

摩擦振動の一解析

田中健一*

Analysis of Frictional Vibrations

By

Ken'ichi Tanaka

This paper presents a theoretical analysis of the vibrations caused by dry friction known as stick-slip phenomena or frictional vibrations. In this analysis, the equations are set up on the basis of certain known experimental features of the frictional force between two solid bodies and moreover the averaging method of Kryloff and Bogoliuboff in the autonomous and non-autonomous systems is applied to a suitably transformed set of the equations.

1. はじめに

機械系における著明な自励振動として知られている摩擦振動の解析はいままで多くの人々により行なわれているが(たとえば文献 1), 2)), 未解決の問題も多く残っているようである。著者は静摩擦と動摩擦を同時に解析的に表現し, これに非線型振動に関する Kryloff-Bogoliuboff の平均法³⁾⁴⁾を適用し, 比較的に見通しのよい1自由度自律系の摩擦振動の解析を試みた。また, ほとんど解析が行なわれていないと思われる摩擦振動系に強制外力の作用するいわゆる非自律系に拡張してみたので, これらの結果について述べる。

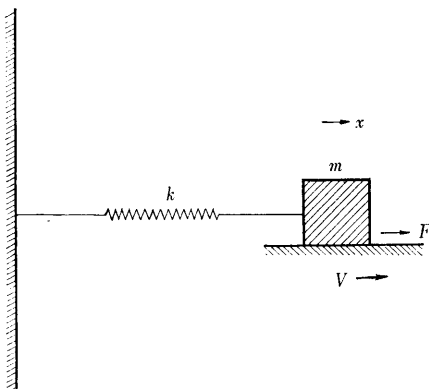


図1 1自由度摩擦振動系

2. 解析の基礎

2.1 自律系 (autonomous system)

いま, 質量 m が一端固定のばね(ばね定数 k)で支持され, ささえ台の平面上を摺動し得るとし, そのささえ台が一定速度 V で移動するものとすれば

$$m\ddot{x} + kx = F(V - \dot{x}) \quad \dots\dots(1.1)$$

の運動方程式が成立つ¹⁾²⁾(図1)。ここで, x は変位 $F(U)$ は相対速度 U に依存する摩擦力を表わす。

実験結果から, この摩擦力は静摩擦力と動摩擦力が連続している図2のような特性を示す場合が多いの

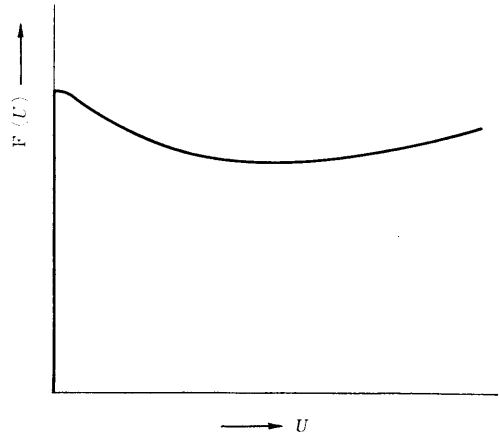


図2 摩擦特性

* 共通工学部 原稿受付 昭和45年9月2日
 ** $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, $\dot{x} = dx/dt$, t は時間を表わす。

で、近似的に実解析関数

$$F(U) = -\frac{a_{-1}}{U} + \sum_{n=0}^m a_n U^n \quad \dots\dots(1.2)$$

で表わす。ただし、 m は正整数、 a_{-1} 、 a_n は実験値より得られる定数である。いま、定性的な検討を行なうに止めるため U^3 の項までとって

$$F(U) = -\frac{a_{-1}}{U} + a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + a_3 U^3 \dots(1.3)$$

で表わす。

(1.3) 式の関係をも (1.1) 式に代入し、 $k/m = \omega^2$ 、 $\omega t = \tau$ を用いて基準化すると

$$x'' + x = -\frac{b_{-1}}{v-x'} + b_0 + b_1(v-x') + b_2(v-x')^2 + b_3(v-x')^3 \quad \dots\dots(1.4)$$

となる*。ただし、 $b_{-1} = a_{-1}/k\omega$ 、 $b_j = a_j \cdot \omega^j/k$ 、($j=0, 1, 2, 3$)、 $v = V/\omega$ である。

いま、つりあい点を X_0 とし、 $x = X_0 + X$ とおいて (1.4) 式をかきかえて、整理すると

$$X'' + X = -\frac{C_{-1}}{v-X'} + C_1 X' + C_2 X'^2 + C_3 X'^3 \quad \dots\dots(1.5)$$

となる**。ただし、 $C_{-1} = b_{-1}$ 、 $C_1 = -(b_1 + 2vb_2 + 2v^2b_3)$ 、 $C_2 = b_2 + 3vb_3$ 、 $C_3 = -b_3$ である。

