

プロペラの基礎理論—II

(定ピッチ非線型理論)

花岡 達郎*

Fundamental Theory of a Screw Propeller—II

(Non-Linear Theory Based on Constant Hydrodynamic Pitch)

By

Tatsuro Hanaoka

This report contains some fundamental descriptions concerning the non-linear propeller theory based on constant hydrodynamic pitch.

Thickness effect is introduced in the theory. But it is proved that energy theorem, Munk's theorems and Moriya's theorem are conserved in the fluid field.

We see that there is significant difference in expressions of propeller characteristics between lifting-line theory and lifting-surface theory.

は し が き

筆者は前著¹⁾において Munk の定理を中心にして揚力線理論と揚力面理論との関係を述べ、さらに線型理論の延長として、定ピッチ非線型理論の概略に言及した。

その後、定ピッチ非線型理論に流体粘性の影響を入れた広汎な計算が管井によって行なわれ²⁾、実験結果との対比によって、船用プロペラ特性の実用計算法がほぼ確立されたかに見える。

応用面においてこのような画期的進展が実現されると、理論の基礎的な部分をさらに充実しておくことが今後の発展のために望ましい。本編はこのような意図をもって執筆したものである。

内 容

1. 序 論
2. 螺旋座標と Green 関数
3. 渦理論による速度ポテンシャル
4. 守屋の定理と螺旋渦のピッチ
5. 翼厚を考慮した流場
6. 境界条件
7. エネルギー定理と変位定理
8. 揚力面の積分方程式

9. プロペラ特性の表示式
10. 揚力面理論における最適プロペラの条件

記 号

x, r, θ	任意点の座標
x', r', θ'	特異点分布の座標
ρ	流体密度
p	流体圧力
p_u, p_l	翼上下面の圧力
$\Pi = p_l - p_u$	
ϕ	速度ポテンシャル
$\phi^{(1)}$	特異点が渦分布の速度ポテンシャル
$\phi^{(2)}$	特異点が吹出し分布の速度ポテンシャル
V	プロペラの前進速度
Ω	プロペラの回転角速度
r_0	プロペラ半径
r_b	ボス半径
l	翼数
s	渦の分布する螺旋に沿って測った長さ
s_1, s_2	翼前後縁の s 座標
γ	循環分布密度
$\Gamma = \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds$	翼素の全循環

原稿受付 昭和 45 年 10 月 28 日

* 運動性能部

$$\begin{aligned}
2\pi h & \quad \text{螺旋渦のピッチ} \\
\kappa & \quad \text{吹き出し分布の強さ} \\
\sigma = \theta - x/h, \quad \sigma' = \theta' - x'/h \\
\tau = \theta + x/h, \quad \tau' = \theta' + x'/h \\
\tau_1, \tau_2 & \quad \text{翼前後縁の } \tau \text{ 座標} \\
\mu = r/h, \quad \mu' = r'/h \\
\tan \varepsilon = V/(\Omega r) \\
x = f_u(\theta, r) & \quad \text{翼上面の形状を表わす方程式} \\
x = f_l(\theta, r) & \quad \text{翼下面の形状を表わす方程式} \\
x = f_0(\theta, r) & \quad \text{翼の平均矢高面の形状を表わす方程式} \\
\tan \varepsilon_u = \partial f_u / (\partial r \partial \theta) \\
\tan \varepsilon_l = \partial f_l / (\partial r \partial \theta) \\
\tan \varepsilon_0 = \partial f_0 / (\partial r \partial \theta) \\
\varepsilon_0 = (\varepsilon_u + \varepsilon_l) / 2 \\
\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_u - \varepsilon_l) / 2 \\
w_a = \partial \Phi / \partial x \Big|_{\sigma=\sigma'} \\
w_l = \partial \Phi / \partial x \Big|_{\tau=\tau'} \\
\bar{w}_a \quad w_a \text{ の半径方向の平均値} \\
\bar{w}_l / r \quad w_l / r \text{ の半径方向の平均値} \\
h = \frac{V + \bar{w}_a}{\Omega + w_l / r} \\
\tan \varepsilon_1 = \frac{h}{r} = \frac{1}{\mu} \\
\delta n \quad \text{螺旋渦面に対する法線素片 (揚力の働く方向を正とする)} \\
\delta s \quad \text{螺旋渦面に対する接線素片 (下流の方向を正とする)} \\
\bar{w} = \partial \Phi / \partial n \Big|_{\sigma=\sigma'} \quad \text{螺旋上下面における } \partial \Phi / \partial n \text{ の相加平均} \\
\bar{u} = \partial \Phi / \partial s \Big|_{\sigma=\sigma'} \\
\bar{w}^{(2)} = \partial \Phi^{(2)} / \partial n \Big|_{\sigma=\sigma'} \\
\bar{u}^{(1)} = \partial \Phi^{(1)} / \partial s \Big|_{\sigma=\sigma'} \\
\partial \Phi^{(1)} / \partial n, \partial \Phi^{(2)} / \partial s \text{ は螺旋上下面で等しい値となる} \\
W^* = \sqrt{(V + \bar{w}_a)^2 + r^2 (\Omega + \bar{w}_l / r)^2} \\
= (V + \bar{w}_a) \sqrt{1 + \mu^2} \\
W^{*'} = (V + \bar{w}_a) \sqrt{1 + \mu'^2} \\
W = \sqrt{V^2 + \Omega^2 r^2}
\end{aligned}$$

1. 序 論

元来、プロペラの流場は非線型性の著しいものであるが、これを非線型翼理論³⁾と同様な考えで流場を解析することは繁雑に過ぎて実用に適しない。そのためプロペラの非線型理論は一般に簡略化されたものが用

いられるのであるが、その方法は個々の研究者によって多小異なっていて、何れが良い結果を与えるかは俄かに判断しがたい。それらは多分大同小異であろうと思われるが、理論の発展に役立てるため、本文では前提条件と、それに適合する仮定を定め、それに基づいて理論を展開する。

前提条件はプロペラ翼の平面形とか、作動状態に対して与えられることになるが、ここでは平面形については特に条件を付けない。そして、この理論の適用される作動状態は大荷重の場合を除いた実用範囲とする。したがって、最適作動状態がその範囲の中心になる。

翼素に対する流入方向を揚力線理論によって考察すると、流れは自由渦の誘導速度によって曲げられ、翼素に有効な迎角は幾何学的迎角から誘導迎角を差引いたものとなる。

ここに用いる定ピッチ非線型理論の流体モデルでは自由渦と束縛渦の分布面を共にプロペラ揚力線の有効迎角に沿う螺旋面上（これを有効迎角螺旋面と呼ぶことにする）にとり、その螺旋面のピッチは半径方向の平均値をとって一定とする。

プロペラの最適作動では shock free entry を条件としているので、翼素に対する流入方向は翼弦に平行で（迎角が0）、揚力は camber のみによって発生される。さらにこの作動状態ではエネルギー損失が極小であるから、Munk の定理と Betz の条件により、有効迎角螺旋面は半径方向に一定ピッチとなる。

したがって、最適作動の場合、ここで用いる定ピッチ非線型プロペラ理論の流体モデルは束縛渦の位置が camber の量だけずれている外は、直進翼の非線型理論に普通用いられる流体モデルとほぼ同等の正確さをもったものとみなすことができる。

この流体モデルが束縛渦を自由渦と同じ螺旋面上におくという近似を採っているので、境界条件等で同程度の近似仮定を設けて計算しても、結果の精度に変わりはない。

いま定ピッチ非線型揚力線の流場を A 、また、これより束縛渦を除いた流場を A' 、そして定ピッチ非線型揚力面の流場を B で表わすことにすると、ここで採用する仮定は次の如くである。

- (i) A の流場には非線型理論を用いる。
- (ii) $B-A'$ の流場では線型理論と同等の仮定を採用する。
- (iii) いかなる場合にも半径方向の流速は無視する。

これらの仮定に基づき、本文の理論では翼厚の影響を表わすため、吹出し分布の速度ポテンシャルが加えられている。この流れは一見複雑に見えるが、ここでもエネルギー定理、Munk の定理等が成り立ち、整然とした形に表現できることは幸いである。

2. 螺旋座標と Green 関数

プロペラの流れを数値計算する場合には、速度ポテンシャルは原型のままの方が計算しやすいし、また、座標系は円筒座標でも螺旋座標でも計算の手数に変わりはない。しかし流れの特性を解析的に調べる場合には、それを螺旋座標と Green 関数によって表わす方が原型のまま計算するよりも遙かに解析が容易になる。

後の解説の便宜のため、本節では螺旋座標と Green 関数について簡単に述べる。

円筒座標を x, r, θ で表わすと、これと

$$\left. \begin{aligned} \tau &= \theta + x/h \\ \sigma &= \theta - x/h \\ \mu &= r/h \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

の関係にある τ, σ, μ をパラメタとして 3 組の曲面が与えられる。 $\tau = \text{const.}$ および $\sigma = \text{const.}$ は互いに逆にねじれたピッチが $2\pi h$ の螺旋面であり、この二つの螺旋面の交線は一つの動径となる。 $\mu = \text{const.}$ は x 軸を中心とする円筒面であるから、 τ, σ, μ を与えれば、これから 3 個の曲面の交点として一点が定まる。これはある種の曲線座標とみなすことができるので、螺旋座標と呼ぶのがよいであろう。ただしこの曲線座標は直交座標でないことに注意する必要がある。

x, θ と τ, σ とは

$$\left. \begin{aligned} x &= h(\tau - \sigma)/2 \\ \theta &= (\tau + \sigma)/2 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} &= \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} &= -\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

