中性子遮蔽解析に用いる輸送方程式の数値解法の研究

竹　内　　清*

Study on a Numerical Approach to the Boltzmann Transport Equation for the Purpose of Analyzing Neutron Shields

By

Kiyoshi TAKEUCHI

A numerical method for solving the Boltzmann transport equation is presented for practical neutron shielding calculations. The energy-dependent transport equation written in its general form is converted into a set of coupled one-group integral equations for each energy mesh, with the sources due both to the true source and to the elastically and inelastically scattered neutrons. The scattering source is evaluated by means of numerical integration of the scattering integral through the application of quadrature schemes. Highly anisotropic scattering is taken into account for elastic scattering, while isotropic scattering is assumed for inelastic scattering. The derived integral equation is solved by performing line integration over spatial $\bar{r}$ along the neutron flight path in the direction of neutron motion between successive spatial mesh intervals at each discrete direction. No iterative technique is applied in the calculation of the integral equation for the benefit of shortening the computing time and of providing always reasonable solutions.

Discussions are given in chapter 4 on the advantages and disadvantages of all the procedures which have been currently used in neutron shielding calculations. The application of the present method to a variety of actual geometries is illustrated in chapter 6, on the basis of which PALLAS program has been designated to perform neutron penetration calculations for one dimensional plane and spherical, and two dimensional cylindrical geometries.

The calculational accuracy of the present method are judged by performing comparisons of its calculated results with analytical solutions for unscattered flux and angular distribution in plane, spherical and two dimensional cylindrical geometries, and with experimental angular spectra in water for fission neutrons from reactor core, and in graphite and polyethylene for fission neutrons from Linac source. Excellent agreement is obtained between the present calculations and analytical or experimental results. To verify the applicability of the method to practical neutron shielding calculations, further comparison is made of the calculated with the experimental results for the reaction rate of penetrated fast neutrons through a stratified iron-water shield, with good agreement obtained between them. From the discussions made in chapter 10 on the advantages and disadvantages of the present method, it is concluded that the method is a reliable and useful tool for the analysis of neutron shields in a variety of source problems.

目　　次

*　東海支所　原稿受付：昭和47年8月1日

要　　旨

線源から放射された中性子の物質透過現象を解明することは，中性子遮蔽上基本的な情報が得られる点が重要である。原子炉の放射線遮蔽においては中性子およびガンマ線の遮蔽体透過が主要な問題である。このうち中性子の透過問題はそれ自身の重要さとともにガンマ線透過問題の要因となる二次ガンマ線の線源計算の基本となるものである。したがって，中性子の物質透過問題を正確に解析する理論的解析法の確立は，原子炉の放射線遮蔽設計に必要な諸量を算出することができることを意味するので最も重要なことである。

これまでに数多くの研究が中性子透過問題に対して行なわれている。これらのうち中性子の遮蔽体透過を理論的に取り扱った各種の計算法については第1章で概説し，在来のこれらの計算法を中性子遮蔽計算に適

用した場合の各計算法のもつ不利な点や適用限界を明らかにした。その結果，中性子の遮蔽体透過を理論的に解析するにはいかなる方法が適しているかが明らかにされた。第4章では中性子透過計算に適しているといわれる輸送方程式の Discrete Ordinates 法にもとづく数値解法につき検討を加えた。まず Discrete Ordinates 法が中性子透過計算に適している理由を明らかにし，次いで同法にもとづく数値解法である Sn 法や同じく Discrete Ordinates 法にもとづく直接積分解法の NIOBE および EOS につき検討を加えた。その結果，これらの計算法を中性子透過計算に適用した場合の不利な点や適用限界が明らかにされた。

本研究の目的は，在来のこれらの中性子透過計算法のもつ不利な点や適用限界を克服して，中性子透過問題を正確に，かつ効果的に計算できる理論的方法の確立にある。そのために，遮蔽計算で重要な定常状態を対象として，定常の中性子輸送方程式を第2章でたてた。第3章で中性子の物質との相互作用に関する基本的な諸現象について述べ，中性子透過の理論的解析上重要となる現象を明らかにした。第5章で中性子透過問題を正確に，かつ効果的に取り扱うことができる理論的解析法として，中性子の定常の輸送方程式を境界条件を満足する比較的厳密に近い方法で解く直接積分解法を導いた。本解法は，中性子束の空間，エネルギ，角度に関して必要に応じて詳細な分布を与えることができる。したがって遮蔽体内の中性子束分布から遮蔽体内で中性子に起因して発生する二次ガンマ線の線源分布を求めることができる点で優れている。また本解法は多重層の内側境界および外側境界で大きく変化する中性子角度分布を取り扱うのに適している。一般に遮蔽体は多重層で構成されるのが普通であるから，上述の利点は本解法の中性子透過問題適用に対する特長となる。

第5章で導出された最終式は空間形状に関して何の制限も設けられていないので任意の遮蔽形状に適用することが可能である。したがって第6章に実際の遮蔽形状への適用例として，一次元平板形状，球対称形状，無限円柱形状，二次元円柱形状，さらに三次元直角座標形状への適用について述べた。

第7章では本研究による輸送方程式の数値解法の計算精度を確かめるために，一次元平板形状における有限厚さで吸収断面積を有する線源に対する非散乱線の計算と解析解との比較，一次元球形状における大きな半径で吸収断面積を有する球体積線源および小さな半径で同種類の球体積線源に対する非散乱線の計算と解析解との比較を行なった。さらに二次元円柱形状における吸収断面積を有する円柱体積線源に対する線源内および遮蔽体内における非散乱線の計算と解析解との比較を行なった。

第8章では実際の中性子透過問題に対して本計算法の精度を確かめるために，絶対値で測定値の求められている信頼のできる実験として2例を選び，本計算法にもとづく計算コード PALLAS によりこの2例に対し比較計算を行なった。すなわち，その1は BSR-1 (および FNR) 炉における水中の中性子角度スペクトルであり，その2は米国における中性子透過のベンチマーク問題であるグラファイト中の中性子角度スペクトルである。さらに第3の比較計算問題は絶対値で測定値が求められていないが，ポリエチレン層透過の中性子角度スペクトルの測定値が発表されているので，この問題を計算し透過中性子の前方方向角度の中性子スペクトル上1点で測定値を計算値に規格化して比較検討を行なった。

第9章では実際の原子炉遮蔽の理論的解析の1例として，日本原子力研究所の4号炉の中に鉄層を3枚配置して一次遮蔽を模擬し，この問題を一次元球形状で計算し遮蔽体の各物質の境界における速中性子エネルギスペクトルおよび角度分布を求め，さらにしきい検出器による速中性子の反応率の測定値と計算による速中性子の反応率との比較を行ない，速中性子の減衰計算の正確さを確かめた。

第 10 章では検討の章を設け本解法の中性子透過問題適用への利点および不利な点を明らかにし，解析解や実験結果に対する比較計算による比較の結果から，本解法による中性子透過計算の精度を確かめ，本解法の中性子遮蔽解析に対する信頼性を検討した。

第 11 章では結言として本解法の中性子遮蔽解析に対する有効性を述べた。さらに本研究の今後の課題として総合的な放射線遮蔽の設計および解析を目標として，中性子に起因する二次ガンマ線の計算から原子炉のガンマ線遮蔽計算の包含，簡単な形状のダクトに対する中性子ストリーミング計算への適用，さらに遮蔽最適設計計算への寄与にも言及した。

第1章 序　　論

1.1 緒　　言

現在，放射線遮蔽の主眼となる対象物は原子炉である。その他にも放射線遮蔽の対象となるものに放射性

同位元素や各種の加速器などがあげられるが，これらの放射線源の遮蔽は原子炉の遮蔽のために開発された各種の技法を応用することによって遂行され得る。原子炉の放射線遮蔽を効果的に行なう技法の開発は一般の陸上炉に対しても望ましいことであるが，原子力船の原子炉の遮蔽では特に遮蔽重量が経済的な観点で大きな負の要因となるので，必然的な要望となる。

本研究の目的な原子炉の遮蔽を効果的に行なうために必要な理論的技法の確立にある。原子炉の遮蔽の分野では対象となる放射線に中性子とガンマ線とがあるが，ガンマ線の遮蔽体透過は遮蔽体内で中性子に起因して発生する二次ガンマ線の透過が炉心から放射される一次ガンマ線の透過とともに透過の要因となる。したがって中性子の遮蔽体透過現象を正確に解析する理論的解析法の確立は遮蔽を効果的に行なうための基本となる。

中性子の物質透過を正確に解析する理論解析法としては，中性子の輸送方程式を解く方法が最も望ましい。しかし，エネルギ，空間，角度依存の中性子輸送方程式を解析的に解くことは不可能に近い。したがって遮蔽の理論解析法としての輸送方程式の解法は全て近似解法であり，しかも大型高速の電子計算機使用の数値解法とならざるを得ない。さらに遮蔽における輸送方程式の解法の研究は解の存在を前提とした解法の技術の研究ということになる（第4章)。本研究による中性子輸送方程式の数値解法も解法の技術の研究であり，それは多重層より成る厚い遮蔽体を透過する中性子の解析に最も有効であることを目的として行なわれた。

放射線透過計算に対する輸送方程式の数値解法は，Discrete Ordinates 法にもとづく解法がほとんどである。Discrete Ordinates 法が放射線透過計算に優れている理由は次のようである。すなわち中性子の進行方向角を有限個の分点に分け，各角度分点で独立に輸送方程式を解く Discrete Ordinates 法は多重層の内側境界および外側境界で大きく変化する中性子角度分布の取り扱いに適している。また速中性子の深い透過で問題となる鋭い前方ピークの中性子角度分布を首尾良く取り扱い得る利点があるからである（第4章)。したがって本論文で提案する定常の中性子輸送方程式の数値解法も Discrete Ordinates 法にもとづいており，中性子の進行方向角を単位球面上で有限個の角度分点で代表させる。そしてこの角度分点の各分点で中性子の進行方向にその飛程に沿って輸送方程式を直接積分して解を求める。エネルギ依存はエネルギを中性子レサジで表わし，このレサジ単位で等間隔に有限個に分け，その分点をレサジ分点として逆にこれからエネルギメッシュを決めてエネルギ組分け表示を行なう。また散乱積分計算は次のように数値積分によって行なう。すなわち，非等方散乱の弾性散乱は散乱角度分布関数を任意の高次のルジャンドル多項式で展開近似することにより散乱の非等方を取り扱う。一方非弾性散乱は実験室系で等方散乱の仮定（第3章）を設けることにより，散乱減速関数を用いて計算を行なう。これらの弾性散乱および非弾性散乱に起因する中性子の散乱積分の計算は第5章で設定する仮定にもとづいて数値積分計算される。この仮定の基本は中性子束 $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)$ が角度およびレサジについて微小区間 $\Delta\Omega$ および Δu 内でステップ関数で近似できる，というのである。したがって，本解法の計算精度は角度分点数およびレサジ間隔の幅によって決まることなる（第10章)。

