常プロペラ理論の基礎的な事項を記して公けにした⁸⁾。

この頃、全く別の方面から非定常プロペラ理論の出現が望まれるようになって来た。それがプロペラによる起振力の問題である。これに対処するため、非定常プロペラ理論の進展を計り、揚力線の積分方程式の数値計算法等を探求した⁹⁾。

その頃、ワシントンで船舶流体力学の第4回シンポジウムが開催されることになったので、それまでに行なった研究をまとめて提出した¹⁾。シンポジウムの主題(船舶推進および流力弾性)に適合したためか、この論文は予想外の反響をもって受け取られたようである。

定常プロペラ揚力線は河田¹⁰⁾の創案によって極わめてやすく数値計算が行なえるようになっている。それは積分方程式の核関数を変形ベッセル関数の級数で表わし、Nicholson の漸近式を用いて該級数の総和式を作り、数値計算を行なうものである。

この方法にならって、非定常プロペラ揚力線の核関数を漸近表示することを考え、数年を過ぎた。その間、高速電子計算機の発展と普及は目覚ましく、理論研究者に与えられる機会も多くなって、理論研究の方法にかなりの変化が現われてきた。

現在では、核関数の値を求めるのに、その積分表示式を直接数値積分するのが最も容易のようである。中型電子計算機ですら、この関数の一数値の計算に要する時間は数秒を出でない。筆者の過去の努力は徒勞の数年というべきであろうか。

筆者のこのような遅々たる歩みの間に、非定常プロペラ揚力線は幾人かの人々によって計算されている^{11,12,13,14)}。しかし実用の伴流プロペラは非定常翼としての特性が顕著に現われる運動状態で作動するものであるから、現象を的確に洞察する意味から、揚力面の計算を行なうことは大切なことである。

非定常プロペラ揚力面の計算は技術的には直進非定常揚力面の場合と大差ないので、その方面で開発された諸々の方法を利用することができる。筆者はそれ等の方法を比較検討し¹⁵⁾、プロペラの計算に適すると思われる一つの新しい方法を考案した²⁾。本文ではその方法に沿って理論が展開されている。

速度ポテンシャルおよび揚力面の積分方程式を導くのに、これまでは加速度ポテンシャルの方法を用いて来たが、プロペラでは非線型理論を考える必要のある場合が多いので、それへの応用を顧慮して、ここでは渦理論の方法をとった。

記 号

- x, r, θ 任意点の座標 (円壱座標)
- x', r', θ' 特異点分布の座標 (円壱座標)
- ρ 流体密度
- V プロペラ近傍の流体に対するプロペラの平均の相対前進速度
- Ω プロペラ近傍の流体に対するプロペラの平均の相対回轉角速度
- r_0 プロペラ半径
- r_b ボス半径
- l 翼数

- Π_0 揚力分布密度の complex amplitude
- ν 流場の振動率
- \bar{w}_a 定常プロペラの自由渦による軸方向誘導速度の半径方向の平均値
- $\overline{w_t/r}$ 定常プロペラの自由渦による接線方向誘導速度に基づく誘導角速度の半径方向の平均値

$$p = \nu / (\Omega + \overline{w_t/r})$$

$$\delta = 2 p \pi / l \quad \text{プロペラの各翼間の振動の位相差}$$

$$2 \pi h \quad \text{螺旋渦のピッチ。ただし } h = (V + \bar{w}_a) / (\Omega + \overline{w_t/r})$$

$$\mu = r/h, \quad \mu' = r'/h, \quad \mu_0 = r_0/h, \quad \mu_b = r_b/h$$

$$\sigma = \theta - x/h, \quad \sigma' = \theta' - x'/h$$

$$\tau = \theta + x/h, \quad \tau' = \theta' + x'/h$$

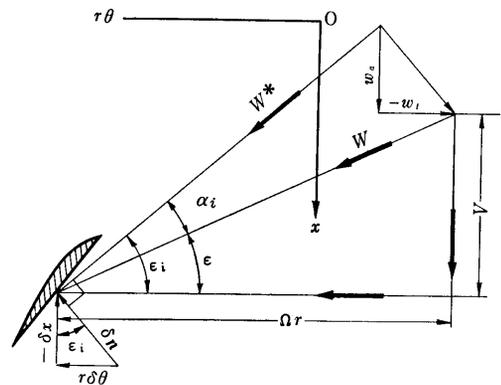


Fig. 1

1. 渦理論による速度ポテンシャルと揚力分布密度

弱い不均一流れの中をプロペラが定常の作動状態に進むとき、プロペラ翼に固定した座標系から見た流場は定常なものと同定常なものに分けて考えることができる。しかしこの二種類の流場は互いに全く独立なものではなく、それぞれの自由渦は同一の螺旋面上に分布していると考えるのが妥当であろう。

螺旋状の自由渦は元来翼の運動軌跡面上に残されるものであるが、その誘導速度によってもとの位置より変位する。この自由渦螺旋面を正確に数式に表現することは繁雑であるから、螺旋のピッチは時間的にもまた空間的にも一定なものと同定常と仮定し

$$h = \frac{V + \bar{w}_a}{\Omega + \overline{w_t/r}} \quad \text{または} \quad h = r \tan(\epsilon + \alpha_i) \quad (1.1)$$

とする¹⁶⁾。ただし w_a , w_t はそれぞれ束縛渦の位置における自由渦による軸方向および接線方向の誘導速度で、 $\overline{w_a}$, $\overline{w_t/r}$ はそれ等の時間的、空間的平均値を意味する。

非定常流場では w_a , w_t の時間平均は 0 であるから、(1.1) の $\overline{w_a}$, $\overline{w_t/r}$ は定常流場の半径方向の平均値をとればよいことになる。(1.1) で定められる h を螺旋渦のピッチとして非定常流場を計算するには、まず定常流場を解いて、 h の値を求めておく必要がある。

このように変形を受けた非定常流場の速度ポテンシャルは、形式的には、線型理論で求めた式⁸⁾ の V および Ω の代わりに、それぞれ $V + \overline{w_a}$, $\Omega + \overline{w_t/r}$ と置けば直ちに得られるのであるが、それでは原理的に曖昧な所があるので、渦理論によって改めて速度ポテンシャルを導いてみる。

非定常プロペラの速度ポテンシャルを $\Phi_0 e^{i\omega t}$ の実数部で表わすことにすると、

$$\Phi_0 = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2\pi m\tau/l} \int_0^{\tau_0} dr' \int_{s_1}^{\infty} \int_{s_1}^{\infty} \gamma_0(s') ds' \frac{\partial}{\partial n''} \left(\frac{1}{R} \right) d\bar{s} \quad (1.2)$$

である。ただし γ_0 は循環分布密度の complex amplitude, s は螺旋に沿う長さを表わし、 s_1 は翼前縁の s 座標を意味する。また

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta' - 2\pi/l)} \quad (1.3)$$

であり、 $\partial/\partial n''$ は螺旋面に対する法線微分を意味する。

$$W^* = \sqrt{(V + \overline{w_a})^2 + r^2(\Omega + \overline{w_t/r})^2} \\ = (V + \overline{w_a}) \sqrt{1 + \mu^2} \quad (1.4)$$

と書き、 γ^* を束縛渦の循環分布密度、 γ を束縛渦、自由渦を一諸にした全循環の分布密度とし、 $\gamma_f = \gamma - \gamma^*$ と書くと、Prandtl の渦保存則¹⁷⁾により、 γ^* と γ_f との間に

$$\frac{\partial \gamma^*}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_f}{\partial t} + W^* \frac{\partial \gamma_f}{\partial s} = 0 \quad (1.5)$$

の関係を与えることができる。これは Prandtl の意味とは多少異なるが、自由渦が誘導速度によって流されるという考えからすれば妥当なものであろう。この式で $\partial \gamma^*/\partial t$ を既知とみなして、 γ_f を求めると

$$\gamma_f = \gamma - \gamma^* = -\frac{1}{W^*} \int_{s_1}^s \gamma'(s', t - \frac{s-s'}{W^*}) ds' \quad (1.6)$$

ただし $\gamma' = \partial \gamma^*/\partial t$

が得られる。この式の両辺を s で s_1 より s まで積分すると

$$\int_{s_1}^s \gamma(s') ds' - \int_{s_1}^s \gamma^*(s') ds' \\ = -\frac{1}{W^*} \int_{s_1}^s ds'' \int_{s_1}^{s''} \gamma'(s', t - \frac{s''-s'}{W^*}) ds'$$

であるが、右辺に Dirichlet 変換を適用して積分順序を交換し、積分を行なうと

$$= \int_{s_1}^s \gamma^* \left(s', t - \frac{s-s'}{W^*} \right) ds' - \int_{s_1}^s \gamma^*(s') ds'$$

となるから

$$\int_{s_1}^s \gamma(s') ds' = \int_{s_1}^s \gamma^* \left(s', t - \frac{s-s'}{W^*} \right) ds' \quad (1.7)$$

である。さらに両辺に $\rho(\partial/\partial t + W^* \partial/\partial s)$ の演算を行なうと

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{s_1}^s \gamma(s', t) ds' + \rho W^* \frac{\partial}{\partial s} \int_{s_1}^s \gamma(s', t) ds' \\ = \rho W^* \gamma^*(s, t) \quad (1.8)$$