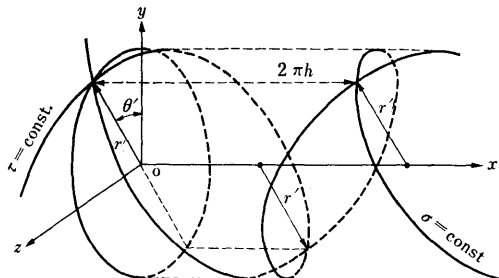


Fig. 1

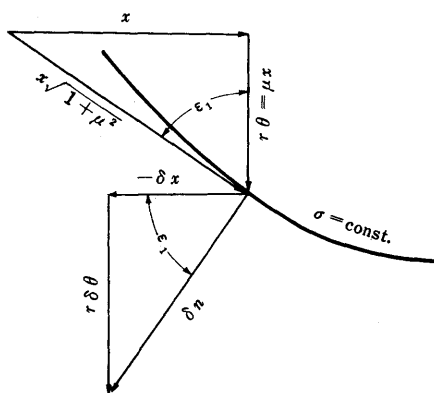


Fig. 2

または

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \\ \frac{\partial}{r \partial \theta} &= \frac{1}{h \mu} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

の関係がある。

$\sigma = \text{const.}$ の面に対する法線方向の微分について考える。法線と x 軸に平行な線とのなす角を ϵ_1 とすると (Fig. 2 参照)

$$\sin \epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}, \quad \cos \epsilon_1 = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \quad (2.5)$$

である。法線方向の微分演算は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{r \partial \theta}{\partial n} \frac{\partial}{r \partial \theta} \\ &= -\cos \epsilon_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \sin \epsilon_1 \cdot \frac{\partial}{r \partial \theta} \end{aligned} \quad (2.6)$$

であるから、(2.4)、(2.5) を (2.6) に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{h \sqrt{1+\mu^2}} \left[\left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} - \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \quad (2.7)$$

が得られる。この式は $\sigma = \text{const.}$ の螺旋面の法線方向微分演算を σ, τ を介して行なうときに用いる。

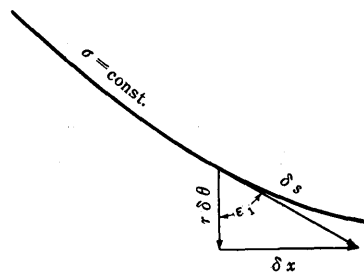


Fig. 3

次に $\mu = \text{const.}$, $\sigma = \text{const.}$ の螺旋の線素片 ds と τ の関係を調べてみる。Fig. 3 を参照すると

$$\begin{aligned} ds &= dx \operatorname{cosec} \varepsilon_1 = dx \sqrt{1+\mu^2} \\ &= r d\theta \sec \varepsilon_1 = r d\theta \sqrt{1+\mu^2} / \mu \end{aligned}$$

である。上式右辺の 1 行目、2 行目の相加平均をとると

$$ds = \frac{h}{2} \sqrt{1+\mu^2} \left(d\theta + \frac{dx}{h} \right) = \frac{h}{2} \sqrt{1+\mu^2} d\tau \quad (2.8)$$

となる。

また螺旋に沿う微分演算は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta'-2m\pi/l)}} \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(x-x')+in(\theta-\theta'-2m\pi/l)} I_n(|\lambda|r) K_n(|\lambda|r') d\lambda, \quad r' > r \end{aligned} \quad (2.10)^4$$

がある。(2.2)によって、これを螺旋座標に変換すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{h \sqrt{(\tau-\tau'-\sigma+\sigma')^2/4+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos\{(\tau-\tau'+\sigma-\sigma')/2-2m\pi/l\}}} \\ &= \frac{1}{\pi h} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i/2(\lambda+n)(\tau-\tau')-i/2(\lambda-n)(\sigma-\sigma')-i2nm\pi/l} I_n(|\lambda|\mu) K_n(|\lambda|\mu') d\lambda, \quad \mu' > \mu \end{aligned} \quad (2.11)$$

である。

対称な l 枚の螺旋面の間の場が相似である場合の Green 関数は(2.11)の m について 0 より $l-1$ まで総和したもので表わされる。

$$\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2nm\pi/l} = \begin{cases} 0, & n \neq kl \\ l, & n = kl \end{cases} \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (2.12)$$

の公式を用いると、

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{1}{R} &= \frac{l}{\pi h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i/2(\lambda+lk)(\tau-\tau')-i/2(\lambda-lk)(\sigma-\sigma')} \\ & \times I_{lk}(|\lambda|\mu) K_{lk}(|\lambda|\mu') d\lambda, \quad \mu' > \mu \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる。この式の k, λ の代わりに $-k, -\lambda$ とおくと指数関数の変数の符号が変わるだけで、他は全く同形の式が得られる。それと上式との相加平均をとると

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{1}{R} &= \frac{l}{\pi h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \frac{1}{2} \{(\lambda+lk) \\ & \times (\tau-\tau') - (\lambda-lk)(\sigma-\sigma')\} \\ & \times I_{lk}(|\lambda|\mu) K_{lk}(|\lambda|\mu') d\lambda, \quad \mu' > \mu \end{aligned} \quad (2.14)$$

が得られる。(2.13), (2.14)は対称螺旋の場における Green 関数である。

3. 渦理論による速度ポテンシャル

プロペラは無限流体中で、 x 軸の負の向きに一定角

(4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{r \partial \theta}{\partial s} \frac{\partial}{r \partial \theta} = \sin \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varepsilon_1 \frac{\partial}{r \partial \theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

であるが、(2.3)を参照すると、

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{2}{h \sqrt{1+\mu^2}} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (2.9)$$

であることがわかる。

次に対称螺旋の場における Green 関数を求めてみる。無限領域の Green 関数を円壩座標で表わしたものの一つとして

速度 Ω で回転しながら、 x 軸の負の方向に一定速度 V で直進しているものとする。翼厚を無視すると、プロペラ翼は渦面によって表わすことができる。これを束縛渦という。序論に述べたように、束縛渦とこれに随伴する自由渦とを一定ピッチ ($2\pi h$) の同一の螺旋面上におくことにし、その循環分布密度を γ とすると、速度場はこの螺旋面上に $\int_{s_1}^s \gamma ds$ のポテンシャル飛躍がある外は至る処連続である。

プロペラ翼と共に運動する座標系では流場は定常であるから、その速度ポテンシャル $\Phi^{(1)}$ は

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(x, r, \theta) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial n''} \\ & \times \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta'-2m\pi/l)}} ds' \\ & \times \int_{s_1}^{s'} \gamma ds'' \end{aligned} \quad (3.1)$$

のように表わされる¹⁾。ただし (x, r, θ) は任意点の座標、 (x', r', θ') は渦面上の点の座標、 l はプロペラ翼数、 r_0, r_b はそれぞれプロペラ半径、ボス半径を意味する。 s は螺旋に沿ってはかった長さ、 s_1 は翼前縁の s の座標、 $\partial/\partial n''$ は螺旋面に対する法線微分である。

$\int_{s_1}^s \gamma ds$ は s 点の循環で

$$\int_{s_1}^s \gamma ds = \Phi_u - \Phi_i = \Gamma(s, r) \quad (3.2)$$

である。ただし Φ_u, Φ_l は渦面上下の速度ポテンシャルとする。この式より、

$$\gamma = \frac{\partial \Phi_u}{\partial s} - \frac{\partial \Phi_l}{\partial s} \quad (3.3)$$

$$\Phi^{(1)}(x, r, \theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \int_{s'}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}''} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta' - 2m\pi/l)}} ds'' \quad (3.4)$$

となる。ここで円壩座標を螺旋座標に変えると、

$$\Phi^{(1)}(\tau, \sigma, \mu) = \frac{h}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} ds' \int_{s'}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}''} \frac{1}{R} d\mathbf{T}' \quad (3.5)$$

となる。ただし、

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h \sqrt{(\tau - \mathbf{T}' - \sigma + \sigma')^2 / 4 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos\{(\tau - \mathbf{T}' + \sigma - \sigma')/2 - 2m\pi/l\}}} \quad (3.6)$$

である。(3.5) の $\partial/\partial \mathbf{n}''$ は (2.7) の $\partial/\partial \tau, \partial/\partial \sigma$ をそれぞれ $\partial/\partial \mathbf{T}', \partial/\partial \sigma'$ で置き換え、 μ を μ' とした演算を意味し、 s_2 は翼後縁の s 座標である。

さらに積分変数 \mathbf{T}' を $\mathbf{T} - \tau' = \tau - \mathbf{T}'$ によって \mathbf{T} に変えると、

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\tau, \sigma, \mu) &= \frac{h}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} ds' \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \frac{1}{R} d\mathbf{T} \quad (3.7) \end{aligned}$$

となる。この式の $\partial/\partial \mathbf{n}'$ は $\partial/\partial \mathbf{n}''$ 中の $\partial/\partial \mathbf{T}'$ を $\partial/\partial \tau'$ で置き換えた演算を意味する。(3.7) の形の速度ポテンシャルは線型理論により求められるものと同形で、速度場の解析に都合が多い。

