

有限遮蔽板の再生係数

その1 ガンマ線の多重散乱のモデルと

その有限遮蔽板への応用

山越 寿夫*

Buildup Factors for Rectangular Slab Shields

I. Multiple Scattering Model for Gamma Rays and It's Application to Rectangular Slab Shields

by

Hisao Yamakoshi

Abstract

Behaviour of Energy Buildup Factor is well known for such transmitted gamma rays that have passed through an infinite slab, having infinitely spreaded surfaces with finite thickness, as a result of uniform incidence of monodirectional and monoenergetic gamma-ray beam.

Actually however, one must rather be interested in the behaviour of similar quantity for finite slab because of the fact that finite slab geometry is far more realistic than the infinite one. As behaviour of Energy Buildup Factor for finite slab shield has not been clarified yet, both experimental and theoretical studies are performed to estimate influence of the finiteness on the Energy Buildup Factor. Results of studies are summarized into an expression for correction factor to be multiplied on the Energy Buildup Factor for infinite slabs to yield Energy Buildup Factor for finite ones. Amount of the correction depends on energy and direction of incident gamma-ray beam as well as geometry of the slab and position of detector relative to the slab. As an example of application of the obtained expression on actual problems, prediction of Energy Buildup Factor is performed for some given sets of values of relevant quantities. Results of prediction are compared with experimental results to estimate accuracy of the prediction.

The theoretical study is based on a simple physical model for the mechanism of contribution of multiple scattering on energy spectrum of transmitted gamma-rays. The model is devised, from the view point of successive scattering method, so that the expression of energy spectrum is simple enough to allow one a hand calculation without sacrificing accuracy so much. Validity of the model is verified by comparing both calculated energy spectrum and calculated angular distribution of transmitted energy with experimental results or Monte Carlo results in case of the incident gamma-rays being collimated as a narrow beam.

1. ま え が き

原子力船の内部は、広さが有限で、比較的薄い多く

の鉄板で仕切られている。それら鉄板が原子炉の炉心やその周囲で生じたガンマ線を遮蔽できることに着目し、まず、ある鉄板を透過したガンマ線のエネルギー再生係数が入射線の性質や鉄板の形状と大きさや鉄板に相対的な観測位置等にどのように依存するかを調

* 原子力船部
原稿受付 昭和46年1月21日

べ、まとめたので報告する。このエネルギー再生係数は、観測点におけるガンマ線のうち鉄板中で散乱された成分と散乱されない成分とのエネルギー強度に関する比に数値 1 を加えた量である。

板の中で起るガンマ線の多重散乱が観測点における散乱線のエネルギースペクトルに寄与する物理的機構の考察を行ない、その結果からこの寄与の物理的モデルを設定した。このモデルは、鉄板を透過したガンマ線の種々の性質について、測定値やモンテカルロ計算の結果を良く説明することができ、またエネルギー再生係数の計算に用いた場合は短時間で多種類のパラメータを動かす計算を可能とする。

飛来するガンマ線を物体で遮蔽する場合は、その中で生ずるガンマ線の多重散乱が物体の後方に透過したガンマ線の場の強度にどれ程の寄与をするか推定する必要がある。ガンマ線に対するボルツマンの輸送方程式に個々の問題の性質に応じた近似を施し、境界値問題としてこの多重散乱の効果を取り扱う場合は、多重散乱が散乱場の強さにもたらす寄与は解の中に閉じた形で含まれる。

この方法により無限平板を対象とした研究では、高エネルギーのガンマ線の輸送問題や、平板が厚いことによるガンマ線の深い透過の問題や核的性質の異なる遮蔽板の互層をガンマ線が透過する場合の輸送問題などがあり、多くの成果をおさめている。¹¹⁻¹²⁾

しかし、この方法が有効なのは、遮蔽体の空間的記述と入射線の入射方向並びに空間的記述とが単純であってボルツマンの輸送方程式が高々、二次元あるいは一次元問題の形式に帰着できて、かつそれに伴う境界条件も単純な場合に限定されている。

ところで、有限な大きさの鉄板を空間的に組合せてつくった区画構造をもつ遮蔽体や有限の広がりを持つ遮蔽板によるガンマ線の透過、散乱の問題に輸送方程式を適用して解くことは、三次元の輸送方程式を複雑な境界条件のもとで解くことになり、信頼性の高い解を得ることが事実上困難となる。

このような事情から、有限遮蔽板の後方のガンマ線の場の強度の計算の際、遮蔽板の中のガンマ線の行動を逐次追跡する立場に立ち、多重散乱線が散乱場の強度に寄与する機構の物理的モデルを設定し散乱場の強さが簡潔で見通し良く、かつ精度も良く求まるように留意する方法をとることとする。

そのように設定されたモデルによれば、多重散乱からの散乱場の強さへの寄与は境界値問題の場合の解のような閉じた形にはならず、輸送方程式の解を逐次の

散乱段階からの寄与の和の形で級数展開した形となる。展開の打ち切り項は問題により異なるが、ここでは第三項までで打ち切った場合を考える。このことは、二重散乱までを考慮の対象としていることに相当する。

一方において、区画構造を作る遮蔽体や有限遮蔽板によるガンマ線の透過、散乱の問題を電子計算機の使用により解く有力な手段としてモンテカルロ法がある。これは遮蔽体の中で起る現象を確率論的手法を用いて模擬することにより、ガンマ線の粒子の経歴と行動とを追い、ある指定された位置にある観測点へ到着する粒子、あるいはそれがもたらす量を集計することで解の値の空間分布を求めるのであるが、結果の精度を向上させるために原理的には入射粒子の個数を多くとることになる。したがって、この方法は精度の良い結果を得るために多くの計算時間と費用がかさむ傾向があり多種のパラメータを動かした広汎なパラメータサーベイには不向きといえよう。そこでこの方法については、むしろ標的を絞ってやることでその利点を生かすという考え方から、物理的モデルの妥当性の検証のために用いることにする。

物理的モデルの妥当性が示された後は、このモデルの応用例として、方向の揃った幅の広い単色なガンマ線のビームが有限遮蔽板に斜めに入射した結果、この遮蔽板の後方のガンマ線のエネルギー再生係数を求め、その性質について述べる。

ここでエネルギー再生係数と多重散乱の効果の取り扱いとの関連において、すでに行なわれた研究について述べ、本文の研究の位置づけを明らかにする一助とする。

ある厚さの平板で無限に広い面積を持つ遮蔽板を考え、そこへ単色で方向の揃った無限に幅の広いガンマ線が入射点の法線とある一定の角度をなして一様に入射した結果、その板の後方のガンマ線のエネルギー再生係数が如何なる値と性質を持つかを逐次散乱の見地から理論的に求めたのが Peebles¹³⁾ である。また、細長いスリットで絞った形で単色かつ方向の揃ったガンマ線を上述と同様の遮蔽板に斜めに入射させ、板の裏側表面上の二次元的な線量分布を実験的に求め、この分布を説明するために、板の中の散乱線が板外に逃れる確率に空間分布の効果を検討することを指摘したのは Wickoff¹⁴⁾ 達である。

Peebles の計算においては、遮蔽板の中のガンマ線の多重散乱の効果の取り扱いに次のような仮定があった。すなわち、散乱ガンマ線のうちで、散乱後の進行方向が入射面に散乱線を近づけるような向きのものは

遮蔽板を透過した散乱線の場に何らの影響も与えないとする。ところが、実は入射面の内向き法線と入射線との間の角度（以後、これを入射角と呼ぶ）が大きな場合は、入射線の最初の散乱の散乱角（散乱の前後の飛跡の間の角度のこと）がたとえ小さくても散乱線が入射面に近づくように散乱される可能性が大きく、さらに2回目の散乱で遮蔽板の後方の散乱場の強さに寄与する可能性も大きい。したがって、Peeblesの計算は、多重散乱の高次の段階まで考慮して計算しているものの、多重散乱の寄与を低く評価していることになる。

Wickoff¹⁴⁾によれば、板の後方の散乱線の場を手軽に求める際に多重散乱の効果を再生係数の形で考慮に入れる手法についても問題点の指摘を行なっている。すなわち、その場合の再生係数は板に垂直にガンマ線が入射した場合のものであり板の厚さの関数でもあるが、入射線が斜めに入射する場合の板の厚さを非散乱線の透過距離で与えれば、実在しない遮蔽体領域からの仮想的な散乱線の影響が入り込むことになる。

このような多重散乱の効果の評価法に関する事情を背景として、筆者は多重散乱の効果の評価するいくつかの物理的モデルの妥当性の検討を行なった¹⁵⁾。その結果、後方散乱の計算に有効であったRay-Analysis Methodのような、1回散乱の寄与に再生係数の重みを付けることで多重散乱からの寄与を考慮するモデルは現在の散乱・透過の問題には不適切であることが判明した。それはWickoff等の指摘したような再生係数の計算に伴う板の厚みの選び方の問題もあるが、このモデルでは、最初の散乱が等方散乱であることを暗黙に仮定しておる点にも問題がある。この仮定は後方散乱の場合の角度分布では近似的に満足されているものの強い前方散乱が利く透過問題ではあまり良い近似でないのがその理由である。他方では逐次散乱の立場が支持され¹⁵⁾、これが本文の物理的モデルの基礎となっている。

最近、銃身型に細く絞ったガンマ線を鉄板に種々の入射角で入射させ、散乱線のエネルギーの方向分布や種々の位置の点のエネルギースペクトルや有限板からの散乱線の再生係数等に関する実験的研究が行なわれて来ている¹⁶⁾。その結果の一部分は以下で導く物理的モデルの妥当性の検証にも用いられている。

以上に述べて来た様な多重散乱の取り扱ひの問題点および有限板によるガンマ線の輸送問題の複雑さを克服し、散乱場の強度やエネルギースペクトルが精度良くかつ単純な数学的手続きで容易に求められるように

工夫されたのが本文の物理的モデルである。このモデルにはPeeblesの使用した散乱線の寄与についての仮定はもうけない。

以下、第2章では物理的モデルの説明と設定とを試みる。第3章はモデルにもとづく計算結果を実験値並びにモンテカルロ計算の結果等と比較検討し、第4章ではモデルの応用例として、有限な表面積をもつ平板に単色で方向の揃った幅の広いガンマ線が一様に入射した場合に有限遮蔽板を透過したガンマ線のエネルギー再生係数を求め、その性質についての検討を試み、かつそのパラメタ依存性を簡単な経験式で表わし、さらにこれを逆にエネルギー再生係数の予測に応用した例についても述べることにする。第5章は本文の総括的な考察にあて、第6章では結論とする。

記号

W, H, T	; 有限平板の幅, 高さ, 厚さ (cm)
O, L	; 入射ガンマ線の入射位置と透過の出口位置
x_0, y_0, z_0	; 古い直角座標系における観測点の座標
ξ_0, η_0, ζ_0	; 新しい直角座標系における観測点の座標
θ_0	; 入射点におけるガンマ線の入射角度 (Radian)
θ	; 特性平面上で平板の境界線と ζ 軸とのなす角度 (Radian)
β'	; 特性平面と $y-z$ 平面とのなす角度 (Radian)
θ', θ''	; 最初の散乱の散乱角と次の散乱の散乱角 (Radian)
E_0, E	; 入射ガンマ線のエネルギーと観測点において着目したエネルギー (MeV)
$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)', \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)''$; 最初並びに次のコンプトン散乱の微分散乱断面積 (barns/steradian)
$d\Omega$; ガンマ線の飛行方向の立体角素片 (steradian)
σ	; コンプトン散乱の断面積 (barns)
l, l', l''	; 入射点から最初の散乱の生じた位置までの距離, 最初の散乱と次の散乱との間の距離並びにこの最後の散乱の位置と散乱線の出口の位置との間の距離 (cm)
μ, μ', μ''	; 入射線, 1回散乱線, 2回散乱線に対する線吸収係数 (cm ⁻¹)
z, N	; 平板を構成する物質の原子当りの平均

- 電子数と平均原子数密度 (Electrons /atom), (atoms/cm³)
- F_1, F_2 ; 1回散乱並びに2回の散乱の後に観測点に到達したガンマ線のエネルギースペクトル (Number \times eV/eV/cm²/sec)
- S_I, S_{II} ; 1回散乱の生じた位置並びに2回目の散乱の生じた位置と観測点とを結ぶ線分の長さ (cm)
- R ; 入射線と観測点とを結ぶ線分の長さ (cm)
- I, J, K, φ' ; 2重散乱によるエネルギースペクトルを求めるための4因子
- V_f ; 2重散乱の散乱角が臨界状態に対応して決められた時の最初と次の散乱との間の距離 (cm)
- V''_f ; V_f に対応して、2回目の散乱の生じた位置とそのガンマ線の出口位置との間の距離 (cm)
- δ_c ; 散乱が臨界状態にある時、2重散乱線の出口位置と観測点とを結ぶ線分が入射点と観測点とを結ぶ線分となす角度 (Radian)
- α ; 座標原点と観測点とを結ぶ線分が z 軸となす角度 (Radian)
- θ'_{Uc} ; 散乱が臨界状態にある最初の散乱の散乱角 (Radian), 逆時計まわりに向いている状態に対応
- θ'_{Lc} ; 散乱が臨界状態にある最初の散乱の散乱角 (Radian), 時計まわりに選ばれた状態に対応
- θ'_{UM} ; E を指定した場合に最初の散乱の起り得る範囲が最大となる様な逆時計まわりの θ' (Radian)
- θ'_{LM} ; E を指定した場合に最初の散乱の起り得る範囲が最大となる様な時計まわりの θ' (Radian)
- θ''_{Uc} ; θ'_{Uc} に対応した θ'' , θ'' の向きに関係なく θ''_{Uc} と記すことにする
- θ'_{Ua} ; 方程式 $G(\theta') = 0$ の解 (Radian)
- φ'_{UM} ; θ'_{UM} に対応して η が正の領域で考えた φ' (Radian)
- φ'_{LM} ; θ'_{LM} に対応して η が負の領域で考えた φ' (Radian)
- $g(x)$; x の領域 $a \leq x \leq b$ で単調増加する関数, J の形を知るために便宜上考え