が得られる。

一方、Euler の運動方程式を積分すると

$$\mathbf{p} = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} w^2 + \text{const.}$$

である。ただし \mathbf{p} は圧力、 w は流速を意味する。翼の上下面の圧力、流速および速度ポテンシャルをそれぞれ \mathbf{p}_u , \mathbf{p}_l , w_u , w_l および Φ_u , Φ_l とし、揚力分布密度を Π で表わすと

$$\Pi(s, t) = \mathbf{p}_l - \mathbf{p}_u = \rho \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_u - \Phi_l) \\ + \frac{\rho}{2} (w_u + w_l)(w_u - w_l) \quad (1.9)$$

であるが、近似的には

$$W^* = (w_u + w_l)/2, \quad \gamma = w_u - w_l$$

であるから、(1.9) は

$$\Pi(s, t) = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int_{s_1}^s \gamma(s', t) ds' \\ + \rho W^* \frac{\partial}{\partial s} \int_{s_1}^s \gamma(s', t) ds' \quad (1.10)$$

のように表わされる。

(1.8) の右辺と (1.10) の右辺は等しいから

$$\Pi(s, t) = \rho W^* \gamma^*(s, t) \quad (1.11)$$

の関係が得られる。

流場が振動率 ν で調和振動をしている場合は

$$\gamma(s, t) = \gamma_0(s) e^{i\nu t}, \quad \gamma^*(s, t) = \gamma_0^*(s) e^{i\nu t} \quad (1.12)$$

のように表わされるから, (1.7) は

$$\int_{s_1}^s \gamma_0(s') ds' = \int_{s_1}^s \gamma_0^*(s') \exp\left(-\frac{i\nu}{W^*}(s-s')\right) ds' \quad (1.13)$$

となる。これを (1.2) に代入すると, 速度ポテンシャルは

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \int_0^{r_0} dr' \\ &\times \int_{s_1}^{\tilde{s}} \gamma_0^*(s') \exp\left(-\frac{i\nu}{W^*}(s-s')\right) ds' \\ &\times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{R} \right) d\tilde{s} \end{aligned} \quad (1.14)$$

となる。

Dirichlet 変換を用いて (1.14) の s' , \tilde{s} の積分順序を交換し, γ^* が翼面外で 0 であることを考慮すると

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \int_0^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma_0^*(s') ds' \\ &\times \int_{s'}^{\infty} \exp\left(-\frac{i\nu}{W^*}(\tilde{s}-s')\right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{R} \right) d\tilde{s} \end{aligned} \quad (1.15)$$

と書かれる。ただし s_2 は翼後縁の s 座標である。

s と τ との関係は

$$ds = h \sqrt{1+\mu^2} d\tau/2 \quad (1.16)$$

であるから¹⁶⁾, (1.15) の \tilde{s} の積分を τ 座標の変数 \mathbf{T}' の積分に変え, さらに $\mathbf{T}-\tau = \tau' - \mathbf{T}'$ によって \mathbf{T} の積分に変えると, 法線微分 $\partial/\partial \mathbf{n}'$ が \mathbf{T}' を通して行なうものより, τ' を通したものの $\partial/\partial \mathbf{n}'$ に変わって

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= (\tau, \sigma, \mu) = \frac{1}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \int_0^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma_0^*(r', s') \\ &\times h \sqrt{1+\mu'^2} ds' \int_{-\infty}^{\tau} \exp\left(-\frac{i\dot{p}}{2}(\tau - \mathbf{T}')\right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{R} \right) d\mathbf{T}' \end{aligned} \quad (1.17)$$

となる。 $\partial/\partial \mathbf{n}'$ および R を τ, σ を変数として表わすと

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} = \frac{1}{h \sqrt{1+\mu'^2}} \left\{ \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma'} - \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \tau'} \right\} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} R &= h \sqrt{[(\mathbf{T}-\tau' - \sigma + \sigma')^2/4 + \mu^2 + \mu'^2} \\ &\quad - 2\mu\mu' \cos\{(\mathbf{T}-\tau' + \sigma - \sigma' - 4m\pi/l)/2\}} \end{aligned} \quad (1.19)$$

(224)

である¹⁶⁾。(1.17) は渦理論により求めた速度ポテンシャルで, 加速度ポテンシャル理論により求めたものと同形である¹⁾。

2. 積分方程式

プロペラ翼面上の吹上げの complex amplitude を w_0 で表わすと

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{\partial \Phi_0}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \int_0^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma_0^*(r', s') \\ &\times h \sqrt{1+\mu'^2} ds' \int_{-\infty}^{\tau} \exp\left(-\frac{i\dot{p}}{2}(\tau - \mathbf{T}')\right) \\ &\times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{R} \right) d\mathbf{T}' \Big|_{\sigma=\sigma'} \end{aligned} \quad (2.1)$$

である。ただし $\partial/\partial \mathbf{n}$ は (1.18) の μ', τ', σ' の代わりに μ, τ, σ と置いた演算である。

この吹上げ w_0 はプロペラの運動状態および不均一流れの分布形によって定まる既知関数であるから, (2.1) は γ_0^* に関する積分方程式とみなされる。これを

$$-w_0 = \int_0^{r_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma_0^*(\tau', \mu') K(\overline{\tau-\tau'}/2; \mu, \mu') d\tau' \quad (2.2)$$

の形に書き表わす。ただし

$$\begin{aligned} K(\overline{\tau-\tau'}/2; \mu, \mu') &= -\frac{1}{16\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \\ &\times h^3 (1+\mu'^2) \int_{-\infty}^{\tau} \exp\left(-\frac{i\dot{p}}{2}(\tau - \mathbf{T}')\right) \\ &\times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \left(\frac{1}{R} \right) d\mathbf{T}' \Big|_{\sigma=\sigma'} \end{aligned} \quad (2.3)$$

で, R は (1.19) で表わされるものである。

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^*} &= \frac{1}{\sqrt{X^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos \varphi}} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda X + i n \varphi} I_n(|\lambda| \mu_{<}) K_n(|\lambda| \mu_{>}) d\lambda \end{aligned} \quad (2.4)$$

の公式がある¹⁸⁾。ただし $\mu_{>}, \mu_{<}$ はそれぞれ μ, μ' のうち, 大なる方および小なる方を意味し, また, I_n, K_n は変形ベッセル関数である。

(1.19) に (2.4) の公式を適用すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{\pi h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i}{2}(\lambda+n)(\mathbf{T}-\tau')\right) \\ &\quad - \frac{i}{2}(\lambda-n)(\sigma-\sigma') - i2n\pi/l \\ &\quad \times I_n(|\lambda| \mu_{<}) K_n(|\lambda| \mu_{>}) d\lambda \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる。

(2.3) の $1/R$ に (2.5) の右辺を代入して, \mathbf{T} に関する積分を行なうと

$$K(\tau-\tau'/2; \mu, \mu') = \frac{\sqrt{1+\mu'^2}}{8\pi^2 \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i(\mu'\lambda-n/\mu')(\mu\lambda-n/\mu)}{\lambda+n+p} e^{i/2(\lambda+n)(\tau-\tau')-i2nm\pi/l} \right. \\ \times I_n(|\lambda|\mu<) K_n(|\lambda|\mu>) d\lambda - \{\mu'(p+n)+n/\mu'\} \{\mu(p+n)+n/\mu\} e^{-i/2p(\tau-\tau')-i2nm\pi/l} \\ \left. \times I_n(|p+n|\mu<) K_n(|p+n|\mu>) \right] \quad (2.6)$$

と書かれる。

$$\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2nm\pi/l} = \begin{cases} 0, & n \neq kl \\ l, & n = kl \end{cases}, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots)$$

の公式を用いると, (2.6) の m に関する総和は行なわれ, もう少し簡単な式となる。この表現は筆者が始めて用いたもので, 流場や核関数の解析的性質を調べたり, 核関数の形を変換したりするのに好都合な式で

あるが, 数値計算に直接利用されることはほとんどないであろう。

(2.6) では \mathbf{T} に関する積分を行なっているが, それを行なわない前の形で表わし, 積分変数 \mathbf{T} を

$$(\tau-\tau')/2=v, \quad (\mathbf{T}-\tau')/2=v' \quad (2.7)$$

によって v' に変えたと

$$K(v; \mu, \mu') = -\frac{1}{8\pi^2} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \int_{-\infty}^v e^{-ip(v-v')} dv' \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \mu\mu'\lambda^2 - \left(\frac{\mu'}{\mu} + \frac{\mu}{\mu'} \right) \lambda n \right. \\ \left. + \frac{n^2}{\mu\mu'} \right\} e^{iv'\lambda + in(v'-2m\pi/l)} I_n(|\lambda|\mu<) K_n(|\lambda|\mu>) d\lambda \quad (2.8)$$

と書かれる。

(2.4) より

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial X^2} \frac{1}{R^*} &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 e^{i\lambda X + in\varphi} I_n(|\lambda|\mu<) K_n(|\lambda|\mu>) d\lambda \\ -\frac{\partial^2}{\partial X \partial \varphi} \frac{1}{R^*} &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \lambda n e^{i\lambda X + in\varphi} I_n(|\lambda|\mu<) K_n(|\lambda|\mu>) d\lambda \\ -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \frac{1}{R^*} &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} n^2 e^{i\lambda X + in\varphi} I_n(|\lambda|\mu<) K_n(|\lambda|\mu>) d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

