重力不安定による液体の拡散

II——二次元拡散およびタンクからの油の流出の研究

渡辺健次* 沢井秀之* 浜島金司*

"Diffusion" of Liquid caused by Gravitational Instability

II——Investigations of Two-dimensional Diffusion and Flow out of Oil Tank.

By

Kenji Watanabe, Hideyuki Sawai and Kinji Hamajima

The unsteady flow of the oil caused by the gravitational instability on the water surface is investigated. The cylindrical "diffusion" is considered.

A formura of the initial speed of the oil front is obtained, then the final radius of the oil is calculated. Both formulas are related to initial data only, that is, the initial radius, the volume of oil and the specific weight of oil. These calculated results agree fairely with several experimental data.

Furthermore, the speed of flow out of a oil tank which exist under the water surface is investigated.

Through these phenomena the difference of specific weight between water and oil, $(1-\rho)$, plays the important role.

1. はしがき

タンカーなどの危険物専用船の事故によって，有害物が流出するとき，その拡散の速度や範囲などをあらかじめ把握しておくことは，汚染防止対策上重要なことである。筆者はとくに，原油などが海上に流出するときのように重力不安定により生じる拡散の現象をとりあつかうこととし，さきに第一報[1]として一般的な問題点を論じ，また一方向のみに油がひろがる一次元的な拡散についてややくわしくとりあつかった。この結果を発展させ，実際的な問題に解答をあたえるためには，さらに海面上を四方にひろがってゆくような二次元的拡散，またタンクにできた破孔からどのように油が流出するか，などの諸点を解決せねばならない。

まず，二次元拡散の現象について考察をする。この場合のとりあつかいは，一次元的拡散のときとまったく平行しておこなわれる。すなわち，初期条件としては，水面上にとつぜん置かれた半径 R_0 高さ Z_0 の円柱状の油をとる。この状態から油のひろがってゆく様子をいろいろの種類，いろいろの量の油について測定する。油ははじめかなりの速度をもって円形にひろがり，だんだん粘性によって減速し，ある限度まで円形が保たれた後，変形し散らばってゆく。一方，この拡散の様子を理論的に予言することができる。適当な仮定のもとに油層の全エネルギーをあらわす式をつくり，それから油前端の運動方程式を得る。この方程式の各項の係数が確定できれば，拡散速度，拡散の最終範囲が計算によって得られる。

ここで前報でおこなった初期速度計算のさいにおこなった仮定が，その後の実験および観察によって変更されたことを，ことわっておかねばならぬ。この変更は主として理論的な面であって，初期速度そのものの得られた結果にかんしては変っていない。これらについては，初期過渡現象をとりあつかう節でくわしくのべる。

つぎにタンクからの油の流出について考える。この

* 共通工学部

現象はここでのテーマである拡散とは無関係であるようにみえるが，やはり重力不安定による現象であり，かつ実用的興味もあるのでとりあげることとする。まえに〔タンカー油流出事故対策にかんする研究〕としておこなった特別研究[2]では，破孔の大きさがタンクの大きさにくらべて割合大きい場合をとりあつかったが，ここでは，破孔の大きさがちいさいときについて考察して，上をおぎなうことにする。

2. 流出初期の現象について

一般に，油のかたまりが水面におかれた場合，そのふちの水に接するところに重力不安定が生じ，この不安定状態はある速度をもって油の内部に進行し，同時に，このとき生じる厚みの勾配によって油は外側へひろがってゆく。こののち，はっきりとは分類できないけれどもふたつのモードが存在する。ひとつははじめの厚みが拡がりにくらべて大きいときで，内部へ進行する重力不安定が急速に中心に到達し，中心部の速度はゼロでなく，拡散はドーナッツ状に進行する。第二のはじめの厚みが比較的ちいさいときは，粘性によって全体が一様の厚みになって，一様に厚みを減少しつつ拡散する。まず初期流出のときの油の形状について考察しよう。