(3.7) の $\sum_{m=0}^{l-1} \frac{1}{R}$ に Green 関数 (2.14) を適用し、 \mathbf{T} に関する積分を行なうと、

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)} &= \Phi_{\mathbf{I}}^{(1)} + \Phi_{\mathbf{I}'}^{(1)} \\ \Phi_{\mathbf{I}}^{(1)} &= \frac{l}{2\pi^2 h} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ &\quad \times \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu' \lambda - lk/\mu'}{\lambda + lk} \cos \frac{1}{2} \\ &\quad \times \{(\lambda + lk)(\tau - \tau') - (\lambda - lk)(\sigma - \sigma')\} \\ &\quad \times I_{lk}(|\lambda|\mu <) K_{lk}(|\lambda|\mu >) d\lambda \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{I}'}^{(1)} &= \frac{l^2}{2\pi h} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=1}^{\infty} k(\mu' + 1/\mu') \\ &\quad \times I_{lk}(\lambda|\mu <) K_{lk}(\lambda|\mu >) \sin lk(\sigma - \sigma') \quad (3.9) \end{aligned}$$

となる。ただし $\mu >, \mu <$ はそれぞれ μ, μ' のうち大なる方および小なる方を意味する。

$\tau - \tau'$ が非常に大きいとき、すなわち無限後方では

$$\lim_{\tau - \tau' \rightarrow \infty} \Phi_{\mathbf{I}}^{(1)} = \Phi_{\mathbf{I}}^{(1)}$$

である。束縛渦の外では (3.3) の右辺は零であるから、 γ は翼面の外では 0 になる。

(3.1) の s', s'' の積分順序を交換し、 γ が翼面の外で 0 になることを考慮すると、

であるから、無限後方の速度ポテンシャル $\Phi_{\infty}^{(1)}$ は

$$\Phi_{\infty}^{(1)} = 2\Phi_{\mathbf{I}}^{(1)} \quad (3.10)$$

によって表わされる。この辺の演算は前著に詳しく述べてあるが、後の解説の便宜上再録した。

4. 守屋の定理⁵⁾ と螺旋渦のピッチ

(3.7) に (2.9) の演算を行なって、螺旋面の接線方向の誘導速度 $\partial\Phi^{(1)}/\partial s$ を求めると、

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma - \sigma' \rightarrow \pm 0} \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial s} &= \frac{1}{4\pi \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \\ &\quad \times \int_{s_1}^{s_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} ds' \pm \frac{\gamma}{2} \quad (4.1) \end{aligned}$$

である。これの右辺は $\sigma = \sigma'$ に γ の大きさの飛躍があることはポテンシャル論でよく知られている。 $\partial\Phi^{(1)}/\partial s$ のこの性質は (3.3) に示したように束縛渦に基づくものである。渦上下面の接線方向の流速の平均値 $\bar{u}^{(1)}$ は (4.1) の右辺第 1 項に等しく、

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(1)} &= \frac{1}{4\pi \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} ds' \quad (4.2) \end{aligned}$$

で表わされる。(3.9) の $\Phi_{\mathbf{I}'}^{(1)}$ には τ が含まれないから、 $\bar{u}^{(1)}$ に寄与するのは $\Phi_{\mathbf{I}}$ だけである。 $\Phi_{\mathbf{I}}$ を s で微分すると

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(1)} &= \frac{-l}{4\pi^2 h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} (\mu' \lambda - lk/\mu') \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') \\ &\quad \times I_{lk}(|\lambda|\mu <) K_{lk}(|\lambda|\mu >) d\lambda \quad (4.3) \end{aligned}$$

となる。この式は (4.2) の $1/R$ に (2.14) の Green

関数を代入しても得られる。

揚力線理論の流体モデルは $\sigma = \sigma'$ の面上に分布する束縛渦一つの動径上に集め、これを一本の渦糸で表わしたものである。その渦糸の位置を τ' とすると、

$$\bar{u}^{(1)}|_{\tau=\tau'}=0 \quad (4.4)$$

である。

次に螺旋面の法線方向の誘導速度を求めると、

$$w^{(1)} = \partial\phi^{(1)}/\partial n|_{\sigma=\sigma'} = w_{\mathbf{I}}^{(1)} + w_{\mathbf{I}'}^{(1)} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} w_{\mathbf{I}}^{(1)} &= \frac{\partial\phi_{\mathbf{I}}^{(1)}}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{l}{4\pi^2 h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \int_{r_b}^{r_0} dr' \\ &\times \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oint_{-\infty}^{\infty} \\ &\times \frac{(\mu'\lambda - lk/\mu')(\mu\lambda - lk/\mu)}{\lambda + lk} \\ &\times \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') I_{lk}(|\lambda| \mu <) \\ &\times K_{lk}(|\lambda| \mu >) d\lambda \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} w_{\mathbf{I}'}^{(1)} &= \frac{\partial\phi_{\mathbf{I}'}^{(1)}}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} = \frac{l^3}{2\pi h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \int_{r_b}^{r_0} dr' \\ &\times \int_{s_1}^{s_2} r ds' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (\mu' + 1/\mu') (\mu + 1/\mu) \\ &\times I_{lk}(lk \mu <) K_{lk}(lk \mu >) \end{aligned} \quad (4.7)$$

である。

揚力線の場合には、(4.6)より

$$w_{\mathbf{I}}^{(1)}|_{\tau=\tau'}=0$$

であるから、(3.10)を参照すると、

$$w^{(1)}|_{\tau=\tau'} = w_{\mathbf{I}'}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\partial\phi_{\infty}^{(1)}}{\partial n} \Big|_{\sigma=\sigma'} \quad (4.8)$$

となる。

したがって、(4.8)は Munk の定理 III を、また (4.4)は守屋の定理を表わしている。守屋の定理を具体的に述べると、

「対称プロペラの場合、揚力線の束縛渦の位置においては、自由渦面の螺旋に沿う接線方向の誘導速度は存在しない。」

この定理はプロペラ揚力線理論の中で極めて重要なものであるが、空気力学の分野でプロペラ理論に対する一般の関心が薄れようとする不運な時期に公表されたため、特に参照されることもなく、また、それ以後に発展した船用プロペラ理論で取上げられることがなかった。

守屋の定理は Munk の定理 III と共に定ピッチ非線型理論に重要な役割を果たすことになる。

$\phi_{\mathbf{I}}^{(1)}$ と $\phi_{\mathbf{I}'}^{(1)}$ の物理的性質を少し調べてみる。

(3.8), (3.9) を r で微分し、 $\sigma = \sigma'$ と置くと、螺

旋面上における半径方向誘導速度として

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_{\mathbf{I}}^{(1)}}{\partial r} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= \frac{l}{4\pi^2 h^2} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ &\times \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu'\lambda - lk/\mu'}{\lambda + lk} \\ &\times \cos \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') \\ &\times \frac{\partial}{\partial \mu} [I_{lk}(|\lambda| \mu <) K_{lk}(|\lambda| \mu >)] d\lambda \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial\phi_{\mathbf{I}'}^{(1)}}{\partial r} \Big|_{\sigma=\sigma'} = 0 \quad (4.10)$$

が得られる。ただしこれ等は渦上下面の相加平均を意味する。

揚力線の場合、束縛渦上では

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_{\mathbf{I}}^{(1)}}{\partial r} \Big|_{\substack{\sigma=\sigma' \\ \tau=\tau'}} &= \frac{l}{4\pi^2 h^2} \int_{r_b}^{r_0} \Gamma dr' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ &\times \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu'\lambda - lk/\mu'}{\lambda + lk} \\ &\times \frac{\partial}{\partial \mu} [I_{lk}(|\lambda| \mu <) K_{lk}(|\lambda| \mu >)] d\lambda \end{aligned} \quad (4.11)$$

である。

揚力線の束縛渦による半径方向の誘導速度はプロペラ回転面内では 0 であるから、(4.11)は自由渦の誘導速度とみなされる。このことから揚力線の場合、プロペラ回転面における自由渦の速度場は $\phi_{\mathbf{I}'}^{(1)}$ だけで表わされるものでないことがわかる。このことは近藤の論文⁶⁾の定理 III に述べられているし、また高木⁷⁾によっても指摘されている。しかし近藤の定理 IV では $\phi_{\mathbf{I}}^{(1)}$ があたかも回転面における自由渦の速度場を表わすかの如く記述されている。線型理論の境界条件には半径方向流速が関与しないために、あのような表現がとられたものと思われるが、流場に対する定理として、

「対称プロペラに対しては、揚力線の位置における誘導速度の各成分のうち、半径方向成分以外のものは、無限後方の自由渦の対応する位置における誘導速度の成分の半分に等しい。」

の様に改めた方がよい。この定理は Munk の定理 III に相当するものであるが、さらに暗黙のうちに守屋の定理も含まれている。守屋が螺旋の接線方向流速が 0 であることを明確に示したのは後のことであった。

以上によって、翼厚を無視した場合、自由渦の速度場は $\phi_{\mathbf{I}'}^{(1)}$ だけによって表わされるものではないが、序論に述べた A' の流場の吹上げは $w_{\mathbf{I}'}^{(1)}$ で、また、

$B-A'$ の流場の吹上げが $w_I^{(1)}$ で表われることは理解できるであろう。

非線型プロペラ理論は自由渦がその誘導速度によって変形を受けることの効果を計算に入れるものであるが、これを正確に計算することは複雑である。定ピッチ非線型理論は要点だけを取り上げて、最も単純化を計ったもので、揚力線の束縛渦の位置における誘導速度の半径方向平均値をもって自由渦の流される量とする。