であるから, これを (2.8) に適用すると

$$K(v; \mu, \mu') = \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \int_{-\infty}^v e^{-ip(v-v')} \left\{ \mu\mu' \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \left(\frac{\mu'}{\mu} + \frac{\mu}{\mu'} \right) \frac{\partial^2}{\partial X \partial \varphi} + \frac{1}{\mu\mu'} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\} \frac{1}{R^*} \Bigg|_{\substack{X=v' \\ \varphi=v'-2m\pi/l}} dv' \\ = \frac{-1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \int_{-\infty}^v e^{-ip(v-v')} \left[\frac{\mu\mu' + \cos \varphi}{R^{*3}} - \frac{3(\mu X - \mu' \sin \varphi)(\mu' X - \mu \sin \varphi)}{R^{*5}} \right] \Bigg|_{\substack{X=v' \\ \varphi=v'-2m\pi/l}} dv' \quad (2.10)$$

が得られる。数値計算にはこの式を用いるのがよい。

不均一流中で作動するプロペラのプロペラ翼位置における流体に対する平均の相対前進速度および回転角速度をそれぞれ V および Ω とし, 軸方向および接線方向流速の平均値よりの偏差をそれぞれ v_a, v_t とすると, 一般に

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \sum_{k=1}^{\infty} \{c_k(r) \sin k\theta + d_k(r) \cos k\theta\} \\ v_t &= \sum_{k=1}^{\infty} \{e_k(r) \sin k\theta + f_k(r) \cos k\theta\} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

のように表わすことができる。これを角速度 $\Omega + \overline{w_t/r}$

で回転する座標系に移すには θ の代りに $\theta - (\Omega + \overline{w_t/r})t$ と置けばよい。 θ を τ, σ の座標で表わすには $\theta = (\tau + \sigma)/2$ と置く。このとき, プロペラ翼のある螺旋面上 ($\sigma=0$) では v_a, v_t は

$$\left. \begin{aligned} v_a &= \sum_{k=1}^{\infty} \{ic_k(r) + d_k(r)\} e^{ik(\Omega + \overline{w_t/r})t - ik\tau/2} \\ v_t &= \sum_{k=1}^{\infty} \{ie_k(r) + f_k(r)\} e^{ik(\Omega + \overline{w_t/r})t - ik\tau/2} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

の実数部で表わされる。

v_a, v_t の吹上げ方向の成分は

$$v_a \cos \varepsilon_i - v_t \sin \varepsilon_i,$$

ただし $\tan \varepsilon_i = \frac{h}{r} = \frac{V + \bar{w}_a}{r(\Omega + \bar{w}_i/r)}$

である。

プロペラの吹上げは v_a , v_t の吹上げ方向成分と消し合って、流体は翼表面に沿って流れるはずであるから、翼面上の境界条件は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = -v_a \cos \varepsilon_i + v_t \sin \varepsilon_i \quad (2.13)$$

である。

積分方程式はまず ν の値を与えて計算するものであるから、(2.12) の級数の各項毎に積分方程式の解を求め、それ等を加え合せて、伴流中の解を得るようにする。

k のある一つの値に対して

$$k(\Omega + \bar{w}_i/r) = \nu, \quad k = \nu / (\Omega + \bar{w}_i/r) = p \quad (2.14)$$

である。このときの境界条件は

$$w_0 = \{-(ic_p + d_p) \cos \varepsilon_i + (ie_p + f_p) \sin \varepsilon_i\} e^{-i\nu r/2} \quad (2.15)$$

で与えられる。

3. 連立積分方程式

これからの解析には

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mu} &= (\mu_0 - \mu_b)/2, & \mu_1 &= (\mu_0 + \mu_b)/2 \\ \eta &= (\mu - \mu_1)/\bar{\mu}, & \eta' &= (\mu' - \mu_1)/\bar{\mu} \\ \tau_2 &= \tau_2(\eta), & \tau_1 &= \tau_1(\eta), & \tau_2' &= \tau_2(\eta'), \\ \tau_1' &= \tau_1(\eta') \\ \bar{\tau} &= (\tau_2 - \tau_1)/2, & \bar{\tau}' &= (\tau_2' - \tau_1')/2 \\ \tau_0 &= (\tau_2 + \tau_1)/2, & \tau_0' &= (\tau_2' + \tau_1')/2 \\ \xi &= (\tau - \tau_0)/\bar{\tau}, & \xi' &= (\tau' - \tau_0')/\bar{\tau}' \\ \xi_0 &= \tau_0/\bar{\tau}, & \xi_0' &= \tau_0'/\bar{\tau}' \\ \omega &= p\bar{\tau}/2, & \omega' &= p\bar{\tau}'/2 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

によって定義される記号を用いる。

(2.2) の積分方程式の変数を ξ , ξ' , η , η' に改めると

$$-w_0(\xi, \eta) = \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-1}^1 \gamma_0^* \bar{\mu} \bar{\tau}' K(\bar{\tau} - \tau'/2; \mu, \mu') d\xi' \quad (3.2)$$

と書かれる。

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0^* & \text{が} \\ \gamma_0^*/W^* &= A^{(0)}(\eta) \lambda_0(\xi) + A^{(1)}(\eta) \lambda_1(\xi) \\ & + A^{(2)}(\eta) \lambda_2(\xi) + \dots \\ \lambda_0(\xi) &= \sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)} \\ \lambda_N(\xi) &= \xi^{N-1} \sqrt{1-\xi^2}, \quad N=1, 2, 3, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

のように表わされるものとする。ただし $A^{(N)}(\eta)$ の記号 N は N 階導関数という意味ではなく、 λ_N の係数関数を示す記号である。

(3.2) の両辺を ξ について Taylor 展開して、 ξ の同次の項の係数関数を等値すると

$$\left. \begin{aligned} -\frac{w_0(0, \eta)}{W^*} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{n-1} \int_{-1}^1 A^{(N)}(\eta') K^{(0N)} d\eta', \\ -\frac{1}{W^*} \{w_0^{(1)}(0, \eta) + i\omega w_0(0, \eta)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{n-1} \int_{-1}^1 A^{(N)}(\eta') K^{(1N)} d\eta', \\ -\frac{1}{W^*} \{w_0^{(2)}(0, \eta) + i\omega w_0^{(1)}(0, \eta)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{n-1} \int_{-1}^1 A^{(N)}(\eta') K^{(2N)} d\eta', \\ -\frac{1}{W^*} \{w_0^{(3)}(0, \eta) + i\omega w_0^{(2)}(0, \eta)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{n-1} \int_{-1}^1 A^{(N)}(\eta') K^{(3N)} d\eta', \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

となる。これ等の式で $w_0^{(k)}$ は

$$w_0^{(k)}(\xi, \eta) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^k w_0(\xi, \eta) \quad (3.5)$$

を意味し、また (2.10) の $K(v; \mu, \mu')$ を $K(\xi, \eta)$ の記号で表わすことにし、これの高次微分を

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^k K(\xi, \eta) = K^{(k)}(\xi, \eta) \quad (3.6)$$

と書くと

$$\left. \begin{aligned} K^{(0N)} &= 2\pi \bar{\mu} \bar{\tau}' \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') K(0, \eta) d\xi' \\ K^{(1N)} &= 2\pi \bar{\mu} \bar{\tau}' \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') \{K^{(1)}(0, \eta) + i\omega K(0, \eta)\} d\xi' \\ K^{(2N)} &= 2\pi \bar{\mu} \bar{\tau}' \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') \{K^{(2)}(0, \eta) + i\omega K^{(1)}(0, \eta)\} d\xi' \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

である。

(3.4) は $A^{(N)}(\eta)$ に関する連立積分方程式である。これを解いて $A^{(N)}(\eta)$ を求めれば、(3.3) によって循環分布密度を計算することができる。

4. 連立積分方程式の核関数

揚力面の積分方程式 (2.2) の核関数 (2.10) の変

数 τ, τ' を (3.1) によって, ξ, ξ' に変える。

$$\tilde{\xi} = (\xi_0 \bar{\tau} - \xi' \bar{\tau}') / \bar{\tau}' \quad (4.1)$$

と書くとき

$$v = (\tau - \tau') / 2 = \tilde{\xi} \bar{\tau} / 2 + (\tilde{\xi} - \xi') \bar{\tau}' / 2 \quad (4.2)$$

である。

(2.10) の積分変数 v' を $-v'$ に変えると

$$K(v; \mu, \mu') = -\frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} e^{-i p v} \int_{-v}^{l-1} \sum_{m=0}^{l-1} \left[e^{-i p \varphi} \times \left\{ \frac{\mu \mu' + \cos \varphi}{R^{*3}} - \frac{3(\mu X - \mu' \sin \varphi)(\mu' X - \mu \sin \varphi)}{R^{*5}} \right\} \right]_{\substack{X=v' \\ \varphi=v'+2m\pi/l}} dv' \quad (4.3)$$