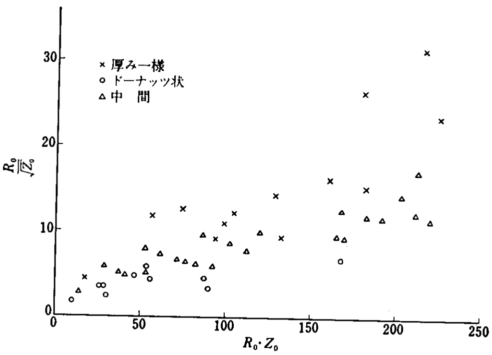

図 1 重力拡散におけるモード

2.1 一次元

油のかたまりが一方向に拡散する場合の初期状態については，前報で油が水をおしのけてすすむために生じる抵抗を $(1/2)\alpha\rho u^2$ とおいて方程式を解き $\alpha=2$～3 のとき実験と一致することをしめした。しかしこの仮定の物理的意味は不明確である。つまり抵抗をうけるのははじめの状態から水中に突出してゆく油の部分であって，この仮定のように全体が抵抗をうけるとすることは正しくない。第二に前報[1]48 ページ図 7 の $\alpha=2$，$\alpha=3$ の場合をみると，油層の形状は水にたいして凸になっているが，実験によれば写真 1 のようにむしろ水にたいして凹になっている。

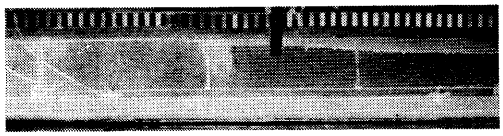

写真 1 流出初期における油層の形状

初期流出状態の機構をつぎのように衝撃波管との類推によって考察する。油のかたまりが水面に開放されたとき，衝撃的な圧力差が油と水の境に生じる。油と水との境界はある伝播速度をもった衝撃波とみなされる。衝撃波管の高圧部に低圧部とことなるガスを満たせば，まさに同様なことがおこる。

そこで，前報の結果を再録すると，垂直方向の速度を無視して，方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+g\dfrac{\partial h}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial t}+u\dfrac{\partial h}{\partial x}+h\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases}$$

ただし h は油層厚みであり，g は水中における油の浮力を考慮するため，$(1-\rho)g$ におきかえなければならない。初期条件を満足する解として

一般解　$h=F[x-\sqrt{(1-\rho)g}\,(2\sqrt{Z_0}-3\sqrt{h})t]$

速度と厚みの関係

$$u=2\sqrt{(1-\rho)g}\,(\sqrt{Z_0}-\sqrt{h})$$

後方への伝播速度　$\sqrt{(1-\rho)gZ_0}$

厚さ h の部分の伝播速度

$$\sqrt{(1-\rho)g}\,(2\sqrt{Z_0}-3\sqrt{h})$$

ここで Z_0 ははじめの厚みである。

図 2 のように点線であらわしたはじめの油層から前方に進んでゆく部分が，解のしめすような鎖線でなくて，実線であらわしたような衝撃波として進行するよ

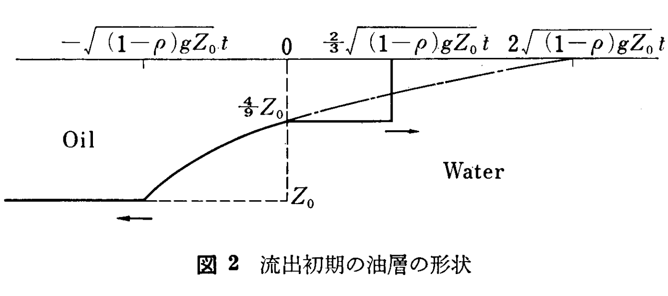

図 2 流出初期の油層の形状

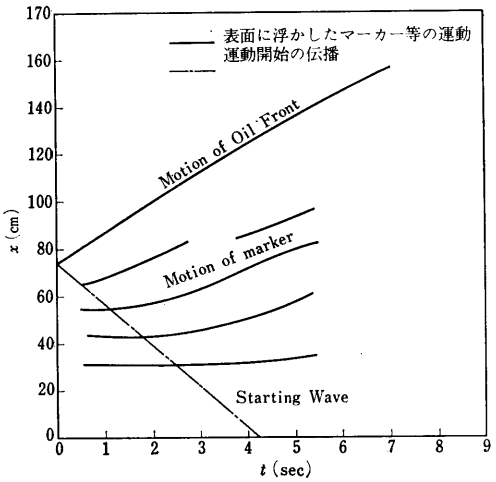

図 3 一次元拡散初期

うに書きなおせば，実際の油層の形状と似たものが得られる。

原点においては $h=(4/9)Z_0$ でこの状態は伝播しない。これに対応する速度 u は

$$2\sqrt{(1-\rho)g}\left(\sqrt{Z_0}-\sqrt{\frac{4}{9}Z_0}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{(1-\rho)gZ_0}$$