まず、つりあい点の安定性について述べる。 $Y = X'$ とおくと

$$dY/d\tau = Y' = -X - \frac{C_{-1}}{v-Y} + C_1 Y + C_2 Y^2 + C_3 Y^3 \quad \dots\dots(1.6)$$

が得られ、これより

$$\frac{Y'}{X'} = \frac{-X - \frac{C_{-1}}{v-Y} + C_1 Y + C_2 Y^2 + C_3 Y^3}{Y} \quad \dots\dots(1.7)$$

が成立つ。つりあい点は(1.7)式で特異点 $X=0$ 、 $Y=0$ を示すことになるから、これより

$$p = -\left(\frac{\partial X'}{\partial X} \Big|_{X,Y=0} + \frac{\partial Y'}{\partial Y} \Big|_{X,Y=0} \right) = -\left(C_1 - \frac{C_{-1}}{v^2} \right) \quad \dots\dots(1.8)$$

$$q = \frac{\partial X'}{\partial X} \Big|_{X,Y=0} \cdot \frac{\partial Y'}{\partial Y} \Big|_{X,Y=0} - \frac{\partial X'}{\partial Y} \Big|_{X,Y=0} \cdot \frac{\partial Y'}{\partial X} \Big|_{X,Y=0} = 1 \quad \dots\dots(1.9)$$

$$R = p^2 - 4q = \left(C_1 - \frac{C_{-1}}{v^2} \right)^2 - 4 \quad \dots\dots(1.10)$$

* $x'' = d^2x/d\tau^2$ 、 $x' = dx/d\tau$

** $X'' = d^2X/d\tau^2$ 、 $X' = dX/d\tau$

したがって、リアプノフの安定判別式は

$$s^2 + ps + q = 0 \quad \dots\dots(1.11)$$

となり、つりあい点は XY -位相平面上で

$$\left. \begin{aligned} -2 &\geq C_1 - \frac{C_{-1}}{v^2} && \text{安定結節点} \\ 0 &> C_1 - \frac{C_{-1}}{v^2} > -2 && \text{安定渦状点} \\ 2 &> C_1 - \frac{C_{-1}}{v^2} > 0 && \text{不安定渦状点} \\ C_1 - \frac{C_{-1}}{v^2} &\geq 2 && \text{不安定結節点} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.12)$$

となる¹⁾。

つぎに、平均法により、この解を $X = \rho \sin \theta$ 、 $X' = \rho \cos \theta$ で表わすと

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= \frac{d\rho}{d\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{C_{-1}}{v-\rho \cos \theta} + C_1 \rho \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + C_2 \rho^2 \cos^2 \theta + C_3 \rho^3 \cos^3 \theta \right) \cos \theta d\theta \\ &= C_{-1} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{v}{\rho \sqrt{v^2 - \rho^2}} \right) + \frac{C_1}{2} \rho \\ &\quad + \frac{3}{8} C_2 \rho^3, \\ \theta' &= \frac{d\theta}{d\tau} = 1 - \frac{1}{2\pi \rho} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{C_{-1}}{v-\rho \cos \theta} + C_1 \rho \cos \theta \right. \\ &\quad \left. + C_2 \rho^2 \cos^2 \theta + C_3 \rho^3 \cos^3 \theta \right) \sin \theta d\theta = 1 \\ &\quad (v > \rho) \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.13)$$

となる。

(1.13) 式の第1式を0とおいて、これから ρ の正根を求めると、それが存在する場合、1個または2個求まる。これから、 XY -位相平面上のリミット・サイクルは1個または2個存在することがわかる。その安定性については、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho'}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} &= -C_{-1} \left\{ \frac{1}{\rho_0^2} + \frac{v(2\rho_0^2 - v^2)}{\rho_0^2(v^2 - \rho_0^2)^{3/2}} \right\} \\ &\quad + \frac{C_1}{2} + \frac{9}{8} C_2 \rho_0^2 < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.14)$$

ならば、安定であり、周期解は軌道安定である。 ρ_0 は前述の正根の値を示し、リミット・サイクルの平均半径を与える。

この解析によると付着すべり運動を含めた摩擦振動がささえ台速度の全域にわたり統一的に扱われることになる。また、(1.13) に示される ρ は実解析関数で、 $v > \rho$ の範囲で ρ' は連続であるから、Lipschitz 条件を満たし、解の一意性が成立する。

さらに、 XY -平面上の $v > \rho$ で、 ρ が v に十分に

近い位置では軌道は常に内側に向っており、 $v > \rho$ の領域で必ず安定リミット・サイクルまたは安定つりあい点に収束する。

2.2 非自律系 (Non-autonomous system)

図1の質量 m の運動方向に、それに調和振動の外力が加わるとすれば

$$m\ddot{x} + kx = F(V - \dot{x}) + K \sin \nu t \quad \dots\dots(2.1)$$

が成立つ。ここに、 K は外力の大きさ、 ν は外力の円振動数を表わす。

前と同様な整理をすれば (1.5) 式と同型の式

$$X'' + X = -\frac{C_{-1}}{v-x} + C_1 X' + C_2 X'^2 + C_3 X'^3 + F_0 \sin \Omega \tau \quad \dots\dots(2.2)$$