さらに本解法の特徴として，在来の輸送方程式の解法で数値解を得るのに一般に使用されている繰返し収斂法の使用を回避した点がある。これは繰返し回数だけ計算時間の短縮が可能であるのと，在来の数値解法で問題となっている対象とする遮蔽問題によっては収斂が一様でないこと，また収斂をしないこともあるという不安，さらに収斂した値が負の値のような異常な値に収斂することもあるという恐れを取り除くためである（第5章)。この繰返えし収斂法の使用の回避により本解法は遮蔽計算として大きな利点を持つことになるが，その反面計算におけるレサジ間隔を密に定めないと計算精度が悪くなる不利な点も併せ持つことになる（第10章)。しかし，計算精度に対してあまり厳しい要求をしない限りレサジ間隔を適当な値に定めることができるので（第10章)，繰返し収斂法の不使用による計算時間の短縮は本計算法をパラメタサーベイ用の計算に適用することを可能にし，さらに遮蔽設計計算に対しても適用することが可能となるので極わめて重要な利点である。

一般に遮蔽体は形状が大きいため，計算上数多くの空間メッシュが必要となる。しかし，もし空間メッシュ間隔を粗く選んでも計算精度に及ぼす影響が少なければ，空間メッシュ数を減ずることが可能となる。したがって，空間メッシュ間隔を粗く選べることは遮蔽計算上大きな利点となる。本解法は輸送方程式の空間積分を空間メッシュ間で直接積分することにより計算するので空間メッシュ間隔を粗く選ぶことができる

(第10章)。これに対し，中性子透過計算に最も一般的に使用されている Discrete Sn 法は空間および角度メッシュに関して小さなセルを仮定し，このセル上で互いに向かい合う対辺の中点上の中性子束はその変化の程度が線型関数で表わされる程度であるという基本的な仮定の上に成り立っている(第4章)。このために Discrete Sn 法は空間および角度メッシュを細かく選ばないと減衰の激しい，また速中性子の物質透過のように角度分布の変化の激しい遮蔽計算では計算精度が悪くなる恐れがある。

遮蔽体の形状が大きいことに起因するもう一つの問題点は，線源から放射される核分裂スペクトルの中性子は厚い遮蔽体を透過するのに従ってスペクトルを硬化することである。その結果，遮蔽体の外側に近いほど速中性子が主要となる。一方低いエネルギの中性子はこの外側近くでは厚い遮蔽体を透過して来た速中性子が散乱減速されて生じたものである。したがって遮蔽体の外側に近いところでは速中性子が中性子全体に影響を及ぼすようになるので，透過速中性子束を正確に求めることが中性子の遮蔽体透過問題を正確に計算するための要点となる。しかし，速中性子は深い透過で鋭い前方ピークの角度分布を示すので，輸送方程式を解いてこの鋭い前方ピークの中性子角度分布を正確に求めることは極わめて困難なことであった。在来の輸送方程式の解法で一般的に使用されている球調和法はこの種の現象を取り扱うのに最も不向きである(第1章 1.2)。さらに Discrete Ordinates 法にもとづく在来の各種の数値解法 (Sn 法や NIOBE, EOS 等) でも，極端に前方ピークの角度分布をもつ速中性子の深い透過問題の取り扱いには難点があった(第4章)。この難点を克服して速中性子の深い透過を正確に取り扱う中性子透過計算法の確立が本研究の目的である。それは速中性子の深い透過問題を特に精度良く計算できれば，上述のように低いエネルギの中性子は速中性子の散乱減速によって生じたものであり，しかも低いエネルギの中性子の透過問題の取り扱いには特別の難点はないので，中性子全体の透過問題を精度良く取り扱うことが可能となるからである。

本論文で提案する中性子輸送方程式の数値解法は数式の導出の過程で空間形状を固定しないので，導出された最終式は任意の遮蔽体形状へ適用することが可能である。そこで第6章で一次元平板，球，無限円柱形状，二次元円柱形状，さらに三次元直角座標形状への適用を述べる。

本計算法の計算精度は第7章で各種形状における吸収係数がある場合の体積線源に対する非散乱線の減衰計算を行ない，解析解と比較し精度の高いことを確かめた。次いで第8章で速中性子の物質透過問題に対する計算精度を確かめるために，絶対値で測定値の求められている実験に対し，比較計算を行ない実験結果との比較を試みた。その結果，本計算法は速中性子の物質透過問題を精度良く取り扱うことが明らかにされた。さらに第9章で実際の原子炉の一次遮蔽を模擬した水一鉄三重層に対する速中性子透過計算を行ない，速中性子遮蔽の解析を試みた。その際，速中性子の減衰が絶対値で正しく計算されているかどうかを確かめるために，しきい検出器による速中性子の反応率と計算による同反応率とを比較した。その結果，減衰計算を正確に行なっていることが確かめられた。以上の比較計算の結果，本解法による中性子透過計算に対する信頼性が確認された。

最後に，本研究の成果である中性子遮蔽の理論的解析法の総合的な放射線遮蔽問題への適用可能性について言及する。

参考文献は本文中右肩に) を付して記し，本論文の末にまとめた。また付録も本論文の末にまとめた。なお本論文で使用する記号は次にまとめて記しておく。

【記号の説明】

$\bar{r}$: 位置を示すベクトル。直角座標では (x, y, z) で表わし，円柱座標では (r, z) で表わす。単に r は半径方向の位置を表わし，d や t も距離を表わす変数として使用する。

$\bar{\Omega}$: 中性子の進行方向の単位ベクトル。また散乱の場合は散乱後の進行方向単位ベクトル。これに対し，$\bar{\Omega}'$ で散乱前の中性子の進行方向単位ベクトルを表わす。

$\bar{\Omega}(\theta, \phi)$: 上述の $\bar{\Omega}$ を極角 θ と方位角 ϕ で表わしたもの。

θ: 中性子の進行方向と軸とのなす角。

ϕ: 中性子の進行方向単位ベクトルを (x, y) 平面に斜影し，それと x 軸とのなす角。分点表示では ϕ_{pq} と書く。

ω: 極角の余弦，$\omega = \cos\theta$。分点表示では ω_p と書く。

$\bar{\Omega}_{pq}(\omega_p, \phi_{pq})$: 上述の $\bar{\Omega}(\theta, \phi)$ を θ の代わりに ω で書き換え，Discrete Ordinates 角度分点で表わしたもの。

$\Delta\Omega_D$: D 番目の角度分点の代表する角度の区間

$\Delta\bar{\Omega}(\Delta\omega, \Delta\phi)$: $\bar{\Omega}$ 方向の微小角度区間

E: 中性子のエネルギ，または散乱後のエネルギ。これに対し，E' は散乱前の中性子のエネルギを表わす。

ΔE_G: G グループのエネルギ幅

$E_{\max}$: 解くべき問題の中性子の最大エネルギ

u: 中性子レサジ

u_j: j 番目の中性子レサジ

Δu: 微小レサジ区間

h: レサジ等間隔に選んだレサジメッシュの幅

J: エネルギ組み分けの総数

$\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$: 中性子角度束密度；位置 $\bar{r}$ で単位エネルギ，単位立体角あたりエネルギ E をもつ中性子が $\bar{\Omega}$ 方向へ進行し，$\bar{\Omega}$ 方向に垂直な単位面積を単位時間に通過する数。なおレサジ単位で表わせば $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)$ である。

$\Phi_0(\bar{r}, E)$: 中性子スカラー束；$\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ を $\bar{\Omega}$ の全立体角で積分したもの。なおレサジ単位で表わせば $\Phi_0(\bar{r}, u)$ である。

$\Phi_l(x, E)$: $\Phi(x, \omega, E)$ をルジャンドル多項式展開した場合の展開係数。なおレサジ単位で表わせば $\Phi_l(x, u)$ である。

$d\bar{\tau}$: 微小位相空間，$d\bar{r}d\bar{\Omega}dE$。

$\Sigma_t(\bar{r}, E)$: 巨視的全断面積 (cm^{-1})。なお単一エネルギの比較計算では Σ_1 を線源内，Σ_2 を遮蔽体内における巨視的全断面積として使用する。

$S(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$: 純線源（外部線源）；位置 $\bar{r}$ で単位エネルギ単位立体角あたり，エネルギ E をもち進行方向が $\bar{\Omega}$ である中性子が単位体積あたり単位時間に生まれる数。なお単一エネルギの比較計算では $S(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ を全立体角で積分した線源の強さとして $S_V(x)$ を使用する。

$n(\bar{r})$: 位置 $\bar{r}$ における単位体積あたりの原子の数。

M: 原子の質量。なお M の逆数 ρ をと書く。

$\sigma_{S,i}(\bar{\Omega}' \to \bar{\Omega}, E' \to E)$: i 番目の核種の微視的微分散乱断面積；エネルギが E' で進行方向が $\bar{\Omega}'$ の中性子が核に散乱されてエネルギが E で方向が $\bar{\Omega}$ に単位エネルギ，単位立体角あたりなる微分断面積。

$\sigma^{el}_{S,i}(\bar{\Omega}' \to \bar{\Omega}, E' \to E)$: 弾性散乱による微視的微分散乱断面積。

$\sigma^{in}_{S,i}(\bar{\Omega}' \to \bar{\Omega}, E' \to E)$: 非弾性散乱による微視的微分散乱断面積。

$f(E, \mu)$: 弾性散乱による散乱角度分布関数。なおレサジ単位で表わせば $f(u, \mu)$ となる。

$f^{in}_i(E', E)$: i 番目の核による非弾性散乱でエネルギ E' の中性子がエネルギ E に単位エネルギあたり減速される確率。

$g^0_i(E', E)$: $f^{in}_i(E', E)$ を連続関数で表わした場合の減速確率を表わす関数。

σ_t: 微視的全断面積（バーン）。

σ_S: 微視的散乱断面積（バーン）。

σ^{el}_S: 微視的弾性散乱断面積（バーン）。なお簡単のため σ_{el} と表わすこともある。

$\sigma^{in}_S(E)$: 微視的非弾性散乱断面積（バーン）。なお簡単のため σ_{in} と表わすこともある。

σ_a: 微視的吸収断面積（バーン）。

$\sigma_{n\gamma}$: 微視的 (n, γ) 反応断面積（バーン）。

σ_{np}: 微視的 (n, p) 反応断面積（バーン）。

$\sigma_{n\alpha}$: 微視的 (n, α) 反応断面積（バーン）。

σ_{n2n}: 微視的 $(n, 2n)$ 反応断面積（バーン）。

ϑ: 重心系における散乱角。

Θ: 実験室系における散乱角。

μ: $\mu = \cos\vartheta$，なお分点表示では μ_m と書く。

α: $\alpha = \cos\Theta$，なお α を分点表示する場合は α_m と書く。

ψ: 散乱の方位角，なお分点表示では ψ_n と書く。

A: 水素原子による弾性散乱における非等方パラメタ。

$f_p(u)$: $f(u, \mu)$ をルジャンドル多項式展開した場合の展開係数。

$P_l(\alpha)$: l 次のルジャンドル多項式。

$P_p(\mu)$: p 次のルジャンドル多項式。

$P_n^m(\cos\theta)$: ルジャンドルの陪関数。

V: 体積，なお V_I は I 番目の体積要素。

$G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$: 散乱積分項。

$G_{el}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$: 弾性散乱による散乱積分項。

$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$: 非弾性散乱による散乱積分項。

η_n: $\eta_n=\cos\psi_n$

W_n^*: ψ についての積分を数値積分する際の積分点 ψ_n に対する重み。

Δ: (z 軸, $\bar{\Omega}'$) 平面と (z 軸, $\bar{\Omega}$) 平面とのなす角。

ξ_n: $\xi_n=\cos\Delta$

W_m: μ についての積分をガウス求積法で数値積分する際の μ_m に対する重み。

a_{mn}: 重みマトリックス; $a_{mn}=W_mW_n^*$。

$T_{g(m),m}(\bar{r})$: 転移マトリックス; 位置 $\bar{r}$ で $g(m)$ グループの中性子が散乱角 ϑ_m で弾性散乱され単位エネルギ，単位立体角あたり j グループの Ω_{pq} 方向に入ってくる割合。