であって，また同時に前方へ進行する衝撃波の速度すなわち油前端の速度に等しい。このとりあつかいによっても，前報で実験的に得た結果，つまり初期速度

$$\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)_0=\beta\sqrt{(1-\rho)/\xi_0}\quad \xi\equiv x/\sqrt{V}\quad \tau\equiv g^{1/2}t/V^{1/4}$$

で $\beta\fallingdotseq 0.7$ とおいたことは変更されない。ξ, τ をもとにもどすと

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=\beta\sqrt{(1-\rho)gZ_0}$$

となるからである。図 3 に $X_0=74$ cm, $Z_0=3.3$ cm の場合の，前端の運動，後方への伝播，各点の運動をしめす。

2.2 二次元

二次元拡散の場合，上述の衝撃的進行などを考慮にいれなければ，方程式は

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+(1-\rho)g\frac{\partial h}{\partial r}=0\\&\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial r}+h\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r}uh=0\end{aligned}\right.$$

となり，一次元の場合のように解析的な解を得ることはできない。この式は

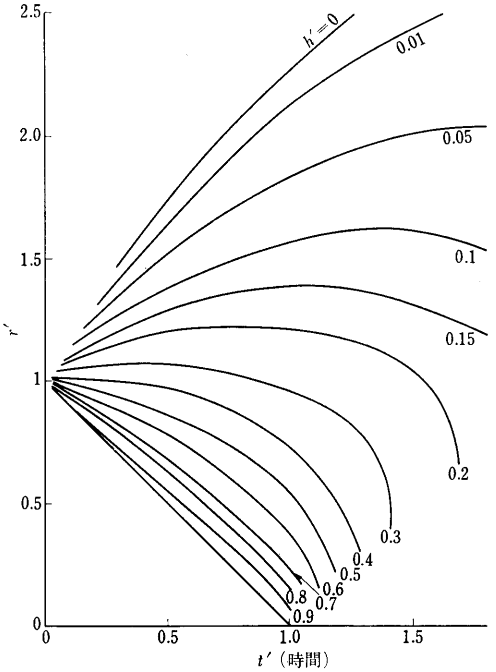

図 4 二次元流出における厚み変化
(等厚み線でしめす)

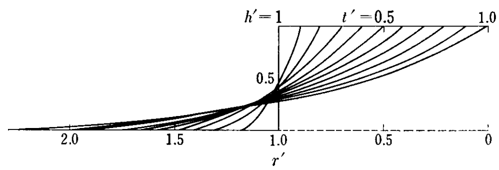

図 5 二次元流出における油層形状の変化
(各時間ごとの半径方向厚み分布をしめす)

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(u+\sqrt{(1-\rho)gh})\frac{\partial}{\partial r}\right](u+2\sqrt{(1-\rho)gh})=-\frac{u\sqrt{(1-\rho)gh}}{r}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+(u-\sqrt{(1-\rho)gh})\frac{\partial}{\partial r}\right](u-2\sqrt{(1-\rho)gh})=\frac{u\sqrt{(1-\rho)gh}}{r}$$

と変形され，特性曲線の方法をもちいて逐次積分できる。初期条件として，厚み Z_0 半径 R_0 の円柱をとり $h\equiv h'Z_0$　$r\equiv r'R_0$　$u\equiv u'\sqrt{(1-\rho)gZ_0}$