- られたもの
- R' ; L と観測点 P とを結ぶ線分の長さ (cm)
- θ_2 ; 線分 \overline{LP} と $y-z$ 平面とのなす角度 (Radian)
- θ_1 ; 線分 \overline{LP} の $y-z$ 平面への射影が非散乱線の飛跡となす角度 (Radian)
- B_E^∞ ; W も H も無限大の平板 (無限平板と名付ける) に方向の揃ったガンマ線が一様に入射した場合のエネルギー再生係数
- B_E^f ; W と H とが有限な平板に方向の揃ったガンマ線が一様に入射したときのエネルギー再生係数
- Ω_f ; W と H とが有限な平板の観測点に対する立体角 (steradian)
- Ω_{is} ; W と H とが等しくない平板で仮想的に W を一辺とする正方形を考え、これが観測点に対して張る立体角 (steradian)
- Ω_∞ ; W は仮想的正方形の値とし, H が W の値から大きくなり無限大となった極限での平板の立体角 (steradian)
- C_f ; $B_E^f - 1/B_E^\infty - 1 \equiv C_f$
- ϕ ; 観測点における全エネルギー束 (eV \cdot Number/cm²/sec)

2. 散乱線の寄与のモデル

2.1. 問題の説明と座標系

高さ, 幅, 厚さが各々 H cm, W cm, T cm の直方体状のある物質からなる遮蔽板がある。いま, Fig. 1 で左側の $W-H$ 面を入射面, 右側の $W-H$ 面を裏面と名付け, 裏面から右にある距離のところ観測点があるものとする。観測点を中心に半径が $1/\sqrt{II}$ cm の球を考え, これを観測球と名付ける。入射面から入ったガンマ線のうち1回の散乱も受けず

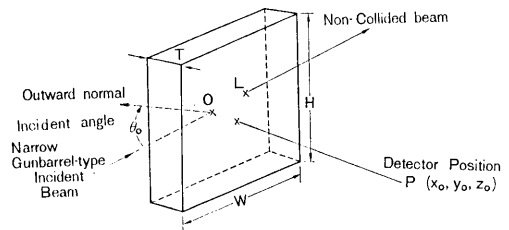


Fig. 1 問題の幾何学的状況の説明

に観測球に到るものもあるが、板内で1回、2回、3回等と種々の散乱の段階を経て観測球を横切るものもある。

ガンマ線源が空間的にある狭い領域にデルタ関数状に存在する場合は、一般に入射線は等方点状線源から来たものとして扱えるし、さらにその源からある特定の方向にだけガンマ線が出て行く場合は、入射線は銃身型の細いビームとして扱える。また、初めに述べた線源が無限に広い平面上に広がっている場合は、それに対応した入射線はそれぞれ無限に広い等方線源からの入射線と考えられるし、2番目に述べた線源が同様な空間分布をしている場合は方向の揃った幅の広い入射線として扱われる。

どのような入射線でも、ある入射点の付近である特定の方向に入射したものについては近似的に銃身型の細いビームとして扱えるので、繁雑を避ける意味もあり、物理的モデルの設定の際は銃身型の細いビームで単色なガンマ線を遮蔽板に任意の入射角で入射する場合を考える。(Fig. 1 参照)

入射エネルギーの値を電子の静止質量の相対論的エネルギーの値 meC^2 を単位として測ることにする。多重散乱の各散乱の段階にあるガンマ線がそれぞれのエネルギーを持って観測球を通過する場合、そのエネルギーの総和をエネルギー束と呼ぶ。この他に、あるエネルギーの付近の微小エネルギー区間 $E \sim E + \Delta E$ に属したエネルギーを持つガンマ線が観測球を横切った場合にその個数 $N(E)\Delta E$ あるいはそれらの持つエネルギーの和 $F(E)\Delta E$ が考えられ、これら微視的な量が設定された物理的モデルの妥当性の検討において重要な目やすとなる。これらをそれぞれナンバースペクトルおよびエネルギースペクトルと呼ぶことにする。本文では微視的量としてエネルギースペクトルを考えることにする。

観測点の位置や遮蔽体の幾何学的形状や入射線の入射角を記述する座標系の原点を入射点 O にとり、 O 点の入射面の内向き法線を z 軸の正の方向に選ぶ。入射線と z 軸とで決定される平面上で原点から z 軸に垂直に y 軸をとりその正方向は入射線の y 軸成分が増加する向きに選ぶ。 x 軸は右手直交系ができるように原点からとる。また非散乱線は裏面上の出口 L を通り抜けるが、便宜上線分 OL の長さを L cm とする。

観測点の位置座標を x_0, y_0, z_0 で表わせば、 z_0 は次の条件をみたしている。

$$z_0 > T > 0$$

2.2. 特性平面

数式の表現の便宜上、前述の座標系以外に別に座標系 (ξ, η, ζ) を入射点 O に取り付け、観測点のある、たとえば ξ 座標成分だけが常に零になるようにする。

z 軸に対応した ζ 軸を入射線の進行方向に選び、 y 軸に対応した η 軸を ζ 軸と観測点とで決定される平面上に原点 O からとれば、 x 軸に対応した ξ 軸に対する観測点の座標成分 ξ_0 は常に零となる。

観測点でのガンマ線のエネルギースペクトルの大よその特徴は、 $\eta-\zeta$ 平面の近傍の散乱の様子でできるが、この散乱の様子は新座標系で記述すれば極めて簡潔になる。今後この $\eta-\zeta$ 平面を特性平面と呼ぶこととする。

以上に述べた2個の座標系は原点のまわりの回転操作をどちらか一方に施せばたがいに重なり、したがって観測点の座標に関し次の対応関係が成立する。

$$\eta_0 = \pm \sqrt{x_0^2 + (y_0 \cos \theta_0 - z_0 \sin \theta_0)^2} \quad (2a)$$

$$\zeta_0 = y_0 \sin \theta_0 + z_0 \cos \theta_0 \quad (2b)$$

$$\xi_0 = 0 \quad (2c)$$

ここで θ_0 は入射角を意味し、 η_0 に対する表現で負の符号は $\tan \theta_0 > y_0/z_0$ の関係が成立する場合に対応する。

回転操作を古い座標系に適用した結果、特性平面上の遮蔽体の領域は ζ 軸方向に互いに L cm ($L = T/\cos \theta_0$) だけ隔たった平行線の内側の領域で表わされ

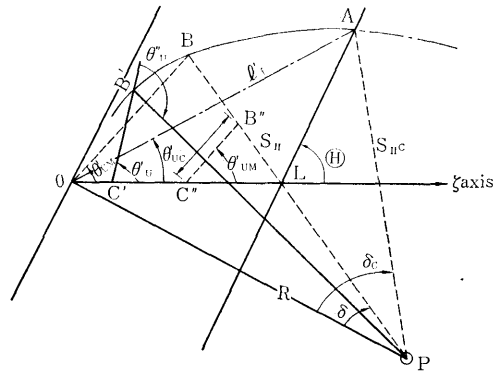


Fig. 2 特性平面上の2重散乱の説明

(Fig. 2 参照)、 ζ 軸に対する勾配は $\tan \theta'$ で表わされる。これは特性平面と $y-z$ 平面とのなす角度 β' 並びに入射角により下記のように表わされる。

$$\tan \theta' \equiv \cot \theta_0 \cdot \sec \beta' \quad (3a)$$

$$\cos \beta' \equiv \frac{y_0 \cos \theta_0 - z_0 \sin \theta_0}{\sqrt{x_0^2 + (y_0 \cos \theta_0 - z_0 \sin \theta_0)^2}} \quad (3b)$$

以上の手続きにより、実測にかかる量は計算に都合

よい量に変換される。

2.3. 散乱の寄与についての考察

以下において、遮蔽板中のガンマ線の多重散乱が観測点におけるガンマ線のエネルギー束の強さに寄与する機構の考察を行ない、大部分の寄与がやって来る領域、つまり寄与の有効領域を見出すことにする。

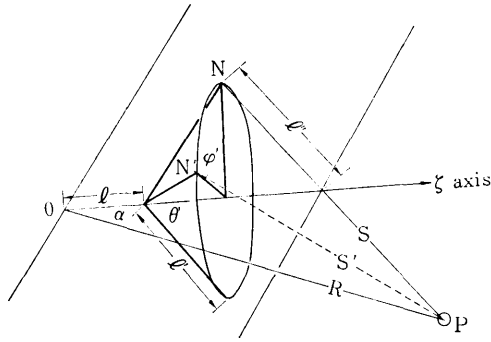


Fig. 3 三次元空間における2重散乱の説明

Fig. 3 には2重散乱の飛跡の一例を示す。一般に、散乱が生ずる前のガンマ線の進行方向に対して散乱後の粒子の相対的進行方向は、2つの進行方向の間のなす角度と、散乱前の進行方向を軸としてそのまわりである基準の方向から散乱後の進行方向まで測った角度とで記述される。前者をその散乱の散乱角と呼び θ で表わし、後者を方位角と呼び φ で表わすこととする。方位角の基準は特性平面上にとり、 η の正の側から測ることとする。

以下の議論においては特にことわらぬ限り、観測球を横切るガンマ線のエネルギーが E と $E+dE$ の間に存在するような散乱状態を対象とする。遮蔽体中での1回限りの散乱で観測球を横切るガンマ線は z 軸上のある点の近傍に存在する寄与の源から来たものと考えられる。他方、2重散乱からの寄与の源は特性平面並びに z 軸を含むある有限な領域の中に分布していると考えられる。観測球において着目するエネルギー E の値により、領域の位置や広がり様子も、またその中で源の分布の様子も共に変わる。

この1回散乱の寄与の計算は2重散乱による寄与の計算にくらべて極めて容易であり、特に問題になることはない。そこで2重散乱の寄与を主として考える。2重散乱の寄与の源の分布する領域を便宜上、2つの部分に分け、一方は特性平面を含むかなり薄い領域、他方はこれを除いた残りの領域とする。前者を領域I、後者を領域IIと呼ぶこととする。各領域の定量的大きさについては後に詳述するとして、ここでは、領

域Iからの寄与がわかれば領域IIからの寄与は、角度の次元を持つある補正因子 φ' で与えられるということにだけ触れておく。

Fig. 2 には領域Iの中の2重散乱の飛跡の例が示してあるが、それらの散乱はすべて次のような散乱角に対する制約を受けている。

$$\cos \theta' + \cos \theta'' = 2 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) \quad (4)$$

E_0 は入射エネルギーを、また θ' と θ'' とはそれぞれ、1回目と2回目の散乱の散乱角を意味する。同図に示す径路O-A-Pは領域Iの中の2重散乱のうちの特殊な場合の一例である。今の例では、入射線のうちで最初の散乱が入射点の近傍で生じ、2回目の散乱が裏側表面上の点Aの近傍で生じた場合のガンマ線が観測球を横切った状態を示すが、この散乱を仮に臨界散乱と呼び、このような状態を臨界状態と呼ぶこととする。今の臨界散乱は原点近傍で1回目の散乱をして点B、Pを通るガンマ線のこの散乱角を次第に小さくして行けば実現される。この操作により、2回目の散乱の散乱角が(4)式にしたがって増大し、したがって幾何学的には2回目の散乱の位置が遮蔽体の内側から裏表面へと近づく。この臨界状態が実現された後に、さらに最初の散乱角を小さくすれば2回目の散乱の位置は遮蔽体から外へとび出してしまふ。現実にはこのような2重散乱は存在せず、臨界状態が丁度2重散乱の存在可能な限界となる。「臨界状態」の名もこの事実に由来する。

以後、臨界状態における最初の散乱の散乱角が z 軸から逆時計まわりに選ばれた場合はその角を θ'_{vc} で、また時計まわりに選ばれた場合は θ'_{lc} で表わすこととする。最初の散乱角を θ'_{vc} で表わした場合は2回目の散乱の散乱角がどの向きになろうとも、便宜上 θ''_{vc} で表わすこととする。

臨界状態では最初の散乱の起る空間的範囲は入射点でデルタ関数的であり、2回目の散乱の起る空間的範囲も、Fig. 2を例にとれば点Aの近傍に、デルタ関数状に限られている。そのため、臨界状態の2重散乱からの寄与は無視し得る程に小さいと考えられる。

さて、1回目の散乱の散乱角、例えば θ'_{vc} が θ'_{lc} よりもある程度大きな値の場合を考える。この場合は2回目の散乱は裏側表面上とそれよりもいく分内側に入ったところまでとの間の範囲で起ることが可能となり、これに対応して、最初の散乱角が同一の値でも最終エネルギー E が同一の値となる2重散乱に関して、最初の散乱が起り得る範囲は z 軸に沿って原点から境

界上の点 L の方へと伸びる。すなわち、1回目の散乱の起る許容範囲が広がる。 θ'_{UV} をある値、例えば Fig. 2 で θ'_{UM} の値に選ぶと、この範囲は最大となり O から L までの範囲ではどの位置で θ'_{UM} の散乱角の1回目の散乱が起っても最終エネルギーは E となる。Fig. 2 を例にとれば、 $O-B-P$ の経路の2重散乱も $O-C'-B'-P$ の2重散乱も共に最終エネルギーは E である。

最初の散乱が遮蔽体中の ζ 軸上すべての位置で同一散乱角を保ちながら同一の最終エネルギーとなるような場合は2重散乱が観測球にもたらすエネルギーの寄与も最大となると考えられる。この状態の散乱角をそれぞれ θ'_{UM} , θ''_{UM} または θ'_{LM} , θ''_{LM} と表わす。