が得られる。ただし、 $F_0 = K/k$, $\Omega = \nu/\omega$ である。

強制外力の大きさは小さいとすると、共振は $\Omega \approx 1$ でおきる。そこで、

$$\theta = \Omega \tau + \phi \quad \dots\dots(2.3)$$

$$\Omega = 1 + \sigma \quad \dots\dots(2.4)$$

とすると、(2.2) の非自律系方程式は、平均法を前と同様に施すことにより、次式のような自律系に変換される。ここで、 σ は外力の円振動数と系の固有円振動数のずれ (detuning) を表わす。

$$\left. \begin{aligned} \rho' &= \frac{d\rho}{d\tau} = C_{-1} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{v}{\rho \sqrt{v^2 - \rho^2}} \right) \\ &\quad + \frac{C_1}{2} \rho + \frac{3}{8} C_3 \rho^3 - \frac{F_0}{2} \sin \phi \\ \phi' &= \frac{d\phi}{d\tau} = -\left(\sigma + \frac{F_0}{2\rho} \cos \phi \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.5)$$

($v > \rho$)
(2.5) 式の両式を 0 とおいて、この両式から ϕ を消去すれば

$$\left\{ C_{-1} \left(\frac{1}{\rho} - \frac{v}{\rho \sqrt{v^2 - \rho^2}} \right) + \frac{C_1}{2} \rho + \frac{3}{8} C_3 \rho^3 \right\}^2 + \sigma^2 \rho^2 = \frac{F_0^2}{4} \quad \dots\dots(2.6)$$

となる。この (2.6) 式は (2.5) 式のつりあい点を満足する条件式で、これより正根 ρ_r を求めれば、その値が原方程式の共振周期解の平均振幅の近似を与える。また、(2.5) 式を 0 とおいた式に ρ_r を代入したときの ϕ の値 ϕ_r は、平均位相の近似を与える。すなわち、

$$X(\tau) \approx \rho_r \sin(\Omega \tau + \phi_r) \quad \dots\dots(2.7)$$

となる。

この場合、外力の円振動数 ν が振動系の固有振動数 ω に十分近いので、この外力の振動周期に引きこまれて (be pulled in)、共振をおこしたことになる。

つぎに、この ρ_r の安定性を検討しよう。前と同様にして、

$$\begin{aligned} p^* &= -\left(\frac{\partial \rho'}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_r} + \frac{\partial \phi'}{\partial \phi} \Big|_{\rho=\rho_r} \right) \\ &= -\left\{ -C_{-1} \cdot \frac{v}{(v^2 - \rho_r^2)^{3/2}} + C_1 + \frac{3}{2} C_3 \rho_r^2 \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots(2.8)$$

$$\begin{aligned} q^* &= \frac{\partial \rho'}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_r} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial \phi} \Big|_{\rho=\rho_r} - \frac{\partial \rho'}{\partial \phi} \Big|_{\rho=\rho_r} \cdot \frac{\partial \phi'}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_r} \\ &= \left[-C_{-1} \left\{ \frac{1}{\rho_r^2} + \frac{v(2\rho_r^2 - v^2)}{\rho_r^2 (v^2 - \rho_r^2)^{3/2}} \right\} + \frac{C_1}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{9}{8} C_3 \rho_r^2 \right] \cdot \frac{F_0}{2\rho_r} \sin \phi_r + \sigma^2 = -\frac{C_{-1}^2}{\rho_r^4} \\ &\quad \times \left\{ 1 + \frac{v(3\rho_r^2 - 2v^2)}{(v^2 - \rho_r^2)^{3/2}} - \frac{v^2(2\rho_r^2 - v^2)}{(v^2 - \rho_r^2)^2} \right\} \\ &\quad - \frac{C_{-1} \cdot C_1}{2} \cdot \frac{v}{(v^2 - \rho_r^2)^{3/2}} + \frac{3}{8} C_{-1} C_3 \\ &\quad \times \left\{ 2 + \frac{v(2v^2 - \rho_r^2)}{(v^2 - \rho_r^2)^{3/2}} \right\} + \frac{C_1^2}{4} + \frac{27}{64} C_3^2 \rho_r^4 \\ &\quad + \frac{3}{4} C_1 C_3 \rho_r^2 + \sigma^2 = \left(\frac{p^*}{2} \right)^2 - \left(\frac{s^*}{2} \right)^2 + \sigma^2 \end{aligned} \quad \dots\dots(2.9)$$

$$R^* = p^{*2} - 4q^* = s^{*2} - 4\sigma^2 \quad \dots\dots(2.10)$$

ただし、

$$s^* = \frac{2C_{-1}}{\rho_r^3} \left\{ 1 + \frac{v(3\rho_r^2 - 2v^2)}{2(v^2 - \rho_r^2)^{3/2}} \right\} - \frac{3}{4} C_3 \rho_r^2$$