$t\equiv t'R_0/\sqrt{(1-\rho)gZ_0}$

とおいて数値計算した結果を，図 4，図 5 にしめす。二次元効果によって，厚みが一次元の場合よりもうすく

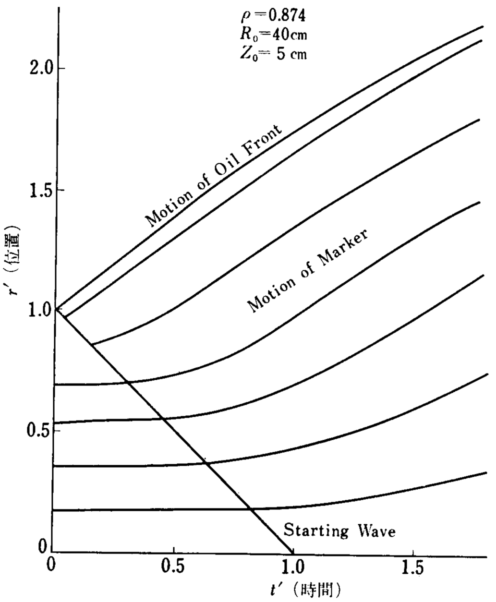

図 6　二次元流出初期

なる傾向がでているが，大体のようすはそれほど変っていない。衝撃的進行の考えをいれても同様の状況が生じるものとおもわれる。図6に実験結果の一例をあげる。油前端の運動，内部への伝播，油層各点の運動など予期されたとおりである。油層形状も予想されたとおりであった。

2.3　実験との比較

実験との比較によって，以上の結論をたしかめ，その適用限界をさだめることにする。二次元の場合も一次元の場合とおなじく

$$\sqrt{(1-\rho)gZ_0}$$

に比例する初速が得られるはずであるが，これまでの議論は厚さにくらべてひろがりが大きいような初期条件からすすめられてきた。この逆の場合はどうなるであろうか。油のもつポテンシアルエネルギーは運動エネルギーに変換される。しかし運動エネルギーのいく分かは造波の仕事についやされるであろう。それははじめの厚みが大きいほどきいてきて，ポテンシアルの拡散速度への寄与は小となるであろう。

いくつかの実験の結果を表にしめす。また図7に R_0 と $\sqrt{Z_0}$ の比にたいする，計算値 $\sqrt{(1-\rho)gZ_0}$ と実測値の比の相関をとった。過渡現象であるため実験的に初速をもとめることはかなりむずかしい。しかし初速がほぼ $\sqrt{(1-\rho)gZ_0}$ に比例し，その係数が0.6～0.7であること，厚みが大きくなると係数はちいさくなることがわかる。

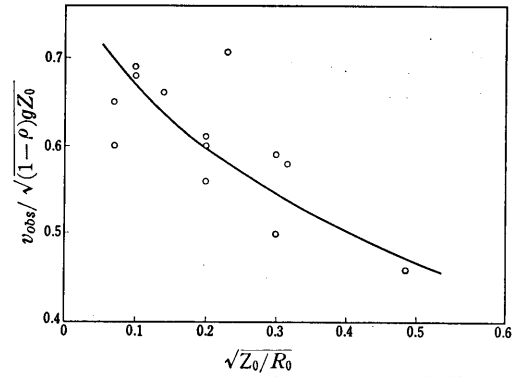

図 7　初速比例定数と初期厚み比との相関

表

油 種 類	$1-\rho$	流 出 量	R_0	Z_0	$\sqrt{(1-\rho)gZ_0}$	u obs
A 重 油	0.158	3 l	8.0 cm	15.0 cm	48.2 cm/sec	22.3 cm/sec
〃	〃	〃	12.5	6.1	30.7	18.4
〃	〃	〃	21.0	2.2	18.3	11.0
〃	〃	4	12.5	8.1	35.4	25.0
〃	〃	6	21.0	4.3	25.9	17.7
〃	〃	12	21.0	8.7	36.6	24.1
〃	〃	6	12.5	12.2	43.4	25.9
〃	〃	24	21.0	17.3	51.8	29.4
〃	〃	3	12.5	6.1	27.8	17.0
パラフィン	0.129	3	21.0	2.2	16.5	10.7
〃	〃	6	21.0	4.3	23.3	16.1
〃	〃	6	12.5	12.2	39.3	19.6
A 重 油	0.148	50	20.0	40.0	78.7	46.0

3. 二次元拡散

3.1 油前端の運動方程式

初期条件として一様な厚さ Z_0 半径 R_0 の円柱状の油がおかれたときの問題を考える。拡散のあいだ油の厚みは一様とする。油層内速度分布は

$$v_r = rf(t)\frac{d}{dz}\phi(z) \quad v_z = -f(t)\phi(z)$$

と仮定する。$f(t)$, $\phi(z)$ はそれぞれ，時間 t と高さ方向座標 z の関数である。R, Z をある時刻における油層の半径および厚みとし，運動エネルギー，ポテンシアルエネルギー，粘性消散エネルギー，表面張力エネルギーを考慮し，前報[1]と同じくエネルギーのバランスの式をたてる。その結果，油前端の運動にたいする式として，二次元効果をくりいれて

$$A\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{(1-\rho)}{\pi\xi^3} - \frac{B}{R'}\xi^4\frac{d\xi}{d\tau} + \frac{2\pi(H_w-H_0)}{\rho g V^{2/3}}\xi$$

