

船舶交通システムの研究

—交差交通の研究 その1—

渡辺 健次*

Studies on the Marine Traffic Systems

—On the Intersection Traffic I—

By

Kenji Watanabe

Abstract

The encounter probability of ships at intersection is investigated, the time delay and the collision probability is calculated, and the solution of traffic control problem at T -intersection is given.

The results are given as follow;

The encounter probability = $Q(\tau + \tau')$

The sum of time delay per unit time = $QQ'(\bar{\tau}^2 + \bar{\tau}'^2)/2$

etc., where Q is the traffic volume, and τ is the characteristic time (=ship length/ship speed).

1. は し が き

近年、船舶の大型化と交通量の増大にともなって予想される事故を防止するための対策として、なんらかの形での交通管制をおこない、従来任意におこなわれてきた船舶交通に、ある程度のコントロールを加えることが考えられてきている。われわれは、さきに“制限水路の船舶の交通容量**”について研究をおこない船舶の“閉塞領域**”についての調査をすすめてきた。しかし、そこでたとえ交通容量がもとめられたとしても、理想的な条件での単一水路におけるものに過ぎず、多くの水路がいくんだ複雑な水域にたいしてはまったく無力というほかはない。たとえば、単一水路における交通量は、結局、交差点や水路くびれ部の容量をこえることはできない、ということだけでもあきらかである。

このような水域における交通の特性を把握し、さらに交通の制御をおこなうためには、それら全体をひとつの大きなシステムと考え、システム工学的手法をもちいて研究すること、そのうえでもっとも有効な広域交通システムを設計することが必要である。

一般に水路網は、その入口と出口をむすぶ単一水路と、それらが交差しあう交差点とからなる。システム的なとりあつかいでは、交差点は、それだけでひとつのサブシステムを構成するほどであり、交差交通の研究は、単一水路における交通の研究とくらべ、より重要とおもわれる。本報告は、まず基礎研究として交通量のすくないときの交差交通を理論的に検討して得られた結果の集録である。

交差交通システムにおける主要な問題は、つぎのようなものであろう。

- (1) 交差点における渋滞、および交差が原因である航行時間のおくれの予測。
- (2) 交差点における事故発生の予測。
- (3) どのような状況になったとき管制をおこなうべきか。
- (4) 最適な管制システムの設計。

まず、交差点において、ふたつ以上の交通流が交差するときを考える。おのおの船がそのままの速さで直進するとき、ある割合で衝突がおきるであろう。これを、幾何学的衝突または遭遇となくせよう。遭遇の可能性がなければ、交差交通とはみなされない。この

* 共通工学部 原稿受付 昭和47年1月25日

** 船舶技術研究所報告, 第3巻第2号, 第6巻第3号, 第8巻第3号

可能性のもとで、はじめて上のべた(1)と(2)の問題が検討できる。本報告では、遭遇の確率の理論解析をおこない、交通量のすくないときの遭遇を原因とする航行時間おくれの計算をする。事故発生については、気象や心理的影響が大きく、軽々しい結論はくだされないので、衝突可能性の交差角依存性を検討するにとどめる。

時間おくれ、ないし事故発生の可能性は、交通量とともに増大するであろうから、ある交通量に到達したとき、交差交通の制御をおこなうことが必要となる。制御の可否の判定には、当然(4)のシステム設計の問題もふくまれてくる。制御システムの数は無限ではなく、陸上交通におけるものよりも、さらに限られてくる。たとえば立体交差等は問題にならず(不可能ではない)運動性能からみても、交差・合流はさげなければならない。いまのところ n -分岐交差点においては $n(n-1)$ 個の流れを、いくつかの信号位相に配分し、各位相の時間を最適にきめるというシステム以外に考えられない。

筆者は、信号位相の個数についてのつぎの定理をみいだした。

定理: n 分岐交差点において流れの交差をゆるさないうとき、信号位相の個数は、すくなくとも n 必要である。

(証明は付録にかかげる。)

2. 幾何学的衝突または遭遇

2.1 船の換算長さ

長さ L ではやさ v の船と L' , v' の船の衝突問題を考えよう。図-1 のような二船の位置関係において船 L' が他船の進路を完全に横ぎる時間 L'/v' 以内に、船 L が船 L' の進路に到達すれば衝突がおこる。したがって、船 L' を船首の一点にちぢめたとき、船 L が前方に vL'/v' 長くなったものとすることができる。 $l=L+vL'/v'$ を換算長さとなす。船 L' を、船首でなく船首から長さ L_1' の一点に収縮させたとき、

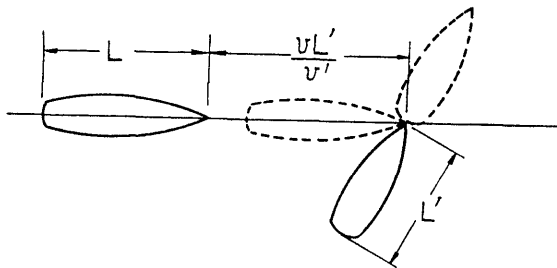


図-1 船の換算長さ

船 L は前方に $v(L'-L_1')/v'$ 後方に vL_1'/v' 長くなったと考えてよい。

これは、衝突がおこるかどうかを位置関係から判断するのに便利な概念であるが、現実の衝突を考えると、逆の変換をとるのが必要なことを注意しておく。

2.2 一般の encounter

はしがきで述べたように、二つの船がそのまま直進したと仮定しておこる衝突のことを幾何学的衝突または遭遇となす。この状況が発生することを、今後 encounter ということにする。