となる。いま

$$E = (\tilde{\xi} - \xi') \bar{\tau}' / 2 \quad (4.4)$$

のように表わすことにすると, (4.3) の v を E としたものが $K(0, \eta)$ に相当する。すなわち

$$K(E; \mu, \mu') = K(0, \eta) \quad (4.5)$$

である。

次に, (2.8) より $K^{(k+1)}(0, \eta) + i\omega K^{(k)}(0, \eta)$ の表示式を求めると

$$K^{(1)}(0, \eta) + i\omega K(0, \eta) = -\frac{\bar{\tau}}{16\pi^2} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}}$$

$$\times \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu' \lambda - n / \mu') (\mu \lambda - n / \mu)$$

$$\times e^{i\lambda E + i n (E - 2m\pi/l)} I_n(|\lambda| \mu <) K_n(|\lambda| \mu >) d\lambda$$

$$K^{(k+1)}(0, \eta) + i\omega K^{(k)}(0, \eta) = -\frac{\bar{\tau}}{16\pi^2} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}}$$

$$\times \left(\frac{i\bar{\tau}}{2} \right)^k \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + n)^k (\mu' \lambda - n / \mu')$$

$$\times (\mu \lambda - n / \mu) e^{i\lambda E + i n (E - 2m\pi/l)} I_n(|\lambda| \mu <) K_n(|\lambda| \mu >) d\lambda \quad (4.6)$$

である。この式より

$$K^{(k+1)}(0, \eta) + i\omega K^{(k)}(0, \eta)$$

$$= \left(-\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}'} \right)^k \left(\frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^k \{ K^{(1)}(0, \eta) + i\omega K(0, \eta) \} \quad (4.7)$$

の関係が得られる。

また (2.4) を用いて $1/R^{*k}$ の微分の組合せで表わすと

$$K^{(k+1)}(0, \eta) + i\omega K^{(k)}(0, \eta) = \frac{\bar{\tau}}{16\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \left(\frac{\bar{\tau}}{2} \right)^k$$

$$\times \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \left[\left(\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)^k \left(\mu \frac{\partial}{\partial X} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right]$$

$$\times \left(\mu' \frac{\partial}{\partial X} - \frac{1}{\mu'} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \frac{1}{R^{*k}} \Big|_{\substack{X=E \\ \varphi=E-2m\pi/l}} \quad (4.8)$$

である。

(4.8) の右辺の微分演算を行なうと

$$K^{(1)}(0, \eta) + i\omega K(0, \eta) = -\frac{\bar{\tau}}{16\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \left[\frac{\mu \mu' + \cos \varphi}{R^{*3}} - \frac{3(\mu X - \mu' \sin \varphi)(\mu' X - \mu \sin \varphi)}{R^{*5}} \right]_{\substack{X=E \\ \varphi=E-2m\pi/l}} \quad (4.9)$$

$$K^{(2)}(0, \eta) + i\omega K^{(1)}(0, \eta) = -\frac{\bar{\tau}^2}{32\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \left[-\frac{\sin \varphi}{R^{*3}} - \frac{3(X + \mu \mu' \sin \varphi)(\mu \mu' + \cos \varphi)}{R^{*5}} - \frac{3\{(\mu - \mu' \cos \varphi)(\mu' X - \mu \sin \varphi) + (\mu' - \mu \cos \varphi)(\mu X - \mu' \sin \varphi)\}}{R^{*5}} + \frac{15(X + \mu \mu' \sin \varphi)(\mu X - \mu' \sin \varphi)(\mu' X - \mu \sin \varphi)}{R^{*7}} \right]_{\substack{X=E \\ \varphi=E-2m\pi/l}} \quad (4.10)$$

$$K^{(3)}(0, \eta) + i\omega K^{(2)}(0, \eta) = -\frac{\bar{\tau}^3}{64\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l} \left[-\frac{\cos \varphi}{R^{*3}} - \frac{3\{(1 + \mu \mu' \cos \varphi)(\mu \mu' + \cos \varphi) - 2 \sin \varphi (X + \mu \mu' \sin \varphi)\}}{R^{*5}} - \frac{3\{\mu' \sin \varphi (\mu' X - \mu \sin \varphi) + \mu \sin \varphi (\mu X - \mu' \sin \varphi) + 2(\mu - \mu' \cos \varphi)(\mu' - \mu \cos \varphi)\}}{R^{*5}} + \frac{15(X + \mu \mu' \sin \varphi)\{(X + \mu \mu' \sin \varphi)(\mu \mu' + \cos \varphi) + 2(\mu' X - \mu \sin \varphi)(\mu - \mu' \cos \varphi) + 2(\mu X - \mu' \sin \varphi)(\mu' - \mu \cos \varphi)\}}{R^{*7}} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{15(\mu'X - \mu \sin \varphi)(\mu X - \mu' \sin \varphi)(1 + \mu\mu' \cos \varphi)}{R^{*7}} \\
& - \frac{105(X + \mu\mu' \sin \varphi)^2(\mu X - \mu' \sin \varphi)(\mu' X - \mu \sin \varphi)}{R^{*9}} \Big]_{\substack{X=E \\ \varphi=E-2m\pi/l}}
\end{aligned} \quad (4.11)$$

である。

これ等を (3.7) に代入し、 $\xi' = \cos \theta$ と置いて、 θ について数値積分を行なうと、 $K^{(0N)}$, $K^{(1N)}$, $K^{(2N)}$, $K^{(3N)}$ の数値が得られる。

5. 核関数 $K(v; \mu, \mu')$ の特異性

積分方程式を近似度の高い連立一次方程式に書き表わすには、核関数 $K(v; \mu, \mu')$ の特異性を明確にしておく必要がある。

(2.10) を少し書改める。まず

$$\begin{aligned}
K(v; \mu, \mu') = & -\frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2ym\pi/l} \int_{-\infty}^v e^{-ip(v-v')} \left[\frac{\mu\mu' + \cos \varphi}{R^{*3}} \right. \\
& \left. - \frac{3(\mu\mu'X + \sin \varphi)(X + \mu\mu' \sin \varphi)}{R^{*5}} + \frac{3(1+\mu^2)(1+\mu'^2)X \sin \varphi}{R^{*5}} \right]_{\substack{X=v' \\ \varphi=v'-2m\pi/l}} dv'
\end{aligned}$$

のように整理し、大括弧内の第1項、第2項を部分積分すると

$$\begin{aligned}
K(v; \mu, \mu') = & -\frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2ym\pi/l} \left[\frac{\mu\mu'X + \sin \varphi}{R^{*3}} \right]_{\substack{X=v \\ \varphi=v-2m\pi/l}} - \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2ym\pi/l} \\
& \times \int_{-\infty}^v e^{-ip(v-v')} \left[\frac{3(1+\mu^2)(1+\mu'^2)X \sin \varphi}{R^{*5}} - \frac{i\dot{p}(\mu\mu'X + \sin \varphi)}{R^{*3}} \right]_{\substack{X=v' \\ \varphi=v'-2m\pi/l}} dv'
\end{aligned} \quad (5.1)$$

と書かれる。

$K(v; \mu, \mu')$ の特異性はこの式の m の総和の内、 $m=0$ の項にのみ含まれ、 $\mu=\mu'$, $v=0$ がその特異点の位置である。

v' の小さな値に対しては

$$\left. \begin{aligned}
\frac{v' \sin v'}{(v'^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos v')^{5/2}} & \approx \frac{v' \sin v'}{\{(1+\mu\mu')v'^2 + (\mu-\mu')^2\}^{3/2}} \\
\frac{\mu\mu'v' + \sin v'}{(v'^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos v')^{3/2}} & \approx \frac{(1+\mu\mu')v'}{\{(1+\mu\mu')v'^2 + (\mu-\mu')^2\}^{3/2}}
\end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

であるから、 $K(v; \mu, \mu')$ の $\mu=\mu'$, $v=0$ の近傍の状態は

$$\begin{aligned}
K(v; \mu, \mu') \approx & -\frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \frac{(1+\mu\mu')v}{\{(1+\mu\mu')v^2 + (\mu-\mu')^2\}^{3/2}} - \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \int_{-\infty}^v e^{-ip(v-v')} \\
& \times \left[\frac{3(1+\mu^2)(1+\mu'^2)v' \sin v'}{\{(1+\mu\mu')v'^2 + (\mu-\mu')^2\}^{5/2}} - \frac{i\dot{p}(1+\mu\mu')v'}{\{(1+\mu\mu')v'^2 + (\mu-\mu')^2\}^{3/2}} \right] dv' \\
= & -\frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \left[\frac{(1+\mu\mu')v}{\{(1+\mu\mu')v^2 + (\mu-\mu')^2\}^{3/2}} - \frac{(1+\mu^2)(1+\mu'^2) \sin v}{(1+\mu\mu')\{(1+\mu\mu')v^2 + (\mu-\mu')^2\}^{3/2}} \right] \\
& - \frac{1}{8\pi} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \int_{-\infty}^v e^{-ip(v-v')} \left[\frac{(1+\mu^2)(1+\mu'^2) \cos v'}{(1+\mu\mu')\{(1+\mu\mu')v'^2 + (\mu-\mu')^2\}^{3/2}} \right. \\
& \left. + \frac{i\dot{p}(1+\mu^2)(1+\mu'^2) \sin v'}{(1+\mu\mu')\{(1+\mu\mu')v'^2 + (\mu-\mu')^2\}^{3/2}} - \frac{i\dot{p}(1+\mu\mu')v'}{\{(1+\mu\mu')v'^2 + (\mu-\mu')^2\}^{3/2}} \right] dv' \\
\approx & -\frac{1+\mu^2}{16\pi} e^{-ipv} \int_{-\infty}^v \frac{\cos(\dot{p}+1)v' + \cos(\dot{p}-1)v' + i \sin(\dot{p}+1)v' + i \sin(\dot{p}-1)v'}{\{(1+\mu^2)v'^2 + (\mu-\mu')^2\}^{3/2}} dv'
\end{aligned} \quad (5.3)$$