Munk の定理、守屋の定理によると、揚力線の束縛渦の位置における軸方向流速 w_a 、回転方向流速 w_t は

$$\left. \begin{aligned} w_a &= \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial x} \Big|_{\substack{\sigma=\sigma' \\ \tau=\tau'}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{\infty}^{(1)}}{\partial x} \Big|_{\sigma=\sigma'} \\ w_t &= \frac{\partial \Phi^{(1)}}{r \partial \theta} \Big|_{\substack{\sigma=\sigma' \\ \tau=\tau'}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{\infty}^{(1)}}{r \partial \theta} \Big|_{\sigma=\sigma'} \end{aligned} \right\} (4.12)$$

で与えられる。前著では単に $w_a = \partial \Phi_1^{(1)} / \partial x |_{\sigma=\sigma'}$ 、 $w_t = \partial \Phi_1^{(1)} / (r \partial \theta) |_{\sigma=\sigma'}$ と定義した。これは実質的には本文のものとは変りはないが、守屋の定理の導入によって、 w_a, w_t の定義のもつ意義に格段の進展が見ら

れたことになる。

$w_a, w_t/r$ の半径方向の平均値を $\overline{w_a}, \overline{w_t/r}$ で表わしたとき、螺旋渦のピッチを

$$h = \frac{V + \overline{w_a}}{\Omega + \overline{w_t/r}} \quad (4.13)$$

とする。これが定ピッチ非線型理論の根本仮定である。

Fig. 4 を参照すると

$$\left. \begin{aligned} W^* &= \sqrt{(V + \overline{w_a})^2 + r^2(\Omega + \overline{w_t/r})^2} \\ &= (V + \overline{w_a}) \sqrt{1 + \mu^2} \\ W &= \sqrt{V^2 + \Omega^2 r^2} \end{aligned} \right\} (4.14)$$

である。仮定により流れはプロペラ翼に W^* の速度で流入する。

守屋の定理によると、 w_a と w_t の合成流速は $w_I^{(1)}$ で、それは W^* と直交するから、

$$W^* = W \cos(\epsilon_1 - \epsilon) \quad (4.15)$$

の関係が得られる。

5. 翼厚を考慮した流場

線型翼理論においては、束縛渦、自由渦の分布面を

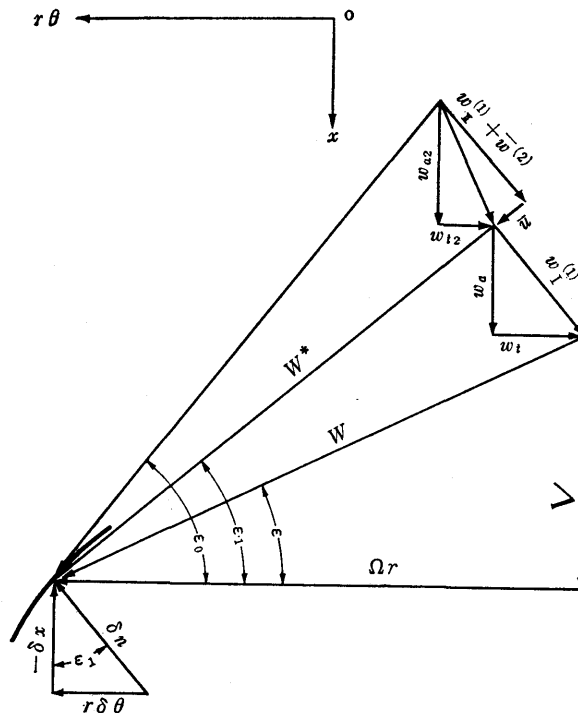


Fig. 4

流れに平行な面上にとり、翼厚を有限と考える場合は、同じ面上に吹出しを分布させたもので流場を表わしている。序論で定めた仮定により、プロペラの流場についても、翼厚の導入には同じ方法を用いる。すなわち、プロペラの流場の速度ポテンシャル Φ は (3.7) の $\Phi^{(1)}$ に吹出し分布の速度ポテンシャル $\Phi^{(2)}$ を加えて

$$\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} \quad (5.1)$$

のように表わす。ただし、

$$\Phi^{(2)} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \frac{\kappa}{R} ds' \quad (5.2)$$

である。(2.14)を用いると $\Phi^{(2)}$ は、

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)} = & \frac{l}{4\pi^2 h} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \kappa ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \frac{1}{2} \\ & \times \{(\lambda + lk)(\tau - \tau') - (\lambda - lk)(\sigma - \sigma')\} \\ & \times I_{lk}(|\lambda| \mu <) K_{lk}(|\lambda| \mu >) d\lambda \quad (5.3) \end{aligned}$$

と書かれる。無限後方では $\Phi^{(2)} = 0$ であるから、(3.10)により、

$$\Phi_{\infty} = \Phi_{\infty}^{(1)} = 2\Phi_{\infty}^{(1)} \quad (5.4)$$

である。

プロペラの流場には以上の他にボスを表わす吹出し分布が加わるが、ここでは一応翼だけを考えることにする。

$\Phi^{(2)}$ によって表わされる速度場の螺旋面の上下面における法線方向流速は

$$\lim_{\sigma - \sigma' \rightarrow \pm 0} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} = \bar{w}^{(2)} \mp \frac{\kappa}{2} \quad (5.5)$$

である。ここに、

$$\begin{aligned} \bar{w}^{(2)} = & \left. \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma = \sigma'} = \frac{1}{4\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \kappa \\ & \times \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \frac{1}{R} \right|_{\sigma = \sigma'} ds' \quad (5.6) \end{aligned}$$

であって、 $\bar{w}^{(2)}$ は螺旋面上下の法線流速の平均値である。また接線方向流速 $u^{(2)}$ は、

$$\begin{aligned} u^{(2)} = & \left. \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial s} \right|_{\sigma = \sigma'} = \frac{1}{2\pi h \sqrt{1 + \mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} \int_{s_1}^{s_2} \kappa \\ & \times \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{R} \right|_{\sigma = \sigma'} ds' \quad (5.7) \end{aligned}$$

である。

(5.3) を用いて $\bar{w}^{(2)}$, $u^{(2)}$ の表示式を求めると、

$$\begin{aligned} \bar{w}^{(2)} = & \frac{l}{4\pi^2 h^2 \sqrt{1 + \mu^2}} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \kappa ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} (\mu\lambda - lk/\mu) \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') \\ & \times I_{lk}(|\lambda| \mu <) K_{lk}(|\lambda| \mu >) d\lambda \quad (5.8) \\ u^{(2)} = & -\frac{l}{4\pi^2 h^2 \sqrt{1 + \mu^2}} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \kappa ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned} & \times \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + lk) \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') \\ & \times I_{lk}(|\lambda| \mu <) K_{lk}(|\lambda| \mu >) d\lambda \quad (5.9) \end{aligned}$$

である。

したがって、揚力線の場合には

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}^{(2)}|_{\tau = \tau'} = \left. \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma = \sigma'} = 0 \\ u^{(2)}|_{\tau = \tau'} = \left. \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial s} \right|_{\sigma = \sigma'} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

である。

束縛渦の場合と違って、翼厚を表わす吹出し分布を一本の線上に集めることは、物理的にはその本来の意味が失なわれることになる。しかしここでは主として他の翼の影響について考えるのであるから、翼弦長を無視した見方をしてもよいわけである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma = \sigma'} = w^{(1)} + \bar{w}^{(2)} \\ \bar{u} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right|_{\sigma = \sigma'} = \bar{u}^{(1)} + u^{(2)} \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

であるから、(4.4), (4.8), (5.4), (5.10), (5.11) より、揚力線では、

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}|_{\tau = \tau'} = \left. \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{\infty}}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\sigma = \sigma'} \\ \bar{u}|_{\tau = \tau'} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

となる。すなわち、螺旋渦の流場に翼厚の影響として、吹出し分布を加えた流場においても、Munk の定理Ⅲ、守屋の定理が成立つ。したがって、この流場でも螺旋渦のピッチは(4.13)を用いればよい。

ここで循環分布密度と揚力分布密度の関係を求めてみる。

Bernoulli の定理は、

$$p = -\frac{\rho}{2} v^2 + \text{const.}$$

である。翼の上下面の圧力および流速をそれぞれ p_u , p_l , v_u , v_l とし、揚力分布密度を Π で表わすと、

$$\Pi = p_l - p_u = \rho(v_u - v_l)(v_u + v_l)/2 \quad (5.13)$$

である。

半径方向の流速を省略すると、 $(v_u + v_l)/2$ は螺旋に沿う渦面上下の流速の平均で $W^* + \bar{u}$ に相当し、また(3.3)により $v_u - v_l$ は γ に相当するから、(5.13) は、Kutta-Joukowski の定理と同形に、

$$\Pi = \rho(W^* + \bar{u})\gamma \quad (5.14)$$

のように表わされる。これが非線型理論における循環分布密度と揚力分布密度の関係式である。 \bar{u} は W^* に比べると小さい量であるが、 Π に対して 1 次で影響するので省略しないでおく。