まず、水路の存在などを考慮しない一般の場合、長さ L の船が直進するとき、これと進路が角度 θ をなして交差する(これを交差角となす)船 L' との encounter を考えよう。図-2 のように L を換算長さ l におきかえ相対速度をとれば、

$$\tan \phi = \frac{v' \sin \theta}{v' \cos \theta - v}$$

となり l が単位時間中に掃引する斜線の範囲に存在する船の隻数の期待値が、単位時間あたりの encounter の期待値になる。 ρ_0' を船 L' の密度とすれば、長さ L をもつある船は単位時間に、

$$\rho_0' S = \rho_0' l v' |\sin \theta| = \rho_0' v v' (L/v + L'/v') |\sin \theta|$$

回、長さ L' の船と交差角 θ をなして encounter をおこなうことが期待される。結局、単位時間・単位面積あたりの (L, L', v, v', θ) encounter の期待値は、

$$q q' (\tau + \tau') |\sin \theta|$$

である。ただし、

$$\tau \equiv L/v \quad \tau' \equiv L'/v'$$

q, q' は単位時間に単位長さの線分を直角に通って流れる隻数で、交通流密度となす。

この結果をみると、前方($\theta=180^\circ$)および後方($\theta=0^\circ$)からの encounter がゼロである。これは船の幅を

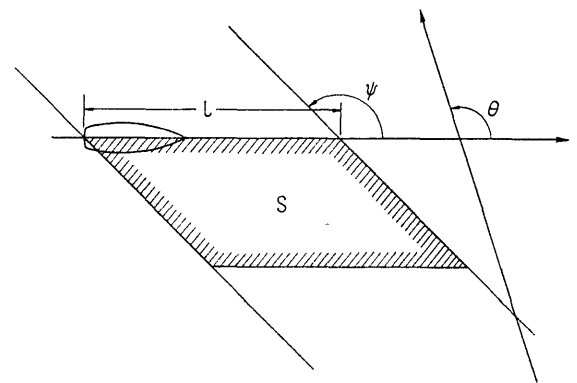


図-2 単位時間あたり encounter の可能な面積

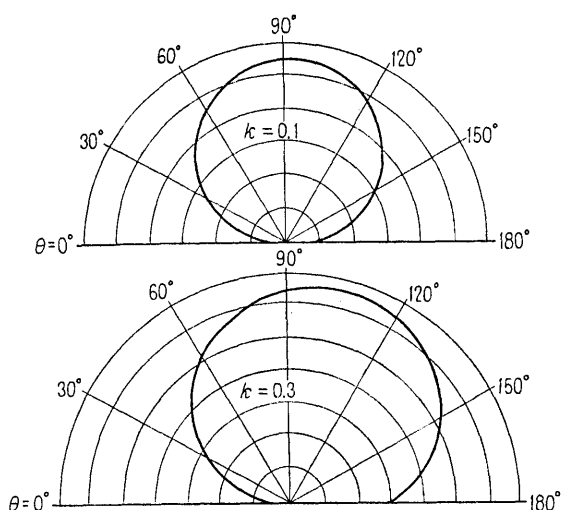


図-3 encounter の確率の角度依存性

考慮していないことに原因する。船を長さ L 幅 $B = \kappa L$ の長方形とすると上記期待値は、

$$qq' \{ (\tau + \tau') |\sin \theta| + \kappa |L/v' - L \cos \theta/v| + \kappa |L'/v - L' \cos \theta/v'| \}$$

となる。たとえば $L = L' v = v' \kappa = \kappa'$ の場合、

$$2qq' \tau \{ |\sin \theta| + \kappa |1 - \cos \theta| \}$$

となる。図-3 に、期待値の交差角依存性を極座標で表現する。これからみると通常の交差交通の場合、船の幅の効果は無視できるとおもわれる。

2.3 交差水路における encounter

図-4 のような交差直線水路における encounter の確率について考える。 L, v のある船が、この交差点を通過するとき L', v' の船との encounter の期待値は、前と同様にして、斜線部分に存在する船の隻数の期待値に等しい。この計算は容易におこなわれ、

$$\rho_{L',v'} w' v' (\tau + \tau')$$

ただし w' は水路幅 $\rho_{L',v'}$ は L', v' の船の密度である。ところで $Q_{L',v'} = \rho_{L',v'} w' v'$ は、まさに交通量に等しいから、この交差点で単位時間に発生する (L, v, L', v') -encounter の期待値は、

$$Q_{L,v} Q_{L',v'} (\tau + \tau')$$

となる。

一般に、図の斜線部分に i 隻の船が存在する確率は交通量のちいさいときはポアソン分布であらわされるから“長さ L の船がこの交差点を通過するとき、長さ L' の船 i 隻と encounter する確率は平均値、

$$Q_{L',v'} (\tau + \tau')$$

のポアソン分布である”という表現をすることもできる。

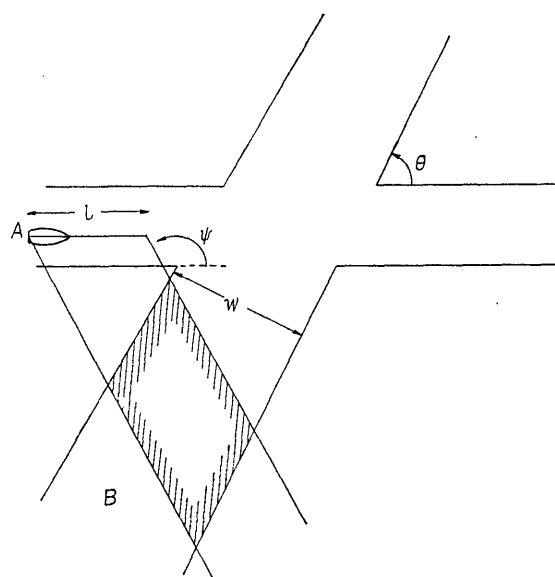


図-4 交差点における encounter の可能な面積

さて、この交差点でのすべての encounter の期待値は、まず同じ τ, τ' を持つものをよせ集めて、

$$Q_{\tau} Q'_{\tau'} (\tau + \tau')$$

つぎに分布関数を $p(\tau) d\tau, p'(\tau') d\tau'$ 、全交通量を Q, Q' とすると、

$$Q_{\tau} = Q p(\tau) \quad Q'_{\tau'} = Q' p'(\tau')$$

であるから、

$$QQ' \left\{ \int p(\tau) \tau d\tau + \int p'(\tau') \tau' d\tau' \right\} = QQ' (\bar{\tau} + \bar{\tau}')$$