を得る。ただし，

ρ; 油密度

$(1-\rho)$; 比重差

H_w-H_0; 水と油の表面張力の差

V; 全体積$=\pi R^2 Z$

A, B; 速度分布に関係する定数($A=1/2\sim1/6$)

$R/V^{1/3}\equiv\xi$

$g^{1/2}t/V^{1/6}\equiv\tau$

$g^{1/2}V^{1/2}/\nu\equiv R'$

ν; 粘性係数

3.2 実験との比較

定数 A, B の値がさだまれば，与えられた初期条件から，油前端の運動を数値的に解くことが可能である。まず，実用にたえるということを主眼として，方程式を近似的に解き，実験と比較してこれら定数のオーダーをあたってみることにしよう。

実験の一例を整理した結果を図8にしめす。いずれも $V=3$ リットルであって，はじめの半径がことなる3通りである。初期ひろがり ξ_0 がちいさいほど，初速 $(d\xi/d\tau)_0$ が大きく，また粘性によって減速して $d\xi/d\tau=0$ になるときの ξ の値が大きい。この傾向はすべての実験に共通している。

ここで方程式の各項を検討してみる。第一項は ξ が大となるとともに減少する。この項のみを残すと

$$A\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = \frac{(1-\rho)}{\pi\xi^3}$$

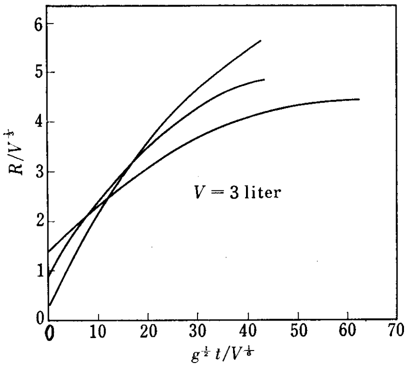

図 8　二次元拡散実際の例

積分すると

$$\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{\frac{(1-\rho)}{\pi A}\left(\frac{1}{\xi_0^2}-\frac{1}{\xi^2}\right)}$$

$\xi\to\infty$ とすると

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \sqrt{\frac{(1-\rho)}{\pi A}}\ \frac{1}{\xi_0}$$

となり，初速の式と不定の定数をのぞいて一致する。すなわち，この項の影響は初速のそれと区別できず，初速の中にふくませてしまってよい。

表面張力の項についてもこの項のみを残すと，解は指数関数型となり，その時定数は

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{A\rho g V^{2/3}}{2\pi(H_w-H_0)}}$$

となる。$A=1/2$ にとり $V=3$ リットルとすると $\tau_0=17$ となる。これは $V^{1/3}$ に比例しているようにみえるが，無次元化された時間 τ を t にもどせば $V^{1/2}$ に比例するようになるから，流出量が大きいときは非常にゆっくりと影響してくる。この項も初速の中にふくませるか，あるいは円形にひろがる階段では無視できるぐらいちいさいとして

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -\frac{C}{R'}\xi^4\frac{d\xi}{d\tau}$$

を初速 ξ_0' の条件のもとで解くことにする。

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \xi_0' + \frac{C\xi_0^5}{5R'} - \frac{C}{5R'}\xi^5$$

これから $d\xi/d\tau$ がほぼゼロになる ξ の値

$$\xi_\infty = \left(\frac{5R'}{C}\xi_0' + \xi_0^5\right)^{1/5}$$

がえられる。ξ_∞ までにひろがったのちは，油は散らばってしまうから，実用的にはここまでで充分である。ふつうの条件では $\xi_0\approx1$ $\xi_\infty>4$ であるので

$$\xi_\infty \approx \left(\frac{5R'}{C}\xi'_0\right)^{1/5}$$

また　$\xi_0'=\dfrac{\beta}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\sqrt{(1-\rho)}}{\xi_0}$　である。