θ'_{UV} をさらに大きくすると最初の散乱の起り得る範囲は減少を始める。Fig. 2 では経路 $O-C'-B'-P$ がこの場合に相当し、線分 $B'-P$ は ζ 軸と遮蔽体の中で交わっている。そこでは、最初の散乱の可能な範囲は線分 $O-C'$ である。このような状態の2重散乱が観測点へもたらすエネルギーへの寄与は以下の3つの原因が重なって急激な減少をする。第1は最初の散乱の起り得る範囲が ζ 軸上で減少し、2重散乱の自由度が減少する効果である。第2は、 θ'_{UV} の増加した事によりガンマ線のエネルギーが低下してガンマ線の線吸収係数が大きくなる効果である。第3は、Fig. 2 でも見られるように2回目の散乱をしたガンマ線が遮蔽板の中を通る際、幾何学的長さが増大する効果である。

以上の観察から、領域 I からの2重散乱の寄与はほとんど1回目の散乱角が θ'_{UC} と θ'_{UM} との間、あるいは θ'_{LC} と θ'_{LM} との間の状態から由来すると考えられる。

Fig. 4 で遮蔽体中の2重斜線を施した部分は、2重散乱のガンマ線のエネルギーが観測点において、1回

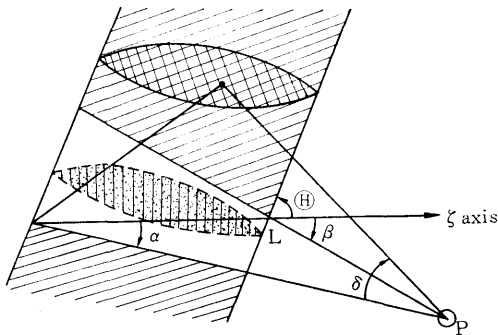


Fig. 4 領域 I における2重散乱の有効領域の説明

限りの散乱によるものの最大のエネルギー値よりも低いエネルギー E で区間、 $E \sim E + \Delta E$ 内におさまるような場合の源の分布領域を示す。また縦線の部分は、逆に1回限りの散乱から来るガンマ線の最大エネルギーよりも高い値で、エネルギー区間 $E \sim E + \Delta E$ に2重散乱したガンマ線のエネルギーが納まる場合につき、寄与の源の分布領域を示す。したがって、観測のエネルギー区間を拡げて、1回限りの散乱によるものの最大のエネルギーよりも高いか、あるいは低いかということだけに観点を変えれば、おのおのの寄与の源の分布は、同図で縦線の部分も含めた白い部分と2重斜線の部分を含めた斜線の部分とに広がる。

2.4. 2重散乱によるエネルギースペクトルの4因子による表現

観測球を横切るガンマ線のエネルギースペクトルのうちで、1回並びに2重散乱による成分 F は原理的には次のように表わされる。

$$\begin{aligned}
 F &= F_1 + F_2 \\
 &\equiv \frac{Nz \cdot E \cdot e^{-\mu l - \mu' l'}}{S_1^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)' \cdot \left(\frac{dl}{\alpha \theta'} \right) \cdot \left(\frac{d\theta'}{dE} \right) \\
 &\quad + \int_{\text{領域 I + II}} \frac{E \cdot (Nz)^2 e^{-\mu l - \mu' l' - \mu'' l''}}{S_{11}^2} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)' \\
 &\quad \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)'' \sin \theta' dl dl' d\theta' d\varphi' \quad (5)
 \end{aligned}$$

ここで第1項は1回限りの散乱からの寄与であり、第2項は2重散乱による部分である。第2項に含まれる多重積分を直接実行しなくても、前節の物理的考察にもとずき多重積分を行なったことに相当する簡潔な解析的表現を得ることができて、それが実用にも供し得るというのが本文の主張する所でもある。

領域 I の2重散乱で、1回目と2回目の散乱の間隔 l' や2回目の散乱の位置と表面上の出口との間の距離 l'' は1回目の散乱の散乱角 θ' と入射点から1回目の散乱までの距離 l により決まるが、2重散乱が透過場の強度に最大の寄与を与える状態では、1回目の散乱の散乱角が決まれば量 l' , l'' は l のみで決まり、数学的取り扱いが非常に簡単になる。最大の寄与を与える散乱の状態には、1回目の散乱角と観測点の位置との組合せで8個の場合が存在し、おのおの場合では Fig. 5a から 5h に示すように1回目の散乱の許容範囲が異なっている。補編 I にはおのおの場合につき、 l' , l'' の l への依存性と許容範囲の具体的表現を記した。

また、1回目の散乱角が、2重散乱が最大の寄与を

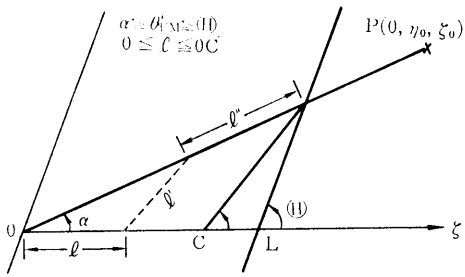


Fig. 5a Pattern-1

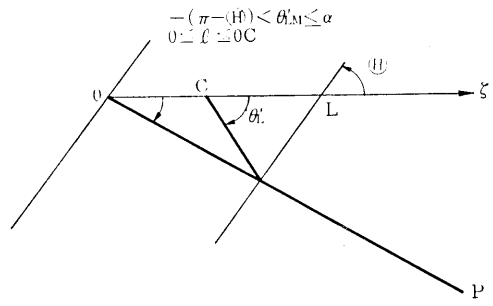


Fig. 5e Pattern-5

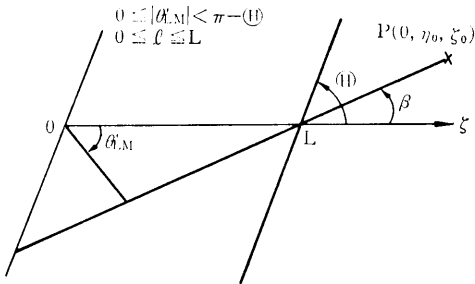


Fig. 5b Pattern-2

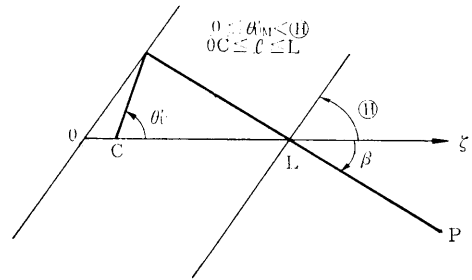


Fig. 5f Pattern-6

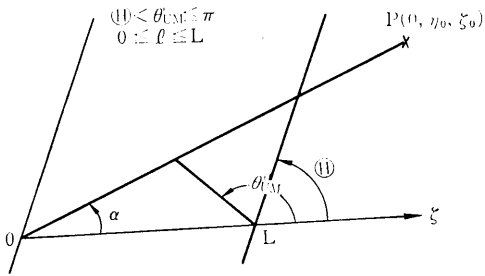


Fig. 5c Pattern-3

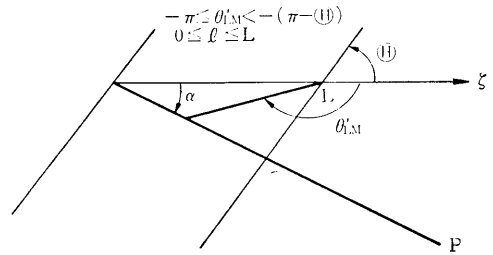


Fig. 5g Pattern-7

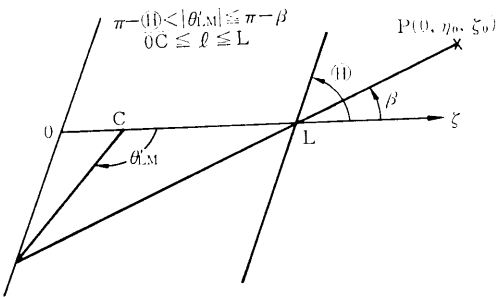


Fig. 5d Pattern-4

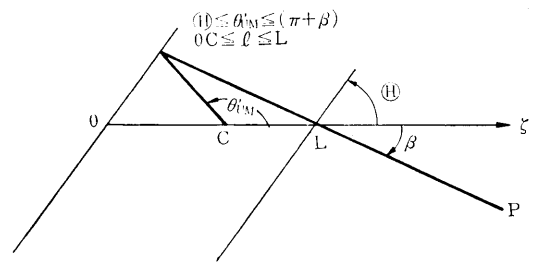


Fig. 5h Pattern-8

Fig. 5a - h 有効な最大寄与をする散乱の8個の場合についての説明

与える場合の1回目の散乱の角度と臨界角との中間の値をとる場合は、2重散乱の寄与の大きさはその1回目の散乱の散乱角の大きさに依存する。そこで最大の寄与に対するこの中間状態すべてからの寄与を補正因子 J として考慮することにする。この意味で、因子 J は1回目の散乱の散乱角がとり得る実効幅（または実効範囲）ともいえる。

さらに、このような中間の散乱角の状態では、この角度の正弦と2個の微分散乱断面積との積が1回目の散乱角の値にはあまり依存しないので、因子 K として別に扱うことにする。

2回目の散乱の位置から観測点までの距離 S_{11} は、観測点が遮蔽板からかなり離れていると考え、入射点と観測点との間の距離 R で近似的に置き代える。

以上の事柄の総合として、領域Iからの2重散乱の寄与は近似的に次の積分で与えられる。

$$\begin{aligned}
 & E \cdot J \cdot K \cdot \int_{\text{許容領域}} \frac{e^{-\mu l - \mu' l' - \mu'' l''}}{S_{11}^2} dl \\
 & \approx \frac{E \cdot J \cdot K}{R^2} \int_{\text{許容領域}} e^{-\mu l - \mu' l' - \mu'' l''} dl \quad (6)
 \end{aligned}$$

最後の積分は補編Iの具体的表現を用いれば容易に実行することができる。この積分値を R^2 で割ったものを因子 I で表わすことにする。

次に、領域IIからの寄与は、1回目の散乱に伴う ζ 軸のまわりの方位角として考慮する。すなわち距離 l' の値を領域Iの時のままに固定させ、ある値 ζ' のところまでを領域IIの内側に属するものとする。一般に観測点は ζ 軸上には存在しないから、方位角が特性平面上から増大して行けば、観測球を横切るガンマ線のエネルギーの値は変化して行き、遂にはエネルギー区間 $(E \sim E + \Delta E)$ から喰み出してしまう。この状態が実現するところをもって、 φ' の値の上限とする。

結局、 F_2 は近似的に次のように4個の因子、 I, J, K, ζ' で表わされることになる。

$$F_2 \approx E \cdot I \cdot J \cdot K \cdot \varphi' \quad (7)$$

2.5. 臨界状態

前に述べた8個の散乱の場合に対応して8個の臨界状態の場合が存在する。Fig. 2にはこれらの一例が示してある。また、Fig. 6aより6hまでにすべての場合が示してあるが、臨界角の計算例はFig. 2について示すこととする。

次の仮定は観測点が遮蔽板からある程度以上離れば十分に成立すると考えられる。

$$\left(\frac{V_f}{R}\right) \ll 1$$

Fig. 2の角度 δc 並びに V_f に対する次の関係は簡単な三角法により導びかれる。(補編II参照)

$$V_f = L \cdot \sin \theta / \sin (\theta - \theta'_{VC}) \quad (9a)$$

$$\delta c = V_f \sin (\theta'_{VC} - \alpha) / R \quad (9b)$$

他方、散乱後の最終エネルギーと散乱角との間に次の関係が存在し、

$$\theta''_{VC} - \theta'_{VC} - \alpha + \delta c$$

$$\cos \theta''_{VC} + \cos \theta'_{VC} = 2 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0}\right)$$