と書くことができる。

以上、水路が直線の場合を考えたのであるが、曲線部分が交差するとき、交差角 θ がその船によってことなる交差角をもつことがおこり得る。しかし上記の結果は θ に無関係であるから、直線交差、曲線交差にかわりなく同じ式を使うことができる。また、合流がおこなわれるときは、水路幅方向の分布が一様とすれば交差して合流するのと、しないで合流する機会が等しくなり、結局、期待値は一隻あたりでは、

$$\frac{1}{2} Q (\bar{\tau} + \bar{\tau}')$$

単位時間あたりでは、

$$\frac{1}{4} QQ' (\bar{\tau} + \bar{\tau}')$$

となる。

2.4 多体問題

多分岐交差点、あるいは交通量の大きい場合、三隻

以上の船が交差点で encounter をおこなう機会が存在する。ここでは三体問題を考えることにする。三隻の船が介在する encounter には、図-5 のような種類がある。

- (1) 進路Aの船が、同じ進路Bの船二隻とひきつづいておこなう encounter
 - (2) ことなる進路 B, C の船とひきつづいておこなう encounter
 - (3) さらに B, C の船も encounter する
 - (4) 三重 encounter
- それぞれについて以下考察する。

これら多体 encounter は、期待値を計算する場合には実はふくめられていたのである。したがって、まず純粋な二体 encounter を分離して、その確率を計算することからはじめる。

図-4 の斜線の部分に i 隻存在する確率はポアソン分布をなし一隻存在する確率は、

$$Q_{L'v'}(\tau+\tau')e^{-[Q_{L'v'}(\tau+\tau')]}$$

である。かつ、この船は逆に他の船と encounter してはいけない。それはちょうど進路Aにおいて対応する wl の面積内に他船 L が存在しないことでその確率は、

$$e^{-Q_{Lv}(\tau+\tau')}$$

結局、船 L がこの交差点を通過するときおこる二体 encounter の確率は、

$$Q_{L'v'}(\tau+\tau')e^{-(Q_{L'v'}+Q_{Lv})(\tau+\tau')}$$

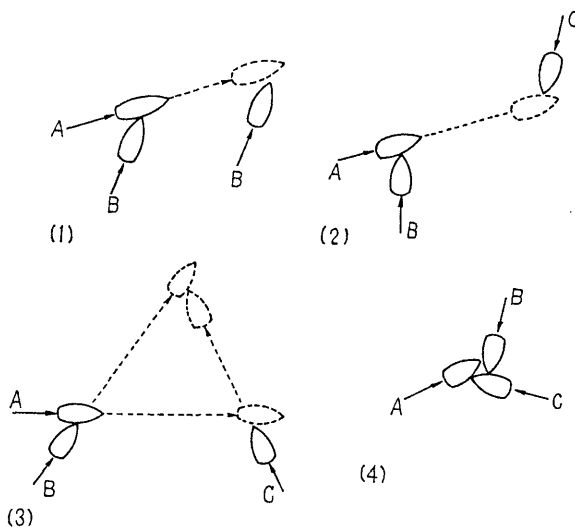


図-5 (1), (2) 連続する encounter
(3) 三つの encounter
(4) 三重 encounter

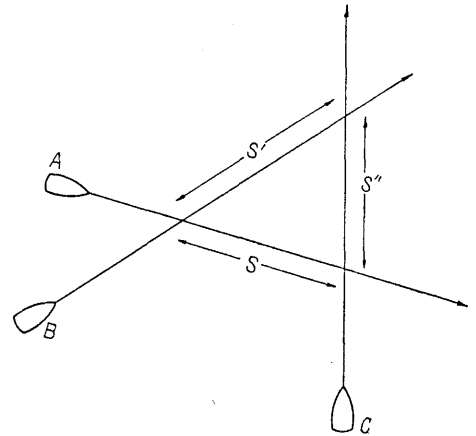


図-6 三つの進路のつくる三角形

単位時間あたりの期待値は、

$$Q_{Lv}Q_{L'v'}(\tau+\tau')e^{-(Q_{L'v'}+Q_{Lv})(\tau+\tau')}$$

となる。もし、他の進路があれば、さらにそれらと encounter しない確率を乗じなければならない。

かくして(1) の場合の期待値は、

$$\frac{1}{2}Q_{Lv}Q_{L'v'}^2(\tau+\tau')^2e^{-(Q_{L'v'}+2Q_{Lv})(\tau+\tau')}$$

(2) の場合も同様にして、

$$Q_{Lv}Q_{L'v'}Q_{L''v''}(\tau+\tau')(\tau+\tau'') \times e^{-(Q_{L'v'}+Q_{Lv})(\tau+\tau')-(Q_{L''v''}+Q_{Lv})(\tau+\tau'')}$$