$a_\nu(E')$: 非弾性散乱により中性子がエネルギ E' から E に減速される割合。

E^ν: 標的核の基底状態と ν 番目の励起エネルギ準位とのエネルギ差。

$E_{i,B}$: i 番目の核の励起エネルギ準位を離散準位の取り扱いと連続分布の準位の取り扱いにする境界のエネルギ。

ζ_g: 台形公式の重み。

b_p: $\bar{\Omega}$ についての積分を数値積分する際の重み。

λ_p: ω についての積分をガウス求積法で行なる際の重み。

$c_g^j(r)$: 転移マトリックス; 位置 $\bar{r}$ で非弾性散乱により g グループの中性子が j グループの $\bar{\Omega}_{pq}$ 方向に単位エネルギあたり，単位立体角あたり落ちてくる割合。

$Q(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$: 線源項; $Q(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)=G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)+S(r, \bar{\Omega}, E)$。

R, R_0: 中性子の飛程に沿って測られた距離，また球および円柱線源の半径としても使用。

$\tau(\bar{r}, \bar{r}', E)$: 光学距離; エネルギ E の中性子が位置 $\bar{r}'$ から $\bar{r}$ に到達するまでに $\exp(-\tau)$ で減衰する。

$G^D(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$: 上のエネルギグループから散乱減速されて線源となる量。

$G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$: 自分自身のエネルギグループ内で散乱され位相空間 $(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ 内に留まる量。

$A(\bar{r}, E)$: $G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)=A(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$。

$\Sigma_t'(\bar{r}, E)$: $\Sigma_t'(\bar{r}, E)=\Sigma_t(\bar{r}, E)-A(\bar{r}, E)$。

$Q'(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$: $Q'(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)=Q(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)-G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$。

$\boldsymbol{\Phi}_i$: Φ_{ij} を要素とするベクトル。

Φ_{ij}: $\Phi_{ij}\equiv\Phi(\bar{r}_i, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$。

$\boldsymbol{Q}_i$: Q_{ij} を要素とするベクトル。

Q_{ij}: $Q\equiv Q(\bar{r}_i, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$。

$\boldsymbol{E}_i$: E_{ij} を要素とする対角線マトリックス。

$\boldsymbol{F}_i$: F_{ij} を要素とする対角線マトリックス。

$\boldsymbol{H}_i$: H_{ij} を要素とする対角線マトリックス。

$E_2(x)$: E_2 関数

m_S, m_C: 球および円柱線源に対する非散乱線を計算する際の係数。

$\varphi_0, \theta_0, \theta_1, \theta_2$: 球および円柱線源に対する非散乱線を計算する際の角度変数。

$l_1, l_2, b_1, b_3, b_4, b_5, b_6$: 球および円柱線源に対する非散乱線を計算する際の距離に関する変数。

$S_2(x, y), L_2(x, y), G(x, y)$: 球および円柱線源に対する非散乱線を計算する際の関数。

1.2 在来の中性子遮蔽計算法

中性子遮蔽の計算法としてこれまでに数多くの方法が開発されており，このうち実際に中性子遮蔽の計算に使用された，あるいは現在も使用されている方法のみを列挙すると次のようになる。

(1) 拡散法
(2) 年令—拡散法
(3) 点減衰核積分法
(4) 除去—拡散法
(5) 球調和法 (P_l 法)
(6) モンテカルロ法
(7) モーメント法
(8) Invariant Imbedding 法
(9) Discrete Sn 法
(10) Discrete Ordinates 直接数値積分解法

上述の各計算法はそれぞれ特有の仮定の上に成り立っているため，中性子遮蔽計算に適用する場合に限界がある。したがって以下に各計算法に対し，それぞれ

の仮定に起因する制限条件を列挙し遮蔽計算適用の限界を明らかにする。

（1） 拡 散 法

制限条件[1] としては次のようなものがある。

（a） 散乱は実験室系で等方である。

（b） 中性子束の角度分布はほとんど等方である。

（c） 媒質の吸収は小さい。すなわち

$\Sigma_a \ll \Sigma_S$ である。

（d） 境界や強い線源および強い吸収体から 2～3 mfp 以上離れていること。

以上の制限条件から拡散法はほとんど低エネルギ領域の中性子遮蔽計算にその適用が限られる。

（2） 年令—拡散法

拡散法と同様の制限条件を持ち合わせているので炉計算には適しているが，遮蔽計算にはその適用に制限がある。拡散法と同様に低エネルギ領域の中性子透過計算に適しているが，速中性子領域の計算には不適当である。通常のフェルミ・年令理論は水素より重い核を取り扱うが，この制限は Goertzel-Greuling 近似の使用により取り除かれる[2]。実際の中性子遮蔽計算は7群あるいは5群[4] の例があるが，減衰の程度を簡単に調べるのに使用されるぐらいである。

（3） 点減衰核積分法

最も簡単な計算技法にもとづく放射線透過計算法で，主にガンマ線遮蔽設計の計算に使用されている。中性子透過計算に使用する際の減衰核は Albert-Welton 核[5]であり，これは中性子の減衰を計算するのに除去断面積を用いる。その際，水素の除去断面積としてはエネルギ依存の水素の全断面積を使用し，一方水素以外の一般の核については，エネルギに独立に決められた除去断面積[6] を使用する。

Albert-Welton 法の考えは中性子が水素により散乱される場合は全て吸収と仮定し，散乱された中性子は無視する。さらに非弾性散乱も吸収として取り扱う。水素以外の核による弾性散乱の場合は，中性子の進行方向に対し小角度で散乱された中性子は散乱を受けないとみなし，中性子はそのままの進行方向に進む。一方大角度で散乱された中性子は吸収されたとみなされる。

本解法は簡単な数式にもとづいているので，精度の高い詳細な情報を得るための計算には不向きである。しかし，簡単な予備計算や形状が複雑なために他の計算方法では取り扱うことができないような問題の計算には適している。

（4） 除去—拡散法

前述の（1）拡散法や（2）年令—拡散法は速中性子の透過計算に難点がある。したがって中性子遮蔽計算に適用する場合には大きな制限があった。この難点を克服するために，速中性子領域における中性子透過計算はエネルギ依存の除去断面積を使用して除去計算を行なう。また除去された速中性子はエネルギを落して拡散法で取り扱えるエネルギ領域に入って来る。この除去中性子は拡散方程式の線源項に加わり，この方程式で計算される。速中性子を除去計算し，低エネルギの中性子を拡散法で計算する除去—拡散法は拡散法や年令—拡散法に比べて中性子遮蔽計算に対し大きな成功をおさめている。

初期の除去—拡散法を Spinney 法[7]といい，次の仮定にもとづいている[8]。

a. 線源から放出される中性子の透過成分は非散乱線と小角度の弾性散乱中性子から成る。

b. 大角度の弾性散乱中性子および非弾性散乱された中性子は高速中性子ビームから除去される。

c. 除去中性子は年令理論によりエネルギを落す。

d. 除去中性子は年令理論で記述されるスペクトルおよび空間分布を有する。

欠点として，

a. 除去中性子は全て 2 MeV の拡散領域の1群に置かれるから，2 MeV 以上のエネルギでの中性子の拡散タイプの透過現象は無視される。

b. 拡散領域は5群であり群数が少ない。

c. 拡散の一群から次の一群にのみエネルギの落ちがないとしているので，非弾性散乱や水素との衝突による大きなエネルギ損失を充分に記述することができない。

Spinney 法の改良として次の3つの除去—拡散コードが開発されている。すなわち，RASH E[9]，MAC[10] あるいは MAC-RAD[11] および NRN[12] である。これらのコードは Spinney 法に比べて除去と拡散群との結合方法や減速の取り扱い，群の数および除去断面積の決め方等に改良が施されている。例えばエネルギグループの定め方についていえば，除去グループは Spinney 法の 18 群（0～18 MeV）に対し NRN では 30 群（0～18 MeV）であり，拡散グループは Spinney 法の5群（熱中性子～2 MeV）に対し RASH E が 16 群，MAC-RAD が 31 群（いずれも熱中性子～10 MeV），さらに NRN が 24 群（熱中性子～18 MeV）である。除去群と拡散群との結合方法も Spinney 法は

全ての除去中性子は拡散群の最高エネルギ群 (2 MeV) に落ちるのに対し，NRN では各除去群から数多くの拡散群へ転移マトリックスを使用して除去中性子の転移を計算することができる。また減速の取り扱いも Spinney 法は年令理論によりエネルギの落ちを連続的に計算するのに対し，MAC-RAD や NRN では各拡散群から散乱減速された中性子は幾つものより低いエネルギの拡散群へ落ちることが可能となる。このことにより非弾性散乱および水素との散乱による減速中性子の取り扱いが Spinney 法より正確に行なわれる。

以上の改良を考慮に入れても除去—拡散法は次のような不利な点を有する[8]。

a. 除去断面積はいずれの方法でも経験的に決めなければならない。これは実験結果や精度の良い輸送コードの計算結果と比較して決められる。

b. エネルギの組み分け方法やエネルギ群の幅も除去断面積と同様に，他の精度の良い結果との比較により決められる。

c. 中性子遮蔽の設計計算を目的として作られているため，遮蔽の解析計算に適用するには計算精度が良くない。

d. 最も重要な点であるが，遮蔽問題を計算する際にあらかじめその問題と同種の問題に対し比較計算を行なって計算精度を確かめたものでなくては適用できない。

(5) 球調和法 (P_l 法)

ボルツマン輸送方程式をルジャンドル多項式展開近似により解く方法であるが，実用計算には多群の P_1 近似が最も一般的に使用されている。P_1 近似法は拡散法と同等であるから，中性子遮蔽計算に P_1 近似を適用する場合には拡散法の項で述べたのと同様の大きな制限 (速中性子透過計算に不適) を受ける。一般に，P_l 法では l の大きさにより P_l 法の遮蔽問題への適用可否が問題とされ，また計算精度も l によって決まる。例えば P_3 近似による計算は P_1 近似に比べ顕著な改良となることが報告されている[13]。しかし，速中性子透過計算で問題となる前方ピークの極端な非等方角度分布や高次の非等方散乱を正確に取り扱うには1桁程度の l 次の P_l 法では無理であろう。

上述の P_l 法に対する改良の1つに，中性子の角度分布を前方方向と後方方向の2通りに分けて取り扱う Double P_l 法がある。確かに Double P_l 法は P_l 法に比べ顕著な改良をもたらすといわれているが，ガンマ線の透過計算に Double P_1 近似が適用された報告[14]があるのみで，中性子遮透計算に実際に適用された報告はみあたらない。

一般に P_l 法は低い l については計算が容易であるが，高次の l になると計算が複雑になる不利な点がある。また多重層遮蔽を透過する速中性子は内側境界で角度分布が大きな変化を示すので，この変化を忠実に記述することはむずかしい。さらに上述の速中性子が深い透過で示す鋭い前方ピークの角度分布を P_l 法で正確に取り扱うことは無理である。