である。 T を正の大きな値とすると

$$K(v; \mu, \mu') \simeq -\frac{1+\mu^2}{16\pi} e^{-i\mu v} \int_{-T}^v \frac{2-(p^2+1)v'^2+i2pv'}{\{(1+\mu^2)v'^2+(\mu-\mu')^2\}^{3/2}} dv' - \frac{1}{16\pi} \frac{e^{-i\mu v}}{\sqrt{1+\mu^2}} \\ \times \int_{-T}^v \frac{2+(p^2+1)(\mu-\mu')^2/(1+\mu^2)+i2pv'}{\{v'^2+(\mu-\mu')^2/(1+\mu^2)\}^{3/2}} dv' + \frac{1}{16\pi} \frac{e^{-i\mu v}}{\sqrt{1+\mu^2}} \int_{-v}^T \frac{p^2+1}{\{v'^2+(\mu-\mu')^2/(1+\mu^2)\}^{1/2}} dv' \quad (5.4)$$

のように表わされる。(5.4)の第2項は(5.3)をそのまま継承して $T \rightarrow \infty$ とすると積分は発散する。これは(5.3)の余弦を冪級数で表わしたために生じたことで、その不都合を避けるため、(5.4)では T を有限とした。

(5.4)の積分を行なうと

$$K(v; \mu, \mu') \simeq -\frac{1}{16\pi} \frac{e^{-i\mu v}}{\sqrt{1+\mu^2}} \left[\frac{2(1+\mu^2)v}{(\mu-\mu')^2 \sqrt{v^2+(\mu-\mu')^2/(1+\mu^2)}} + \frac{2(1+\mu^2)}{(\mu-\mu')^2} \right. \\ \left. - \frac{i2p}{\sqrt{v^2+(\mu-\mu')^2/(1+\mu^2)}} + (p^2+1) \ln\{\sqrt{v^2+(\mu-\mu')^2/(1+\mu^2)}-v\} \right] \quad (5.5)$$

となる。

以下では(5.5)で表わされる特異性を $K(v; \mu, \mu')$ より分離して

$$K(v; \mu, \mu') = F(v; \mu, \mu') + J(v; \mu, \mu') \quad (5.6)$$

ただし

$$J(v; \mu, \mu') = -\frac{1}{16\pi} \frac{e^{-i\mu v}}{\sqrt{1+\mu^2}} \left[\frac{2(1+\mu^2)v}{(\mu-\mu')^2 \sqrt{v^2+(\mu-\mu')^2/(1+\mu^2)}} + \frac{2(1+\mu^2)}{(\mu-\mu')^2} \right. \\ \left. + (p^2+1) \ln\{\sqrt{v^2+(\mu-\mu')^2/(1+\mu^2)}-v\} - \frac{i2p}{\sqrt{v^2+(\mu-\mu')^2/(1+\mu^2)}} \right] \quad (5.7)$$

と書くことにする。 $F(v; \mu, \mu')$ は $\mu=\mu'$, $v=0$ に特異点をもたない連続関数である。

$K(v; \mu, \mu')$ を数表に表わしておくとき数値計算上便利なことがある。 K と

$$\bar{K}(v; \mu, \mu') = (\mu-\mu')^2 K(v; \mu, \mu') \quad (5.8)$$

の関係にある \bar{K} は $\mu=\mu'$ で有限値をとるので、 K よ

りも \bar{K} の数表を作る方が好都合である。

$$\ln\{\sqrt{v^2+(\mu-\mu')^2/(1+\mu^2)}-v\} \\ = \ln \frac{(\mu-\mu')^2/(1+\mu^2)}{\sqrt{v^2+(\mu-\mu')^2/(1+\mu^2)}+v} \quad (5.9)$$

であるから、 $\mu=\mu'$ の近傍では

$$\bar{K}(v; \mu, \mu') \simeq \begin{cases} -\frac{e^{-i\mu v}}{4\pi} \left\{ \sqrt{1+\mu^2} + \frac{(p^2+1)(\mu-\mu')^2}{2\sqrt{1+\mu^2}} \ln|\mu-\mu'|, & v > 0 \right. \\ -\frac{e^{-i\mu v}}{8\pi} \left\{ \sqrt{1+\mu^2} + \frac{(p^2+1)(\mu-\mu')^2}{2\sqrt{1+\mu^2}} \ln|\mu-\mu'|, & v = 0 \right. \\ 0, & v < 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

となる。

$p=0$ とすると(5.10)は定常プロペラのものと一致する¹⁶⁾。以前筆者が導いたものでは(5.10)の対数特異点の部分が除外してある¹⁷⁾。

6. 核関数 $K^{(ON)}$ の特異性

連立積分方程式の核関数 $K^{(MN)}$ の中で $M=0$ の場合、すなわち $K^{(ON)}$ は $M>0$ の $K^{(MN)}$ とは形式が異なるものであるから、特異点近傍の状態を導く方法にもかなりの違いがある。そこで $M=0$ と $M>0$ の

場合を分けて、本節では特に $K^{(ON)}$ の特異点近傍の状態を求めることにする。

$K^{(ON)}$ は(3.7), (4.4), (4.5)および(5.6)より

$$K^{(ON)} = 2\pi \bar{\mu} \bar{\tau}' \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') \left\{ F(E; \mu, \mu') \right. \\ \left. - \frac{e^{i\omega'(\xi'-\bar{\xi})}}{16\pi} \frac{(p^2+1)}{\sqrt{1+\mu^2}} \ln \frac{\bar{\tau}'}{2} \right\} d\xi' + J^{(ON)} \quad (6.1)$$

ただし

$$J^{(ON)} = 2\pi \bar{\mu} \bar{\tau}' \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') \left\{ J(E; \mu, \mu') \right.$$

$$+ \frac{e^{i\omega'(\xi' - \bar{\xi}')} (\rho^2 + 1)}{16\pi} \frac{\tau'}{\sqrt{1 + \mu^2}} \ln \frac{\tau'}{2} \Big\} d\xi' \quad (6.2)$$

のように表わされる。

いまあらたに

$$\left. \begin{aligned} g_{1,N}(Y) &= \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') e^{i\omega'(\xi' - \bar{\xi})} \\ &\times \left\{ 1 - \frac{\xi' - \bar{\xi}}{\sqrt{(\xi' - \bar{\xi})^2 + Y^2}} \right\} d\xi' \\ g_{2,N}(Y) &= \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') e^{i\omega'(\xi' - \bar{\xi})} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{(\xi' - \bar{\xi})^2 + Y^2}} d\xi' \\ g_{3,N}(Y) &= \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') e^{i\omega'(\xi' - \bar{\xi})} \\ &\times \ln \left| \sqrt{(\xi' - \bar{\xi})^2 + Y^2} + \xi' - \bar{\xi} \right| d\xi' \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

で定義される関数を用いることにし、

$$Y^2 = \frac{4(\mu - \mu')^2}{\tau'^2 (1 + \mu^2)} \quad (6.4)$$

と置くと、 $J^{(ON)}$ は

$$\begin{aligned} J^{(ON)} &= -\frac{\bar{\mu} \tau'}{8} \sqrt{1 + \mu^2} \left\{ \frac{2g_{1,N}(Y)}{(\mu - \mu')^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i4\rho g_{2,N}(Y)}{\tau' (1 + \mu^2)} + \frac{(\rho^2 + 1)g_{3,N}(Y)}{1 + \mu^2} \right\} \quad (6.5) \end{aligned}$$

で与えられる。

Multhopp¹⁹⁾ および Laschka²⁰⁾ の方法を用いると、 $J^{(ON)}$ の特異点 $Y=0$ の近傍における状態を導くことができる。 $Y=0$ のとき $\bar{\xi}=0$ であるから、 $g_{1,N}, g_{2,N}, g_{3,N}$ の $Y=0$ の近傍における状態は (6.3) で $\bar{\xi}=0$ と置いたもののそれと同形である²⁾。

$\lambda_N(\xi') e^{i\omega'\xi'}$ を ξ' について Taylor 展開して

$$\begin{aligned} \lambda_N(\xi') e^{i\omega'\xi'} &= \lambda_N(0) + \xi' \{ i\omega' \lambda_N(0) + \lambda_{N'}(0) \} \\ &\quad + \frac{\xi'^2}{2} \frac{d^2}{d\xi'^2} (\lambda_N e^{i\omega'\xi'}) \Big|_{\xi'=0} + \dots \quad (6.6) \end{aligned}$$

のように表わし、これを $g_{1,N}, g_{2,N}$ に代入して積分を行なう。

$$\begin{aligned} g_{1,N} &\text{ は } Y=0 \text{ で有限値をとるので、まず} \\ \Delta g_{1,N} &= g_{1,N}(Y) - g_{1,N}(0) \\ &= \int_0^1 \{ \lambda_N(\xi') e^{i\omega'\xi'} - \lambda_N(-\xi') e^{-i\omega'\xi'} \} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{\xi'}{\sqrt{\xi'^2 + Y^2}} \right\} d\xi' \quad (6.7) \end{aligned}$$