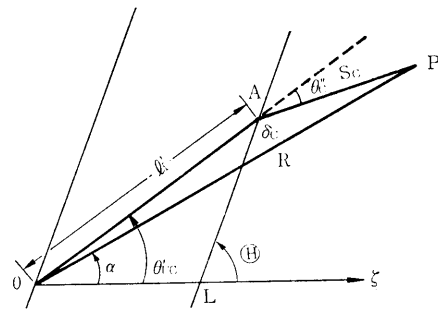


Fig. 6a Pattern-1

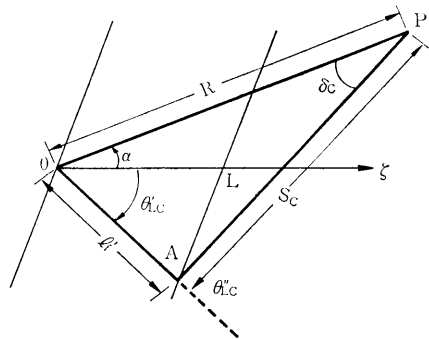


Fig. 6b Pattern-2

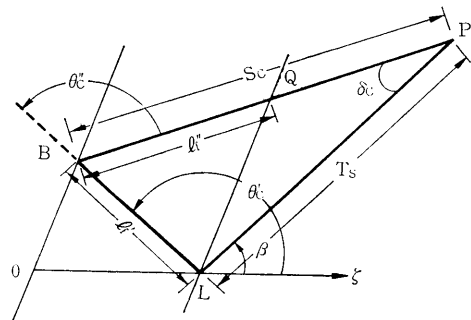


Fig. 6c Pattern-3

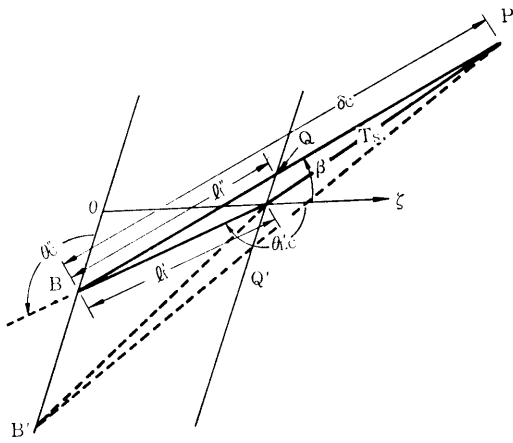


Fig. 6d Pattern-4

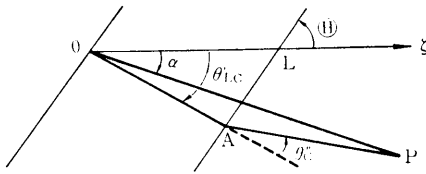


Fig. 6e Pattern-5

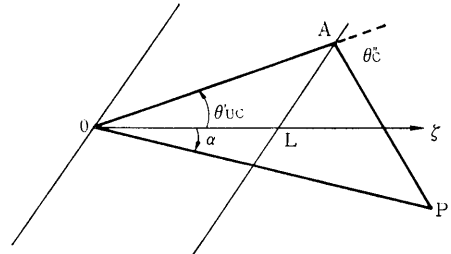


Fig. 6f Pattern-6

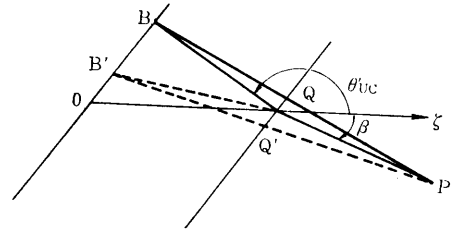


Fig. 6g Pattern-7

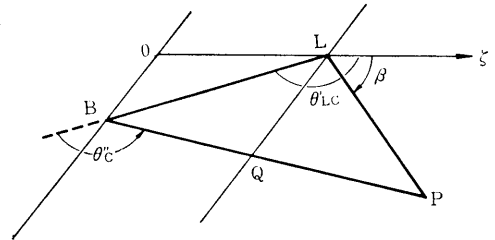


Fig. 6h Pattern-8

Fig. 6a - h 臨界状態を与える散乱の8個の場合についての説明

角度 δ_c は臨界散乱角 θ'_{vc} , 最終エネルギー E , 角度 α を用いて表わされる。

$$\delta_c = \cos^{-1} \left(2 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) - \cos \theta'_{vc} \right) - \theta'_{vc} + \alpha \quad (9c)$$

ところで、欲しい量は θ'_{vc} であり、(9b), (9c) から得られる方程式(10)は両辺にこの欲しい量を含むので θ'_{vc} の表現として閉じた解を期待することは困難である。

$$G(\theta'_{vc}) = \delta_c(\theta'_{vc}) \quad (10)$$

ただし、 $G(\theta'_{vc})$ は次のように定義され、また右辺に

$$\theta'_{vc} \approx \cos^{-1} \left(\frac{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{z} \right)} \right) + \frac{\alpha}{z}$$

は(9b)式を用いる。

$$G(\theta'_{vc}) \equiv \cos^{-1} \left(2 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) - \cos \theta'_{vc} \right) - \theta'_{vc} + \alpha$$

そこで(10)式の右辺を零と置いた斉次式の解 θ'_{va} の周辺で $G(\theta'_{vc})$ を級数展開し、その第2項までの近似で解を得ることとする。

$$\theta'_{vc} \approx \theta'_{va} + \frac{G}{\left(\frac{dG}{d\theta'} \right)} \Big|_{\theta'_{va}} \quad (11)$$

今の例では具体的に θ'_{vc} は

$$\frac{L \sin \Theta \cdot \sin(\theta'_{va} - \alpha) \cdot \left(1 - \left(2 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) - \cos \theta'_{va} \right)^{1/2} \right)}{R \sin(\Theta - \theta'_{va}) \cdot \left(\sin \theta'_{va} + \left(1 - \left(2 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) - \cos \theta'_{va} \right)^2 \right)^{1/2} \right)} \quad (11')$$

で与えられる。

他の臨界状態の場合についても同じ手法が使用でき、補編Ⅲにその結果が示してある。級数展開の第2項まででの切りりの誤差評価は、例えば(11')を(10)式に代入して試みるにより行なえる。次章で対象とする問題の範囲では、この近似誤差は2%程度である。観測点の位置が遠方に離れるほど、この誤差の値は小さくなると考えられる。

2.6. 因子 φ' を求めること

Fig. 3 に示すように、量 S_{II} 並びに S_{II}' は線分 \overline{NP} 並びに \overline{NP}' の長さである。これらの量の間には次の関係が存在する。

$$\begin{aligned} \frac{S'_{II}}{R} &= \frac{S_{II}}{R} \\ &+ \left(\frac{l'}{R}\right) \sin \theta'_{(U,L)M} \cdot \sin \alpha \cdot (1 - \cos \varphi'_{(U,L)M}) \\ \frac{S_{II}}{R} &\simeq 1 - \left(\frac{l}{R}\right) \cdot \cos \alpha \\ &- \left(\frac{l'}{R}\right) \cdot (\cos \alpha + \cos \theta'_{(U,L)M}) \end{aligned} \quad (12)$$

ここでサフィックス $(U, L)M$ は、 θ' が時計回りでも逆時計回りでも2重散乱からの場の強さへの寄与が最大の場合の値をとることを意味する。

図で、観測点が領域Ⅰの広さに比較して十分遠方に存在すると考えて次の近似を施せば

$$\left(\frac{l}{R}\right)^2 \ll 1, \quad \left(\frac{S_{II}}{R}\right) \simeq 1, \quad \frac{l'}{R} \ll 1$$

式(12)を用いて因子 φ' に対する近似式が導びける。(補編Ⅳ参照)

$$\varphi'_{(U,L)M} = \cos^{-1} \left[\left(\frac{\Delta E}{E^2} \right) / \sin \theta'_{(U,L)M} \cdot \sin \alpha \right] \quad (13a)$$

また、観測点が z 軸上に存在する場合は量 α が零となり、式(13a)は用いられぬので、式(12)にもどって次の関係を導くこともできる。

$$\varphi'_{(U,L)M} = \frac{II}{2} \quad (13b)$$

実際の計算においては、領域Ⅱは近似的に特性平面に対して対称的であると考え、上に求めた値の2倍を因子 φ' として採用することとする。

領域Ⅰの広さは、因子 I について示した場合の Fig. 5 で2重散乱の存在し得る面積として判るが、この領域の厚さは明らかではなかった。ここでこの厚さについて述べることにする。前述の如く便宜上領域の分割を行なったのであるが、その際、領域ⅠとⅡとの境界

はさだかには決め難い。1回目の散乱に伴う方位角の微分量を特性平面上から測り、量 l' の値を特性平面上での値に固定すれば特性平面上からの高さ $l'd\varphi'$ がその厚さといえる。また、境界の $d\varphi'$ の値により異なるので、しいて領域ⅠとⅡとの境界または各領域間の相互のくい込み方を問題とする必要もない。むしろ意味のあるのは領域Ⅱの厚さであるがこれは因子 φ' の上限値の正弦と量 l' との積で表現できる。

2.7. 最大寄与の散乱角の決定

最大寄与を与える場合の散乱角 θ'_{UM} 、 θ'_{LM} を求めるときに、遮蔽体と観測点とがかなり離れていると考えると、Fig. 2 の $\triangle OBP$ で他の2個の角度は角度 δ に比較してはるかに大きいと考えることにすれば、近似的に次の表現が得られる。

$$\theta'_{UM} \simeq \cos^{-1} \left(\frac{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{z} \right)} \right) + \frac{\alpha}{z} \quad (14a)$$

$$\theta'_{LM} \simeq -\cos \left(\frac{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{z} \right)} \right) + \frac{\alpha}{z} \quad (14b)$$

散乱の仕方の場合によっては、 α の代りに β を用いる場合があり、(14. a, b)式はその場合でも成立する。

2.8. 因子 J の決定

以下においては Fig. 2 を例として因子 J の求め方を示す。前にも説明した通り、量 l 、 l' は l と $\theta'_{U'}$ とに依存する。因子 J の定義は次の積分として表現される。

$$J \equiv \frac{1}{IR^2} \int_{\theta'_{UC}}^{\theta'_{UM}} \int_0^{l'(\theta')} e^{-\mu l - \mu' l' - \mu'' l''} dl \cdot d\theta' \quad (15)$$

量 l 、 l' の l への依存性は線形であり l に関する積分は容易に実行ができる。その結果をさらに θ' について積分するのであるが、被積分関数の θ' への依存性はまったく複雑である。しかし、被積分関数は θ' が臨界角の場合に零となることと、最大の寄与を与える状態の場合は因子 I として与えられることとに注目して近似的に積分値を求め得ることを示そう。

ある関数 $g(x)$ が x の領域、 $a \leq x \leq b$ で単調増加関数として与えられているものとする。また、その性質として、 $g(b)$ の値は与えられて居り、 $x = a$ で $g(a) = 0$ が成立するものとする。

$g(x)$ を $x = b$ の近傍で次の中級数に展開し

$$g(x) \approx g(b) - g'(b) \cdot (b-x) + \frac{g''(b)}{2} (b-x)^2 + \dots$$

展開の第3項までを採用することにする。ここで1階の微分係数の値が $x = b$ で判明するものとすれば、 $g(a)$ の値が零になるように2階の微分係数の値を調整して

$$g(x) \approx g(b) - g'(b)(b-x) + \left[\frac{g'(b)(b-a) - g(b)}{(b-a)^2} \right] (b-x)^2$$

を得る。したがって、 $g(x)$ を x の存在領域に汎って積分すれば近似的な積分値を得る。

$$\int_a^b g(x) dx \approx \frac{2}{3} g(b) \cdot (b-a) - \frac{g'(b)}{6} (b-a)^2$$

さて、改めて次の置換を行なえば、因子 J は解析的に容易に求めることができる。

$$a = \theta'_{UC}$$

$$b = \theta'_{UM}$$

$$g(b) = IR^2$$

$$g'(b) = R^2 \frac{dI(\theta'_{UM})}{d\theta'_{UM}}$$

$$J \approx \frac{2}{3} (\theta'_{UM} - \theta'_{UC})$$

$$- \frac{(\theta'_{UM} - \theta'_{UC})^2}{6} \frac{1}{I} \frac{dI}{d\theta'_{UM}} \quad (16)$$

最後の項の I に対する θ'_{UM} の対数微分は比較的に容易に行なえる。また、角度の幅がかなり狭い場合は第1項のみの近似も成りたつことになる。

3. 理論の妥当性の検証

以上の考察で得た物理的モデルの妥当性を検証するため、透過線のエネルギー・スペクトルや透過エネルギーの角度分布の計算値を、植木らが行なった実験値¹⁶⁾ ならびに筆者らが作ったモンテカルロ計算コード¹⁷⁾ による値と比較する。比較の際に量 ΔE は 0.04 MeV に値をそろえ、また入射線のエネルギー束を 1 eV/cm²·sec に規格化する。対象とした物体は厚さが 2 cm の鉄板であり ⁶⁰Co からのガンマ線が細い銃身型のビームとなって鉄板に斜めに入射する。計算では、最大の入射角度を 70° とし、入射線のエネルギーは 1.25 MeV とする。鉄の物質定数は Glodstein の表¹⁸⁾ の値を使用した。

観測点の位置は、実験およびモンテカルロ計算においては、非散乱線の出口点 L を中心に半径 $R' = 80$ cm の球の上にあるので、それと対応させる意味で3個の角度を用いた次の表現で各座標成分を求めることとした。(Fig. 7 参照)

(44)

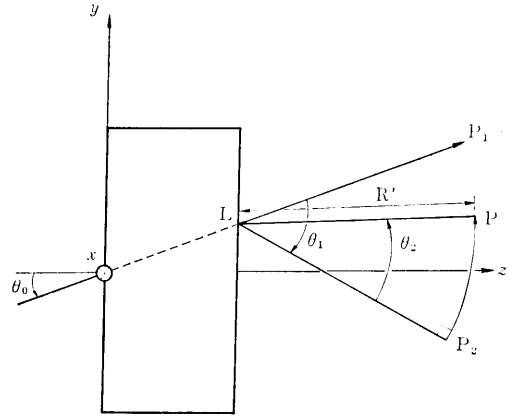
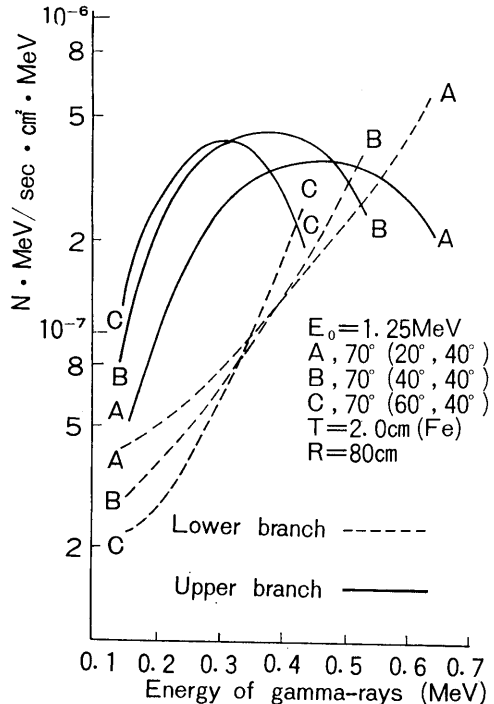