(6) モンテカルロ法[15),16)]

原理的には全ての遮蔽問題を取り扱い得るのであるが，実際に遮蔽問題を計算する場合には種々の諸問題が生じてくる。元来，遮蔽体は放射線が外にもれ出ないために施すのであるから，もれ出る放射線の数が多いほど精度が良くなるモンテカルロ法の放射線遮蔽透過計算への適用は本質的に矛盾しているといえよう。したがって，遮蔽体透過問題をモンテカルロ法で計算するには，膨大な数の放射線を遮蔽体に入射させなければ遮蔽体を透過する放射線の数が少な過ぎて，その結果大きな統計誤差を生ずることになる。

あらゆる中性子遮蔽問題を計算できるといわれるモンテカルロコードに 05R[17] がある。しかし，逆にこの計算コード自身の取り扱いが複雑過ぎて，直ちに計算したい遮蔽問題の計算ができない大きな欠点がある。

したがってモンテカルロ法を遮蔽問題に適用する場合は，モンテカルロ計算が適している問題に限った方がよい。例えば，他の計算方法では取り扱うことのできない複雑形状問題や形状が小さい問題 (検出器の応答関数計算問題) 等への適用が望ましい。

(7) モーメント法[2),18)]

ボルツマン輸送方程式を球調和法の場合と同様に，まずルジャンドル多項式展開する。次いで空間変数を除去するためにモーメント変換を施こす。この変換によりモーメントで書き換えられた方程式を計算することによってモーメントを求める。最後に計算されたモーメントから中性子束を再生する。モーメント法の大きな制限条件として

a. 無限一様媒質

b. 線源は平板および点線源

がある。実際の計算では有限な数のモーメントを数値積分計算によって求めることになる。これらの有限な数のモーメントを使用して中性子束を再生することになり，この再生方法に問題が残されている。ガンマ線

に対するモーメント法計算では，計算されたモーメントから線束を再生するのに最適の関数が見つけられたので非常に精度の良い解を得ることができた。これに対し，中性子の計算では，

c. 計算されたモーメントから中性子束を再生するのに最適の関数が見い出せない。

したがって，実際は各計算問題ごとに中性子束を再生するための最適な関数を見つけなければならない。最近でもこの再生関数についての研究が続けられている。

モーメント法の場合は，一般に求められる解はスカラー束である。これはルジャンドル展開の0次の項であるから容易に計算できるわけである。それ以上の高次の成分はせいぜい第1次のいわゆる流束 $\Phi_1(x,E)$ 程度が計算できる限度である。その理由は $l\geq 2$ 以上の高次の成分を計算するには大量の数のモーメントを計算しなくてはならないからである。今 $\Phi_l(x,E)$ を p 項のモーメントで表わすためには，

$$\left[\frac{(l+2p)(l+2p+1)}{2}-l\right]$$

の数のモーメントを計算しなくてはならない[8]。したがって，

d. 中性子角度分布の計算は困難である。

結局モーメント法は簡単な形状における中性子エネルギスペクトルを計算し，他の計算方法の計算精度を比較計算によって調べる際の標準として使用されることになる。

(8) Invariant Imbedding 法

天体物理における光の輸送の問題[20]から出発し，最近になって中性子の輸送計算[21),22),23]に適用されるようになった。本解法は透過と反射の関数を使用して中性子遮蔽の計算を行なう。まず中性子の反射を計算するために反射方程式を導出する。反射関数が求められたら，この反射関数をもとにして透過を計算するための透過方程式を導出する。いずれの方程式も非線型の微積分方程式である。また本解法は初期値問題であり，これはボルツマン輸送方程式が線型の微積分方程式で境界値問題であるのに対照的である。実際の遮蔽問題に対し上述の非線型の微積分方程式を解析的に解くことは不可能であるから数値解法で解く。したがって，この場合，ボルツマン輸送方程式を Discrete Ordinates 数値解法で解くのと同程度の困難さとなるので，この点に関して特に良い点はない[24]。

本解法の不利な点は一次元平板以外の形状に対しては計算の実績がないこと，および遮蔽体内における任意の位置での情報が得られないことである。なお最近二次元(x,y)平板形状に対する単一エネルギ等方散乱の場合の中性子透過計算の試みが報告されている[25]。

結局 Invariant Imbedding 法は一次元平板形状に対しては Discrete Ordinates 法と競合状態にあるが，他の形状へ適用できないのは大きな弱点である。

なお (9) および (10) の Discrete Ordinates 法にもとづく計算法については，本研究による中性子透過計算法と同じ分類に属するので第4章で詳しく論ずる。

第2章　定常の中性子輸送方程式

中性子遮蔽計算では時間的変化のない定常の問題が重要であり，時間依存の問題は非常に特殊な問題に限られるので本論文では定常の中性子透過問題のみを対象とする。

ボルツマン輸送方程式は個々の粒子の挙動を記述するのではなく，全体の粒子の平均的な挙動を記述する方程式である。この方程式は空間，粒子の進行方向，粒子のエネルギから成る位相空間体積要素を考えた場合，この体積要素における粒子の保存則すなわち粒子の生成，流出および消滅が釣り合っていることにもとづいている。したがってボルツマン輸送方程式は次のような基本的な仮定のもとに導出される[26]。

(1) 位相空間体積要素はこの要素内で粒子の統計的変動が無視できる位大きくとる。統計的変動はボルツマン輸送方程式では考慮されない。

(2) 中性子の標的核との衝突の時間は零と仮定する。次章で述べる複合核生成の時間は比較的長い時間を要するが，それでも 10^{-14} 秒程度である。

(3) 中性子相互間の衝突は無視できる。これは標的核の密度に比べて中性子の密度がはるかに小さいと考えられるからである。したがってボルツマン輸送方程式は線型になる。

(4) 中性子の減速過程で物質中の原子や分子の振動のエネルギは無視できるとする。中性子のエネルギが原子や結晶の分子の結合エネルギの2ないし3倍程度に低くなると，中性子の減速は平均エネルギ損失のみに関係するようになる。したがって本論文ではそれ以上のエネルギの中性子のみを対象とする。

(5) 中性子に働く力の場は無視できる。核の場のみを考える。したがって中性子は標的核との衝突間では一直線に進行する。

いま，位置 $\bar{r}$ で単位方向ベクトル $\bar{\Omega}$ の $\bar{\Omega}$ 方向の立体角要素 $d\bar{\Omega}$ 内に進行方向を持ち，$\bar{\Omega}$ 方向に垂直な単位面積あたり単位時間に通過する中性子のうち，そのエネルギが E と $E+dE$ の内にある中性子の個数を $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)d\bar{\Omega}dE$ とする。この $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ を中性子密度の分布関数というが，以降では簡単に中性子角度束あるいは中性子角度分布と称する。

定常状態の場合，いま考えている位相空間体積要素 $d\bar{\tau}=d\bar{r}d\bar{\Omega}dE$ から中性子が失われる過程は次の2つの過程である。すなわち

(a) 進行方向 $\bar{\Omega}$ の中性子の $d\bar{r}$ からの流失；

$$[\bar{\Omega}\cdot \mathrm{grad}\,\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)]d\bar{r}d\bar{\Omega}dE$$

(b) 標的核との衝突により $d\bar{r}$ 中で $d\bar{\Omega}dE$ から中性子の消滅；

$$\Sigma_t(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)d\bar{r}d\bar{\Omega}dE$$

なお $\Sigma_t(\bar{r}, E)$ はエネルギの中性子の位置 $\bar{r}$ における物質に対する巨視的全断面積であり，単位は cm^{-1} である。

また中性子がこの体積要素 $d\bar{\tau}$ に入ってくる過程は次の2つの過程である。すなわち

(c) $d\bar{\tau}$ 内での中性子の純線源（あるいは外部線源ともいう）からの誕生；

$$S(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)d\bar{r}d\bar{\Omega}dE$$

(d) $d\bar{r}$ 内でエネルギ E' で進行方向が $\bar{\Omega}'$ の中性子が標的核に散乱されてエネルギが E で進行方向が $\bar{\Omega}$ に，単位時間あたり $d\bar{\Omega}'dE'$ から $d\bar{\Omega}dE$ に流入する；

$$n(\bar{r})d\bar{r}\sigma_S(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}, E'\to E)d\bar{\Omega}dE$$
$$\times[\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', E')d\bar{\Omega}'dE']$$

上式で $n(\bar{r})$ は位置 $\bar{r}$ における標的核の密度であり，$\sigma_S(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}, E'\to E)$ は微視的微分散乱断面積であり単位はバーン ($10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$) である。

平衡状態では中性子の流入と流出は等しいので

$$(a)+(b)=(c)+(d)$$

となり，上式の両辺を $d\bar{\tau}=d\bar{r}d\bar{\Omega}dE$ で除すると

$$\bar{\Omega}\cdot \mathrm{grad}\,\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)+\Sigma_t(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$$
$$=S(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)+n(\bar{r})\int d\bar{\Omega}'\int dE'$$
$$\times\sigma_S(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}, E'\to E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', E')\cdots(2\text{-}1)$$

を得る。一般に物質は異種類の核から成ると考えられるので，(2-1) 式の右辺の散乱積分項は物質を構成する核の種類の和として次のように表わす。

$$\sum_i n_i(\bar{r})\int d\bar{\Omega}'\int dE'\sigma_{S,i}(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}, E'\to E)$$
$$\times\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', E') \quad\cdots\cdots(2\text{-}2)$$

ここで i は核の種類を表わす。

輸送方程式 (2-1) 式の右辺は一般に線源項と呼ばれるが，このうち散乱線源については次章で詳しく検討する。

第3章　中性子と物質と相互作用

3.1 緒　　言

中性子は物質中を透過する場合，物質を構成している原子核および電子と相互作用を起す。中性子と物質との相互作用を分類するとおよそ次のようになる[27)]。

相互作用 ｛電子との相互作用／核との相互作用

- 散乱 ｛弾性散乱 (n, n)／非弾性散乱 $(n, n'\gamma)$
- 吸収 ｛捕獲 (n, γ)／核変換 $(n, p), (n, \alpha), (n, f)$ など

中性子と電子との間には両者のスピンの向きに無関係な相互作用が存在する。これは中性子がある瞬間に $N\rightleftarrows P+\pi^-$ のように陽子と負の π 中間子とに解離していると考えられることに起因する。この断面積は $5\times10^{-31}\,\mathrm{cm}^2$ (5×10^{-7} バーン) の程度で，核との相互作用の断面積（$\sim10^{-24}\,\mathrm{cm}^2$，バーン）に比して無視できるほど小さい[27)]。したがって本研究においては中性子と電子との相互作用は無視する。したがって本研究における中性子と物質との相互作用は原子核との相互作用のみを取り扱うことにする。原子核との相互作用のうち，弾性散乱および非弾性散乱は中性子の減速に重要な役割をはたす。一方吸収として取り扱われる捕獲や核変換のうち捕獲はガンマ線を放出するので遮蔽計算上重要である。遮蔽計算においては核分裂現象は比較的重要視されない。核変換で価電粒子放出の現象は中性子測定の方で重要である。

一般に中性子と核との相互作用の断面積は核の種類によって，さらに中性子のエネルギによっても複雑な変化を示す。一方中性子の物質透過の計算を精度良く行なうには物質を構成する各原子核に対する中性子のエネルギ依存の詳細な断面積が精度良く求められていることが必要条件となる。