である。

したがって、リアブノフの判別式

$$s^2 + p^*s + q^* = 0 \quad \dots\dots(2.11)$$

より

$$\left. \begin{aligned} p^* > 0, \quad q^* > 0, \quad \left| \frac{s^*}{2} \right| &\geq |\sigma| && \text{安定結節点} \\ p^* > 0, \quad \left| \frac{s^*}{2} \right| &< |\sigma| && \text{安定渦状点} \\ p^* < 0, \quad q^* > 0, \quad \left| \frac{s^*}{2} \right| &\geq |\sigma| && \text{不安定結節点} \\ p^* < 0, \quad \left| \frac{s^*}{2} \right| &< |\sigma| && \text{不安定渦状点} \\ q^* < 0 &&& \text{鞍形点} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.12)$$

が得られる*。

さらに、連立方程式 (2.5) の周期解について考察する。いま、 $\xi = \rho \sin \phi$, $\eta = \rho \cos \phi$ において (2.5) 式を直角座標に変換すれば

$$\left. \begin{aligned} \xi' &= \frac{d\xi}{d\tau} = C_{-1} \left\{ \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)} \cdot \frac{v}{\sqrt{v^2 - (\xi^2 + \eta^2)}} \right\} + \frac{C_1}{2} \xi \\ &\quad + \frac{3}{8} C_3 (\xi^2 + \eta^2) \xi - \frac{F_0}{2} - \sigma \eta \\ \eta' &= \frac{d\eta}{d\tau} = C_{-1} \left\{ \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} - \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)} \cdot \frac{v}{\sqrt{v^2 - (\xi^2 + \eta^2)}} \right\} + \frac{C_1}{2} \eta \\ &\quad + \frac{3}{8} C_3 (\xi^2 + \eta^2) \eta + \sigma \xi \end{aligned} \right\} \dots (2.13)$$

これより、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi'}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta'}{\partial \eta} &= -C_{-1} \frac{v}{\{v^2 - (\xi^2 + \eta^2)\}^{3/2}} \\ &\quad + C_1 + \frac{3}{2} C_3 (\xi^2 + \eta^2) \end{aligned} \dots (2.14)$$

を得る。(2.14) 式は $\xi^2 + \eta^2 \equiv \rho^2$ の大きさによって符号が変り得るから、Bendixson の定理**によって、(2.5) 式に周期解存在の可能性が残ることになる。実際、 $\xi\eta$ -平面上でつりあい点を囲む閉曲線を考え、つぎに、この閉曲線を囲むこれより大きい閉曲線を考えると、2個の閉曲線に囲まれる環状領域が得られるが(2.13)式に従っていま適当な条件のもとにこの2個の閉曲線を設定すれば、この環状領域につりあい点がなく軌道がこれら2個の閉曲線のおのおのを環状領域

* (2.6) 式の正根は $v \gg \rho$ の領域で、Van der Pol 方程式と類似に、1個、2個または3個求まる。この場合、この3個は鞍形点；安定結節点または安定渦状点；不安定結節点または不安定渦状点であり、鞍形点が単独に存在することはない。また、 $\rho \approx v$ の領域では、実用上 $|2v\sigma/F_0| \leq 1$ で、 $\frac{C_{-1}}{v} + \frac{C_1}{2}v + \frac{3}{8}C_3v^3 + \frac{F_0}{2}\sin\beta > 0$, $\beta = \cos^{-1} \left| \frac{2v\sigma}{F_0} \right|$ のとき1個の安定結節点が存在すると考えてさしつかえない。また、同様に、他は同じ条件で $\frac{C_{-1}}{v} + \frac{C_1}{2}v + \frac{3}{8}C_3v^3 - \frac{F_0}{2}\sin\beta > 0$, なら、1個の鞍形点が存在すると考えてよい。

** $\partial P(x, y)/\partial x + \partial Q(x, y)/\partial y$ の符号が一定であるような領域内には $dx/d\tau = P(x, y)$, $dy/d\tau = Q(x, y)$ の閉軌道は存在しない。

の内部に向って横切の場合や外部に向って横切の場合が存在し得る。この場合は $\xi\eta$ -平面上でリミット・サイクルが存在し、これから (2.13) 式、したがって (2.5) 式に周期解の存在することが導かれる。ここで、軌道が2個の閉曲線を環状領域の内側に向ってそれぞれ横切の場合には安定周期解、外側に向って横切の場合には不安定周期解が存在することになる。