ただし、進路 B と C は交差していないとする。交差しているときはさらに、

$$e^{-(Q_{L'v'}+Q_{L''v''})(\tau+\tau'')}$$

を乗じなければならない。

(3) の場合は、(4) を特殊なものとしてふくみ、水路幅によって影響される。すなわち 図-6 のように三隻の船の進路が交差するとき、連続する encounter の間に船がすすむ距離 s, s', s'' が encounter の確率の式の中にはいつてくる。労力の多い計算の説明は省略することにし共通因数、

$$qq'q'' \exp \{-(\tau+\tau'')(q+q'')-(\tau+\tau')(q+q') -(\tau'+\tau'')(q'+q'')\}$$

をのぞいた結果を示すと 表-1 のようになる。ただし

$$L/v \equiv \tau \quad s/v \equiv p \quad p+p''-p' \equiv r \quad \text{とおく。}$$

水路幅の影響を考察しよう。簡単のため、たがいに 60° で交差し、対称で同じ幅 w をもつ水路をとり、 $v = v' = v'' \quad L = L' = L''$ とすれば r の最大値は、

$$r_m = \sqrt{3}w/v$$

でその分布は、

$$3(r_m-r)^2/r_m^3$$

表-1 三つの連続 encounter の相対確率

	$\tau'' < r$	$-\tau, -\tau' < r < \tau''$	$-\tau < r < -\tau'$	$-\tau' < r < -\tau$	$-\frac{(\tau+\tau'+\tau'')}{2} < r < -\tau, -\tau''$	$r < -(\tau+\tau'+\tau'')$
$\tau+\tau'+\tau'' < r$	0	—	—	—	—	—
$\tau, \tau' < r < \tau+\tau'+\tau''$	$\frac{1}{2}(\tau+\tau'+\tau''-r)^2$	$(\tau+\tau')\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau'}{2}+\tau''-r\right)$	—	—	—	—
$\tau' < r < \tau$	$(\tau'+\tau')\left(\frac{\tau''}{2}+\frac{\tau'}{2}+\tau-r\right)$	$(\tau'+\tau')(\tau'+\tau)-\frac{1}{2}(r+\tau')^2$	—	—	—	—
$\tau < r < \tau'$	$(\tau''+\tau)\left(\frac{\tau''}{2}+\frac{\tau}{2}+\tau'-r\right)$	$(\tau-\tau'')(\tau+\tau')-\frac{1}{2}(r+\tau)^2$	—	—	—	—
$-\tau'' < r < \tau, \tau'$	$(\tau''+\tau)(\tau''+\tau')-\frac{1}{2}(r+\tau'')^2$	$(\tau+\tau'')(\tau+\tau')-\frac{1}{2}(\tau+r)^2-\frac{1}{2}(\tau-r)^2$	$(\tau''+\tau')(\tau'+\tau)-\frac{1}{2}(\tau'-r)^2$	$(\tau+\tau'')(\tau+\tau')-\frac{1}{2}(\tau-r)^2$	$(\tau'+\tau)\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau'}{2}+\tau''+r\right)$	—
$r < -\tau''$	—	$(\tau''+\tau)(\tau''+\tau')-\frac{1}{2}(\tau''-r)^2$	$(\tau''+\tau')\left(\frac{\tau''}{2}+\frac{\tau'}{2}+\tau+r\right)$	$(\tau+\tau'')\left(\frac{\tau}{2}+\frac{\tau''}{2}+\tau'+r\right)$	$\frac{1}{2}(\tau+\tau'+\tau''+r)^2$	0

encounter の確率は、

$3\tau < r$ のとき 0

$\tau < r < 3\tau$ のとき $\frac{1}{2}(3\tau-r)^2$

$0 < r < \tau$ のとき $3\tau^2-r^2$

これに r の分布関数をかけて水路幅全体に積分すれば、

$3\tau < r_m$ のとき

$$\tau^2(12\tau^3/r_m^3 - 39\tau^2/2r_m^2 + 12\tau/r_m)$$

$\tau < r_m < 3\tau$ のとき

$$\tau^2(r_m^2/20\tau^2 - 3r_m/4\tau + 9/2 - 3\tau/2r_m + 3\tau^2/4r_m^2 - 3\tau^3/20r_m^3)$$

$r_m < \tau$ のとき

$$\tau^2(3-r_m^2/10\tau^2)$$

図-7 に、水路幅と船の長さの比にたいする確率の変化の様子をしめした。

以上の結果をまとめてみると、三体 encounter の確率の式には、特性時間 τ と交通量 Q の積 $Q\tau$ が二次のオーダーでふくまれている。これにたいし、二体 encounter は $Q\tau$ の一次のオーダーである。ゆえに $Q\tau$

≪1 のとき、多体 encounter はすべて二体 encounter にくらべて無視できる。 $Q\tau$ が大きくなると考慮する必要がでてくる。

ところで $Q\tau > 1$ というときは、一隻の船が通過し

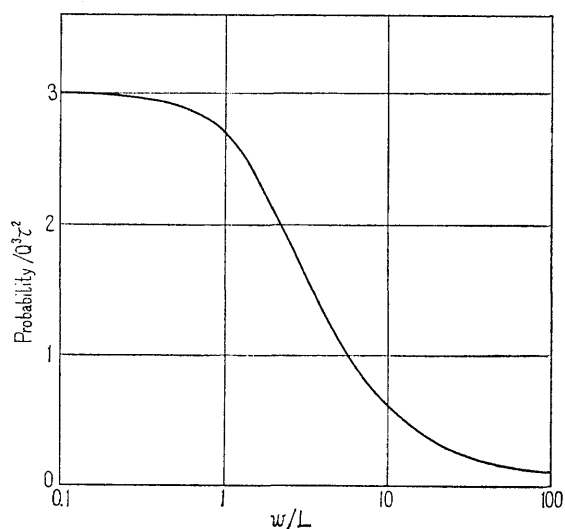


図-7 三つの連続 encounter の相対確率

おわらないうちに他の船が到着するということを意味している。また $Q\tau = \rho\omega L$ であるから、もし水路幅がせまく、二隻ならぶことができないとき、この量 $Q\tau$ は、船による水路面積の占有度合をあらわすことになる。