6. 境界条件

翼厚を考慮したときの境界条件について考えてみる。

定ピッチ非線型理論の流場は線型理論のそれと螺旋渦のピッチが異なる外はほぼ同形で、翼を表わす特異点分布は自由渦の分布する螺旋面と同一の面上にあり、現実の翼の位置におかれていない。このような流体モデルに対する境界条件の表わし方は、線型理論の場合と同様に、翼表面において成立つ境界条件を特異点分布の位置に移し、そこで成立つものとするのがよい。流体モデルにはすでに自由渦の誘導速度が含まれているので、境界条件ではそれを引き去って表わす必要がある。

翼素の翼弦上の一座標点 P に対応する翼上下面の点における接線がプロペラ回転面とほす角度をそれぞれ $\varepsilon_u, \varepsilon_l$ で表わすことにし、

$$\varepsilon_0 = (\varepsilon_u + \varepsilon_l)/2, \quad \bar{\varepsilon} = (\varepsilon_u - \varepsilon_l)/2 \quad (6.1)$$

と書くと、翼素の上下面の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \text{上面: } \sin(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 + \bar{\varepsilon}) &= \sin(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \cos \bar{\varepsilon} \\ &+ \sin \bar{\varepsilon} \cos(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) = \frac{-(w_+ - w_1^{(1)})}{W^* + \bar{u}} \\ \text{下面: } \sin(\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}) &= \sin(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \cos \bar{\varepsilon} \\ &- \sin \bar{\varepsilon} \cos(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) = \frac{-(w_- - w_1^{(1)})}{W^* + \bar{u}} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

である (Fig. 4, Fig. 5 参照)。ただし w_+, w_- はそ

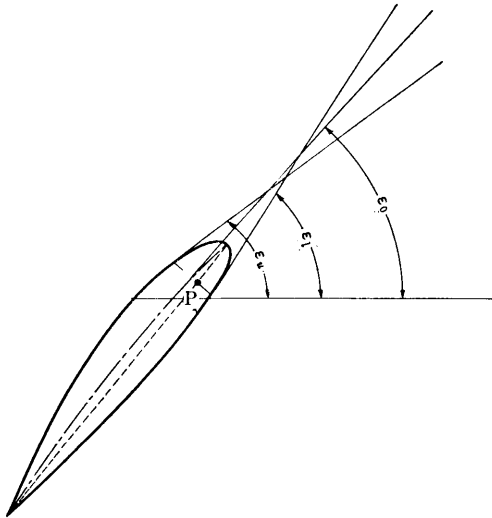


Fig. 5

れぞれ螺旋渦の上下面における法線流速を意味する。具体的には

$$w_+ = \lim_{\sigma - \sigma' \rightarrow +0} \frac{\partial \phi}{\partial n}, \quad w_- = \lim_{\sigma - \sigma' \rightarrow -0} \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (6.3)$$

の演算から導かれるもので、その表示式は (4.5), (5.5) に示す。

(6.2) の2つの式の和の平均および差の平均を作ると、

$$\sin(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) = \frac{-(\bar{w} - w_1^{(1)})}{W^* + \bar{u}} \quad (6.4)$$

$$\bar{\varepsilon} \cos(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) = \frac{\kappa/2}{W^* + \bar{u}} \quad (6.5)$$

が得られる。ただしこれ等の式では $\bar{\varepsilon}$ の2次以上の項は省略している。 ε_0 は平均矢高面の接線とプロペラ回転面のなす角、 $\bar{\varepsilon}$ は半翼厚の勾配に相当する。

境界条件として (6.4), (6.5) を用い、直接 γ, κ を求めることにすると、連立積分方程式を計算しなければならないことになる。この計算は少し繁雑であるから、実用計算としては、 \bar{u} を省略して κ, γ を求め、第2近似として (6.4), (6.5) が近似的に満足される κ, γ の解を求めるようにするのがよいであろう。

(6.2) は線型理論の考えに基づく境界条件式であるから、分母で W^* に \bar{u} を加えることは、全体の計算精度の上からは不必要なことのようであるが、(5.14) の揚力分布密度の中に \bar{u} が含まれているので、理論の一貫性を保つため、境界条件の中でもこれを残した。

7. エネルギー定理と変位定理

非線型理論になって流体モデルが変わり、また翼厚の影響が加わると、それに従ってエネルギー定理の内容も幾分変わってくる。以下に述べる解析は、単にエネルギー定理を検証するというだけでなく、この流体モデルに包含される物理的性質を明らかにすることにも役立つであろう。

プロペラが作動しているときの推力およびトルクをそれぞれ S, Q で表わすと、プロペラが単位時間に流体に対してなす仕事 P は、

$$P = \Omega Q - VS \quad (7.1)$$

である。

翼素の摩擦抵抗を除外して、(7.1) をプロペラ翼に働く流体力で表わしてみる。翼素に働く力としては循環分布に基づくものと、吹出しに基づくものがある。前者は (5.14) の揚力と誘導抵抗がその成分で、平均

矢高面の法線方向に働き ((9.15), (9.16) 参照), 後者は流れの方向に抵抗として働くもので, Lagally の公式⁸⁾ $F = \rho \kappa \mathbf{q}$ (\mathbf{q} は速度ベクトル) から導かれる。この力のうち $\rho \kappa W^*$ は翼弦に沿って前縁より後縁ま

で積分すると 0 になるから除外する。注)

これ等の力の推力およびトルクの成分を積分するとプロペラの推力およびトルクの表示式が得られる。すなわち,

$$S = l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma(W^* + \bar{u}) \cos \varepsilon_1 ds + l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma(w_{\mathbb{I}}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) \sin \varepsilon_1 ds - l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa \bar{u} \sin \varepsilon_1 ds + l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa (w_{\mathbb{I}}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) \cos \varepsilon_1 ds \quad (7.2)$$

$$Q = l\rho \int_{r_b}^{r_0} r dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma(W^* + \bar{u}) \sin \varepsilon_1 ds - l\rho \int_{r_b}^{r_0} r dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma (w_{\mathbb{I}}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) \cos \varepsilon_1 ds + l\rho \int_{r_b}^{r_0} r dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa \bar{u} \cos \varepsilon_1 ds + l\rho \int_{r_b}^{r_0} r dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa (w_{\mathbb{I}}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) \sin \varepsilon_1 ds \quad (7.3)$$

である。

(7.2), (7.3) を (7.1) に代入し, $\Omega r = W \cos \varepsilon$, $V = W \sin \varepsilon$ なることを考慮して整理すると,

$$P = l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} W \gamma(W^* + \bar{u}) \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon) ds - l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} W \gamma(w_{\mathbb{I}}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon) ds + l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} W \kappa \bar{u} \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon) ds + l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} W \kappa (w_{\mathbb{I}}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon) ds$$

となる。

守屋の定理により, $W \cos(\varepsilon_1 - \varepsilon) = W^*$, $W \sin(\varepsilon_1 - \varepsilon) = -w_{\mathbb{I}}^{(1)}$ であるから

$$P = -l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma(W^* + \bar{u}) w_{\mathbb{I}}^{(1)} ds - l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} W^* \gamma(w_{\mathbb{I}}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) ds + l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} W^* \kappa \bar{u} ds - l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa (w_{\mathbb{I}}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) w_{\mathbb{I}}^{(1)} ds = -l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} W^* (\gamma \bar{w} - \kappa \bar{u}) ds - l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} w_{\mathbb{I}}^{(1)} \{ \kappa (w_{\mathbb{I}}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) + \gamma(\bar{u}^{(1)} + u^{(2)}) \} ds \quad (7.4)$$

となる。

(7.4) の右辺第 1 項は線型理論の場合のエネルギー損失と同等の式である。第 2 項は定ピッチ非線型の流体モデル特有のもので, 解析的には 0 にならない。これまでの解析では $w_{\mathbb{I}}^{(1)}$ は他の攪乱流速とは分けて取

扱い, 2 次の項を省略するということはしなかったが, 現実には (7.4) の第 2 項は第 1 項に比べて小さく, 省略しても大差ないと思われる。よってエネルギー損失は第 1 項のみで与えられるものとし,

$$P = -l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} W^* \{ \gamma (w_{\mathbb{I}}^{(1)} + w_{\mathbb{I}}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) - \kappa (\bar{u}^{(1)} + u^{(2)}) \} ds \quad (7.5)$$

と書く。

(7.5) に (4.3), (4.6), (4.7) および (5.8), (5.9) を代入すると,

$$P = -\frac{l^2 \rho (V + \bar{w}_a)}{4\pi^2 h^2} \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu' (\mu' \lambda - lk / \mu) (\mu' \lambda - lk / \mu')}{\lambda + lk} \times \sin \frac{1}{2} (\lambda + lk) (\tau - \tau') \cdot I_{ik}(|\lambda| \mu <) K_{ik}(|\lambda| \mu >) d\lambda$$

注) $\rho \kappa \mathbf{q}$ の由来を線型理論によって具体的に説明する。翼上下面の圧力の相加平均を \bar{p} とすると, 翼弦上の一点に働く翼厚に基づく抵抗成分は $-2\bar{\varepsilon} \bar{p}$ である。 $\bar{\varepsilon}$ は (6.1) に示すもので, (6.5)