と書き、これに (6.6) を代入すると

(230)

$$\begin{aligned} \Delta g_{1,N} &\simeq 2 \{ i\omega' \lambda_{N'}(0) + \lambda_{N''}(0) \} \\ &\quad \times \int_0^1 \xi' \left\{ 1 - \frac{\xi'}{\sqrt{\xi'^2 + Y^2}} \right\} d\xi' + \dots \\ &\simeq - \{ i\omega' \lambda_N(0) + \lambda_{N'}(0) \} Y^2 \ln Y + \dots \quad (6.8) \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} g_{1,N}(0) &= 2 \int_{-1}^0 \lambda_N(\xi') e^{i\omega'\xi'} d\xi' \\ &= 2 \int_0^1 \lambda_N(-\xi') e^{-i\omega'\xi'} d\xi' \quad (6.9) \end{aligned}$$

であるから、 $g_{1,N}(Y)$ の $Y=0$ の近傍における状態は

$$g_{1,N}(Y) \simeq g_{1,N}(0) - \{ i\omega' \lambda_N(0) + \lambda_{N'}(0) \} Y^2 \ln Y + \dots \quad (6.10)$$

のように表わされる。

$J_0(x)$, $H_0(x)$ をそれぞれ Bessel および Struve の関数とすると

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{e^{-i\omega'\xi'}}{\sqrt{1 - \xi'^2}} d\xi' = J_0(\omega') - iH_0(\omega') = T_0(\omega') \quad (6.11)$$

の公式がある。これを利用すると

$$\left. \begin{aligned} g_{1,0}(0) &= 2 \int_0^1 \frac{(1 + \xi') e^{-i\omega'\xi'}}{\sqrt{1 - \xi'^2}} d\xi' \\ &= \pi \{ T_0(\omega') + iT_0'(\omega') \} \\ g_{1,1}(0) &= 2 \int_0^1 \frac{(1 - \xi'^2) e^{-i\omega'\xi'}}{\sqrt{1 - \xi'^2}} d\xi' \\ &= \pi \{ T_0(\omega') + T_0''(\omega') \} \\ g_{1,2}(0) &= 2 \int_0^1 \frac{(\xi' - \xi'^3) e^{-i\omega'\xi'}}{\sqrt{1 - \xi'^2}} d\xi' \\ &= i\pi \{ T_0'(\omega') + T_0'''(\omega') \} \\ g_{1,3}(0) &= 2 \int_0^1 \frac{(\xi'^2 - \xi'^4) e^{-i\omega'\xi'}}{\sqrt{1 - \xi'^2}} d\xi' \\ &= -\pi \{ T_0''(\omega') + T_0^{(iv)}(\omega') \} \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

のように表わされる。ただし

$$T_0'(\omega') = \frac{d}{d\omega'} T_0(\omega'),$$

$$T_0''(\omega') = \frac{d^2}{d\omega'^2} T_0(\omega'), \dots$$

である。 $J_0(x)$, $H_0(x)$ の高階導関数の数値は

$$\left. \begin{aligned} J_0'(x) &= -J_1(x), \\ J_0''(x) &= -J_0(x) + \frac{1}{x} J_1(x) \\ J_0'''(x) &= \frac{1}{x} J_0(x) + \left(1 - \frac{2}{x^2} \right) J_1(x), \\ J_0^{(iv)}(x) &= \left(1 - \frac{3}{x^2} \right) J_0(x) - \left(\frac{2}{x} - \frac{6}{x^3} \right) J_1(x) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 H_0'(x) &= \frac{2}{\pi} - H_1(x), \\
 H_0''(x) &= -H_0(x) + \frac{1}{x} H_1(x) \\
 H_0'''(x) &= -\frac{2}{\pi} + \frac{1}{x} H_0(x) + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) H_1(x), \\
 H_0^{(iv)}(x) &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{x} + \left(1 - \frac{3}{x^2}\right) H_0(x) \\
 &\quad - \left(\frac{2}{x} - \frac{6}{x^3}\right) H_1(x)
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

の公式を利用して計算するとよい。

$g_{2,N}$ は $Y=0$ に特異点をもつ関数で、この特異性は $\xi'=0$ の近傍の積分の中に含まれる。したがって $g_{2,N}$ の $Y=0$ の近傍の状態は

$$\begin{aligned}
 g_{2,N}(Y) &\simeq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\xi'^2 + Y^2}} [\lambda_N(0) + \xi' \{i\omega' \lambda_N(0) \\
 &\quad + \lambda_N'(0)\} + \dots] d\xi' \simeq -2 \lambda_N(0) \ln Y + \dots
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

である。

$g_{3,N}$ の $Y=0$ の近傍における状態は (5.9) の関係を利用すると容易に導かれる。

$$\begin{aligned}
 g_{3,N}(Y) &= \int_0^1 \lambda_N(\xi') e^{i\omega' \xi'} \ln |\sqrt{\xi'^2 + Y^2} + \xi'| d\xi' \\
 &\quad + \int_0^1 \lambda_N(-\xi') e^{-i\omega' \xi'} \ln |\sqrt{\xi'^2 + Y^2} - \xi'| d\xi' \\
 &= \int_0^1 \{\lambda_N(\xi') e^{i\omega' \xi'} - \lambda_N(-\xi') e^{-i\omega' \xi'}\} \ln |\sqrt{\xi'^2 + Y^2} \\
 &\quad + \xi'| d\xi' + 2 \int_0^1 \lambda_N(-\xi') e^{-i\omega' \xi'} \cdot \ln Y
 \end{aligned}$$

であるから、

$$g_{3,N}(Y) \simeq g_{1,N}(0) \cdot \ln Y + \dots \tag{6.15}$$

となる。

(6.10), (6.14) および (6.15) を (6.5) に適用すると、 $\mu=\mu'$ の近傍における $J^{(ON)}$ の状態は

$$\begin{aligned}
 J^{(ON)} &\simeq -\frac{\bar{\mu} \bar{\tau}'}{8} \sqrt{1+\mu^2} \left[\frac{2g_{1,N}(0)}{(\mu-\mu')^2} \right. \\
 &\quad + \frac{(\rho^2+1) \bar{\tau}'^2 g_{1,N}(0) - 8\lambda_N'(0) + i4\rho \bar{\tau}' \lambda_N(0)}{\bar{\tau}'^2 (1+\mu^2)} \\
 &\quad \left. \times \ln |\mu-\mu'| \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

のように表わされる。

$J^{(ON)}$ の特異性が $K^{(ON)}$ の特異性になるのであるから、 $K^{(ON)}$ は $\mu=\mu'$ に 2 位の極と対数特異点をもつことがわかる。

7. 核関数 $K^{(MN)}$ の特異性

$K^{(MN)}$ の $\mu=\mu'$ における特異性は (3.7) の $\xi'=0$ の近傍における積分に由来するものであるから、 $\mu=\mu'$ の近傍における $K^{(MN)}$ の状態を求めるには

$$\begin{aligned}
 K^{(MN)} &\simeq 2\pi \bar{\mu} \bar{\tau}' \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \lambda_N(\xi') \{K^{(M)}(0, \eta) \\
 &\quad + i\omega K^{(M-1)}(0, \eta)\} d\xi'
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

を計算すれば足りる。ただし ε は正の小さな数とする。

さらに (7.1) の右辺の被積分関数の中では、 $K^{(M)}$, $K^{(M-1)}$ の中の m に関する総和のうち、 $m=0$ の項のみ特異性が含まれるので、この項だけを取上げて (7.1) の積分を行なう。この場合も $K^{(ON)}$ のときと同じに $\bar{\xi}=0$ と置いても結果に変わりはないから、 $E = -\xi' \bar{\tau}'/2$ とする。

(4.9) より

$$\begin{aligned}
 K^{(1N)} &\simeq -\frac{\bar{\mu} \bar{\tau} \bar{\tau}'}{8} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \lambda_N(\xi') \\
 &\quad \times \left\{ \frac{\mu\mu' + \cos E}{(E^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos E)^{3/2}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3(\mu E - \mu' \sin E)(\mu' E - \mu \sin E)}{(E^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos E)^{5/2}} \right\} d\xi'
 \end{aligned}$$

である。これをさらに簡略にし、(6.4) で定義した Y を用いて書き改めると

$$\begin{aligned}
 K^{(1N)} &\simeq -\frac{\bar{\mu} \bar{\tau}}{8} \frac{1}{\bar{\tau}'^2 (1+\mu^2)^{3/2}} \sqrt{\frac{1+\mu'^2}{1+\mu^2}} \\
 &\quad \times \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \lambda_N(\xi') \left\{ \frac{8(1+\mu\mu') - \xi'^2 \bar{\tau}'^2}{(\xi'^2 + Y^2)^{3/2}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{Y^2 (6\xi'^2 \bar{\tau}'^2 - \xi'^4 \bar{\tau}'^4/12)}{(\xi'^2 + Y^2)^{5/2}} \right\} d\xi'
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

である。

$\lambda_N(\xi')$ を Taylor 展開して

$$\lambda_N(\xi') = \lambda_N(0) + \frac{1}{2} \lambda_N''(0) \cdot \xi'^2 + \frac{1}{6} \lambda_N'''(0) \xi'^3 + \dots \tag{7.3}$$