3. ちいさい交通量のときの交差交通制御

3.1 encounter による時間おくれ

多体 encounter は無視できるとする。交差点で encounter が生じたとき、どちらかの船が他船の通過を待つ必要がある。その待ち時間を、優先権を定めるルールがない場合と、ある場合に分けて考察する。

(1) ルールがない場合

期待値 $QLvQL'v'(\tau+\tau')$ のうち図-8 のふたとおりの状態があり、ひとつは $\frac{v}{v'}L'/(L+vL'/v')$ の割で $0 \sim \tau'$ のあいだに一様に分布する時間おくれ、他方は $L/(L+vL'/v')$ の割で $0 \sim \tau$ のあいだに一様に分布する時間おくれを生ずる。これをふたつの進路のすべての船にたいして積分すると $T \sim T+dT$ のあいだに時間おくれを生ずる単位時間あたりの度数は、

$$\begin{aligned} & (Q+Q'-QQ'(\bar{\tau}+\bar{\tau}'))\delta(T) \\ & + QQ' \left[\int_0^\infty p(\tau)d\tau + \int_0^\infty p'(\tau')d\tau' \right] \end{aligned}$$

である。ただし $\delta(T)$ はデルタ関数である。ゆえに単位時間あたりの時間おくれの総和は、

$$\frac{1}{2} QQ' (\bar{\tau}^2 + \bar{\tau}'^2)$$

となる。

(2) ルールがあるとき

一方の船がかならず待つことになり $0 \sim \tau+\tau'$ のあいだに一様に分布する時間おくれを生ずる。すべての船にたいする積分によって、

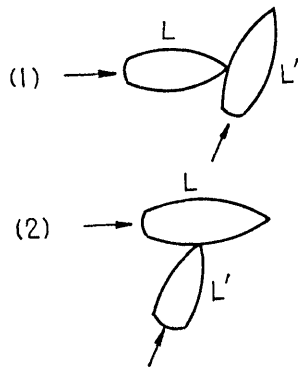


図-8 encounter の二つの型

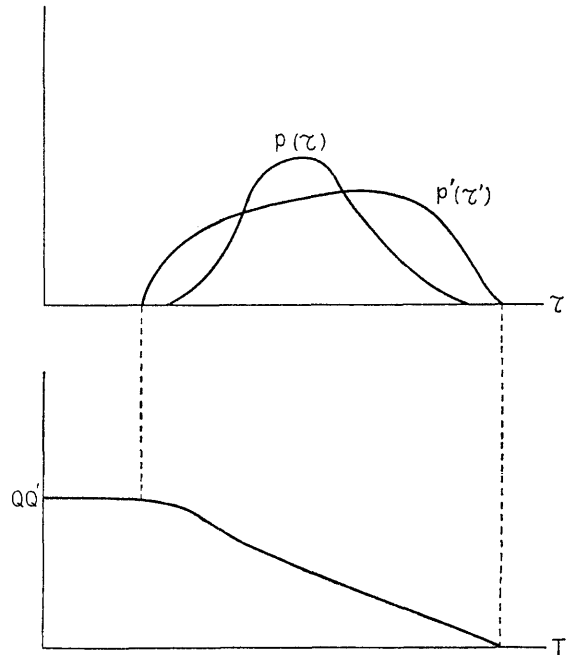


図-9 時間おくれの分布

$$\begin{aligned} & (Q+Q'-QQ'(\bar{\tau}+\bar{\tau}'))\delta(T) \\ & + QQ' \iint_{\tau+\tau'>T} p(\tau)p'(\tau')d\tau d\tau' \end{aligned}$$

時間おくれ総和、

$$\frac{1}{2} QQ' (\bar{\tau} + \bar{\tau}')^2$$

図-9 は、 τ 分布およびそれに対応する時間おくれの分布を定性的にしめす。

3.2 三分岐交差点における制御

もっとも簡単な三分岐交差点をとりあげて、管制をどのようなときにおこなったらよいかをしらべてみよう。各分岐路に 1, 2, 3 の番号をつけ Q_{ij} で $i \rightarrow j$ の進路の交通量をあらわす。まったく任意にこの交差点を船が通過するときに生ずる時間おくれは、前節により一隻あたり平均、

$$\begin{aligned} (1) & \{ Q_{13}[Q_{23}(\bar{\tau}_{13}^2 + \bar{\tau}_{23}^2) + Q_{32}(\bar{\tau}_{13}^2 + \bar{\tau}_{32}^2)] \\ & + Q_{32}[Q_{12}(\bar{\tau}_{32}^2 + \bar{\tau}_{12}^2) + Q_{21}(\bar{\tau}_{32}^2 + \bar{\tau}_{21}^2)] \\ & + Q_{31}[Q_{31}(\bar{\tau}_{21}^2 + \bar{\tau}_{31}^2) + Q_{13}(\bar{\tau}_{21}^2 + \bar{\tau}_{13}^2)] \} / 2 \sum Q_{ij} \\ (2) & \{ Q_{13}[Q_{23}(\bar{\tau}_{13} + \bar{\tau}_{23})^2 + Q_{32}(\bar{\tau}_{13} + \bar{\tau}_{32})^2] \\ & + Q_{32}[Q_{12}(\bar{\tau}_{32} + \bar{\tau}_{12})^2 + Q_{21}(\bar{\tau}_{32} + \bar{\tau}_{21})^2] \\ & + Q_{31}[Q_{31}(\bar{\tau}_{21} + \bar{\tau}_{31})^2 + Q_{13}(\bar{\tau}_{21} + \bar{\tau}_{13})^2] \} / 2 \sum Q_{ij} \end{aligned}$$