より $\bar{\varepsilon} = \kappa / (2W)$ である。線型理論では $\bar{p} = -\rho W \partial \Phi / \partial s = -\rho W \bar{u}$ であるから, $F = -2\bar{\varepsilon} \bar{p} = \rho \kappa \bar{u}$ となる。

$$\begin{aligned}
& -\frac{l^4 \rho(V + \bar{w}_a)}{2\pi^2 h^2} \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \\
& \times I_{ik}(lk\mu<) K_{ik}(lk\mu>) - \frac{l^2 \rho(V + \bar{w}_a)}{4\pi^2 h^2} \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \kappa ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} (\mu\lambda - lk/\mu) \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') \cdot I_{ik}(|\lambda|\mu<) K_{ik}(|\lambda|\mu>) d\lambda \\
& - \frac{l^2 \rho(V + \bar{w}_a)}{4\pi^2 h^2} \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa ds \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\mu'\lambda - lk/\mu') \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') \\
& \times I_{ik}(|\lambda|\mu<) K_{ik}(|\lambda|\mu>) d\lambda \\
& - \frac{l^4 \rho(V + \bar{w}_a)}{4\pi^2 h^2} \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa ds \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \kappa ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda + lk) \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') \\
& \times I_{ik}(|\lambda|\mu<) K_{ik}(|\lambda|\mu>) d\lambda \tag{7.6}
\end{aligned}$$

と書かれる。

(7.6)の右辺第1項および最終項については、 r, s に関する積分と r', s' に関する積分順序を交換し、 r, s と r', s' の記号を交換すると、それぞれは全く同形で符号のみが異なる式となるからそれ等は0でなければならない。第3項についても同様の方法で積分順序を交換すると、第4項と同形で符号のみが異なる式

となるので互いに消し合って、(7.6)の右辺は第2項のみが残る。以上の演算で r, r' の積分は $\mu = \mu'$ を境として $\mu' < \mu, \mu' > \mu$ の領域で被積分関数が異なる形をとるので、 r, r' の積分順序の交換に際して Dirichlet 変換を利用する必要がある。

結局

$$\begin{aligned}
P = & -\frac{l^4 \rho(V + \bar{w}_a)}{2\pi^2 h^2} \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \\
& \times I_{ik}(lk\mu<) K_{ik}(lk\mu>) \tag{7.7}
\end{aligned}$$

となる。

(7.7)の右辺は線型理論のときの損失エネルギーの表示式の V が $V + \bar{w}_a$ と入れ代わっただけで他は全く同形である。エネルギー輸送定理によって損失エネルギーを求めたとすると、そのときの輸送速度は定ピッチ理論の仮定によって $V + \bar{w}_a$ とすべきであるから、(7.7)の左辺が定ピッチ非線型理論における損失エネルギーになることは運算を待つまでもなく明らかである。すなわち損失エネルギーを E とすると

$$E = \Omega Q - VS \tag{7.8}$$

となる。よって翼厚を有限とした定ピッチ非線型の流場においてもエネルギー定理は近似的に成立つ。

(4.7)を参照し、(7.7)を整理すると、

$$\begin{aligned}
P = & -l\rho \int_{r_b}^{r_0} W * \Gamma w_1^{(1)} dr \\
= & -l\rho \int_{r_b}^{r_0} W * \Gamma (\bar{w}_t \sin \varepsilon_1 - \bar{w}_a \cos \varepsilon_1) dr \\
= & l\rho \int_{r_b}^{r_0} (\Omega r + \bar{w}_t) \bar{w}_a \Gamma dr \\
& - l\rho \int_{r_b}^{r_0} (V + \bar{w}_a) \bar{w}_t \Gamma dr
\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
P = & l\rho \Omega \int_{r_b}^{r_0} r(V + \bar{w}_a) \Gamma dr \\
& - l\rho V \int_{r_b}^{r_0} (\Omega r + \bar{w}_t) \Gamma dr \tag{7.9}
\end{aligned}$$

となる。

以上の演算によって、螺旋渦の流場に翼厚を表わす吹出し分布を重ねても、それによって Munk の定理は阻害されることはなく、むしろその内容が拡張されたことがわかる。それ等を整理すると、損失エネルギーに関する定理は、

定理Ⅰ「プロペラの損失エネルギーは束縛渦を前後に移動しても変わらない。」

定理Ⅱ「プロペラの損失エネルギーは翼素の全循環の分布に依存するもので、翼厚には無関係である。」

定理Ⅲ「2点の束縛渦および翼厚を表わす吹出しが互いに影響してひき起こすエネルギー損失は互いに打消す。」

のようにいい表わされる。

元来 Munk の定理は直進翼に関するものである。

それがプロペラにおいても類似した形で表現されることは前著で述べた処であるが、それを応用する段階で直進翼の場合とはかなり異なった性格が現われる。

直進翼においては損失エネルギーがそのまま誘導抵抗に対応するので、Munk の定理によって、揚力線でも揚力面でも翼特性の表示に変わりのないことが示される。一方プロペラの場合、損失エネルギーはトルクおよび推力のなす仕事の差である。Munk の定理は損失エネルギーに関するもので、推力とトルクのそれぞれの表示式が揚力線と揚力面で同じになるという保証はしていない。これは極わめて重要なことである。このようにプロペラで Munk の定理と呼んで来たものは直進翼の Munk の定理とはかなり異なった性質をもっているため、一般の誤解を避けるため、上述の損失エネルギーに関する3つの定理と Munk の定理、守屋の定理をあわせて、プロペラの「変位定理」と呼ぶのがよいであろう。

8. 揚力面の積分方程式

プロペラの形状および作動状態を与えて、翼面上の循環分布を求める積分方程式は (6.4), (6.5) の境界条件に4節および5節で導いた誘導速度の表示式を代入すれば得られる。それらの表示式を数値計算に好都合な形に整理しておく必要がある。

(6.4) および (6.5) より

$$-W^* \sin(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) = w_{\parallel}^{(1)} + \bar{w}^{(2)} + (\bar{u}^{(1)} + u^{(2)}) \sin(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \quad (8.1)$$

$$W^* \bar{\varepsilon} \cos(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) = \kappa/2 - (\bar{u}^{(1)} + u^{(2)}) \times \bar{\varepsilon} \cos(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \quad (8.2)$$

である。この式の計算に必要なものは $w_{\parallel}^{(1)}$, $\bar{w}^{(2)}$, $\bar{u}^{(1)}$, $u^{(2)}$ および、表面には現われていないが ε_1 の計算に必要なものとして $w_{\parallel}^{(1)}$ がある。 w , u 等の積分記号の中に未知関数 γ および κ が含まれるので、(8.1), (8.2) は γ , κ に関する連立積分方程式である。

Green 関数の数値計算はむつかしいので、実用計算には (3.7), (5.2) より導いた w , u 等の表示式を用いる方がよい。

$$K(v; \mu, \mu') = -\frac{\sqrt{1+\mu'^2}}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{-\infty}^v \left\{ \frac{\mu\mu' + \cos v'_m}{R^3} - \frac{3(\mu v' - \mu' \sin v'_m)(\mu' v' - \mu \sin v'_m)}{R^5} \right\} dv' \quad (8.9)$$

である。

(12)

まず (3.7) より $w^{(1)}$ の表示式を求めてみる。これは前著にも示したものであるが、ここではその演算の方法を変えている。

$$w^{(1)} = \frac{h}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} ds' \times \int_{-\infty}^{\tau} \frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} \frac{1}{R} \Big|_{\sigma=\sigma'} d\mathbf{T} \quad (8.3)$$

である。ただし、

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{h\sqrt{1+\mu^2}} \left\{ \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} - \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}'} = \frac{1}{h\sqrt{1+\mu'^2}} \left\{ \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma'} - \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}'} \right\}$$

であるが、この演算を

$$\frac{\partial^2}{\partial n \partial n'} = -\frac{1}{h^2 \sqrt{1+\mu^2} \sqrt{1+\mu'^2}} \times \left\{ \left(\mu' + \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} - \left(\mu' - \frac{1}{\mu'} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \right\} \times \left\{ \left(\mu + \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} - \left(\mu - \frac{1}{\mu} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{T}} \right\} \quad (8.4)$$

としても結果に変わりはない。

(8.3) に (8.4) の演算を行なって整理すると、

$$w^{(1)} = \frac{1}{8\pi h^2 \sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \int_{-\infty}^{\tau} \times \left\{ \frac{\mu\mu' + \cos v'_m}{R^3} - \frac{3(\mu v' - \mu' \sin v'_m)(\mu' v' - \mu \sin v'_m)}{R^5} \right\} d\mathbf{T} \quad (8.5)$$

となる。ただし、

$$\bar{R} = \sqrt{v'^2 + \mu^2 + \mu'^2 - 2\mu\mu' \cos v'_m} \quad (8.6)$$

$$v = (\tau - \tau')/2, \quad v' = (\mathbf{T} - \mathbf{T}')/2, \quad v'_m = v' - 2m\pi/l \quad (8.7)$$

である。

(8.5) の記号を整理すると、

$$-w^{(1)} = \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma K \left(\frac{\tau - \tau'}{2}; \mu, \mu' \right) d\tau' \quad (8.8)$$

の形に書き表わされる。ここに、

(4.8) より

$$-w_I^{(1)} = \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma K(0; \mu, \mu') d\tau' \quad (8.10)$$

であるから,

$$-w_{II}^{(1)} = -(w^{(1)} - w_I^{(1)}) = \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma K^{(0)} \left(\frac{\tau - \tau'}{2}; \mu, \mu' \right) d\mu' \quad (8.11)$$