3.2 弾性散乱

中性子が物質を透過する場合，中性子は主に軽い核による弾性散乱および重い核による非弾性散乱によって減速される。弾性散乱は標的核の内部エネルギに変

化をもたらさないで運動量と運動エネルギを標的核とやり取りを行なう現象である。さらに詳しく述べると弾性散乱は複合核形成（付録A参照）による共鳴散乱および複合核を形成しないで核の表面のポテンシャルと相互作用をして散乱されるポテンシャル散乱から成る。前者の共鳴吸収のピークは重い核の場合 1 KeV 以下であり，中程度の核（鉄，ニッケル，コバルト等）の場合 0.01 MeV から 2～3 MeV 領域に現われ，軽い核（炭素，ちっ素，酸素等）の場合 0.1 MeV から 10 MeV 領域に現われる。ただし重い核でも魔法数（50，82，116）の中性子数をもつ核種（例えば鉛やビスマス）はあたかもはるかに軽い核のように振舞い，共鳴ピークは 1 KeV～1 MeV 領域に現われる。

共鳴領域でもポテンシャル散乱は存在するが，共鳴領域以外のエネルギ領域での弾性散乱はほとんどポテンシャル散乱である。ポテンシャル散乱は入射中性子の中性子波が核力のポテンシャル場と相互作用し，二次的な散乱波を生ずるものである。散乱断面積は散乱波の振幅の絶対値の二乗に比例する[28]。数学的には波動関数をルジャンドル多項式展開し，その各項が各々の部分波に対応している。10^4 eV より低いエネルギの中性子の波長は長い (2.86×10^{-11} cm) のでルジャンドル展開の $l=0$ すなわち S 波の散乱のみが起る。したがって散乱は等方的となる。$l=1$ の相互作用が認められる程度になるのは核の質量 $A=10$ の場合 2.5 MeV であり，$A=200$ の場合は 0.33 MeV であり，このエネルギ以上では $l=1$ すなわち p 波の散乱も寄与してくる[28]。

中性子が弾性散乱される場合，中性子と原子核の系の運動エネルギは保存される。核分裂中性子のエネルギ程度では非相対論的に取り扱ってよい。また標的核は自由原子で実験室系で静止しているとする。この仮定が成立するのは物質の分子構造や系の熱による擾乱に起因する種々の効果を無視できる場合である。すなわち中性子のエネルギが物質中の分子や結晶中における原子の振動のエネルギに比べて大きい限り成立する。しかし中性子の減速の結果，そのエネルギが原子の振動エネルギに近づくと化学結合力を無視することができなくなり，また系のもつ熱による擾乱を受けるようになる[29]。さらにこのような低エネルギでは結晶構造に起因する中性子波の干渉効果（干渉性散乱）が問題となる[29]。

以上のことから中性子の減速過程でおよそ 1 eV 程度以下の低エネルギ領域では物質の分子や結晶構造を考慮に入れなければならない。そこで本研究で対象とする中性子は核分裂中性子のエネルギのうち 1 eV 程度以上のエネルギを有する中性子に限定し，1 eV 程度以下で起こる上述の複雑な現象は考慮しないことにする。

したがって実験室系で衝突する前の標的核は静止しているとすれば，散乱前後の中性子のエネルギの関係は次式のように求められる（付録 B）。すなわち散乱前後の中性子のエネルギを E' および E とすれば

$$\frac{E}{E'}=\frac{M^2+2M\cos\vartheta+1}{(M+1)^2} \quad \cdots\cdots(3\text{-}1)$$

ここで M は標的核の質量数，ϑ は重心系での散乱角度である。また重心系の散乱角度 ϑ と実験室系における散乱角度 Θ との間には次式の関係がある（付録 B）。

$$\cos\Theta=\frac{M\cos\vartheta+1}{\sqrt{M^2+2M\cos\vartheta+1}} \quad \cdots\cdots(3\text{-}2)$$

水素原子以外の一般の原子に対する中性子の散乱は低エネルギの場合は重心系で等方であるが，高エネルギの場合には非等方となる。一方水素原子の場合は，10 MeV 程度までは重心系で等方散乱であり，それ以上の高エネルギでは重心系における微分散乱断面積は次式で表わせる[29]。

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega}=\sigma(90^\circ)(1+A\cos\vartheta) \quad \cdots\cdots(3\text{-}3)$$

ここで非等方パラメタ A は中性子エネルギとともに単調に増加する。しかし 14 MeV 程度では $A=0.05$ であり非常に小さい。したがって本研究では水素原子に対する弾性散乱は対象とする全エネルギにわたって重心系で等方とする。

3.3 非弾性散乱

非弾性散乱は複合核形成から残留核を励起状態に残して中性子を放出する反応である。励起状態の残留核は 1 個以上のガンマ線を放出して基底状態に戻る。したがって標的核の第 1 励起エネルギ準位より小さいエネルギの中性子に対しては非弾性散乱は起こらない。このエネルギをしきい (threshold) エネルギといい，一般に軽い核や魔法数の中性子数をもつ重い核（例えば鉛やビスマス）は，このしきいエネルギは大である。一方一般の重い核ではしきいエネルギが小さいので中性子減速過程では非性弾散乱が重要な役割をはたす (Table 1 参照)。

非弾性散乱による減速の計算は非弾性散乱の断面積の計算方法と密接に関係して行なわれる。すなわち標

Table 1 Thresholds for inelastic scattering[2)]

Nucleus	E_{tr}, MeV
Li^{6}	2.19
Li^{7}	0.478, 4.61
Be^{9}	2.43
B^{10}	0.72
B^{11}	2.14
C^{12}	4.42
N^{14}	2.30
O^{16}	6.09
F^{19}	0.11, 0.19, 1.37
Na^{23}	0.44, 2.07
Al^{27}	0.84, 1.01, 2.23
Cr^{52}	1.45
Mn^{55}	0.126, 0.98
Fe^{56}	0.85, 1.81
Co	1.10
Ni	1.33
Cu	0.97
y	0.91
Zr	0.90
Nb	0.030, 0.764
W	0.10
Pb^{206}	0.81
Pb^{207}	0.6
Pb^{208}	2.62
Bi^{209}	0.91
U^{235}	0.046
U^{238}	0.044
Pu^{239}	0.050

的核の励起エネルギ準位の準位間隔に従い，断面積は次の2通りに分けて求められる。その1は標的核の低い励起準位においては準位間隔が大きく離れているので離散分布として取り扱う。この終状態が離散分布の場合の非弾性散乱の断面積は複合核生成から Hauser-Feshbach の理論[30)]あるいは同理論の改良である Moldauer の理論[31),32)]によって計算される。これに対し入射中性子のエネルギが高くなり，残留核が高い励起準位に励起されるようになると，そこでは準位幅が準位間隔より広くなり終状態を分離することができなくなる。このような場合は複合核理論では残留核の準位分布密度の概念を導入して終状態に対する統計的な取り扱いが必要となり[33)]，いわゆる統計理論による蒸発模型で非弾性散乱の断面積は計算される。

また非弾性散乱の角度分布は入射エネルギが低いほど等方的であり複合核過程が主役を演じ，入射エネルギが高く，かつ励起エネルギが低いほど非等方的になり，複合核過程を経由しない直接反応過程の寄与が現われる[33)]。

しかし得られている非弾性散乱の角度分布のデータは遮蔽計算に直ちに使用できるように，対象とする全エネルギにわたって編集されていない。さらに現在までの中性子計算方法ではいずれの場合でも非弾性散乱の角度分布を等方散乱仮定にしている。また非弾性散乱が重要な減速の役割をはたす鉄では非弾性散乱の角度分布はほとんど等方散乱扱いできる。以上の理由から本研究でも非弾性散乱は等方散乱を仮定する。

3.4 放射捕獲

低エネルギの中性子が原子核に捕獲されて複合核を形成し，この励起された複合核がガンマ線を放出して基底状態に戻る反応である。二次ガンマ線の線源として重要な反応であるが中性子の観点に立って見れば単なる中性子の吸収である。

3.5 荷電粒子放出の核反応

中性子が標的核に捕獲され複合核を形成し，α 粒子や陽子が二次放出粒子として残留核のクーロン障壁に打ち勝って放出される反応である。クーロン障壁の小さい核は質量数の小さい核であるから軽い核で起りやすい。荷電粒子放出反応は本研究では単に中性子の吸収として取り扱う。なお核分裂反応は中性子遮蔽計算では対象外とし，その断面積は単に吸収断面積として取り扱う。

3.6 $(n, 2n)$ 反応

入射中性子のエネルギが標的核の中性子結合エネルギより大となると，中性子を吸収し2個の中性子を放出する $(n, 2n)$ 反応が可能となる。この中性子結合エネルギが $(n, 2n)$ 反応のしきいエネルギである。そして遮蔽物質を構成する核についてはおよそ 10 MeV と高いが，鉛の場合は 6～8 MeV であり，ベリリウムと重水素の場合は特に低く 1.84 MeV と 3.3 MeV（実験室系）である。重水素に対する非弾性散乱は起らないから，$(n, 2n)$ 反応は重水素の場合重要な反応である。

3.7 遅い中性子による中性子による核反応[27)]

1 KeV 程度以下の遅い中性子で起る反応は弾性散乱 (n, n) と放射捕獲 (n, γ) が主で，まれに軽い核に対し (n, p), (n, α) 反応が起る。核分裂反応は遮蔽計算では対象外とする。標的核が中位や重い場合に共鳴散乱および放射捕獲が起るが，一般に中位の核では共鳴散乱が主としてて起り，重い核では放射捕獲が主とし

て起る。一方，軽い核ではポテンシャル散乱が主として起る。

3.8 中速中性子による核反応[27)]

1～500 KeV の中性子では軽および中位の核については放射捕獲の断面積は一層小さくなり，重い核ではまだある程度大きいが散乱が次第に主になって来る。重い核でははっきりした共鳴は現われなくなるが，鉛やビスマスなどの魔法数の中性子数を有する核でははっきりした共鳴がみられる。中位の核でははっきりした共鳴がみられ，また軽い核でも共鳴がみられるがその数は少ない。非弾性散乱はまだ起らない。

3.9 速中性子による核反応[27)]

0.5～10 MeV の速中性子では弾性散乱はポテンシャル散乱が共鳴散乱に比べて優勢となる。しかし軽い核ではまだ共鳴の山が数多くみられる。1 MeV 程度以上になると非弾性散乱が起るようになる。数 MeV 以上になると残留核は高い励起状態に残されるので連続体理論が成立し，蒸発モデルの適用が可能となる。(n, p), (n, α) などの荷電粒子放出反応も中位の核では 1～3 MeV 程度で可能になって来る。しかしこの反応の断面積は小さい。

10 MeV 程度に高いエネルギになると非弾性散乱や荷電粒子放出の反応が充分起こり得るようになり，また $(n, 2n)$, (n, np) などの1個以上の放出粒子が現われる核反応が起るようになる。弾性散乱の角度分布は鋭い前方ピークを示すようになる。