この安定周期解が存在する場合には、原方程式には Van der Pol 方程式に現われるものと類似の概周期解 (almost periodic solution) が存在し

$$X(\tau) \approx \rho_s(\tau) \sin(\Omega\tau + \phi_s(\tau)) \dots (2.15)$$

が成立つ。ここで ρ_s , ϕ_s は (2.13) 式より導かれる ρ , ϕ の安定周期解である。 ρ_s , ϕ_s の周期はほぼ $2\pi/|\sigma|$ である。なお、自律系と同様にして、解の一意性の成立つことがわかる。さらに、自律系と同様、 $v > \rho$ で ρ が v に十分近い位置の軌道は常に内側を向き $v > \rho$ の範囲内に収束する。

3. 計 算 例

3.1 自律系***

図3(a), (b) はささえ台速度 v による摩擦特性 $f(v)$ を与えて、その時の (1.12) 式によるつりあい点の判別および (1.13) 式によるリミット・サイクルの平均半径 ρ_0 の計算と、それに関する (1.14) 式による安定性の吟味を行なった結果を図示したものである。図中の s.l.c. は安定リミット・サイクル, u.l.c. は不安定リミット・サイクル, s.f.p. は安定渦状点, u.f.p. は不安定渦状点を示す。同図におけるリミット・サイクルの平均半径 ρ_0 の値が、連続な1本の曲線として示されていることが本解析の特徴である。 v を固定のとき、(a) の u.f.p. の近傍を発した XY-位相平面上の軌道はうず巻き状に生長して s.l.c. の半径 ρ_0 の円に内側から収束する。また、 $v > \rho$ の範囲で、半径 ρ_0 の円のわずかに外側を発した軌道も外側よりこの円にうず巻き状に収束する。s.f.p. のところでは $v > \rho$ の範囲で、いかなる位置を発した軌道もすべてこの s.f.p. にうず巻き状に収束する。(b) でも、u.f.p. の近傍を発した軌道や s.l.c. の外側を発した軌道、s.f.p. に収束する軌道の状態は (a) と同様である。しかし、図中破線で示される u.l.c. の外側近傍を発した軌道は外側に向ってうず巻き状に s.l.c. の内側からこれに収束し、u.l.c. の内側近傍を発した軌道は内側に向って s.f.p.