管制をおこなうとき、すくなくとも三位相が必要でその配分として、

- (a) $(Q_{13}, Q_{12}), (Q_{23}, Q_{31}), (Q_{31}, Q_{32})$ の形が 2 通りと、
- (b) $(Q_{13}, Q_{12}, Q_{31}), (Q_{12}, Q_{23}), (Q_{32})$ の形が 6 通り

ある。

それぞれの青信号時間を T_1, T_2, T_3 とし、交通量がすくないので、青信号の間は待つことなしに通過できるものとする。平均時間おくれは、

$$(a) \{(Q_{13}+Q_{12})(T_2+T_3)^2+(Q_{23}+Q_{21})(T_1+T_3)^2+(Q_{31}+Q_{32})(T_1+T_2)^2\}/2\sum Q_{ij}(T_1+T_2+T_3)$$

$$(b) \{(Q_{13}+Q_{12}+Q_{31})(T_2+T_3)^2+(Q_{21}+Q_{23})(T_1+T_3)^2+Q_{32}(T_1+T_2)^2\}/2\sum Q_{ij}(T_1+T_2+T_3)$$

これを最小にするには、

$$(a) (T_2+T_3)/(T_1+T_2+T_3)=2(Q_{23}+Q_{21})(Q_{31}+Q_{32})/\{(Q_{23}+Q_{21})(Q_{31}+Q_{32})+(Q_{31}+Q_{32})(Q_{13}+Q_{12})+(Q_{13}+Q_{12})(Q_{23}+Q_{21})\} \text{ etc.}$$

$$(b) (T_2+T_3)/(T_1+T_2+T_3)=2Q_{32}(Q_{21}+Q_{23})/\{(Q_{13}+Q_{12}+Q_{31})(Q_{21}+Q_{23})+Q_{32}(Q_{13}+Q_{12}+Q_{31})+Q_{32}(Q_{21}+Q_{23})\} \text{ etc.}$$

とおけばよく最小平均時間おくれは、

$$(a) 2(Q_{13}+Q_{12})(Q_{23}+Q_{21})(Q_{31}+Q_{32})(T_1+T_2+T_3)/\sum Q_{ij}\{(Q_{23}+Q_{21})(Q_{31}+Q_{32})+(Q_{31}+Q_{32})(Q_{13}+Q_{12})+(Q_{13}+Q_{12})(Q_{23}+Q_{21})\}$$

$$(b) 2Q_{32}(Q_{13}+Q_{12}+Q_{31})(Q_{21}+Q_{23})(T_1+T_2+T_3)/\sum Q_{ij}\{(Q_{13}+Q_{12}+Q_{31})(Q_{21}+Q_{23})+Q_{32}(Q_{13}+Q_{12}+Q_{31})+Q_{32}(Q_{21}+Q_{23})\}$$

となる。

みとおしをよくするためすべての Q_{ij} と $\bar{\tau}_{ij}^2$ を等しいとし、 $T_1+T_2+T_3=T_0$ とおけば、

$$(1) 6Q \cdot \bar{\tau}^2/6$$

$$(2) 6Q \cdot \bar{\tau}^2/3$$

$$(a) 2T_0/9$$

$$(b) 2T_0/11$$

位相配分は、アンバランスにした方が平均の時間おくれはすくなくなる。また、実際問題としては、優先順位のルールはきめておいた方がよいから (2) と (b) の式を採用すると、管制をおこなう方が有利となるためには、

$$6Q \geq 6T_0/11\bar{\tau}^2$$

の条件が必要である。 T_0 の値が任意に残されているがこの値は当然 τ_{\max} や $1/Q$ より大きくなければならない。 $\bar{\tau}^2=(\bar{\tau})^2+(\overline{\tau-\bar{\tau}})^2$ であるので τ の平均値のみならず分散の大きいときも管制が必要となる。

4. 運動学的衝突、その交差角依存性

まえに、実際の衝突がおこるためには encounter のおこなわれることが必要条件であると述べた。しか

し、実際問題として、無限の遠方にある二船が、おたがいに encounter の状態にあることを認めることは不可能で、二船間の距離が有限の値になったとき、はじめて encounter を確認し、避航を開始する。この距離 R を、仮に二船の船首間にとり encounter range とする。この R はまったく新しい概念で、かつ観測困難な量であるから、この後に出る結論はすべて定性的なものとなる。

一般に $R > L$ と考えられ図-10 のように長さ l の線分と角 ψ をなす平行線によって区切られた半径 R の円弧上で、はじめて encounter が確認される。この円弧上 $Rd\phi$ の線分をとおり単位時間に流れこむ量は、

$$\rho_0 R d\phi [(v' \cos \theta - v) \cos \phi + v' \sin \theta \sin \phi]$$

で積分すると、

$$\rho_0 v v' (\tau + \tau') \sin \theta$$

となる。

そこで、ごく単純な避航動作によって、どのような確率で衝突が生ずるかをしらべてみよう。

4.1 むだ時間の効果

encounter range に到達後、そのまま直進したため衝突のおこなわれるまでの時間を t としよう。各船はむだ時間 t_0 をもち、この時間のあいだ直進し、その後、回避が可能であるとしよう。 $t < t_0$ のとき衝突が発生する。 t_0 はいろいろの要素からきまり、その分布関数を $f(t_0)$ とおけば衝突確率は、