Fig. 7 3個の角度 $\theta_0, \theta_1, \theta_2$ の説明

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= R' \sin \theta_2 \\ y_0 &= R' \sin(\theta_0 - \theta_1) \cdot \cos \theta_2 + T \tan \theta_0 \\ z_0 &= R' \cos(\theta_0 - \theta_1) \cdot \cos \theta_2 + T \end{aligned} \right\} (17)$$

Fig. 8 に、入射角が 70° の場合、観測点の位置の変化によるエネルギー・スペクトルの変化を計算したものの一例が分枝別に付けて示してある。以下、角度の表

Fig. 8a, b 分枝別の2重散乱によるエネルギー・スペクトルの例と分枝別に対する和の結果



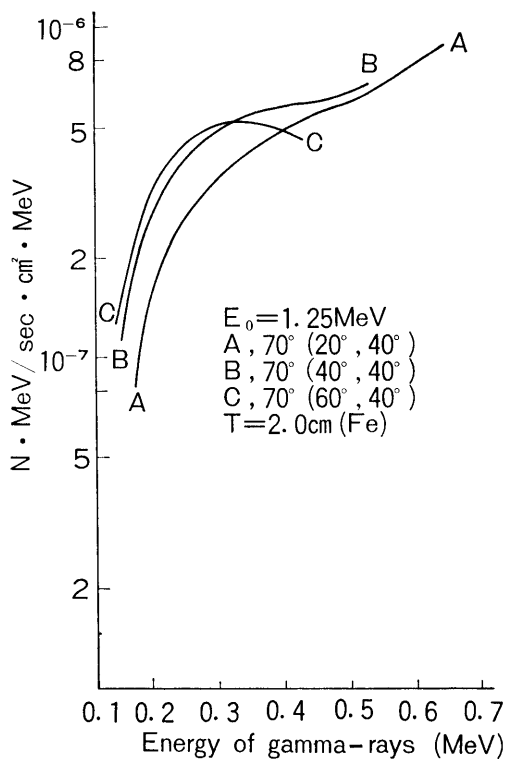
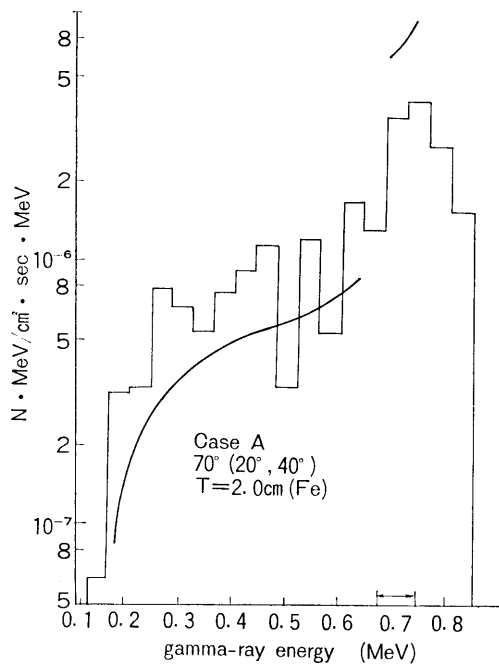


Fig. 10a - d モデルにもとずき計算したエネルギースペクトルと実験値との比較



わし方として $\theta_0 \cdot (\theta_1, \theta_2)$ のように書くことにする。 L 分枝とは $\theta' L$ の状態のことである。実際の観測点におけるエネルギースペクトルは両分枝からの寄与の和であり、Fig. 10 より 10c までの図で幅の広い山型の実線で表わされたものである。

Fig. 9 は、領域 II からの寄与を考慮した補正因子 ϕ'

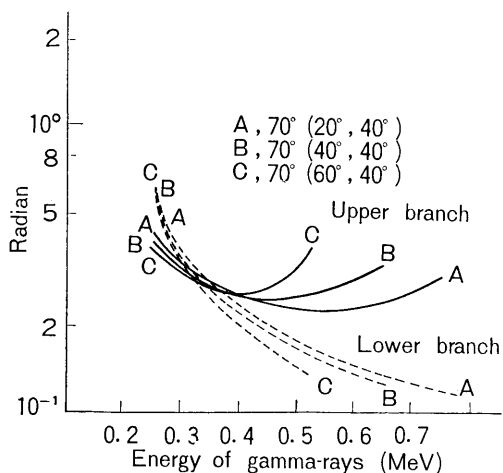
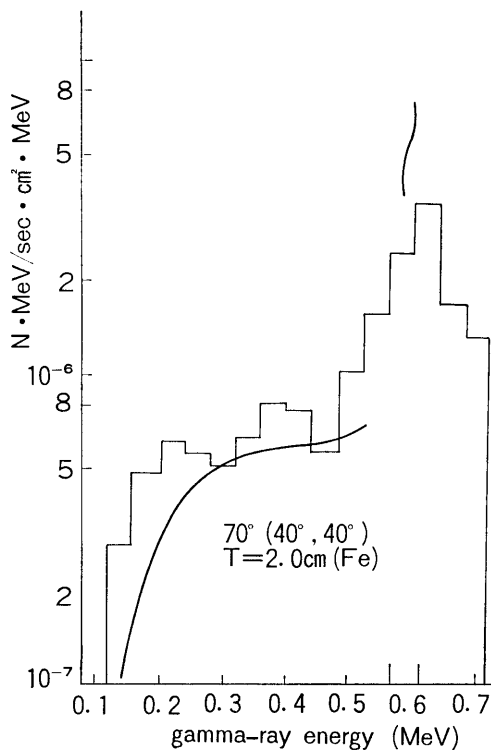
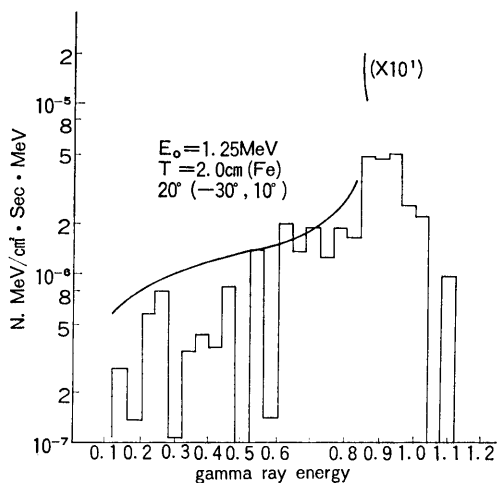
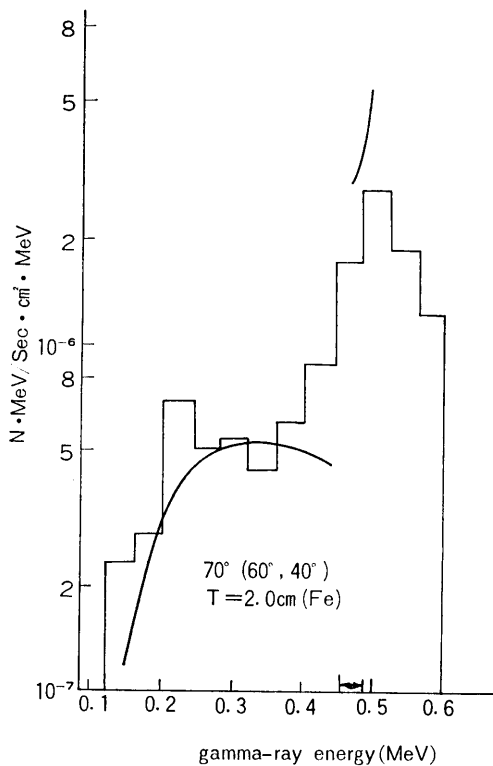


Fig. 9 領域 II からの散乱の寄与を考慮すべき補正値





を各分枝別に最終エネルギーの関数として示したものである。これは入射角が 70° の Fig. 8 に対応した場合を示している。

Fig. 10a より 10d までは、実験値と本報による方法で計算した値¹⁶⁾の比較をしたものである。横軸は観測球を横切るガンマ線のエネルギーの値を、また縦軸は観測点におけるエネルギー束を表わしている。実験

値はヒストグラムで、計算値は実線で示されている。これらは共に、横軸と囲んだ領域の面積がその観測点の位置におけるエネルギー束を与えている。

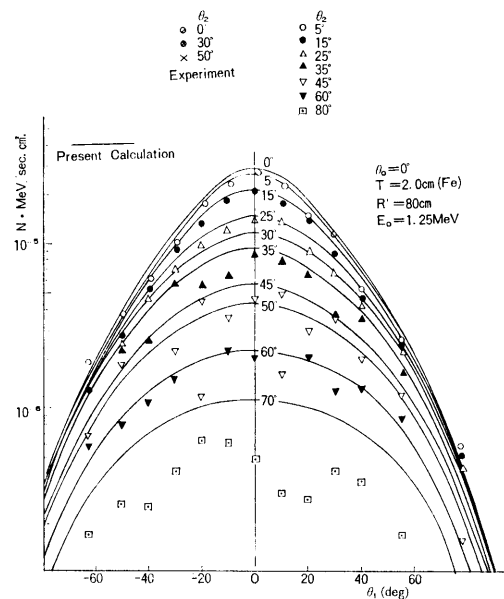
計算値で、エネルギーの高いところで幅の細く鋭い嶺が見えているのは、1 回限りの散乱の寄与である。その幅の上、下限は図の中で横軸に沿った矢印で示してある。それより低いエネルギーでの幅の広いやや低い山が2重散乱の寄与であるが、低エネルギー側の山すそで実験値との差が現われるのは、主として実験値には3重散乱以上からの寄与も含まれていることに起因すると考えられる。

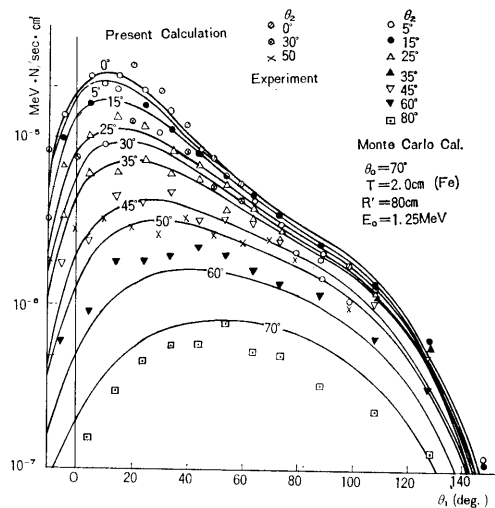
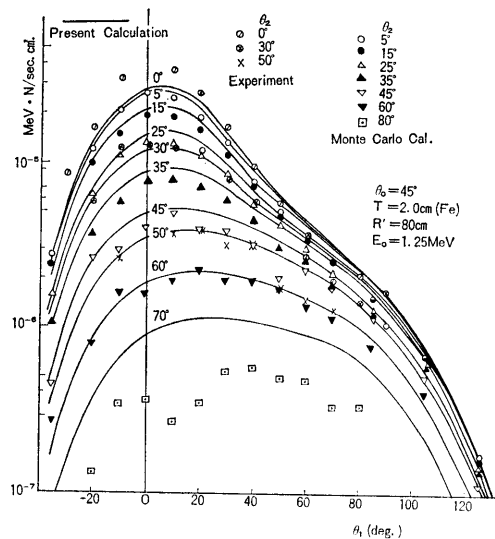
実線の鋭い嶺と幅広い山との境目でエネルギースペクトルに大きな値の落差があるが、これは遮蔽板が薄い有限の厚さを持って居りガンマ線の減速が不十分で、まだ定常な状態に至る前にガンマ線が遮蔽体の外へ出て来ていることによる。

Fig. 10d は入射角が小さな場合の一例である。

エネルギースペクトルの図における面積を計算することでエネルギー束を求め、各観測点の位置を3個の角度で表現してエネルギー束を整理し、さらにモンテカルロ計算による同様の量についての結果も添えて比較したのが Fig. 11a から 11c までの図である。遮蔽体の中で散乱の寄与の源が分布する領域の拡がり

Fig. 11a - c 散乱したエネルギーの角度分布に関する計算値と実験値とモンテカルロ計算との結果の比較の一例





$R' = 80 \text{ cm}$ という値に比較して十分に小さく、したがってこれらの図が遮蔽板から散乱されたエネルギーの方向別分布を表わしているものと解釈される。横軸は θ_1 の値が目盛っており、その原点から縦軸に平行な直線是非散乱線の出現の方向を示したものである。斜め入射の場合、これらの図の曲線が最大値をとる θ_1 の値は正の領域にあり、またその値をすぎても曲線がかなりなだらかであるのに反し、 θ_1 の負の領域で曲線の急激な変化が認められる。散乱線が遮蔽体を通過する際の光学的な透過距離は、 θ_1 の正の側ではこの値が増大するとまず減少を始め、ガンマ線の最も逃げ出し易い極小値を経た後からまた増加を始めるわけであるが、このような振舞いの領域は θ_1 の値が正の広