*** 以下の計算では $m\ddot{x} + kx = F(V - \dot{x})$ から $X'' + X = f(v - X')$ が得られるとする。

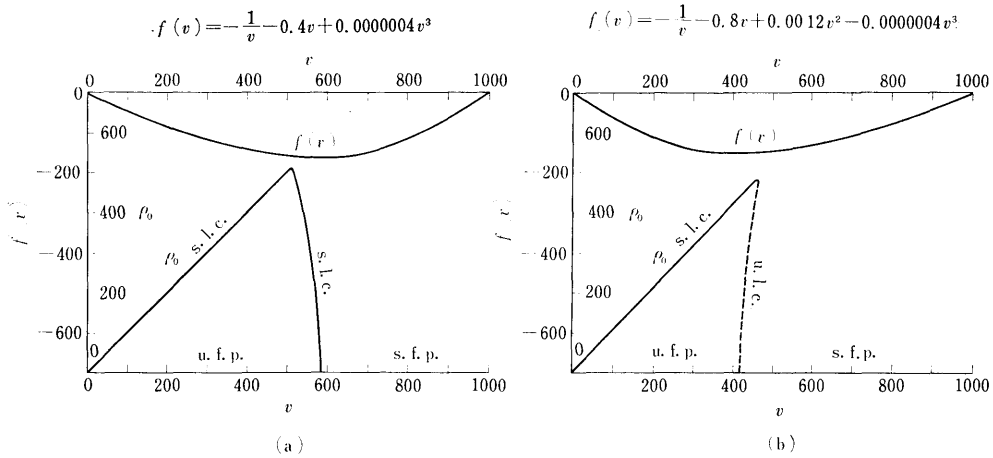


図3 自律系における $f(v)-v, \rho_0-v$ の関係

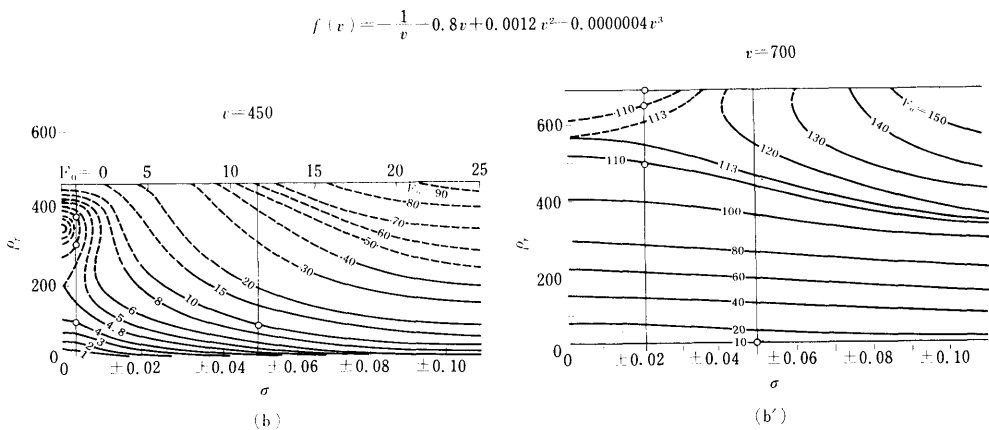
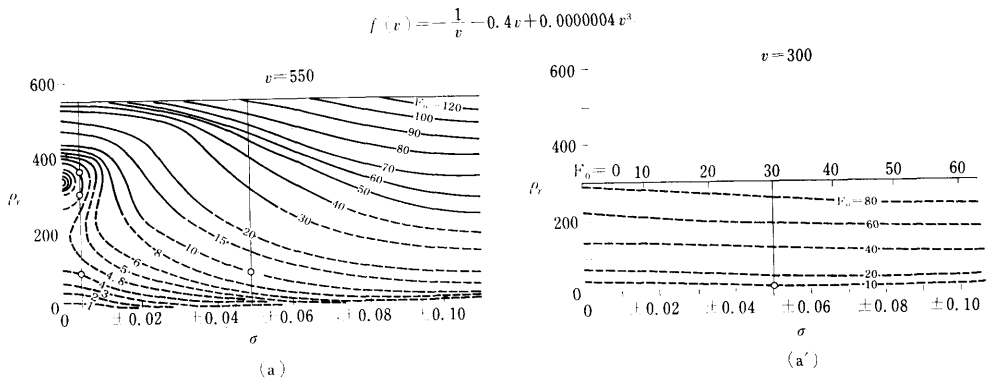