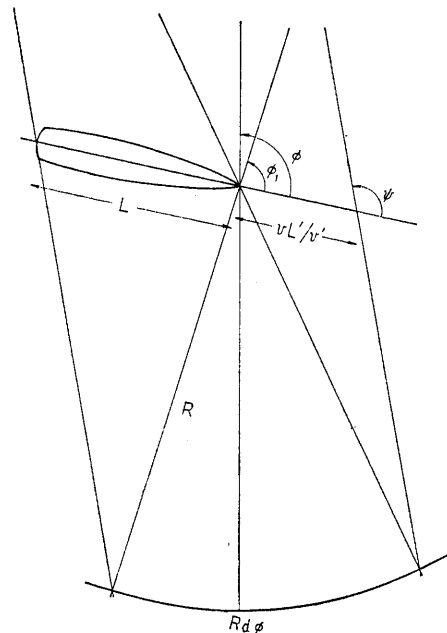


図-10 encounter range

$$\frac{R}{v(\tau+\tau')} \int_{\phi_1}^{\phi} \left[\int_0^{\infty} \frac{R \sin \phi}{v \sin \theta} f(t_0) dt_0 \right] \left(\frac{\cos \phi}{\tan \phi} + \sin \phi \right) d\phi$$

$$+ \frac{R}{v'(\tau+\tau')} \int_{\phi_1'}^{\phi'} \left[\int_0^{\infty} \frac{R \sin \phi'}{v' \sin \theta} f(t_0) dt_0 \right] \left(\frac{\cos \phi'}{\tan \phi'} + \sin \phi' \right) d\phi'$$

$v=v', L=L'$ とし t の平均値を計算すると、

$$4v\bar{t}/R = \left\{ \sin^{-1} \left(h \cos \frac{\theta}{2} \right) + h \cos \frac{\theta}{2} \left[h \sin \frac{\theta}{2} + \sqrt{1 - h^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right] \right\} / h \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2},$$

ただし $h=L/R$ である。

h のいろいろな値にたいして、上式の左辺は 表-2 のようになる。これを見ると $h=0$ としてもよい。

$$\bar{t} \doteq R / 2v \sin \frac{\theta}{2}$$

の θ 依存性を図-11 にしめす。もし、この値を t のかわりにもちいるという近似をおこなうと、衝突確率は、

$$\int_{R/2v \sin \frac{\theta}{2}}^{\infty} f(t_0) dt_0$$

とあらわされる。

4.2 一様減速の効果

単位時間あたり α の割で一様減速を、船首が衝突

表-2 $4v\bar{t}/R$ の角分布

$\theta \backslash h$	0.8	0.1	0
0	∞	∞	∞
10	21.02	23.03	22.96
20	10.98	11.60	11.51
30	7.67	7.81	7.72
40	6.04	5.94	5.85
50	5.08	4.83	4.73
60	4.40	4.09	4.00
70	4.02	3.58	3.49
80	3.70	3.20	3.11
90	3.47	2.93	2.83
100	3.29	2.71	2.61
110	3.15	2.54	2.44
120	3.05	2.41	2.31
130	2.96	2.31	2.21
140	2.90	2.23	2.13
150	2.86	2.17	2.07
160	2.82	2.13	2.03
170	2.81	2.11	2.01
180	2.80	2.10	2.00

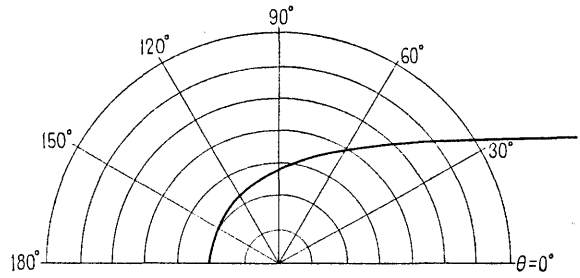


図-11 $4v\bar{t}/R$ の角分布

する側の船だけがおこなうと仮定すると、衝突確率は減速度の分布 $g(\alpha)$ として、

$$\frac{R}{v(\tau+\tau')} \int_{\phi_1}^{\phi} \left[\int_0^{\frac{v^2 \sin \theta}{2R \sin \phi}} g(\alpha) d\alpha \right] \left(\frac{\cos \phi}{\tan \phi} + \sin \phi \right) d\phi$$

$$+ \frac{R}{v'(\tau+\tau')} \int_{\phi_1'}^{\phi'} \left[\int_0^{\frac{v'^2 \sin \theta}{2R \sin \phi'}} g(\alpha) d\alpha \right] \left(\frac{\cos \phi'}{\tan \phi'} + \sin \phi' \right) d\phi'$$

$v=v', L=L', \phi \approx \phi'$ の近似をおこなうと、

$$\int_0^{\frac{v^2 \sin \theta}{2R}} g(\alpha) d\alpha$$

4.3 回頭の効果

前節と同様に、船首が衝突する側が、一定角速度 θ で回頭する。衝突確率は、

$$\frac{R}{v(\tau+\tau')} \int_{\phi_1}^{\phi} \left[\int_0^{\theta_0(\phi)} h(\theta) d\theta \right] \left(\frac{\cos \phi}{\tan \phi} + \sin \phi \right) d\phi$$

$$+ \frac{R}{v'(\tau+\tau')} \int_{\phi_1'}^{\phi'} \left[\int_0^{\theta_0(\phi')} h(\theta) d\theta \right] \left(\frac{\cos \phi'}{\tan \phi'} + \sin \phi' \right) d\phi'$$