範な範囲にわたっている。他方、 θ_1 の負の側ではこの絶対値が大きくなるほど、光学的透過距離が単調で急激に増大し、ガンマ線の逃げ出る確率が急激に減少する。

角度 θ_2 が大きくなるほど、曲線の形が潰れて行き、全体として丸味を帯びてなだらかになる。これはコンプトン散乱に伴う散乱線の散乱角に関する強度分布によるところが大きいと考えられる。Fig. 12 に示すように、エネルギーの高いガンマ線ほど、散乱角の小さな方向への、いわゆる前方散乱の成分が強くなっている。この散乱後の角度分布は $\theta = 0^\circ$ の軸の周りの方位角に関しては同等である。いま、 90° と 270° の線に沿って紙面と交わり $\theta = 0^\circ$ の軸から任意の傾きをなす平面でこの回転体を切った場合、その切口での各エネルギーの強度分布はどうであろうか。その様子は傾きが零度の場合、すなわち $\theta = 0^\circ$ の方向から見る強度分布ほどには前方散乱の成分は大きくなく、その代わりに全体に 90° と 270° の軸の方向に幅が広く丸味を帯びて潰れた形となっているはずである。このことと類似したことが θ_2 の値に対する曲線の振舞いでは起っているといえよう。もちろん、2重散乱の効果は実体をもっと複雑にしていると考えられるが原理的には上の説明が成立するはずである。 θ_2 が大きいことは、散乱線がより厚い遮蔽体領域を通る傾向を持つことになり、多重散乱からの寄与も増すことになる。多重散乱からの寄与は方向依存性を薄める傾向にあり、 θ の値へのよりなだらかな依存性へそれが利いて来る。計算値において、2重散乱によるエネルギースペクトルの近似誤差は2重散乱自身の高々7%である。また、エネルギー束の方向依存性と関連して、 θ_0 が 70° で θ_2 が大きな値のところでは、2重散乱からの全体の値への寄与は30%程度にまで大きくなる場合もあるが、普通は6%から12%程度である。

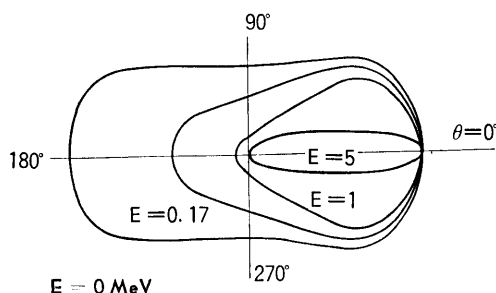


Fig. 12 コンプトン散乱に伴う散乱線のエネルギー別角度分布

以上の図を総合してみると、前章において導いた散乱線の計算のための物理的モデルはエネルギースペクトルの形に関してのみでなく、その絶対値においてもきわめて妥当な結果を導くことがわかる。

4. 有限板による散乱線の再生係数の計算への応用

以上で入射ガンマ線の遮蔽板中での多重散乱が裏面側の遠方の散乱場へ及ぼす寄与のモデルが、当面とする問題においては妥当なものであることが判明した。以下では、このモデルにもとずき、有限な拡がりを持つ遮蔽板からの散乱線の再生係数の計算を行なった結果の考察を行なう。

ここで扱う入射線は、方向が一方向に揃った幅の広い単色なガンマ線のビームとし、有限の入射面積を持つ遮蔽板にある任意の斜めの角度で入射するものとする。散乱場は入射線に関する重ね合せを行なうことにより求められる。重ね合せの手続きは数値積分にうったえるため、積分誤差ができるだけ小さくなるように、ガウスの分点法で最大 20 点まで各変数に関してとれるようにした。積分に伴う誤差は、再生係数から 1 を差し引いた量で 0.1% 以下に抑えられている。

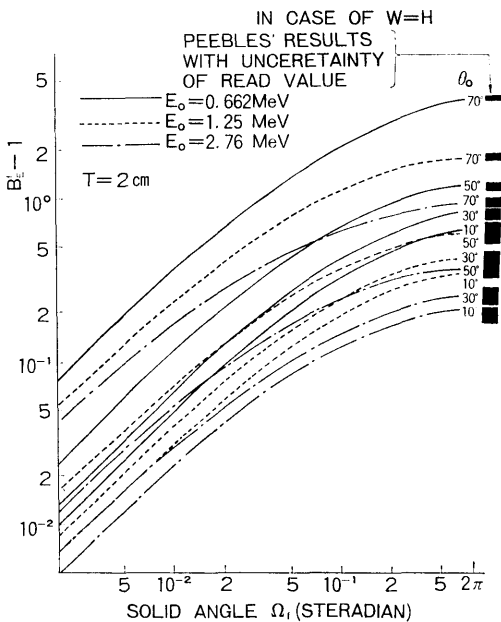


Fig. 13 入射面が正方形で入射線が単色かつ単一方向に揃った幅の広いビームの場合の $B_E^f - 1$ と立体角との関係および Peebles の値 $B_E^\infty - 1$

4.1. 入射面が正方形の場合

Fig. 13 は、厚さが 2 cm で縦と横の長さが等しい鉄板の遮蔽板につき、エネルギー再生係数から 1 を差し引いた量と鉄板の立体角との関係を示したものである。便宜上、観測点は遮蔽板の入射面の中心を通る非散乱線の線上に置いてあり、観測点から裏面に垂直にひいた線の長さを観測点の距離 h と呼ぶことにする。

観測点に対して張る遮蔽体の立体角は次のような簡単な式で求められる。

$$\Omega_f = \int_c^d \left\{ \int_a^b \frac{h dx}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \right\} dy - \sin^{-1} \left(\frac{bd}{\sqrt{(b^2 + h^2)(d^2 + h^2)}} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{ac}{\sqrt{(a^2 + h^2)(c^2 + h^2)}} \right) - \left[\sin^{-1} \left(\frac{bc}{\sqrt{(b^2 + h^2)(c^2 + h^2)}} \right) + \sin^{-1} \left(\frac{ad}{\sqrt{(a^2 + h^2)(d^2 + h^2)}} \right) \right]$$

Fig. 13 は、入射線のエネルギーを 0.662 MeV と 1.25 MeV と 2.76 MeV とに選んだ場合の結果であり、入射面が無限の広さを持つ場合について Peebles の結果から求めた値も示してある。(Fig. 18 参照) これはグラフから読み取った値を用いているため、読み取りの誤差を含めた値として、ある値の幅として記してある。

これらの結果から、無限に広い入射面の場合の $B_E^\infty - 1$ と有限の場合の $B_E^f - 1$ との比、すなわち

$$(B_E^f - 1) / (B_E^\infty - 1)$$

を求めることができる。この量を補正因子 C_f と名付ける。Fig. 14 は C_f と立体角 Ω_f との関係を示したものである。 C_f も入射ガンマ線のエネルギーや入射角度に依存している。この図で、立体角が 2π から次第に小さくなるにつれて、無限板に対して求めたエネルギー再生係数への補正は増大して行くことがわかる。しかし、 C_f の評価に伴う誤差のエネルギー再生係数への影響は逆に次第に減少して行くことが指摘できる。

4.2. 鉄板の厚さの影響

遮蔽板の厚さ T が 1 cm 程度変化しても、立体角が 2π に近いほど、それが C_f へ与える影響は小さくなる。これは、 C_f が定義から、観測点におけるエネルギー束を ϕ として、

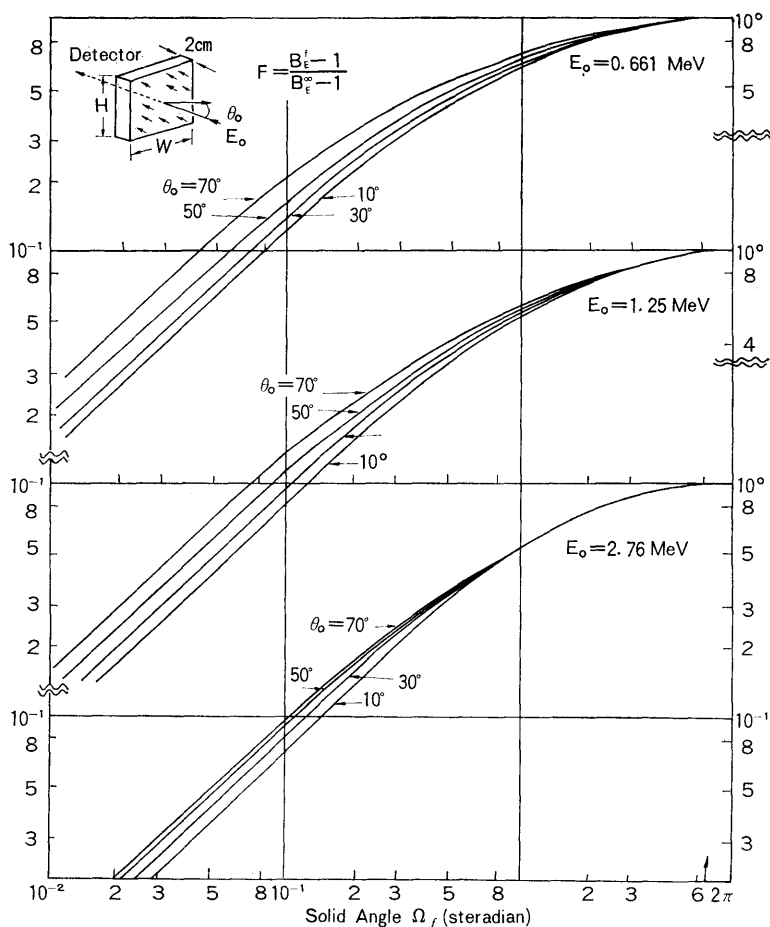


Fig. 14 入射線と入射面とに関する条件が Fig. 13 の場合と同じ場合、無限板に対する再生係数 B_E^∞ から有限板の B_E^f を求めるための補正係数

$$C_f \equiv \frac{\int_0^{\Omega'_f} \Phi d\Omega_f}{\int_0^{2\pi} \Phi d\Omega_f}$$

$$= \frac{1}{1 + \Gamma(\Omega'_f, T, Q)}$$

$$\Gamma(\Omega'_f, T, Q) \equiv \int_{\Omega'}^{2\pi} \Phi(\Omega_f, T, Q) d\Omega_f$$

$$\int_0^{\Omega'_f} \Phi(\Omega_f, T, Q) d\Omega_f$$

で与えられることから、微係数 dc_f/dT が

$$\Delta T \cdot \frac{dC_f}{dT} = \frac{-\frac{d\Gamma}{dT} \cdot \Delta T}{(1 + \Gamma(\Omega'_f, T, Q^2))}$$

で与えられ、 $d\Gamma/dT$ が Ω'_f の値が $2H$ に近いとこ

ろではほとんど無視できるほど小さいからである。上の式で Q は厚さ T 以外のパラメータを表わしている。

他方、立体角が小さくなって行くと $d\Gamma/dT$ は無視できるほどには小さくはないが、厚さ T の変化が再生係数 B_E^f へ与える影響は前述のごとくやはり無視できる。

C_f を求める際の物理的なモデルが2重散乱までの寄与を考慮に入れているのであるから、厚さ T をあまり大きな値、例えば 6 cm 程度にとることは無理がある。したがって、厚さへの依存性としては次のことがいえる。すなわち、2重散乱までの効果を考慮した近似が正しい限りでは、再生係数 B_E^f は T にはあまり依存しない。

4.3. 入射面が正方形でないことの影響

以上は遮蔽板が正方形であり、観測点は入射線の方向と一致して板の中心を通る線上に存在する場合であったが、立体角が同じ値でも板の形が異なれば再生係数が異なる値をとることや、観測点が上述の線上には存在しない場合のことを考えた議論をする必要がある。この際に注意しなければならぬことは、入射線が方向のそろった幅の広いビームとして入射することから、観測点が有限板の影の部分の中に存在しなければその板の B_E^f という量が定義できぬことである。もちろん、影から外に出たところに観測点があっても、板からの散乱線はこの観測点にやって来る。そこで、そのような場合には、再生係数に相当する量(観測点に直接来たものによる効果を知って散乱線も含めた全体のガンマ線による効果を推しはかり、全体としての効果を推定するという意味の量)としては別に定義をしてやる必要がある。以下においては、このような特異な場合は考慮の対象からはずすことにする。

観測点が前述の線上にあるが、板の形が正方形からずれた効果をまず調べることにする。この場合に $W > H$ の条件の成立する場合と $W < H$ の場合とでは再生係数 B_E^f の変化の様子が異なる。Fig. 15 は $W = H$ の時の $B_E^f - 1$ の値を1に規格化した場合の板の形の効果の一例を示したものである。 Ω_{is} は W で正方形の板を考えた時の立体角 Ω_{is} を単位とした実際の立体角を表わす。

これらの増減の様子の違いをより一般的に扱うために、横の辺の長さ(x軸方向の長さ W)を一辺とする仮想的な正方形を考えることにし、この正方形に対する仮想的な補正因子を Fig. 14 から求めることにする。実際の四角形の様子が y 軸方向については短か

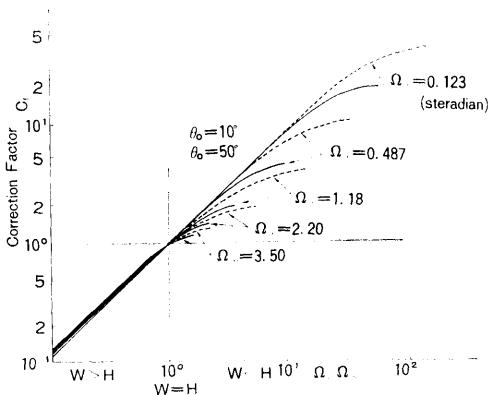


Fig. 15 遮蔽板が正方形からずれた場合の補正係数の変化の一例

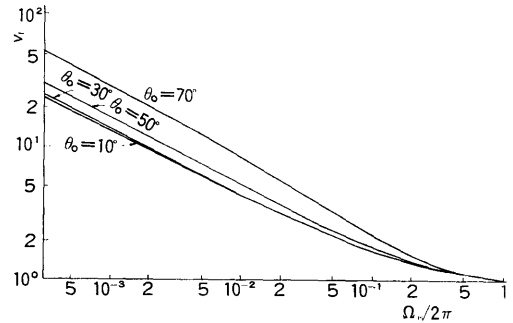


Fig. 16 遮蔽板が正方形からずれた場合の B_E^f を計算する際の式に現われる係数の値

い、つぶれた形をしている場合は、補正因子 C_f は近似的に次の式で求めることができる。この式を対数の形で計算機に入れば計算が容易である。

$$\log C_f = -\log(\Omega_{is}) + \log(\Omega_f)$$

また、もし実際の四角形の形が y 軸に関して仮想的な正方形よりも長い場合は、補正因子 C_f は近似的に次の式で求めることができる。

$$\log C_f = \frac{(\log \Omega_f)^2 / 2 - (\log \Omega_f)(\log \Omega_\infty) + \log v_f + (\log \Omega_\infty)^2}{\log(2\pi \Omega_{is}) - \log(\Omega_\infty)}$$