3.10 中性子遮蔽計算に重要な中性子断面積

前述の議論から遮蔽体中での中性子の核反応にもとづく重要な断面積としては，弾性散乱および非弾性散乱の散乱断面積 σ_S, ならびに $(n, 2n)$ 反応の断面積 $\sigma_{n,2n}$, さらに全ての反応の断面積を加え合せた全断面積 σ_t がある。中性子を吸収し他の粒子を放出する各種の反応はまとめて吸収として取り扱い，吸収断面積で考慮される。したがって，

$$\sigma_t = \sigma_S + \sigma_{n,2n} + \sigma_a\,,$$

$$\sigma_S = \sigma_{el} + \sigma_{in}\,,$$

$$\sigma_a = \sigma_{n,\gamma} + \sigma_{n,p} + \sigma_{n,\alpha} + \cdots\cdots$$

ここで σ_{el}, σ_{in} はそれぞれ弾性散乱および非弾性散乱断面積であり，$\sigma_{n,\gamma}$, $\sigma_{n,p}$, $\sigma_{n,\alpha}$ 等はそれぞれ (n, γ), (n, p), (n, α) 反応の断面積である。

以上の積分断面積の他に中性子減速を計算するのに微分散乱断面積が必要である。弾性散乱については一般に非等方散乱の取り扱いをするので，散乱の角度分布を考慮に入れた微分散乱断面積 $\sigma_S(E' \to E, \bar{\Omega}' \to \bar{\Omega})$ が必要となる。実際の計算には，この微分散乱断面積を中性子の散乱角についてルジャンドル多項式展開した時の各エネルギにおけるルジャンドル係数 $f_l(E)$ が必要である。

一方非弾性散乱については実験室系で散乱角度分布は等方であると仮定するので，中性子の減速のみの微分散乱断面積 $\sigma_S(E' \to E)$ が必要となる。

また $(n, 2n)$ 反応の取り扱いは理論式の上では特に行なわず，計算に用いる断面積の上で $(n, 2n)$ の断面積を非弾性散乱の断面積に含めてしまう。したがって $(n, 2n)$ の微分断面積も非弾性散乱の場合と同様に散乱は実験室系で等方分布とし，微分断面積も $\sigma_S(E' \to E)$ となる。ただし，二次中性子は2個放出することを微分断面積上で考慮する。

第4章 中性子遮蔽計算における輸送方程式の数値解法

4.1 緒　　言

輸送方程式の解法について，これまでに開発された各種の解法は文献 (34) に集大成されている。また最近開発された解法については文献 (35) に Case の方法を中心に詳しく述べられている。また輸送方程式の解法を数学的な観点に立って論じた論文をまとめたものに文献 (36)，同じく数学的理論の現状をまとめたものに文献 (37) がある。

中性子遮蔽計算における輸送方程式の解法はいずれも文献 (37) の分類に従えば，解法（技術）の研究であり，このうちの近似解法である。そして，すべての近似解法は解の存在を前提としている[37)]ように，遮蔽計算における近似解法も解の存在を前提として議論をすすめる。

4.2 中性子遮蔽計算における Discrete Ordinates 法

中性子遮蔽の実用計算を輸送方程式の近似解法で行なう場合，ほとんど Discrete Ordinates 法により，しかも数値計算によって行なわれる。遮蔽計算に Discrete Ordinates 法が適している理由はおよそ次のようである。

一般に多重層遮蔽体の内部境界面や外部境界面で中性子束は角度によって著るしく変化する。このため中性子の角度分布が一様であると仮定する拡散理論は遮蔽計算には不適当である（第1章 1.2)。また中性子の角度分布を有限項のルジャンドル多項式で展開近似する P_l 近似法も境界での角度依存性を正確に表現する

には不充分である[38]。これに対し，角度空間を多領域に分割し，各領域内で独立の角度分布関数をとる考え方は非常に有効である。したがって Discrete Ordinates 法のように角度空間を有限個の角度分点で表わし，各角度分点で輸送方程式を解いて中性子束を算出する解法は遮蔽計算に適している[38]。

Discrete Ordinates 法は P_l 近似法と等価であるという議論がある[39),40]。しかしこれはあくまで線束および微分散乱断面積，さらに線源が l 次のルジャンドル多項式展開近似で表わすことが可能であること，および Discrete Ordinates 法における散乱積分計算がガウス求積法によって行なわれる場合に限られる。一般に遮蔽体中での速中性子束は極端な前方ピークの角度分布を有するので，これを有限項のルジャンドル多項式で展開近似することはむずかしい。したがって速中性子の透過問題に対しては Discrete Ordinates 法と P_l 近似法とが等価であるとはいえない。

Discrete Ordinates 法は境界条件の定義が簡単で見通しのよいことも特長である[38]。これに対し P_l 近似法では，中性子の角度分布が境界条件を厳密に満足することはむずかしい[39]。本研究による Discrete Ordinates 数値解法においては中性子角度分布は角度分点のみならず分点間の全角度にわたって境界条件は厳密に満足されている。

以上のことから Discrete Ordinates 数値解法の一つである Discrete Sn 法や本研究における Discrete Ordinates 直接積分解法は，中性子遮蔽で特に問題になる現象——速中性子束の極端な前方ピークの角度分布，速中性子領域における鋭い前方ピークの非等方散乱角度分布および境界において大きく変化する中性子角度分布——を首尾良く取り扱うことができる点で遮蔽計算に適している。

Discrete Ordinates 法は初め Wick[41]-Chandrasekhar[42] 法といわれ，ボルツマン輸送方程式における散乱積分計算をガウス求積法で行ない，輸送方程式を角度分点につき解く方法である。その際角度分点はルジャンドル多項式の根に一致させる。次いで原子炉の計算に本解法を適用し，数値計算で解く方法として Sn 法が Carlson によって開発された[43]。この初期の Sn 法は角度分点の選び方が Wick-Chandrasekhar 法と異なり，角度の余弦につき等間隔に選んだ。また中性子角度分布は各角度分点間を直線で結ぶ，いわゆる折線近似で表わした。この折線近似法は中性子角度分布の計算で 90 度方向に対し対称性が失われる欠点[44]がある（輸送方程式は基本的に対称性を有している)。このため境界条件および対称条件を満たすのが困難であった。また散乱の取り扱いも等方散乱を仮定している。その後 S_n 法は発展し，次に記述する Discrete Sn 法[44),45]となる。

4.3 Discrete Sn 法

Discrete Sn 法は中性子の角度分布を Discrete Ordinates 角度分点の各分点につき，その各分点の代表する角度区間で中性子束を積分することによって表わす。Discrete Sn 法は次の仮定にもとづきボルツマン輸送方程式を計算する[24]。

a. ボルツマン輸送方程式を finite-difference cell で表わす。すなわち

$$\text{finite-difference cell}^{24)} \equiv \int_{V \epsilon V_I} dV \int_{\Omega \epsilon \Delta\Omega_D} d\Omega \int_{E \epsilon \Delta E_G} dE$$

ここで V は体積，Ω は中性子の進行方向単位ベクトル，E は中性子のエネルギである。

輸送方程式の微分形は上述の finite-difference cell で表わすと差分形で近似される。

b. エネルギは多群の形をとる。

c. 数式の導出の過程で，次のような平均値の定理を適用して積分計算をする。

$$\int_{x_2}^{x_1} x f(x) dx \cong \bar{x} f(\bar{x}) \Delta x\,, \quad x_1 < \bar{x} < x_2$$

d. 余計な未知関数（セルの中心点における中性子束，セルの各対辺の中心点における中性子束等 (Fig. 4.1)) を減ずるため，ダイヤモンド差分法を導入（付録C参照)。

e. ダイヤモンド差分法の使用により，中性子角度

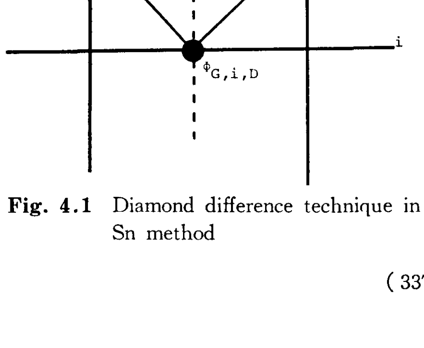

Fig. 4.1 Diamond difference technique in Sn method

分布が 90 度方向に近い角度分点で負になることが多い。この場合ダイヤモンド差分法の使用の代わりにステップ関数で近似する（付録C参照)。

f. 差分形表示の輸送方程式は，繰り返えし収斂法により計算される。

最近の遮蔽計算用 Discrete Sn コード[46),47)]は遮蔽計算に適するように弾性散乱は高次の非等方の取り扱いをする。さらに等方散乱仮定の非弾性散乱の計算も行なう。

Discrete Sn 法の不利な点は次のようである。

（1） ダイヤモンド差分にもとづいていることから，セルの大きさは隣り合うメッシュ点で中性子角度分布の変化が少なく，その変化の程度は線型近似で表わし得る程度である。したがって遮蔽体中での中性子束のように空間について急激な減衰を示し，その上角度分布が極端な前方ピークを示す場合には小さなセルを定める必要がある。すなわち距離および角度メッシュ両方とも細かく定める必要がある。

（2） ステップ関数近似の使用はセルを構成する隣り合うメッシュ点で中性子角度分布が一定であるという仮定であるから，(1) で述べた条件は一層厳しくなる。

（3） 繰り返えし収斂法で計算するが，その際収斂が必ずしも一様ではない。また必ず収斂する保証もない。

4.4　直接積分解法 (NIOBE)[48),49)]

一次元球対称形状におけるボルツマン輸送方程式の Discrete Ordinates 解法の一つである。輸送方程式は Discrete Ordinates 角度分点（この場合ガウス求積法における積分点に一致）の各分点につき計算される。計算技法は一次偏微分方程式の数学的取り扱いにもとづいて特性線にそって輸送方程式を直接積分計算する。エネルギ依存は多群に組み分けすることにより，エネルギの高い群から1群づつ順に計算することによって処理される。この1群ごとの計算に繰り返えし収斂法を使用して解を得る。

非等方散乱扱いの弾性散乱および等方散乱仮定の非弾性散乱にもとづく散乱積分計算の技法は，モーメント法における中性子の弾性および非弾性散乱積分計算に使用された技法[2),18),50)]を適用して行なわれる。

NIOBE の弱点は小さな体積線源の取り扱いにある。すなわち，この場合非散乱線は極端に前方ピークの角度分布になるので，散乱線も含めた中性子束の角度分布も前方ピークとなる。このような極端な非等方の角度分布をもつ中性子束を計算すると，解は収斂しないので求まらないか，あるいは収斂しても負の角度分布のような無意味な計算結果を与えることがある。この原因は NIOBE 計算では散乱積分計算を行なうのに，中性子束角度分布を有限項のルジャンドル多項式で展開近似している。したがって中性子束角度分布が有限項のルジャンドル多項式で展開近似できる程度になめらかな非等方角度分布であるならば，解は一様に収斂し正しい解を与える。しかし，鋭い前方ピークの角度分布のように有限項のルジャンドル展開近似で表わすことがむずかしい場合は，上述のように収斂しないか，あるいは無意味な解を与えることになる。

したがって点線源に近い問題の計算は不可能である。また大きな体積線源に対する計算においても，しばしば計算した中性子束角度分布が実際の現象には現われない振動型の角度分布を示すことがある。したがってこのような場合は角度について積分した中性子スカラー束が仮りに正しい解であったとしても，角度分布は正しいとはいえない。

4.5　直接積分解法 (EOS)[51),52)]