ただし,

$$K^{(0)}(v; \mu, \mu') = -\frac{\sqrt{1+\mu'^2}}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_0^v \left\{ \frac{\mu\mu' + \cos v'm}{R^3} - \frac{3(\mu v' - \mu' \sin v'm)(\mu' v' - \mu \sin v'm)}{R^5} \right\} dv' \quad (8.12)$$

である。

(8.9) は前著の式と形が異なっている。書き改めると

$$K(v; \mu, \mu') = -\frac{\sqrt{1+\mu'^2}}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=1}^{l-1} \int_{-\infty}^v \left\{ \frac{\mu\mu' + \cos v'm}{R^3} - \frac{3(v' + \mu\mu' \sin v'm)(\mu\mu'v' + \sin v'm)}{R^5} + \frac{3(1+\mu^2)(1+\mu'^2)v' \sin v'm}{R^5} \right\} dv'$$

である。ここで被積分関数の第2項において部分積分を行なうと

$$K(v; \mu, \mu') = -\frac{\sqrt{1+\mu'^2}}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \frac{\mu\mu'v + \sin v'm}{R^3} - \frac{3\sqrt{1+\mu^2}(1+\mu'^2)^{3/2}}{8\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{-\infty}^v \frac{v' \sin v'm}{R^5} dv' \quad (8.13)$$

となり, 前著の式が得られる。ただし $v_m = v - 2m\pi/l$ である。

$\bar{w}^{(2)}$ は (5.6) に示すものであるが, これを計算しやすい形に書くと,

$$\bar{w}^{(2)} = \frac{1}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \int_{\tau_1}^{\tau_2} \kappa \sqrt{1+\mu'^2} \times \frac{\mu v - \mu' \sin v'm}{R^3} d\tau' \quad (8.14)$$

である。

$\bar{u}^{(1)}$ は (4.2) に与えられるもので, $\bar{w}^{(2)}$ とほとんど同じ形をしている。すなわち,

$$\bar{u}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \times \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sqrt{1+\mu'^2} \frac{\mu'v - \mu \sin v'm}{R^3} d\tau' \quad (8.15)$$

である。

$u^{(2)}$ は (5.7) に与えられるものであるが, これも同じように,

$$u^{(2)} = -\frac{1}{8\pi\sqrt{1+\mu^2}} \sum_{m=0}^{l-1} \int_{\mu_b}^{\mu_0} d\mu' \times \int_{\tau_1}^{\tau_2} \kappa \sqrt{1+\mu'^2} \frac{v + \mu\mu' \sin v'm}{R^3} d\tau' \quad (8.16)$$

と書かれる。

(8.1), (8.2) を計算するに当たって, $w_I^{(1)}$, $w_{II}^{(1)}$, $\bar{w}^{(2)}$, $\bar{u}^{(1)}$, $u^{(2)}$ の数値計算には (8.10), (8.11), (8.14), (8.15), (8.16) を用いるのがよい。

9. プロペラ特性の表示式

揚力面理論による推力およびトルクの表示式は, 揚力線理論によるそれらにさらに揚力面特有の項が加わる。この項はこれまで計算されたことがない。無視してよいという明確な理由はないので, 今後は計算されることが望ましい。

まず揚力線と揚力面との表示式の相違を翼素への流入速度の成分によって表わしてみる。

推力およびトルクの表示式は (7.2), (7.3) であるが, 右辺最終項は何れも小さいと思われるので, 本節では省略する。

$$\cos(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \doteq 1, \quad w_{II}^{(1)} + \bar{w}^{(2)} \doteq (W^* + \bar{u}) \sin(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)$$

であることを考慮すると, (7.2), (7.3) より,

$$S = l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma(W^* + \bar{u}) \cos \varepsilon_0 ds - l\rho \times \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa \bar{u} \sin \varepsilon_1 ds \quad (9.1)$$

$$Q = l\rho \int_{r_b}^{r_0} r dr \int_{t_1}^{s_2} \gamma(W^* + \bar{u}) \sin \varepsilon_0 ds + l\rho \times \int_{r_b}^{r_0} r dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa \bar{u} \cos \varepsilon_1 ds \quad (9.2)$$

が得られる。

Fig. 4 を参照すると

$$\left. \begin{aligned} (W^* + \bar{u}) \cos \varepsilon_0 &= \Omega r + w_{t1} + w_{t2} \\ (W^* + \bar{u}) \sin \varepsilon_0 &= V + w_{a1} + w_{a2} \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

である。ただし $\cos(\varepsilon_0 - \varepsilon_1) \doteq 1$ とする。

(9.3) を (9.1), (9.2) に代入すると

$$\begin{aligned} S &= l\rho \int_{r_b}^{r_0} (\Omega r + w_t) \Gamma dr \\ &+ l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma w_{t2} ds \\ &- l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa \bar{u} \sin \varepsilon_1 ds \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$\begin{aligned} Q &= l\rho \int_{r_b}^{r_0} r(V + w_a) \Gamma dr \\ &+ l\rho \int_{r_b}^{r_0} r dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma w_{a2} ds \\ &+ l\rho \int_{r_b}^{r_0} r dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa \bar{u} \cos \varepsilon_1 ds \end{aligned} \quad (9.5)$$

と書かれる。(9.4), (9.5)の右辺第1項は揚力線理論の推力およびトルクである。第2項は揚力面理論において現われたもので、一般に0とならない。第3項はいうまでもなく翼厚を有限としたことから生じたものである。

w_{t2} , w_{a2} は

$$\left. \begin{aligned} w_{t2} &= \left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{II}^{(1)}}{r \partial \theta} \Big|_{\sigma=\sigma'} + \frac{\partial \Phi_{II}^{(2)}}{r \partial \theta} \Big|_{\sigma=\sigma'} \\ w_{a2} &= \left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{II}^{(1)}}{\partial x} \Big|_{\sigma=\sigma'} + \frac{\partial \Phi_{II}^{(2)}}{\partial x} \Big|_{\sigma=\sigma'} \end{aligned} \right\} \quad (9.6) \end{aligned} \right\}$$

であるから, (3.8) を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{II}^{(1)}}{r \partial \theta} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= -\frac{l^2}{4\pi^2 h^2} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ &\times \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\mu' \lambda - lk/\mu')}{\lambda + lk} \\ &\times \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') \\ &\times I_{\nu k}(|\lambda| \mu <) K_{\nu k}(|\lambda| \mu >) d\lambda \quad (9.7) \\ \frac{\partial \Phi_{II}^{(1)}}{\partial x} \Big|_{\sigma=\sigma'} &= -\frac{l}{4\pi^2 h^2} \int_{r_b}^{r_0} dr' \int_{s_1}^{s_2} \gamma ds' \sum_{k=-\infty}^{\infty} \\ &\times \frac{\lambda(\mu' \lambda - lk/\mu')}{\lambda + lk} \\ &\times \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') \\ &\times I_{\nu k}(|\lambda| \mu <) K_{\nu k}(|\lambda| \mu >) d\lambda \quad (9.8) \end{aligned}$$

である。

プロペラ翼の平面形が前後対称で, γ の分布形も前後対称のときは注)

注) γ が前後反対称の場合も同じ結果になるが, 実際問題にはあまり関係がない。

$$\begin{aligned} &\int_{s_1}^{s_2} \gamma ds \int_{s_1}^{s_2} \gamma \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') ds' \\ &= \frac{h^2}{4} \sqrt{1 + \mu'^2} \sqrt{1 + \mu'^2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma d\tau \\ &\times \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)(\tau - \tau') d\tau' \\ &= \frac{h^2}{4} \sqrt{1 + \mu'^2} \sqrt{1 + \mu'^2} \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)\tau d\tau \right. \\ &\times \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \cos \frac{1}{2}(\lambda + lk)\tau' d\tau' \\ &- \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \cos \frac{1}{2}(\lambda + lk)\tau d\tau \\ &\times \left. \int_{\tau_1}^{\tau_2} \gamma \sin \frac{1}{2}(\lambda + lk)\tau' d\tau' = 0 \right. \end{aligned}$$

であるから, $\kappa=0$ と仮定すると, (9.4), (9.5) の右辺第2項, 第3項は0となって, S および Q の表示式は揚力線のもの一致する。したがって前後対称のプロペラが最適に近い状態で作動しているときの特性は揚力線理論の表示式で充分よい結果が得られるであろう。一般の場合には (9.4), (9.5) の第2項の影響を考える必要がある。これ等の式は形式的なもので, 実際の計算には次のような考慮が必要である。

揚力面理論では一般に循環分布密度の解に前縁で無限大となるものが存在し, このため2次元流でも抵抗が有限となる。一方揚力面前縁では厚さは無限小でも, 圧力が無限大のため, これに働く吸引力として有限なもの導かれる^{9), 10)}。2次元流では上記抵抗と吸引力を加えたものが0となるので, 揚力面理論と2次元ポテンシャルの翼型理論との間に食い違いはない。この考えによると, 推力およびトルクの実用計算では (7.2) および (7.3) に吸引力の推力およびトルクの成分を加えた式を用いる必要がある。7節で吸引力を省略したのは記述の繁雑を避けたためで, これを加えたとしても, 7節の計算を厳格に行なえば, 吸引力は抵抗の一部と消し合うことになるので, 結果に変わりはない。

(7.2), (7.3) と (9.4), (9.5) とは軸方向および回転方向流速の成分の分け方が異なるだけで, 同等な式であるが, S および Q に吸引力を導入するための解析には (7.2), (7.3) の表示式が適している。