この式の中で量 v_f は仮想的な正方形の立体角 Ω_{is} を 2π で割った量と入射角とに依存している。Fig. 16 にその依存性の様子が示してある。

4.4. 観測点の位置のずれの影響

次に観測点が前述の線からはずれた場合を考える。この場合は、観測点が x 軸方向へずれた場合と y 軸方向へずれた場合とに分解すれば、 x 軸方向へのずれは再生係数の減少をまねくことになる。他方、 y 軸方向のずれについては、 y の正の方向へずれた場合は再生係数の減少をまねくが負の方向へのずれは増大をひき起こすことがある。これは入射角の大きな場合にこの傾向が大きい。しかし、これらの効果は近似的に立体角の変化が原因であると考えた近似でも十分であり、Fig. 14 における立体角の値の変化に対する C_f の値の変化として扱うことにする。

4.5. 経験式の応用例

以上に述べた事柄を総合して、入射角度やその他のパラメタの値があらかじめ与えられた場合のエネルギー再生係数を逆に予測することができる。その結果を実験値や Peebles の値と比較したものが Fig. 17 である。

4.5.1. 見込み角の変化と考察領域の変化

Fig. 17 の横軸は、見込み角である。これは板の中央を通り入射線の方に向う線上に観測点を置いた場合に、この線を軸として観測点を頂点とする円錐の頂角である。入射角が小さな場合は、この円錐と板とで板上に楕円形ができる。いまこの楕円形の内側から散乱線の寄与があると考えて、仮に考察領域と名付ける。したがって、頂角を変えればその楕円形の内側から来た散乱線に対する再生係数も変化する。

入射角が大きくなると、小さな頂角でも楕円形から放物形へと考察領域は変わって行く。頂角が $\pi/2$ になると考察領域はある半平面になる。頂角がさらに増せば考察領域は全平面からある放物形の領域を引いた領域にと変わる。

実験値と予測値との比較を行なう際は、実験値に対する考察領域が上述のように複雑に変化することを考慮に入れなければならない。

楕円形の場合は、立体角や楕円形の長軸と短軸との比がそれぞれ等しく対応する矩形を考えて、それに対する B_E^f の値を予測することになっている。放物線の場合は、放物線の頂点の位置において始まり無限遠方に延びている矩形を考えている。この幅は、この矩形と放物線の内側領域の立体角を等置してやることにより決定される。しかし、放物形の頂点の近くでは矩形の方が領域は広く、このために特に、入射角が大きく

て頂角も $\pi/2$ 以上の場合において全平面から差し引かれる領域の等価領域の妥当性とそれに伴う B_E^f の値の予測値の妥当性（実験値との比較をすることにおける妥当性のことである）が問題である。入射角が小さな場合にはこのような問題は生じて来ない。

4.5.2. 予測の結果の検討

Fig. 17 においては、立体角は頭わには記されていない。この図にも示されているように、Peebles による値（無限平板に対する再生係数 B_E^∞ の値であり、一例は Fig. 18 に示してある。）には、数値をグラフ

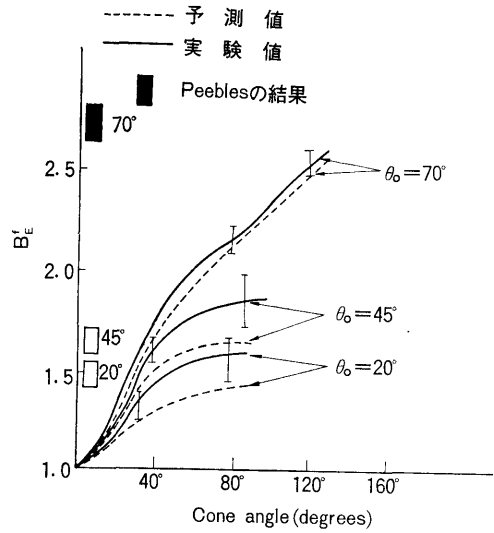


Fig. 17 B_E^f の値を、与えられたパラメタのいくつかの組に対して本報の手法を用いて逆に予測し、その結果を実験値と比較したもの

から読み取る際の不確かさによる値の幅が存在している。実験値の不確かさや予測値を出す際の等価領域についての不確かさを考慮に入れば、実験値と予測値との一致はかなり良い。また、予測値や実験値と

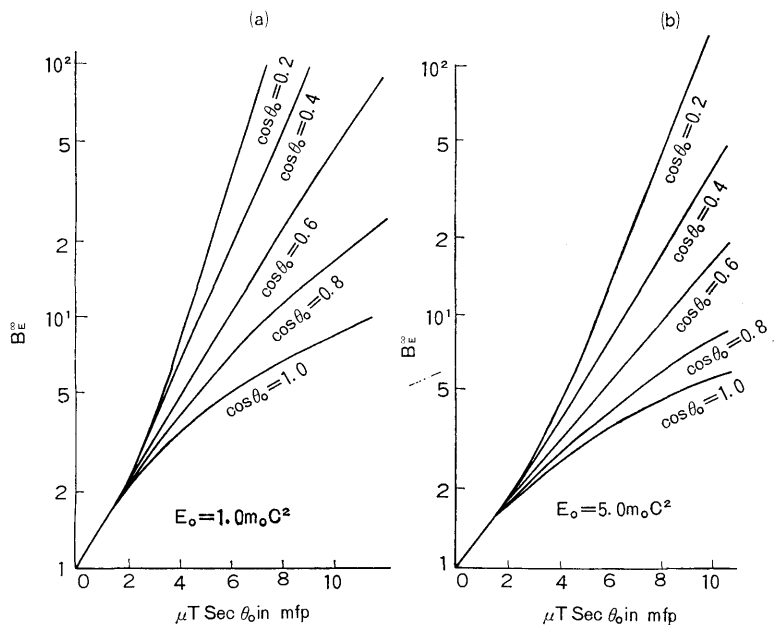


Fig. 18 Peebles の B_E^∞ の値

Peebles の値との間の一致度も、たがいの不確かさを考慮に入れば良好なものと思われる。

5. 考 察

第3章で示した散乱の効果に関する簡単な物理的モデルでも、遮蔽板の厚みが2cm程度の鉄板である場合は遮蔽板後方の約1mの位置における散乱ガンマ線の場が非常に良く説明できることがわかった。しかし、物質がポリエチレンのように軽い場合や、非常に厚みのある鉄板の場合は、今回のモデルのように2回散乱までで打切った計算は正しい結果を与えるとはいえない。しかし、船舶の区劃に用いられている鉄板としては2cmの厚さは十分に厚いものといえよう。したがって、船の隔壁のような鉄板構造物からの散乱ガンマ線の様子を知るのには、精度、単純さの点でも有用なモデルといえる。

特性平面の上下で遮蔽板境界の空間的な広がりの様子が全く対称であるとはいえないが、そのための補正はあまり本質的な事柄ではないものと思われる。

本報の方法で求めたエネルギー再生係数をチェックする意味で比較に用いたPeeblesの計算においては、3回以上の多重散乱からの再生係数への寄与を考慮して含ませてあるが、その際、散乱線の寄与の仕方にある仮定を設けている。すなわち、たとえそれが遮蔽体中での最初の散乱であっても、その結果としての散乱の方向が入射面に接近するような方向成分を持つ場合はそのガンマ線は以後の散乱にはあずからないと考えるのである。そこでは、散乱の結果裏表面に近づくようなもののみが考慮の対象とされている。

そこで、入射角がかなり大きくなると1回目の散乱の散乱角が小さくても入射面に近づくように散乱されるものが増加して来る。しかもそれらのうちでさらに2回目の散乱の結果観測点へエネルギーをもたらすものも増えるはずである。その場合のもたらされるエネルギーも、1回目の散乱でエネルギーがあまり低下していないために、無視できぬであろう。

本文のモデルでは、Peeblesの仮定は設けてないので上記の散乱からの寄与も含まれている。一辺の長さが十分に大きくて、観測点に対する遮蔽板の働きがほとんど無限平板と考えられる場合の計算された $B-1$ がPeeblesの $B-1$ と大変に近い値であるということは興味のあることである。すなわち、たとえ2回散乱まででもその寄与を丁寧に拾った結果と、上記の散乱線についての仮定のもとで3回以上の多重散乱からの寄与を含めた結果とで同様な結果をもたらすという

ことは、Peeblesの仮定により省かれた2重散乱の寄与が3重散乱以上からの寄与と大略同程度のものであったということである。

ガンマ線のエネルギーが高い場合には、散乱されたガンマ線の角度分布は前方方向に強い極大を持っており、このために入射したガンマ線の第1回目の散乱が生じた地点で、等方散乱を暗黙に仮定して再生係数の重みをつけることで多重散乱の寄与を扱うモデルが妥当ではなかった。これが本文のモデルをつくった理由の一つであった。しかし、3重散乱以上の高次の散乱からの寄与を考える際に、3重散乱をする大部分のガンマ線のエネルギーが十分に低くて3重散乱の後に角度分布が近似的に等方的であるものと考えれば、第3回目の散乱を生じた地点で再生係数の重みをつける取り扱いも許されることになる。このようなモデルは本文のモデルとRay-Analysisのモデルとの結合したものと見なすことができる。このモデルの利点は、2重散乱までの寄与はかなり正確で簡潔に取り扱え、また3重散乱以上の高次の散乱の寄与も比較的簡単に扱えることである。

方向が揃った幅の広い単色ガンマ線のビームが有限の広がりを持つ遮蔽板に入射する場合、裏側での観測点の位置と入射角度とによっては、いわゆる再生係数が定義できぬことがある。この事態は、点状等方線源からの入射線の場合でも、源と遮蔽板および観測点との相互の位置関係で当然に生ずることであるが、再生係数の定義できぬ領域でも散乱線は存在するのであるから疑似再生係数とでもいった量を非入射線に対して考える必要もある。

ただ、方向の揃った幅の広いビームの場合の再生係数から等方な無限平面線源の場合の再生係数を求めるという応用の立場からすれば、いわゆる再生係数の定義できる範囲の領域に関して情報が得られれば十分であるといえる。

6. 結 び

本論文の結言として次の4項を挙げることができよう。

1. 船体隔壁のように薄い鉄板の中のガンマ線の散乱は、せいぜい2重散乱までの効果を考慮すれば十分であることが、散乱線のエネルギースペクトルや散乱エネルギーの角度分布についての実験値と理論値との比較や、エネルギー再生係数の値についての理論値とPeeblesの値との比較などから結論される。

2. 銃身型に細く絞った単色なガンマ線の入射を対

象として遮蔽板中の散乱ガンマ線が散乱場の強さへもたらす寄与の考察を行なった結果、多重散乱線の寄与の機構が明らかとなった。

3. 銃身型の細い入射ガンマ線がつくる散乱場を数値的に合成して幅の広い入射ガンマ線をつくる散乱場や再生係数を求めることが可能である。

4. 有限板に入射するガンマ線が幅が広く単色で一方方向に揃っている場合のエネルギー再生係数は無限板のエネルギー再生係数に、板の形の効果を考慮して得た簡単な関数表示の補正因子を掛けて求められる。

7. 謝 辞

今回の報告は船体構造によるガンマ線の遮蔽効果の研究の一環として行なった仕事の一部であるが、この方面の仕事の問題点の提起と助言とにおいて中田正也氏に負うところが大きい。また有意義な示唆と励ましをいただいた片岡巖氏に深く感謝する。

参 考 文 献

- 1) L. V. Spencer and U. Fano, Journal of Research, NBS 446, 46, (1951).
- 2) L. V. Spencer and U. Fano, Physical Review 81, 464, (1951).
- 3) H. Goldstein and J. E. Wilkins JR, Report NYO, 3075, (1954).
- 4) L. L. Foldy, Physical Review, 81, 395, (1951).
- 5) L. L. Foldy and R. K. Osborn, Physical Review, 81, 400, (1951).
- 6) L. L. Foldy, Physical Review, 82, 927, (1951).
- 7) U. Fano, Physical Review, 76, 739, (1949).
- 8) U. Fano, Journal of Research, NBS, 51, 95, (1953).
- 9) H. A. Bethe, U. Fano and P. R. Karr, Physical Review, 76, 538, (1949).
- 10) L. V. Spencer, Physical Review, 88, 793, (1952).
- 11) I. Kataoka and K. Takeuchi, Journal of Nucl. Sci and Tech, 2, No.1 (1965).
- 12) I. Kataoka, Report of Ship Research Institute, 3, No. 4, (1966).
- 13) G. H. Peebles, Rand-R-240, (1952).
- 14) H. O. Wyckoff et. al. Radiology, 1, (1963).
The Attenuation of Gamma-Rays at Oblique Incidence.
- 15) H. Yamakoshi, ORNL-TM-2520 (1969).

16) 植木ほか, 船舶技術研究所報告に発表予定.

17) 山越寿夫, 船舶技術研究所報告, 第7巻, 第4号 51頁, N-13.

「区画構造を持つ遮蔽体からの散乱および透過したガンマ線を計算 (モンテカルロ) するプログラム」

18) G. W. Glodstein, NBS Circular, (1957).

X-Ray Attenuation Coefficients from 10 keV to 100 keV.