著者および片岡の研究によるもので，一次元平板形状における定常のボルツマン輸送方程式を Discrete Ordinates 法にもとづいて解く計算方法である。

まず Discrete Ordinate 角度分点をガウス求積法の積分点に選び，輸送方程式をこの各角度分点に対し中性子の進行方向にそって直接積分する。エネルギ依存は NIOBE と同じく多群に組み分けし，エネルギの高い群から1群づつ低い群へ計算をすすめる。

散乱積分計算は非等方扱いの弾性散乱および実験室系で等方散乱仮定の非弾性散乱にもとづいて，NIOBE における散乱積分計算に適用したのと同じ技法[2)18)50)]を適用して行なう。したがって EOS は NIOBE と同じ弱点を持つことになった。ただし，EOS の場合は形状が平板形状であるために，単一方向に近い角度分布の入射線源問題を除いて，平板等方線源問題や平板余弦分布線源問題などの一様な角度分布を持つ線源問題の場合には，非散乱線の減衰の仕方に差があっても零になることはないので解は一様に収斂する。しかし収斂した角度分布が，遮蔽問題にもよるが，高エネルギ領域で振動することがある (Fig. 4.2)。Fig. 4.2 に示されている計算例は核分裂線源からの中性子のカーボン媒質中における中性子角度分布である。線源は板形状であり，$x=0\,\mathrm{cm}$ で 50 cm 厚のカーボン媒質に入射する。また線源の角度分布は等方とした。図中実線

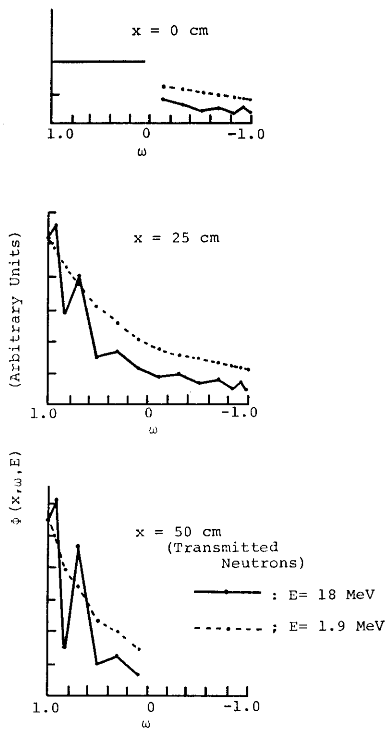

Fig. 4.2 Fast neutron angular distributions in graphite from plane isotropic fission source (EOS calculation)

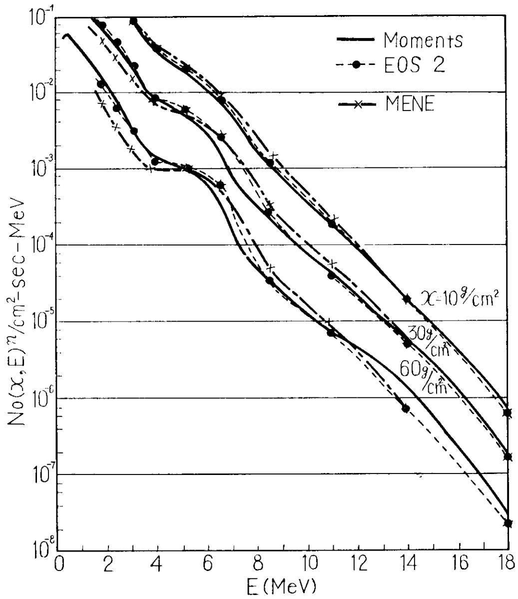

Fig. 4.3 Fast neutron energy spectra in graphite from plane isotropic fission source. Comparison of EOS calculation with Moments and MENE calculations

は 18 MeV のエネルギの場合であり，一方点線は 1.9 MeV の場合である。この計算例の場合でも角度について積分した中性子スカラー束は正しく求められている。その計算例を Fig. 4.3 に示す。これは上述の問題を計算した中性子エネルギスペクトルである。図中には EOS-2 の計算結果を点線で示し，他の計算結果としてモーメント法による無限平板中のエネルギスペクトル[53]を実線で，さらに次章で述べる MENE による計算結果[59]を一点鎖線で示し比較した。同図に示された計算結果は EOS-2 および MENE ともに計算のレサジ間隔が 0.25 と粗いためにカーボン中の中性子スペクトルが示すべき激しい変化は Fig. 4.3 には現われていない。以上の計算例から EOS により算出された透過中性子の角度分布は高いエネルギ領域ではその使用には注意を要する。

また単一方向入射線源（通常垂直入射線源）や鋭い前方ピークの角度分布をもっつ入射線源問題の場合は，物質透過の中性子角度分布は鋭い前方ピークを示す。このことから NIOBE 計算で問題になったのと同様の悪い影響が現われる。すなわち計算結果は収斂しないので求まらないか，あるいは収斂しても無意味な負の値に収斂することがある。

上述の中性子束角度分布が高エネルギ領域で振動したり，あるいは無意味な負の値になる原因は輸送方程式の右辺の散乱積分の計算方法にある。そこで文献(52)を参照して EOS における散乱積分の計算方法を検討してみる。その際非弾性散乱は実験室系で等方散乱を仮定しているので中性子束角度分布の変化にはあまり影響を及ぼさない。したがって以下の議論では弾性散乱による積分計算のみを取り上げ，非弾性散乱による積分計算については省略する。

一次元平板形状における中性子束角度分布を $\Phi(x, \omega, E)$ で表わす。ここで x は空間座標，ω は中性子の進行方向と x 軸とのなす角の余弦，E は中性子のエネルギである。この場合の弾性散乱による散乱積分項は(2-2) 式から次のように書き表わせる。

$$I=\int_{E}^{E_{\max}} dE' \int_{4\pi} d\overline{\Omega}' \cdot n(x)\sigma_S(\overline{\Omega}' \to \overline{\Omega}, E' \to E) \times \Phi(x, \overline{\Omega}', E') \quad \cdots\cdots(4\text{-}1)$$

なお，散乱積分項を上式のように I で代表させる。ここで $n(x)$ は位置 x における原子の密度であり，また $\sigma_S(\overline{\Omega}' \to \overline{\Omega}, E' \to E)$ は微視的微分散乱断面積である。

付録 D を参照すれば (4-1) 式は次式のように書き表わせる。

$$I=\int dE'\int d\bar{\Omega}'\cdot n(x)\sigma_S(E')f(E',\mu)$$
$$\times\delta(\cos\Theta-\alpha)\frac{(M+1)^2}{2ME'}\Phi(x,\omega',E') \quad\cdots\cdots(4\text{-}2)$$

散乱積分計算はエネルギの代わりに次式で定義する中性子レサジによって行なう。

$$u=\ln\frac{E_{\max}}{E} \quad\cdots\cdots(4\text{-}3)$$

また $d\bar{\Omega}'$ は次式の関係式を使って表わす。

$$\int d\bar{\Omega}'=\int_{-1}^{1}d\mu\int_0^{2\pi}d\phi \quad\cdots\cdots(4\text{-}4)$$

ここで $\mu=\cos\vartheta$ は重心系における散乱角の余弦，ϕ は散乱の方位角である (Fig. 4.4 参照)。

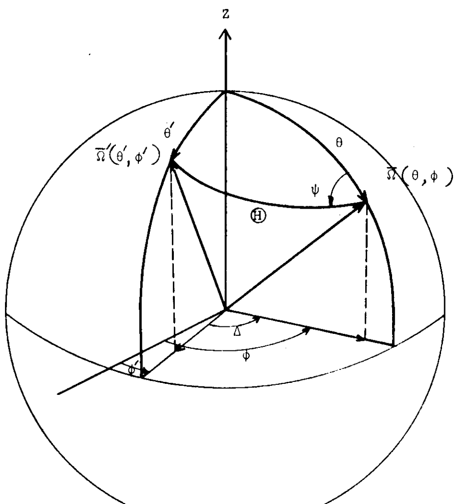

Fig. 4.4 Scattering angle in laboratory system. The $\bar{\Omega}'$ is direction of incident neutron and the $\bar{\Omega}$ direction of emergent neutron.

(4-3) 式から，$dE'=-E'du'$，また付録 D の (D-5) 式から $du'=\dfrac{2M}{(M+1)^2}e^{u-u'}d\mu$ を得る。したがって，

$$I=\int_{-1}^{1}d\mu\int_0^{2\pi}d\phi\cdot n(x)\sigma_S(u')f(u',\mu)\delta(\cos\Theta-\alpha)e^{u-u'}$$
$$\times\Phi(x,\omega',u') \quad\cdots\cdots(4\text{-}5)$$

さて，中性子束 $\Phi(x,\omega',u')$ および散乱角度分布関数 $f(u',\mu)$ を有限項のルジャンドル多項式展開近似する。すなわち，

$$\Phi(x,\omega',u')=\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{4\pi}\Phi_l(x,u')P_l(\omega') \quad(4\text{-}6)$$

$$f(u',\mu)=\sum_{p=0}^{P}\frac{2p+1}{4\pi}f_p(u')P_p(\mu). \quad(4\text{-}7)$$

したがって (4-5) 式は次式のように書ける。

$$I=\int_{-1}^{1}d\mu\int_0^{2\pi}d\phi\cdot n(x)\sigma_S(u')\sum_{p=0}^{P}\frac{2p+1}{4\pi}\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{4\pi}$$
$$\times f_p(u')P_p(\mu)\Phi_l(x,u')P_l(\omega')e^{u-u'}\delta(\cos\Theta-\alpha) \quad\cdots\cdots(4\text{-}8)$$

Fig. 4.4 を参照して単位球面上の 2 点 $\bar{\Omega}(\theta,\phi)$, $\bar{\Omega}'(\theta',\phi')$ を原点から見た角を Θ とすると，球面三角の公式から

$$\cos\Theta=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi') \quad\cdots\cdots(4\text{-}9)$$

あるいは ψ を $(\bar{\Omega},\bar{\Omega}')$ 平面と $(z,\bar{\Omega})$ 平面とのなす角 (前述の散乱の方位角である) とすると，

$$\cos\theta'=\cos\theta\cos\Theta+\sin\theta\sin\Theta\cos\psi\cdots(4\text{-}10)$$

また，球面関数の加法定理として次の関係式がある。

$$P_n(\cos\Theta)=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')$$
$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')$$
$$\times\cos m(\phi-\phi') \quad\cdots\cdots(4\text{-}11)$$

あるいは (4-11) 式を書き換えれば次式となる。

$$P_n(\cos\theta')=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\Theta)$$
$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\Theta)$$
$$\times\cos m\psi \quad\cdots\cdots(4\text{-}12)$$

ここで $P_n^m(\cos\theta)$ はルジャンドルの陪関数である。以上の (4-9) 式から (4-12) 式は Fig. 4.4 で示される単位球面上における z 軸と中性子の進行方向の単位ベクトル $\bar{\Omega}$ および $\bar{\Omega}'$ の 3 点から成る球面三角に関する公式である。球面三角に関する基本的な公式は数学公式集に出ている。

(4-12) 式を使用して (4-8) 式の散乱の方位角 ψ についての積分を計算する。そのために (4-8) 式で $\cos\theta'=\omega'$, $\cos\theta=\omega$, $\cos\Theta=\alpha$ で表わし，ψ について 0 から 2π まで積分すると次式となる。

$$\int_0^{2\pi}P_n(\omega')d\psi=2\pi P_n(\omega)P_n(\alpha)$$
$$+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\omega)P_n^m(\alpha)$$
$$\times\int_0^{2\pi}\cos m\psi d\psi$$
$$=2\pi P_n(\omega)P_n(\alpha) \quad\cdots\cdots(4\text{-}13)$$