図4 他律系における ρ_r, σ, F_0 の関係

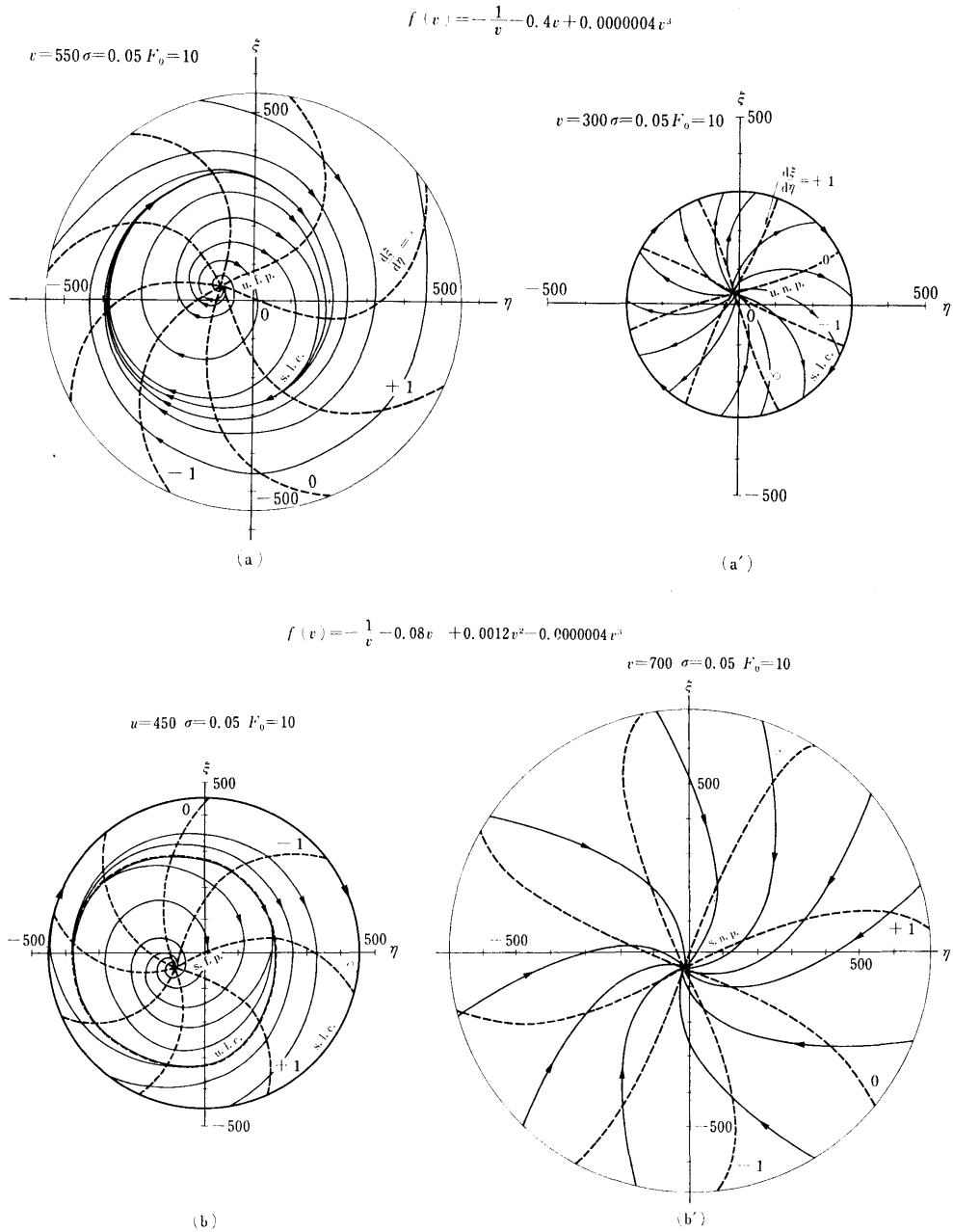


図 5 他律系の $\xi\eta$ -平面における軌道の状態

にうず巻き状に収束する。 $f(v)$ の特性によって (a), (b) 2 種の場合が出現することがわかる。

3.2 非自律系

図 4 はいずれも、たて軸に (2.6) 式より求まる ρ_r の値を示し、よこ軸には外力の振動数と系の固有振動

数のずれ σ を示す。(2.6) 式により F_0 , σ を与えたときの ρ_r を計算して、これらの図を作成したもので、実線が (2.12) 式による安定つりあい点、破線が不安定つりあい点に当る。安定つりあい点は原方程式の共振周期解を与えるものである。

この図4の(a), (a')は図3の(a)に対応するもので、それぞれ $v=550$, $v=300$ である。(a)は安定領域が広く、不安定領域は σ が大きいき ρ_r が比較的小さい範囲にある場合、 σ が小さいとき ρ_r が前より少し大きい範囲まで現われる。

つぎに、 σ がかなり大きく、 F_0 が比較的小さい場合の例として $\sigma=0.05$, $F_0=10$ の場合をとり上げて $\xi\eta$ -平面の状態を考察しよう。図4(a)で、 $\rho_r=95$ の位置に不安定つりあい点があり、この他にはつりあい点は存在しない。かつ、このつりあい点は(2.12)式によると不安定渦点(u.f.p.)であることがわかる。このu.f.p.の近傍を発生した $\xi\eta$ -平面上の軌道はどのような生長をしていくかという問題がある。(2.13)式から $d\xi/d\eta$ を求め、等傾斜法によってこの軌道の追跡を行なって求めたものが図5(a)である。この図によると図の中ほどに半径約350の安定リミット・サイクル(s.l.c.)の存在すること、したがって、安定周期解が存在し、前節で述べたように原方程式には概周期解が存在することがわかる。そして、このu.f.p.の近傍を発生した軌道は内側からこのs.l.c.に収束し、一方、 $v>\rho$ の範囲で(以下、断らない限りこの範囲とする)、このs.l.c.の外側の任意の位置を発生した軌道も、外側からこのs.l.c.に収束する模様わかる。当然のことながら、前節で述べたようなつりあい点を含まない、2個の閉曲線に囲まれた環状領域を考えると、軌道は閉曲線を内側に向かって横切っていてこのリミット・サイクルの安定であることが示される。さらに、図4(a)に戻って、 σ が比較的小さい場合の検討を行ってみよう。いま、 $\sigma=0.005$, $F_0=4$ とすると、つりあい点は $\rho_r=370, 310, 116$ の位置にあり、この順序で、安定結節点(s.n.p.)、鞍形点(s.p.)、不安定結節点(u.n.p.)、以下これらの略字を用いる)であることがわかる。 $\xi\eta$ -平面上の図は省略するが、u.n.p.の近傍を発生した軌道は大部分は直接、一部分はs.p.を介してすべてs.n.p.に収束する。また、外側を発生した任意の軌道もすべて直接またはs.p.を介してこのs.n.p.に収束する。この場合には、リミット・サイクルは存在しない。さらに、この図4(a)において、 F_0 が十分大きくて、 σ が比較的小さい場合(たとえば $F_0=100$, $\sigma=0.04$)は、安定つりあい点が必ず $\rho_r \doteq v$ の位置に存在する。

つぎに図4(a')の説明に移る。ここでは、ほとんどすべての領域を不安定つりあい点が占め、安定つりあい点は $\rho_r \doteq v=300$ の位置にあるのみである。ここで

も(a)と同様の条件 $\sigma=0.05$, $F_0=10$ を採ると、 $\rho_r=32$ の位置に不安定つりあい点があり、これはu.n.p.であることがわかる。(a)と同様、 $\xi\eta$ -平面で軌道を追跡して得られたものが図5(a')である。この図で、半径 $\rho \doteq v=300$ の位置にs.l.c.の存在が確認され、軌道は内側からこのs.l.c.に収束する。また、図には示されないが、このs.l.c.のわずかに外側にも $\rho>v$ の範囲に、領域が存在し、この領域で、任意の位置を発生した軌道は外側からこのs.l.c.に収束している。いま、ここで F_0 を十分大きくとると、このs.l.c.は消滅して、s.n.p.とs.p.が $\rho_r \doteq v$ の位置に現われる。この周期解になるか、つりあい点になるかの限界を示したのが図4(a')の上方 $\rho_r \doteq 300$ の線上に表わした F_0 の値である。すなわち、この位置の σ の値に対して、数字より大きい外力によりつりあい点になり、この数字未満の大きさの外力で周期解となる。