実測から C の値のオーダーが得られ，これから他の場合にも拡散の最大範囲が推定できる。$R'\propto V^{1/2}$ であるから，$\xi_\infty\propto V^{1/10}$ である。次のような実測値がある。

V（リットル）	ξ_∞	ξ_0	$\dfrac{\nu}{\sqrt{g}}C$ (cm$^{3/2}$)
3	4.5	1.4	0.015
3	5.0	0.8	0.015
6	5.0	1.2	0.010
50	8.0	0.5	0.010

ξ_∞ を実測から確定することはむづかしく，それから C をまとめるときに ξ_∞^5 の形で計算することになるから，C の値はかなりばらつくはずである。しかし結果をみると非常によく一致している。

無次元化された座標からもとの座標にひきもどすと

$$R_\infty \fallingdotseq V^{1/2}\left(\frac{5g^{1/2}}{\nu C}\,\frac{\beta}{\pi^{1/2}}\,\frac{\sqrt{(1-\rho)}}{R_0}\right)^{1/5}$$

となる。

一例として，八丈島付近海上でおこなわれた油流出実験[2] にたいし，上式をあてはめよう。流出原油はほぼ

$$V\approx 100\ \mathrm{k}l$$
$$R_0\approx 3.7\ \mathrm{m}$$

であった。$\nu/\sqrt{g}(C)=0.015$ を採用し，使用原油の特性をしらべると $\rho=0.865$，ν は約2倍となっていたので，これらの値の修正により

$$R_\infty\fallingdotseq 56\ \mathrm{m}$$

を得た。

いずれにしても，オーダーを求めるだけならこの方法で充分実用になるであろう。詳細な結果を得るためには，さきに省略した他の項の影響を考慮しなければならないだろう。

4.　タンクよりの油の流出

油のはいったタンクの水面下の部分にできた破孔からの流出について触れる。

以前におこなった実験[2] において，タンクの大きさにくらべて破孔が大きいときは，タンク内の油と同じ量の油が水面におかれたときとほぼ同じような速度で流出し，破孔の大きさは流出量のみに影響することがわかった。

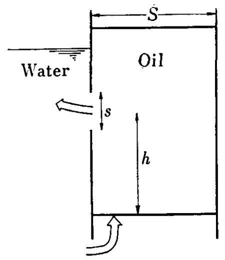

図 9　底面のひらいたタンクからの流出

破孔がちいさいときの現象をしらべるために，まず現実にはあまりおきえないことであるが，図9のように，タンク底部は開いていて側面に破孔があるときを考える。タンク底面積 S，破孔断面積 s とする。ちょうど破孔の上端で圧力がバランスし，そこから下にある油が破孔から流れだす。浮力のポテンシアルエネルギー[1] の考えから，破孔からの流出速度はトリチェリの定理とおなじく

$$\sqrt{2(1-\rho)gh}$$

となり，時間 t の後に破孔の外に流出した量は

$$V_{\mathrm{out}}=cs\sqrt{2(1-\rho)gh_0}\,t-\frac{c^2s^2(1-\rho)g}{2S}t^2$$

となる。少数の実験をおこなったのみであるが，結果はつぎのようであった。

s	h_0	$\sqrt{2(1-\rho)gh_0}$	$cs\sqrt{2(1-\rho)gh_0}$ obs.
1 cm×1 cm	6.3 cm	39.2 cm/s	24.3 cm^3/s
〃	3.5 〃	29.4 〃	16.5 〃
2 cm×2 cm	5.1 〃	35.5 〃	88.5 〃

流量係数 c の値として 0.5〜0.6 ぐらいの値が得られた。図 10 に実験の一例をしめす。

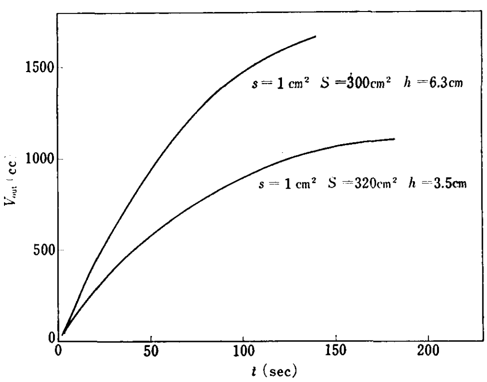

図 10　タンクからの流出実験（流出量と時間）

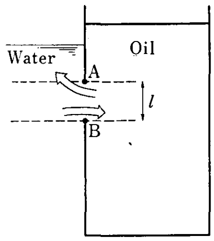

図 11 底面の閉じたタンクからの流出

つぎに，図 11 のようにタンク底面がとじている場合を考える。はじめは，ほかの場合とおなじように，タンク内の油の深さと破孔の位置が大きい影響[2]をもつものと考えられた。しかし予想とことなり，流出の機構はまったく別のものであることがわかった。