のように表わし、これを (7.2) に代入して ξ' に関する積分を行なうと、(7.3) の ξ' の奇数次の項は 0 になるから

$$\begin{aligned}
 K^{(1N)} &\simeq -\frac{2\bar{\mu} \lambda_N(0)}{\tau \sqrt{1+\mu^2}} \frac{1}{Y^2} + \frac{2\bar{\mu}}{\tau (1+\mu^2)^{3/2}} \\
 &\quad \times \left\{ (1+\mu^2) \lambda_N''(0)/6 - \bar{\tau}^2 \lambda_N(0)/8 \right\} \ln Y \\
 &\simeq -\frac{\bar{\mu} \bar{\tau} \sqrt{1+\mu^2} \lambda_N(0)}{2(\mu-\mu')^2} + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\tau} (1+\mu^2)^{3/2}}
 \end{aligned}$$

$$\times \{ (1+\mu^2)\lambda_{N''}(0)/3 - \bar{\tau}^2\lambda_N(0)/4 \} \ln|\mu-\mu'| \quad (7.4)$$

となる。

$M>1$ のときは (4.7) を (7.1) に適用し、部分積分を行なうと

$$\left. \begin{aligned} K^{(2N)} &\simeq 2\pi\bar{\mu}\bar{\tau}' \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}'} \right) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \lambda_{N'}(\xi') \\ &\times \{ K^{(1)}(0, \eta) + i\omega K(0, \eta) \} d\xi' \\ K^{(3N)} &\simeq 2\pi\bar{\mu}\bar{\tau}' \left(\frac{\bar{\tau}}{\bar{\tau}'} \right) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \lambda_{N''}(\xi') \\ &\times \{ K^{(1)}(0, \eta) + i\omega K(0, \eta) \} d\xi' \end{aligned} \right\} (7.5)$$

となるから、 $\mu=\mu'$ の近傍の状態は $K^{(1N)}$ の場合と同様にすれば求められる。その結果は

$$\left. \begin{aligned} K^{(2N)} &\simeq -\frac{\bar{\mu}\bar{\tau}\sqrt{1+\mu^2}\lambda_{N'}(0)}{2(\mu-\mu')^2} + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\tau}(1+\mu^2)^{3/2}} \\ &\times \{ (1+\mu^2)\lambda_{N''}(0)/3 - \bar{\tau}^2\lambda_N(0)/4 \} \ln|\mu-\mu'| \\ K^{(3N)} &\simeq -\frac{\bar{\mu}\bar{\tau}\sqrt{1+\mu^2}\lambda_{N''}(0)}{2(\mu-\mu')^2} + \frac{\bar{\mu}}{\bar{\tau}(1+\mu^2)^{3/2}} \\ &\times \{ (1+\mu^2)\lambda_{N^{(iv)}}(0)/3 - \bar{\tau}^2\lambda_{N''}(0)/4 \} \ln|\mu-\mu'| \end{aligned} \right\} (7.7)$$

である。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0'(\xi) &= -\frac{\lambda_0(\xi)}{1-\xi^2}, \quad \lambda_0''(\xi) = \frac{2\xi-1}{1-\xi^2} \lambda_0'(\xi) \\ \lambda_0'''(\xi) &= \frac{3}{2} \left\{ \frac{2\xi-1}{1-\xi^2} \lambda_0''(\xi) + \frac{\lambda_0'(\xi)}{(1-\xi^2)^2} \right\} \\ \lambda_0^{(iv)}(\xi) &= \frac{3}{2} \left\{ \frac{2\xi-1}{1-\xi^2} \lambda_0'''(\xi) \right. \\ &\left. + \frac{2\xi^2-2\xi+3}{(1-\xi^2)^2} \lambda_0''(\xi) + \frac{4\xi}{(1-\xi^2)^3} \lambda_0'(\xi) \right\} \\ \lambda_1'(\xi) &= -\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \lambda_1''(\xi) = \frac{1}{(1-\xi^2)^{3/2}} \\ \lambda_1'''(\xi) &= \frac{3\xi}{(1-\xi^2)^{5/2}} \\ \lambda_1^{(iv)}(\xi) &= \frac{3}{(1-\xi^2)^{3/2}} + \frac{15\xi^2}{(1-\xi^2)^{7/2}} \\ \lambda_2(\xi) &= \xi\lambda_1(\xi), \quad \lambda_2'(\xi) = \lambda_1(\xi) + \xi\lambda_1'(\xi) \\ \lambda_2''(\xi) &= 2\lambda_1'(\xi) + \xi\lambda_1''(\xi), \\ \lambda_2'''(\xi) &= 3\lambda_1''(\xi) + \xi\lambda_1'''(\xi) \\ \lambda_2^{(iv)}(\xi) &= 4\lambda_1'''(\xi) + \xi\lambda_1^{(iv)}(\xi) \end{aligned} \right\} (7.8)$$

である。 $\lambda_3(\xi)$ 以下の逐次導関数は

$$\lambda_N(\xi) = \xi\lambda_{N-1}(\xi)$$

の関係に $\lambda_3(\xi)$ の場合を適用すると容易に求められる。

(7.8) で $\xi=0$ とすると

$$(232)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0(0) &= 1, & \lambda_2(0) &= 0, \\ \lambda_0'(0) &= -1, & \lambda_2'(0) &= 1, \\ \lambda_0''(0) &= 1, & \lambda_2''(0) &= 0, \\ \lambda_0'''(0) &= -3, & \lambda_2'''(0) &= 3, \\ \lambda_0^{(iv)}(0) &= 9, & \lambda_2^{(iv)}(0) &= 0, \\ \lambda_1(0) &= 1, & \lambda_3(0) &= 0, \\ \lambda_1'(0) &= 0, & \lambda_3'(0) &= 0, \\ \lambda_1''(0) &= 1, & \lambda_3''(0) &= 2, \\ \lambda_1'''(0) &= 0, & \lambda_3'''(0) &= 0, \\ \lambda_1^{(iv)}(0) &= 3, & \lambda_3^{(iv)}(0) &= 12, \end{aligned} \right\} (7.9)$$

となる。

8. 積分方程式の連立一次方程式への変換

これまでの結果を利用すれば、連立積分方程式 (3.4) を連立一次方程式に変換することは容易なことで、揚力線ないしは揚力面理論において在来行なわれてきた方法を踏襲するだけのことであるが、今後の計算の便宜を計って一応記載する。

(3.4) の記号を改めて書くと

$$\alpha^{(M)} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{n-1} \int_{-1}^1 A^{(N)}(\eta') K^{(MN)} d\eta', \quad (M=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (8.1)$$

である。ただし

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(0)} &= \frac{w_0(0, \eta)}{W^*} \\ \alpha^{(M)} &= \frac{1}{W^*} \{ w_0^{(M)} + i\omega w_0^{(M-1)} \}, \quad (M \neq 0) \end{aligned} \right\} (8.2)$$

とする。

$K^{(MN)}$ は $\eta=\eta'$ に 2 位の極をもつ関数であるから、

$$\bar{K}^{(MN)} = (\eta-\eta')^2 K^{(MN)} \quad (8.3)$$

のように置く。さらに $K^{(MN)}$ は一般に $\eta=\eta'$ に対数特異点をもつので

$$\bar{K}^{(MN)} = \tilde{K}^{(MN)} + I^{(MN)}(\eta-\eta')^2 \ln|\eta-\eta'| \quad (8.4)$$

のように書き、 $\eta \rightarrow \eta'$ における $\tilde{K}^{(MN)}$ を

$$\lim_{\eta \rightarrow \eta'} \tilde{K}^{(MN)} = S^{(MN)} \quad (8.5)$$

で表わすことにする。ただし $K^{(MN)}$ が対数特異点をもたないときは、 $I^{(MN)}=0$ とする。

いま η, η' と

$$\eta = \cos \varphi, \quad \eta' = \cos \varphi' \quad (8.6)$$

の関係にある新しい変数 φ, φ' を導入し、Mangler and Spencer²¹⁾ にならって

$$A^{(N)}(\eta') \bar{K}^{(MN)} = A^{(N)}(\eta) I^{(MN)} \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} \\ \times (\eta - \eta')^2 \ln |\eta - \eta'| + R^{(MN)}(\eta, \eta') \quad (8.7)$$

ただし

$$R^{(MN)}(\eta, \eta') = A^{(N)}(\eta') \bar{K}^{(MN)} \\ - A^{(N)}(\eta) I^{(MN)} \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} (\eta - \eta')^2 \ln |\eta - \eta'| \quad (8.8)$$

のように書くと, $R^{(MN)}(\eta, \eta')$ は $\eta = \eta'$ の近傍では

$$R^{(MN)}(\eta, \eta') \simeq A^{(N)}(\eta') \bar{K}^{(MN)} \quad (8.9)$$

であるから, $\eta = \eta'$ に特異点をもたない。

最小二乗法の内挿式を用いて

$$R^{(MN)}(\eta, \eta') = \frac{2}{m+1} \sum_{j=1}^m R_j^{(MN)}(\varphi) \\ \times \sum_{k=1}^m \sin k\varphi_j \sin k\varphi' \quad (8.10)$$

と置く。ただし

$$\varphi_j = j\pi / (m+1), \quad R_j^{(MN)}(\varphi) = R^{(MN)}(\varphi, \varphi_j) \quad (8.11)$$