(7.2), (7.3) の右辺第1項はそれぞれ揚力面の揚力に基づくもの, 第2項は誘導抵抗に基づくものであるが, 定ピッチ理論の揚力面は hydrodynamic pitch の螺旋面上にあるため, 揚力の中に自由渦による誘導抵抗が成分として含まれている。そして束縛渦の誘導速

度による誘導抵抗に基づくものはすべて (7.2), (7.3) の第2項の中にある。

翼素の誘導抵抗で (7.2), (7.3) の第2項に対応するものを,

$$\delta D_b = - \int_{s_1}^{s_2} \gamma (w_{II}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) ds \quad (9.9)$$

と書くことにする。翼素に働く流体抵抗はこれだけではなくて, γ が前縁に特異点をもつときは, さらに前縁吸引力 δD_s を差し引かねばならないし, また翼断面の摩擦抵抗 δD_f を加えねばならない。すなわち翼素の抵抗 δD は,

$$\delta D = \delta D_b - \delta D_s + \delta D_f \quad (9.10)$$

である。

c を翼弦長としたとき, γ が

$$\gamma = A^{(0)}(r) \sqrt{\frac{c/2-s}{c/2+s}} + A^{(1)}(r) \sqrt{1-(2s/c)^2} + \dots \quad (9.11)$$

の形に表わされるものとすると, 翼素に働く前縁吸引力 δD_s は,

$$\delta D_s = \frac{\pi}{8} \rho c (A^{(0)})^2 \quad (9.12)$$

である。

したがって, (7.2), (7.3) の右辺第2項の s に関する積分の部分 (9.10) で置換えると,

$$\begin{aligned} S = & l\rho \int_{r_b}^{r_0} \cos \varepsilon_1 dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma (W^* + \bar{u}) ds \\ & + l\rho \int_{r_b}^{r_0} \sin \varepsilon_1 \left\{ \int_{s_1}^{s_2} \gamma (w_{II}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) ds \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{8} c (A^{(0)})^2 - \int_{s_1}^{s_2} \kappa \bar{u} ds - \delta D_f \right\} dr \quad (9.13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q = & l\rho \int_{r_b}^{r_0} r \sin \varepsilon_1 dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma (W^* + \bar{u}) ds \\ & - l\rho \int_{r_b}^{r_0} r \cos \varepsilon_1 \left\{ \int_{s_1}^{s_2} \gamma (w_{II}^{(1)} + \bar{w}^{(2)}) ds \right. \\ & \left. + \frac{\pi}{8} c (A^{(0)})^2 - \int_{s_1}^{s_2} \kappa \bar{u} ds - \delta D_f \right\} dr \quad (9.14) \end{aligned}$$

である。これが揚力面理論におけるプロペラの推力とトルクを計算するための基礎式である。

(9.13), (9.14) の右辺第1項, 第2項をまとめて, (9.1), (9.2) の形に書くと,

$$\begin{aligned} S = & l\rho \int_{r_b}^{r_0} dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma (W^* + \bar{u}) \cos \varepsilon_0 ds \\ & + \frac{\pi l\rho}{8} \int_{r_b}^{r_0} \sin \varepsilon_1 \cdot c (A^{(0)})^2 dr \\ & - l\rho \int_{r_b}^{r_0} \sin \varepsilon_1 dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa \bar{u} ds \end{aligned}$$

$$- l\rho \int_{r_b}^{r_0} \sin \varepsilon_1 \cdot \delta D_f dr \quad (9.15)$$

$$\begin{aligned} Q = & l\rho \int_{r_b}^{r_0} r dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma (W^* + \bar{u}) \sin \varepsilon_0 ds \\ & - \frac{\pi l\rho}{8} \int_{r_b}^{r_0} \gamma \cos \varepsilon_1 \cdot c (A^{(0)})^2 dr \\ & + l\rho \int_{r_b}^{r_0} r \cos \varepsilon_1 dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa \bar{u} ds \quad (9.16) \end{aligned}$$

である。数値計算にはこの式を用いるのがよいであろう。

10. 揚力面理論における最適プロペラの条件

最適プロペラの問題は, まず最適プロペラに適合する翼面上の循環分布密度を求め, 次にこの循環分布密度をもつプロペラの形状を求めるという手順で解かれる。

最適プロペラに適合する循環分布密度は

(1) プロペラの半径, 作動状態およびトルク (または推力) が与えられたとき, エネルギー損失が極小であること,

(2) shock free entry であること,

の2つの条件をみたすものと定め, これを循環分布密度の最適条件と呼ぶことにする。

プロペラの第二境界値問題は (1) の条件を満足する循環分布を求めることである。揚力線理論では (1) により翼素の全循環の半径方向分布形が定まり, (2) によって翼弦方向の循環分布密度の形が定まるといように2つの条件がある程度独立に処理される。ここである程度といったのは, 現在の揚力線理論では camber 修正, pitch 修正のようなものを考えているからである。

揚力面理論では (1), (2) の条件が互いに関連をもっているので, 最適プロペラ問題の解法が複雑になる。

最適条件 (2) より (9.11) の $A^{(0)}$ は0であるから, これを無視したトルクの表示式 (9.5) はそのままの形で最適プロペラのトルクの表示式として用いることができる。一般に最適プロペラの理論では翼断面の摩擦抵抗は省略するので,

$$\begin{aligned} P = & \Omega l\rho \int_{r_b}^{r_0} r (V + \bar{w}_a) \Gamma dr + \Omega l\rho \\ & \times \int_{r_b}^{r_0} r dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma w_{a2} d - \Omega l\rho \int_{r_b}^{r_0} r dr \\ & \times \int_{s_1}^{s_2} \kappa \bar{u} \cos \varepsilon_1 ds - \Omega l\rho \int_{r_b}^{r_0} r dr \int_{s_1}^{s_2} \gamma w_{a2} ds \\ & + \Omega l\rho \int_{r_b}^{r_0} r dr \int_{s_1}^{s_2} \kappa \bar{u} \cos \varepsilon_1 ds \end{aligned}$$

$$-l\rho V \int_{r_b}^{r_0} (\Omega r + \bar{w}_i) \Gamma dr \quad (10.1)$$

と書くと、右辺第3項までは ΩQ に等しい。

最適条件(1)は、(10.1)の右辺第3項までを一定に保ちながら、右辺全体を極小にすることである。このような揚力面理論では一般に Betz の条件は成立たない。この極値問題を直接解くことは計算が繁雑で実用に適しない。

プロペラの平面形が前後対称で、 r も前後対称なとき、翼厚を無視すれば、9節で述べたように ΩQ の表示式は(7.9)の右辺第1項で与えられるので、従来の方法によって最適プロペラを計算することができる。

しかし前後非対称な平面形および循環分布密度、さらに翼厚の影響を考慮した場合¹¹⁾については、camber 修正、pitch 修正を計算しただけで揚力面補正がされているとするのは充分ではなく、大きな skew 等のあるプロペラのように(9.5)の第2項以下が大きくなるものではさらに、Goldstein の循環分布に対する補正を考える必要があるであろう。

結 言

定ピッチ非線型理論の流体モデルの形成にはかなり技巧的なものがあるため、仮定を厳格に守ろうとすると、物理法則と矛盾するところが現われたりして、一部には統一を欠く処があった。これは実用理論の宿命であって、線型理論の構成の完璧さに及ばないのは止むを得ないところであろう。

得られた主な結果は次の通りである。

- (1) 翼厚を考慮した流場においてもエネルギー定理が成立つ。ただしこの場合には Lagally の力を加える必要がある。
- (2) 翼厚を考慮した流場においても Munk の定

理、守屋の定理は成立つ。

- (3) 揚力面理論と揚力線理論とはプロペラ特性の表示式に相違がある。
- (4) 揚力面理論では前後対称の平面形および循環分布密度をもつプロペラの場合に限って、エネルギー損失極小の条件として Betz の条件を採用することができる。

参 考 文 献

- 1) 花岡達郎, "プロペラの基礎理論", 般研報告, 第5巻, 第6号, 1968
- 2) 菅井和夫, "船用プロペラ特性解析法に関する研究", 造船学会論文集, 第128号, 1970
- 3) Gersten, K.: "Nichtlineare Tragflächentheorie insbesondere für Tragflügel mit kleinem Seitenverhältnis", Ingenieur-Archiv, Bd. 30, 1961
- 4) Gray, A. and Mathews, G. B., "Bessel Functions", 1922, pp. 103
- 5) 守屋富次郎, "プロペラ翼における Biot-Savart の法則の積分に就いて", 日本航空学会誌, 第9巻, 第89号, 昭和17年9月
- 6) Kondo, K., "The Potential-theoretical Fundamentals of Aerodynamics concerning the Screw Propeller", 九大工学部紀要, 第9巻, 第3号
- 7) 高木又男, "推進器後流の速度場について(第1報)", 造船協会論文集, 第108号, 昭和35年
- 8) Lagally, M., "Berechnung der Kräfte und Momente, die strömende Flüssigkeiten auf ihre Begrenzung ausüben," ZAMM, Bd. 2, Heft 6, 1922
- 9) Grammel, R., "Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges", s. 21, Braunschweig, 1917
- 11) 谷 一郎, "流体力学", 上巻, 岩波書店, pp. 41
- 12) Morgan, W. B., Silovic, V. and Denny, S. B., "Propeller Lifting-Surface Corrections," SNAME, 1968