破孔上端ではただちに圧力がバランスすると考えてよい。しかしこんどはタンク底面が閉じているため重力不安定は図 11 の AB 間のみにおこり，左側の高い圧力によって水はタンク内に流れこみ，流れこんだものと等量の油を流出させる。これは第 2 節で論じた流出初期の状態と類似していて，AB 間に加えられる瞬間的な衝撃圧力によって流れが生じる様子は，厚さ $l=\overline{AB}$ の油の流出に対応するものとみられる。したがって流出速度は

$$\frac{2}{3}\sqrt{(1-\rho)gl}$$

破孔を長方形とみなし，w を破孔の幅とすると，流出断面積は $4/9\,lw$

ゆえに時間 t の後の流出量は

$$V_{\text{out}}=\frac{8}{27}\sqrt{(1-\rho)gl}\,lwt$$

実験ではたしかに，油の下面が破孔下端に達するまでは流出量は上式のように直線的に変化した。ごく少数例であるが次の結果が得られた。

l	w	流出量/単位時間	$\frac{8}{27}\sqrt{(1-\rho)gl}\ lw$
4 cm	4 cm	65.4 cc/sec	105.2
3 cm	3 cm	25.9	51.5

やはり流量係数 0.5～0.6 が得られる。流出の模様を写真 2 にしめす。

以上，ごく簡単に，タンク破孔よりの流出の機構をしらべた。破孔がちいさいとき破孔の高さが，流出のさいのヘッドの役割をはたす。破孔が大きくなってタンクと同程度の大きさになり，最後にタンク自体が消失すると，水の中に瞬間的に油が開放されたのと同じ状態があらわれ油の厚さがヘッドの役割をはたす。結局，本質的には油流出の機構は，あらゆる場合を通じて一貫したものを持ち，比重差 $(1-\rho)$ による重力不安定が重要な役割を演じる。

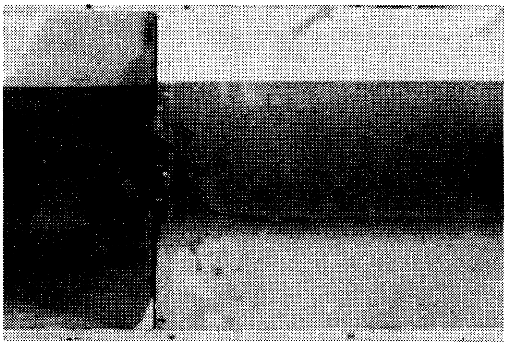

写真 2 タンク破孔よりの油流出

5. むすび

前方にひきつづき水面に流出した油の層の拡散についてしらべ，二次元的な拡散のときの初速，および粘性消散によって速度がゼロになるような拡散範囲の限界をまとめる式を得た。すなわち

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)_0=\beta\sqrt{(1-\rho)gZ_0}$$

$$R_\infty=V^{1/2}\left(\frac{5g^{1/2}}{\nu C}\,\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{(1-\rho)}}{R_0}\right)^{1/5}$$

であって $\beta=0.6\sim0.7$ A 重油の場合

$$\frac{\nu}{\sqrt{g}}C=0.015\ \text{cm}^{3/2}$$

ぐらいになる。

またタンク破孔からの流出速度について考察し，その機構について，ほぼ満足すべき結論を得た。長方形で水面下にある破孔の場合，一秒間あたり流出量

$$V_{\text{out}}=K\sqrt{(1-\rho)gl}\,lw$$

ただし $K=0.15\sim0.18$ である。

参考文献

1) 渡辺健次，重力不安定による液体の拡散—I, 船舶技術研究所報告，第 5 巻第 6 号，昭和 43 年，pp. 43～53.
2) 科学技術庁研究調整局，タンカー油流出事故対策，昭和 43 年