とする。

(8.3), (8.7), (8.10) を (8.1) に適用すると

$$\alpha^{(M)} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{n-1} A^{(N)}(\eta) I^{(MN)} \int_{-1}^1 \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} \\ \times \ln |\eta - \eta'| d\eta' - \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^{n-1} \frac{2}{m+1} \sum_{j=1}^m R_j^{(MN)}(\varphi) \\ \times \sum_{k=1}^m \sin k\varphi_j \int_{-1}^1 \frac{\sin k\varphi'}{(\eta - \eta')^2} d\eta' \quad (8.12)$$

である。

$$\frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 \sin \varphi' \ln |\eta - \eta'| d\eta' = \cos 2\varphi + \ln 4$$

の公式がある。また

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin k\varphi'}{(\eta - \eta')^2} d\eta' = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \varphi' \sin k\varphi'}{(\cos \varphi' - \cos \varphi)^2} d\varphi'$$

の発散積分は部分積分して Cauchy の主値をとると

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\sin k\varphi'}{(\eta - \eta')^2} d\eta' = -\frac{k \sin k\varphi}{\sin \varphi}$$

となる。 $R^{(MN)}$ が φ' の連続関数であるから, この計算を行ってもあまり精度は悪くならない。

よって

$$b = \frac{1}{\pi(m+1)} \sum_{k=1}^m \sin k\varphi_j \int_{-1}^1 \frac{\sin k\varphi'}{(\eta - \eta')^2} d\eta' \\ = -\frac{1}{2(m+1) \sin \varphi} \sum_{k=1}^m k \{ \cos k(\varphi_j - \varphi) \\ - \cos k(\varphi_j + \varphi) \} \quad (8.13)$$

となる。

$$\sum_{k=1}^m k \cos kx = \frac{m \cos(m+1)x - (m+1) \cos mx + 1}{2(\cos x - 1)} \quad (8.14)$$

の公式があるから

$$\varphi = \varphi_\nu = \nu\pi / (m+1) \quad (8.15)$$

とすると

$$b = -\frac{1}{4(m+1) \sin \varphi_\nu} \\ \times \left[\frac{m(-1)^{j-\nu} - (m+1) \cos \{(j-\nu)\pi - (\varphi_j - \varphi_\nu)\} + 1}{\cos(\varphi_j - \varphi_\nu) - 1} \right. \\ \left. - \frac{m(-1)^{j+\nu} - (m+1) \cos \{(j+\nu)\pi - (\varphi_j + \varphi_\nu)\} + 1}{\cos(\varphi_j + \varphi_\nu) - 1} \right]$$

である。

よって, $j \neq \nu$ のとき

$$b = \frac{1 - (-1)^{j-\nu}}{2(m+1)} \frac{\sin \varphi_j}{(\cos \varphi_\nu - \cos \varphi_j)^2}, \quad \nu \neq j \quad (8.16)$$

となる。

$j = \nu$ のときは

$$b = -\frac{1}{2(m+1) \sin \varphi_\nu} \sum_{k=1}^m k (1 - \cos 2k\varphi_\nu) \\ = -\frac{m+1}{4 \sin \varphi_\nu}, \quad \nu = j \quad (8.17)$$

となる。

したがって b は Multihopp 行列 $b_{\nu\nu}, b_{\nu j}^{(22)}$ と

$$\left. \begin{aligned} b &= -b_{\nu\nu} & \nu &= j \\ b &= b_{\nu j}, & \nu &\neq j \end{aligned} \right\} \quad (8.18)$$

の関係にある。

この記号を用いると, (8.12) は

$$\alpha^{(M)}(\varphi_\nu) = -\frac{1}{8} \sum_{N=0}^{n-1} A^{(N)}(\varphi_\nu) I^{(MN)} \frac{1}{\sin \varphi_\nu} \\ \times (\cos 2\varphi_\nu - \ln 4) - \sum_{N=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m R_j^{(MN)}(\varphi_\nu) b_{\nu j} \\ + \sum_{N=0}^{n-1} R_{\nu\nu}^{(MN)}(\varphi_\nu) b_{\nu\nu} \quad (8.19)$$

と書かれる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha^{(M)}(\varphi_\nu) &= \alpha_\nu^M, & A^{(N)}(\varphi_\nu) &= A_\nu^N, \\ R_j^{(MN)}(\varphi_\nu) &= R_{\nu j}^{(MN)} \\ I_\nu^{MN} &= \frac{-1}{8 \sin \varphi_\nu} (\cos 2\varphi_\nu - \ln 4) \cdot I^{(MN)} \end{aligned} \right\} \quad (8.20)$$

の記号を用いると, (8.19) は

$$\alpha_{\nu}^M = \sum_{N=0}^{n-1} (A_{\nu}^N I_{\nu}^{MN} + R_{\nu\nu}^{MN} b_{\nu\nu}) - \sum_{N=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m R_{\nu j}^{MN} b_{\nu j} \quad (8.21)$$

のように表わされる。これが積分方程式 (8.1) を連立一次方程式に変換したものである。

(8.8) および (8.5), (8.9) より $R_{\nu j}^{MN}$, $R_{\nu\nu}^{MN}$ は

$$\left. \begin{aligned} R_{\nu j}^{MN} &= A_j^N \overline{K}^{(MN)}(\varphi_{\nu}, \varphi_j) - A_{\nu}^N I^{(MN)} \frac{\sin \varphi_j}{\sin \varphi_{\nu}} \\ &\times (\cos \varphi_{\nu} - \cos \varphi_j)^2 \ln |\cos \varphi_{\nu} - \cos \varphi_j| \\ R_{\nu\nu}^{MN} &= A_{\nu}^N S^{(MN)} \end{aligned} \right\} (8.22)$$

で与えられる。

(8.21) を解いて A_{ν}^N を求めることが今後の課題である。本文では (8.21) の N に関する総和については、 $n-1=3$ の場合までの諸式が導かれているが、実際問題としてはこの程度の項数で十分な精度が得られるであろう。

参 考 文 献

- 1) Hanaoka, T., "Hydrodynamics of an Oscillating Screw Propeller", 4th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, Aug. 1962
- 2) 花岡達郎, "揚力面の積分方程式の新しい数値解法", 船研報告, 第6巻, 第1号, 1969
- 3) Küssner, H.G., "Allgemeine Tragflächentheorie", Luftfahrtforschung, Bd. 17, 1940
- 4) Flax, A.H., "General Reverse Flow and Variational Theorems in Lifting-Surface Theory", J. of Aero. Sci. Vol. 19, No. 6, 1952
- 5) Dengler, M.A. and Golland, M., "The Subsonic Calculation of Circulatory Spanwise Loadings for Oscillating Airfoils by Lifting-Line Techniques", J. of Aero. Sci. Vol. 19, No. 11, 1952
- 6) Lawrence, H.R. and Gerber, E.H., "The Aerodynamic Forces on Low Aspect Ratio Wings Oscillating in an Incompressible Flow", J. of Aero. Sci. Vol. 19, No. 11, 1952
- 7) Lerbs, H.W., "Marine Propulsion", Applied Mechanics Reviews, Vol. 9, No. 7, 1956
- 8) 花岡達郎, "非定常プロペラ理論序説", 造船協会論文集, 第109号, 1961
- 9) 花岡達郎, "非定常プロペラ揚力線の積分方程式について", 造船協会論文集, 第110号, 1961
- 10) Kawada, S., "Calculation of Induced Velocity by Helical Vortices and Its Application to Propeller Theory", Rep. of Aero. Res. Inst., Tokyo Imperial University, Vol. XIV, 1939
- 11) Shioiri, J. and Tsakonas, S., "Three-Dimensional Approach to the Gust Problem for a Screw Propeller", J. of Ship Research, April, 1964
- 12) 山崎隆介, "非定常螺旋推進器理論について", 西部造船会会報, 第28号, 1964
- 13) Greenberg, M.D., "The Unsteady Loading on a Marine Propeller in a Nonuniform Flow", J. of Ship Research, Vol. 7, No. 2, 1964
- 14) Tsakonas, S. and Jacobs, W.R., "Unsteady Lifting Surface Theory for a Marine Propeller of Low Pitch Angle with Chordwise Loading Distribution", J. of Ship Research, Vol. 9, 1965
- 15) 花岡達郎, "揚力面の解法に関する考察", 船研報告, 第5巻, 第3号, 1968
- 16) 花岡達郎, "プロペラの基礎理論", 船研報告, 第5巻, 第6号, 1968
- 17) Prandtl, L., "Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit, mit Anwendung auf die Tragflächentheorie und andere Aufgaben", Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik (Innsbruck 1922), s. 18~33
- 18) Gray, A. and Mathews, G.B., "A Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics". London, 1922
- 19) Multhopp, H., "Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting Surface Theory)", R & M, No. 2884, 1950
- 20) Laschka, B., "Zur Theorie der harmonisch schwingenden tragenden Fläche bei Unterschallanströmung", Zeitschrift f. Flugwissenschaft, Bd. 11, 7, 1963
- 21) Mangler, K.W. and Spencer, B.F.R., "Some Remarks on Multhopp's Lifting-Surface Theory", R & M, No. 2926, 1952
- 22) Multhopp, H., "Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln", Luftfahrtforschung, Bd. 15, 1938