つづいて、図4(b), (b'), 図5(b), (b')の説明に移ろう。これらは前述のように、図3(b)に対応するものである。まず、図4(b)では、安定つりあい点、不安定つりあい点の領域が一部を除いて、図4(a)と反対になっている。この一部とは、 σ が小さく、 ρ_r の中間の範囲であり、この範囲はすべてs.p.である。前と同様 $\sigma=0.05$, $F_0=10$ の場合の検討を行なうと、 $\rho_r=95$ の位置に安定つりあい点(s.f.p.)が存在し、 $\xi\eta$ -平面上の軌道の状態を示すと図5(b)のようになる。中間に、u.l.c.が存在し、内側でこの近傍を発生した軌道はs.f.p.に収束し、外側を発生した軌道は図5(a')と同様半径がほぼ $v=450$ であるs.l.c.に収束する。図4(b)で $\rho_r=v=450$ の線上における F_0 の値は(a')と同様な意味を示すものである。図4(b)の $\sigma=0.005$ におけるつりあい点は $\rho_r=370$ (u.n.p.)、 310 (s.p.)、 116 (s.n.p.)で、u.n.p.の近傍を発生した軌道は内側へ向って大部分は直接、一部はs.p.を介してs.n.p.に収束し、外側へ向って、半径がほぼ $v=450$ であるs.l.c.に収束する。このs.l.c.のわずかに外側の軌道は前と同様当然このs.l.c.に収束する。最後に、図4(b')では大部分、安定つりあい点の領域で σ が小さく、 ρ_r の大きい範囲に不安定つりあい点(s.p.)の領域が存在する。前同様、 $\sigma=0.05$, $F_0=10$ の条件では、 $\rho_r=32$ の位置に安定つりあい点(s.n.p.)が存在し、すべての位置を発生した軌道はこのs.n.p.に収束する。この状況は図5(b')に示される。不安定領域に関しては、いま $\sigma=0.02$, $F_0=110$ を例にとるとつりあい点 $\rho_r \doteq v=700$ (s.n.p.)、 $\rho_r=655$ (s.p.)、 496

(s.n.p.)が存在し、任意の位置を発した軌道は、大部分は $\rho_r=496$ の s.n.p. に収束し、一部は $\rho_r=700$ の s.n.p. に収束する。s.p. は、ごく一部の軌道を、2個の s.n.p. へ分岐する役割を果している。なお、図4(b')において、大きな外力で σ が小さい場合(たとえば $\sigma=0.04$, $F=140$)は図4(a)と同様、 $\rho_r=v=700$ の位置に安定つりあい点が存在する。

4. む す び

実解析関数を用いて付着・すべり領域を統一的に表現する解析によって、ささえ台速度の全域にわたる自律系ならびに非自律系の摩擦振動の状態やその安定性などが明らかになった。

しかし、この解析法はこの段階では定性的な吟味を行なうに止まるので、定量的な検討は今後の研究にまっべきであらうと思われる。

5. あと が き

本報告は著者がさきに発表した講演概要⁵⁾に加筆敷衍したものである。最近、付着領域を含めた解析解を得るための試みが Klepp により報告され⁶⁾、本報告と類似の結果を導いているが、取り扱われている摩擦の対象が本報告と異なるようであり、また、自律系に局限されている点も異なる。さらに、非自律系の解析に

関しても、井上教授らにより研究発表がなされた⁷⁾が、そこでは付着領域は含んでおらず、比較的取り扱いの容易なすべり領域の解析に限られている。

参 考 文 献

- 1) 亘理・杉本: “摩擦による振動”, 日本機械学会論文集, 29巻200号(昭38-4), pp. 769~782
- 2) Singh, B.R.: “Study of Critical Velocity of Stick-Slip Sliding”, Journal of Engineering for Industry, Transactions of ASME, 1960, pp. 393~398
- 3) Kryloff, N. and Bogoliuboff, N.: “Introduction to Non-linear Mechanics”, Princeton University Press, 1947
- 4) 古屋・南雲: “非線型振動論”, (現代応用数学 B6-b), 岩波書店, 1957
- 5) 田中健一: “摩擦振動の一解析”, 第4回船舶技術研究所研究発表会講演概要(昭40-6), pp. 33-35
- 6) Klepp, V.H.J.: “Beitrag zum Studium des Spektrums der durch Reibung erregten Biegeschwingungen eines Stabes”, ZAMP, Vol. 20, 1969, pp. 537~543
- 7) 井上・宮浦・松下: “振動機械の自己同期化について(第3報, 強制摩擦振動)”, 日本機械学会論文集, 35巻, 274号(昭44-6) pp. 1242~1248