補編 I

因子 I は下記の積分として与えられるが, 量 l, l' の l への依存性並びに l の許容範囲は各パターンに示すようなものである。

$$I \simeq \frac{1}{R^2} \int_{\text{許容領域}} e^{-\mu l - \mu' l' - \mu'' l''} dl$$

パターン 1. $\alpha \leq \theta'_{UM} \leq \theta$, $\theta'_{UM} > 0$, $\alpha > 0$

$$\tan \alpha \equiv \left(\frac{\eta_0}{\zeta_0} \right)$$

$$0 \leq l \leq \frac{L \tan \theta}{(\tan \theta - \tan \alpha)} \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta'_{UM}} \right)$$

$$l' = \frac{l \sin \alpha}{\sin(\theta'_{UM} - \alpha)}$$

$$l'' = \frac{L \sin \theta}{\sin(\theta - \alpha)} - \frac{l \sin \theta'_{UM}}{\sin(\theta'_{UM} - \alpha)}$$

パターン 2. $0 < |\theta'_{LM}| < \Pi - \theta$, $\theta'_{LM} < 0$, $\beta > 0$

$$\tan \beta \equiv \left(\frac{\eta_0}{\zeta_0 - L} \right)$$

$$0 \leq l \leq L$$

$$l' = \frac{(L-l) \sin \beta}{\sin(\beta - \theta'_{LM})}$$

$$l'' = \frac{(L-l) \sin \theta'_{LM}}{\sin(\beta - \theta'_{LM})}$$

パターン 3. $\theta < \theta'_{UM} < \Pi$, $\theta'_{UM} > 0$, $\alpha > 0$

$$0 \leq l \leq L$$

$$l' = \frac{l \sin \alpha}{\sin(\theta'_{UM} - \alpha)}$$

$$l'' = \frac{(L-l) \sin \theta'_{UM}}{\sin(\theta'_{UM} - \alpha)}$$

パターン 4. $\Pi - \theta < |\theta'_{LM}| < \Pi - \beta$, $\theta'_{LM} < 0$, $\beta > 0$

$$L - \frac{L \sin(\beta - \theta'_{LM}) \sin \theta}{\sin \theta'_{LM} \sin(\beta - \theta)} \leq l \leq L$$

$$l' = \frac{(L-l) \sin \beta}{\sin(\beta - \theta'_{LM})}$$

$$l'' = \frac{(l-L) \sin \theta'_{LM}}{\sin(\beta - \theta'_{LM})}$$

パターン 5. $\theta - \Pi < \theta'_{LM} < -\alpha$, $\theta'_{LM} < 0$, $\alpha < 0$

$$0 \leq l \leq \frac{L \tan \theta}{(\tan \theta - \tan \alpha)} \left(1 - \frac{\tan \alpha}{\tan \theta'_{LM}} \right)$$

$$l' = \frac{l \sin \alpha}{\sin(\theta'_{LM} - \alpha)}$$

$$l'' = \frac{L \sin \theta}{\sin(\theta - \alpha)} - \frac{l \sin \theta'_{LM}}{\sin(\theta'_{LM} - \alpha)}$$

パターン 6. $0 \leq \theta'_{UM} \leq \theta$, $\theta'_{UM} > 0$, $\beta < 0$

$$0 \leq l \leq L$$

$$l' = \frac{(L-l) \sin \beta}{\sin(\beta - \theta'_{UM})}$$

$$l'' = \frac{(l-L) \sin \theta'_{UM}}{\sin(\beta - \theta'_{UM})}$$

パターン 7. $-\Pi < \theta'_{LM} < \theta - \Pi$, $\theta'_{LM} < 0$, $\alpha < 0$

$$0 \leq l \leq L$$

$$l' = \frac{l \sin \alpha}{\sin(\theta'_{LM} - \alpha)}$$

$$l'' = \frac{(L-l) \sin \theta'_{LM}}{\sin(\theta'_{LM} - \alpha)}$$

パターン 8. $\theta \leq \theta'_{UM} \leq \Pi + \alpha$, $\theta'_{UM} > 0$, $\beta < 0$

$$L - \frac{L \sin \theta \cdot \sin(\beta - \theta'_{UM})}{\sin \theta'_{UM} \cdot \sin(\beta - \theta)} \leq l \leq L$$

$$l' = \frac{(l-L) \sin \beta}{\sin(\theta'_{UM} - \beta)}$$

$$l'' = \frac{(L-l) \sin \theta'_{UM}}{\sin(\theta'_{UM} - \beta)}$$

補編 II

Fig. 2 における ΔOAP に着目すれば

$$S_{HC} \cdot \cos \delta c = R - l' \cos(\theta'_{UM} - \alpha) \quad (\text{II-1})$$

および

$$S_{HC}^2 = R^2 \left(1 + \left(\frac{l'}{R} \right)^2 - 2 \left(\frac{l'}{R} \right) \cos(\theta'_{UM} - \alpha) \right) \quad (\text{II-2})$$

が成立するので、 δc に対しては

(54)

$$\cos \delta c = \frac{R - l' \cos(\theta'_{UC} - \alpha)}{R \sqrt{\left(\frac{l'}{R} \right)^2 + 1 - 2 \left(\frac{l'}{R} \right) \cos(\theta'_{UC} - \alpha)}} \quad (\text{II-3})$$

が得られる。この分母を級数展開することができて

$$\begin{aligned} &\simeq \left[1 - \left(\frac{l'}{R} \right) \cos(\theta'_{UC} - \alpha) \right] \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l'}{R} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{l'}{R} \right) \cos(\theta'_{UC} - \alpha) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \left(4 \left(\frac{l'}{R} \right)^2 \cos^2(\theta'_{UC} - \alpha) \right) \right] \end{aligned}$$

を得る。

ここでは $\left(\frac{l'}{R} \right) < 1$ としているので $\left(\frac{l'}{R} \right)^2 \ll 1$ が成立するから

$$\begin{aligned} &\simeq 1 - \left(\frac{l'}{R} \right) \cos(\theta'_{UC} - \alpha) + \left(\frac{l'}{R} \right) \cos(\theta'_{UC} - \alpha) \\ &\quad - \left(\frac{l'}{R} \right)^2 \cos^2(\theta'_{UC} - \alpha) \end{aligned}$$

したがって

$$\cos \delta c = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{l'}{R} \right)^2 \sin^2(\theta'_{UC} - \alpha) \quad (\text{II-4})$$

が近似的に導びかれる。

いま、観測点の位置が十分遠くて $\cos \delta c$ について

$$\cos \delta c \simeq 1 - \frac{\delta c^2}{2} \quad (\text{II-5})$$

が十分良い近似で成り立つものと考えれば、 δc として本文中の (9b) 式が得られる。

l' 等の具体的な形について考える。Fig. 6a, 6b, 6e, 6f 等で ΔOAL に着目すれば、これらの場合の l' は皆、同一の形が導びかれる。

$$l' = \frac{L \sin \theta}{\sin(\theta - \theta'_{(w,L)c})} \quad (\text{II-6})$$

また、6c, 6d, 6g, 6h の図において ΔOBL に着目すれば、 l' の形式が導びかれるし、 ΔBLQ に着目すれば l'' の形が導びかれる。

$$l' = \frac{L \sin \theta}{\sin(\theta - \theta'_{(w,L)c})} \dots \text{Fig. 6d, 6h} \quad (\text{II-7})$$

$$l' = \frac{L \sin \theta}{\sin(\theta'_{(w,L)c} - \theta)} \dots \text{Fig. 6c, 6g} \quad (\text{II-8})$$

$$l'' = \frac{L \sin \theta}{\sin(\theta''_{(w,L)c} - \theta'_{(w,L)c} + \theta)} \dots \text{Fig. 6c} \quad (\text{II-9})$$

$$l'' = \frac{L \sin \theta}{\sin(-\theta''_{(w,L)c} - \theta'_{(w,L)c} + \theta)} \dots \text{Fig. 6g} \quad (\text{II-10})$$

$$l''_f = \frac{L \sin \theta}{\sin(-\theta''_{(U,L)C} + \theta'_{(U,L)C} - \theta)} \dots \text{Fig. 6d} \quad (\text{II-11})$$

$$l''_f = \frac{L \sin \theta}{\sin(\theta''_{(U,L)C} + \theta'_{(U,L)C} - \theta)} \dots \text{Fig. 6h} \quad (\text{II-12})$$

補編 III

パターン 1・6

$$\theta'_{UC} = \cos^{-1} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \right) + \frac{\alpha}{2} \\ - \frac{\sqrt{2} L \sin \theta \cdot \cos(\theta'_{Ua} - \alpha)}{R \sin(\theta - \theta'_{Ua})} \\ 1 + \frac{\sin \theta'_{Ua}}{\sqrt{1 - \left(2 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) - \cos \theta'_{Ua} \right)^2}}$$

パターン 2・5

$$\theta'_{LC} = -\cos^{-1} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{E} \right) - \left(\frac{1}{E_0} \right)}{\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)} \right) + \frac{\alpha}{2} \\ + \frac{\sqrt{2} \sin \theta \cdot \cos(\theta'_{La} - \alpha)}{R \sin(\theta - \theta'_{La})} \\ 1 - \frac{\sin \theta'_{La}}{\sqrt{1 - \left(2 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) - \cos \theta'_{La} \right)^2}}$$

パターン 3・7

$$\theta'_{UC} = \cos^{-1} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right)}{\cos \left(\frac{\beta}{2} \right)} \right) + \frac{\beta}{2} \\ - \frac{\sqrt{2} L \sin \theta \cdot \cos(\theta'_{Ua} - \beta)}{T_s \cdot \cos(\theta'_{Ua} - \theta)} \\ 1 + \frac{\sin \theta'_{Ua}}{\sqrt{1 - \left(2 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) - \cos \theta'_{Ua} \right)^2}}$$

パターン 4・8

$$\theta'_{LC} = -\cos^{-1} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right)}{\cos \left(\frac{\beta}{2} \right)} \right) + \frac{\beta}{2} \\ + \frac{\sqrt{2} L \sin \theta \cdot \cos(\theta'_{La} - \beta)}{T_s \sin(\theta'_{La} - \theta)} \\ 1 - \frac{\sin \theta'_{La}}{\sqrt{1 - \left(2 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) - \cos \theta'_{La} \right)^2}}$$

補編 IV

Fig. 3 において、特性平面上の 2 回目の散乱の散乱角を θ''_{U_0} とすれば、 ΔCNP においては

$$(\overline{CP})^2 = (l')^2 - S_{11}^2 - 2l' S_{11} \cos(\Pi - \theta''_{U_0}) \quad (\text{IV-1})$$

が成立する。また、 $\Delta CN'P$ においては l' と θ' は ΔCNP の値と同一であるが 2 回目の散乱の散乱角は異なっている。そこでこの値を $\theta''_{U'}$ と表わせば

$$(\overline{CP})^2 = (l')^2 + (S'_{11})^2 + 2l'(S'_{11}) \cos(\Pi - \theta''_{U'}) \quad (\text{IV-2})$$

も成立する。

IV-1 と IV-2 の辺々を差し引けば

$$0 = S_{11}^2 - S'_{11}^2 + 2l'(S_{11} \cos \theta''_{U_0} - S'_{11} \cos \theta''_{U'}) \quad (\text{IV-3})$$

を得る。

さらに S_{11} , S'_{11} については

$$S_{11}^2 = (R \sin \alpha - l' \sin \theta'_{U_0})^2 \\ + (R \cos \alpha - l - l' \cos \theta'_{U_0})^2 \quad (\text{IV-4})$$

$$S'_{11}^2 = (l' \sin \theta'_{U_0} \sin \varphi')^2 \\ + (l' \sin \theta'_{U_0} \cos \varphi' - R \sin \alpha)^2 \\ + (l + l' \cos \theta'_{U_0} - R \cos \alpha)^2 \quad (\text{IV-5})$$

が成立するので、(IV-4)、(IV-5) より

$$R_{11}^2 - S'_{11}^2 = 2l'R \sin \theta'_{U_0} \sin \alpha \cdot (1 - \cos \varphi')$$

が成立する。そこで、

$$1 - \cos \varphi' = \frac{S'_{11}}{R} \cos \theta''_{U'} - \frac{S_{11}}{R} \cos \theta''_{U_0} \\ \sin \alpha \cdot \sin \theta'_{U_0} \quad (\text{IV-6})$$

を得ることができる。

もし観測点が遠方であり $\frac{S'_{11}}{R} \simeq 1$, $\frac{S_{11}}{R} \simeq 1$ が近似的に成立するならば IV-6 の右辺は以下のようになる。

$$= \frac{\cos \theta''_{U'} - \cos \theta''_{U_0}}{\sin \alpha \cdot \sin \theta'_{U_0}}$$

他方、

$$\left. \begin{aligned} 2 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) - \cos \theta''_{U_0} &= \cos \theta'_{U_0} \\ 2 - \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) - \cos \theta''_{U'} &= \cos \theta'_{U_0} \end{aligned} \right\}$$

の関係が散乱角と散乱エネルギーの間に存在する。ただし E' は θ''_{U_0} の値の変化に伴う E の値の変化である。この関係式の辺々を差し引いて

$$\cos \theta''_{U'} - \cos \theta''_{U_0} = \frac{1}{E} - \frac{1}{E'}$$

を得るがこの式の右辺をさらに変形して

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{E} - \frac{1}{E'} &= \frac{1}{E} - \frac{1}{E + \Delta E} \\
 &= \frac{1}{E} - \frac{1}{E} \left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta E}{E}} \right) \\
 &= \frac{1}{E} - \frac{1}{E} \left(1 - \left(\frac{\Delta E}{E} \right) + \dots \right)
 \end{aligned}$$

これにより

$$1 - \cos \varphi' = \frac{\frac{\Delta E}{E^2}}{\sin \alpha \cdot \sin \theta' U_0}$$

を得る。ただし ΔE は領域 II の外側境界まで φ' をとった場合のエネルギーの差異を表わす。