ただし $\theta_0(\phi)$ は、

$$\pi/2 > \theta \text{ のとき } \begin{cases} \cos(\theta - \theta t) = \cos \theta + \frac{R\theta}{v'} \sin \phi \\ \frac{v'}{\theta} [\sin \theta - \sin(\theta - \theta t)] - R \cos \phi \\ -vt = v' L' / v \end{cases}$$

$$\pi/2 < \theta \text{ のとき } \begin{cases} \cos(\theta + \theta t) = \cos \theta - \frac{R\theta}{v'} \sin \phi \\ \frac{v'}{\theta} [\sin(\theta + \theta t) - \sin \theta] - R \cos \phi \\ -vt = L \end{cases}$$

を満足する。

例によって $v=v', L=L', \phi \approx \phi'$ と近似すると、

$$\int_0^{\frac{v}{R} F(\theta)} h(\theta) d\theta$$

となり、 $F(\theta)$ は $h=0.1$ のとき、図-12 のようにあらわされる。

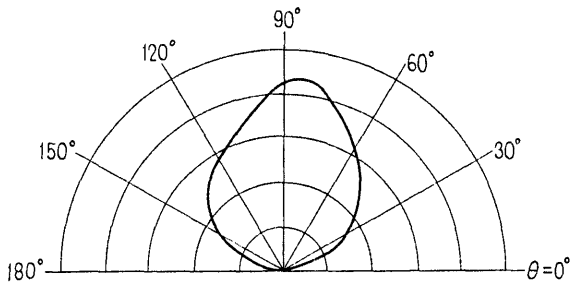


図-12 $F(\theta)$ の分布

4.4 衝突確率にかんする議論

以上、簡単なモデルによって、衝突確率が、交差角にどのように関係するかをしらべた。近似計算の結果 R が小さい、 v が大きいほど衝突確率が大きくなるという当然の結果は別として、むだ時間および一様減速の効果においては、 $\sin \frac{\theta}{2}$ が大きいほど衝突確率が大きいという結果が得られた。

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{(1 - \cos \theta)/2}$$

であり $v=v'$ のとき相対速度の絶対値は、

$$|\vec{v} - \vec{v}'| = v \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$$

であるから、相対速度が大きいほど衝突確率が大きくなるということが、ここにはじめて得られた。しかし、回頭の効果は、図-12 からあきらかなように $\sin \theta$ 依存性にちかい。したがって、以上が複合して得られるものは、単に相対速度に比例するとき単純なものではないであろう。

5. むすび

交差点における、船の encounter にかんする確率論を展開し、交通量がすくない場合の交通制御システム設計の基礎を確立した。また、交差点における事故発生確率の交差角による変化を研究した。

交通量の多い場合については、次報にまつことにする。

付録 定理の証明

n 分岐路のおおのほに、左まわりの番号 $1, 2, \dots, n$ をつけ (i, j) で $i \rightarrow j$ の流れをあらわす。右側交通を仮定し、交差は許されていない。同一位相内にあることが許される流れを、それぞれ線分で結び、図-13 のような図形をつくる。この形状をグラフとよぶ。

すべての点が線分でたがいに結ばれているグラフを

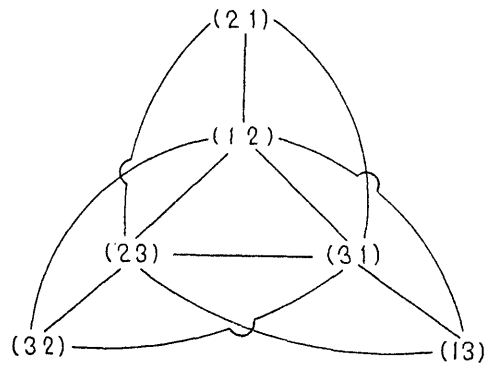


図-13 位相分配のグラフ

完全なグラフとよぶ。したがって同一位相内にある流れは完全なグラフを形成しなければならない。問題は、上のグラフをどのようにして最小個数の完全なグラフに分解できるかである。

証明は逆に、このグラフのある部分が、どうしても n 個よりすくない完全なグラフに分解できないことをしめすことにする。部分が n 個にしか分解できないならば、全体はすくなくとも n 個にしか分解できない。

n が奇数のとき $n=2m+1$ とおき、

$$[i+j] \equiv i+j \pmod{n}$$

と定義すると、

$$(i[i+m]) \quad i=1, 2, \dots, n$$

なる n 個は同一位相内に共存できない。

n が偶数のとき $n=2m$ とおき、

$$(i[i+m]), (i[i+m+1]) \quad i=1, 2, \dots, n$$

なる $2n$ 個をとると、この $2n$ 個のつくるグラフは図-14 のようになり、この中に三角形のグラフはまったくふくまれないから、すくなくとも n 個にしか分解できない。

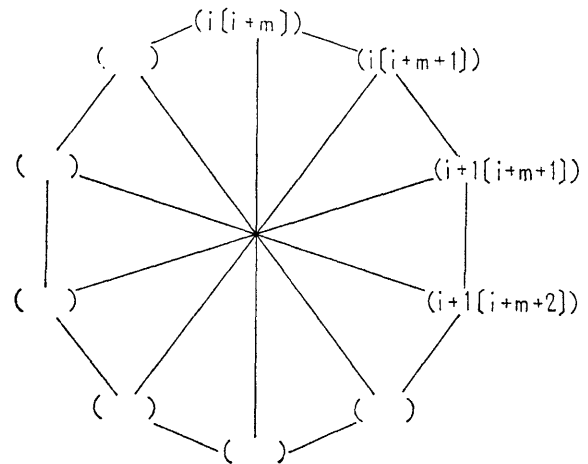


図-14 ある部分集合のグラフ