したがって (4-8) 式で ψ についての積分は

$$\int_0^{2\pi}P_l(\omega')d\psi=2\pi P_l(\omega)P_l(\alpha)$$

のように求まる。これゆえに (4-8) 式は次式のように書ける。

$$I=\sum_{p=0}^{P}\frac{2p+1}{2}\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{4\pi}n(x)P_l(\omega)$$
$$\times\int_{-1}^{1}\sigma_S(u')f_p(u')P_p(\mu)\Phi_l(x,u')P_l(\alpha)e^{u-u'}d\mu \quad \cdots\cdots(4\text{-}14)$$

(4-14) 式は μ についての積分だけになったので，次にこの μ についての積分を実行する，積分計算は数値積分によって行なう。文献 (52) の付録BおよびCを参照して，

$$H_p(u')=\Phi_l(x,u')\sigma_S(u')f_p(u') \quad \cdots(4\text{-}15)$$

とおき，

$$\int_{-1}^{1}H_p(u')P_p(\mu)P_l(\alpha)e^{u-u'}d\mu \quad \cdots(4\text{-}16)$$

の積分計算は文献 (2) および (52) を参照して次のように行なう。まず μ とレサジは密接なる関係がある。すなわち付録Dの (D-5) から次式の関係を得る。

$$\mu=1-\frac{(M+1)^2}{2M}(1-e^{u'-u}) \quad \cdots\cdots(4\text{-}17)$$

したがって (4-16) 式を μ について数値積分するのに，その積分点を μ について選んでも u について選んでもよいから，積分点を $u=jh$ 点に選ぶ。ここで j は整数であり，h はレサジステップである。いま，$e^{-u'}H_p(u')$ がレサジメッシュ区間で線型関数で近似できる[2]とすると，

$$\frac{2p+1}{2}\int_{-1}^{1}H_p(u')e^{u-u'}P_p(\mu)P_l(\alpha)d\mu$$
$$=\sum_{k=0}^{N+1}H_{pk}\phi_{pk}^{l} \quad \cdots\cdots(4\text{-}18)$$

のようにレサジメッシュ点についての和の形で近似される。上式で $k=0$ は自分自身のエネルギメッシュ点に対する値を意味し，$k=k$ は自分自身のエネルギメッシュより k 番目高いエネルギメッシュに対する値を意味する。なおマトリックス ϕ_{pk}^{l} は文献 (51) の付録 C, D, E, F に計算されている。したがって積分項 I は次式のように計算される。

$$I=\sum_{p=0}^{P}\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N+1}n(x)\sigma_S(u-kh)f_p(u-kh)P_l(\omega)$$
$$\times\phi_{pk}^{l}\frac{2l+1}{4\pi}\Phi_l(x,u-kh) \quad \cdots\cdots(4\text{-}19)$$

上式における $\Phi_l(x,u)$ は次式から計算される。

$$\Phi_l(x,u)=2\pi\int_{-1}^{1}\Phi(x,\omega,u)P_l(\omega)d\omega$$
$$=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{q=1}^{Q}a_{lq}\Phi(x,\omega_q,u) \quad (4\text{-}20)$$

ここで重み a_{lq} は

$$a_{lq}=\frac{2l+1}{2}a_qP_l(\omega_q) \quad \cdots\cdots(4\text{-}21)$$

から求められる。上式における ω_q はガウス求積法の積分点であり，また a_q はその重みである。

したがって散乱積分項 (4-1) 式は次式のように和の形に導出される。すなわち，

$$I=\sum_{p=0}^{P}\sum_{l=0}^{L}\sum_{k=0}^{N+1}n(x)\cdot\sigma_S(u-kh)f_p(u-kh)P_l(\omega)$$
$$\times\phi_{pk}^{l}\sum_{q=1}^{Q}a_{lq}\Phi(x,\omega_q,u-kh) \quad \cdots\cdots(4\text{-}22)$$

以上の数式の導出における特徴は次のようである。

i) 中性子束は有限項のルジャンドル多項式展開近似された。このことにより中性子束は角度変数とエネルギ変数を分離して取り扱うことができた。

ii) 微分散乱角度分布関数も有限項のルジャンドル多項式展開近似された。このことにより角度分布関数はエネルギ変数と重心系における散乱角度変数に分離して取り扱うことができた。

iii) 球面三角における加法定理を使用することにより，散乱の方位角 ψ についての積分計算を行なった。

iv) 重心系における散乱角 μ についての積分計算は，(4-15) 式で表わされる $H_p(u')$ に $e^{-u'}$ を掛けたものがレサジメッシュ間で線型関数で近似できると仮定してレサジメッシュについての和の形に近似計算された。

以上の過程で中性子束を有限項のルジャンドル展開近似できるという仮定が，速中性子の透過計算で起こる中性子角度分布の鋭い前方ピークを首尾良く近似することができないことから，算出された透過中性子の角度分布に実際の現象では現われない振動が現われることになる。

なお散乱角度分布関数を有限項のルジャンドル多項式で展開近似する方法は，散乱角度分布が鋭い前方ピークになる高エネルギ領域 (10 MeV 程度以上) を除いて，項数を重心系で 8～12 程度取れば充分に散乱角度分布を近似することができる。実用計算では 10 MeV 程度以上に高いエネルギにおける散乱角度分布関数でも有限項のルジャンドル多項式で展開近似する。この場合にルジャンドル多項式展開係数 $f_p(E)$ が入力データとして入力されるが，この $f_p(E)$ を使って元の関数 $f(E,\mu)$ を再生してみると，ある散乱角度で負になることがあるので注意を要する。

第5章　Discrete Ordinates 直接積分解法 (MENE, PALLAS)

5.1　緒　　言

前章で中性子遮蔽計算に使用されている在来の Discrete Ordinates 法にもとづく数値解法に対し，中性子の透過問題適用の見地に立って検討を加えた。その結果，中性子透過問題に適用した場合に在来の Discrete Ordinates 数値解法が持つ問題点および取り扱い得る透過問題の限界等が明らかにされた。本章では，これらの問題点や限界を取り除いて，中性子透過問題を正確にまた効果的に計算することのできる計算法の確立を目的として，定常の中性子輸送方程式を Discrete Ordinates 法にもとづいて解く新らたな数値解法を提案する。

本章で提案する輸送方程式の数値解法はおよそ次のようである。すなわち，まず定常の中性子ボルツマン輸送方程式を基礎方程式としてたてる。この輸送方程式を中性子の進行方向単位ベクトル $\bar{\Omega}$ について単位球面上に選ばれた Discrete Ordinate 角度分点 $\bar{\Omega}_{pq}$ で表わす。さらにエネルギについても中性子レサジ上でレサジ単位で等間隔に分け，その分点をレサジ分点とし，このレサジ分点に相当するエネルギをエネルギ分点 E_j $(j=1,2,\cdots,J)$ で表わす。このように中性子の進行方向およびエネルギについて Discrete Ordinate 分点表示の輸送方程式に対して，この輸送方程式の右辺の散乱積分を数値積分によって計算する。散乱積分がエネルギ $E=E_j$ に対し，各角度分点 $\bar{\Omega}_{pq}$ につき求められれば，輸送方程式のいわゆる線源項は各エネルギメッシュ $E=E_j$ に対して直ちに計算される。したがって，Discrete Ordinate 分点表示の輸送方程式は，エネルギ $E=E_j$ $(j=1,2,\cdots,J)$ についての J 個の一群の輸送方程式で書き表わされる。もちろんこれらの J 個の一群の輸送方程式はエネルギに関して結合されている。これらの J 個の一群のボルツマン輸送方程式は中性子の進行方向の各角度分点 $\bar{\Omega}_{pq}$ で進行方向にその飛程に沿って線積分することにより，一群の積分型輸送方程式が導出される。

そこでさらに空間変数 $\bar{r}$ についても Discrete Ordinate メッシュ点 $\bar{r}_i$ を定めると，上述の一群の積分型輸送方程式はこの空間メッシュ $(\bar{r}_{i-1},\bar{r}_i)$ 間で容易に積分できる。最終的には計算機で計算するのに都合の良い差分型の式が導出される。以上の数式の導出の過程で，空間形状に関しては何ら規定していないので導出された差分形の式は，各種空間座標で書き換えることにより各種形状に対する中性子の透過計算を行なうことができる。

なお中性子の飛程にそってボルツマン輸送方程式を積分する方法は，初め R.D. Richtmyer[54] が球対称形状における時間依存の一群のボルツマン輸送方程式を finite-difference 法で解くために，空間—時間から成る位相空間上中性子の飛程にそって方程式を積分したことに始まる。Richtmyer はまず球対称形状に対して書かれた一群のボルツマン輸送方程式を次式で示す変換により $(r,\omega=\cos\theta)$ 変数を (x,y) 変数に変換した。すなわち，

$$\begin{cases} x=r\omega=r\cos\theta \\ y=r\sqrt{1-\omega^2}=r\sin\theta \end{cases}$$

また彼はこの (x,y) 座標を Quasi-Cartesian 座標と呼び，この (x,y) 座標で書き換えられたボルツマン輸送方程式を $x-vt=\text{const.}$ および $y=\text{const.}$ の条件のもとに x 軸にそって方程式を積分した。この条件 $x-vt=\text{const.}$ および $y=\text{const.}$ は中性子の飛程にそっており，また一階の偏微分方程式の特性線でもある。Richtmyer の Quasi-Cartesian 座標使用および中性子の飛程にそって方程式を積分するこの解法は，その後球対称形状および二次元円柱形状におけるエネルギ依存の定常のボルツマン輸送方程式の直接積分解法である NIOBE[48] や MENE-2[55),56] 等に適用されている。

中性子の進行方向にその飛程にそって輸送方程式を直接積分するこの解法は，速中性子の遮蔽で特に問題となる鋭い前方ピークの角度分布を比較的容易に取り扱い得るので遮蔽計算に適している。すなわち，中性子角度分布を計算する上で，Discrete Ordinate 角度分点 $\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_{pq}$ につき各角度分点で独立に輸送方程式を直接積分するので，前方方向の角度分布の計算を比較的他の方向の角度分布に影響されないで行なうことができるからである。

5.2　定常のボルツマン輸送方程式

定常のボルツマン輸送方程式 (2-1) 式を再び (5-1) 式として書く。

$$\begin{aligned} &\bar{\Omega}\cdot\mathrm{grad}\,\Phi(\bar{r},\bar{\Omega},E)+\textstyle\sum_t(\bar{r},E)\Phi(\bar{r},\bar{\Omega},E) \\ &\quad=\sum_i n_i(\bar{r})\int d\bar{\Omega}'\int dE'\sigma_{S,i}(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega},E'\to E) \\ &\quad\times\Phi(\bar{r},\bar{\Omega}',E')+S(\bar{r},\bar{\Omega},E) \qquad \cdots\cdots(5\text{-}1) \end{aligned}$$

(5-1) 式を計算する順序として，まず右辺の第1項の中性子の散乱積分を数値積分計算によって求める。右辺の線源項が各エネルギメッシュについて求められ

たならば，このエネルギメッシュについての一群の輸送方程式を直接積分によって解く。この順序に従って以降の各節で式の導出を行なう。

5.3 散乱積分計算

中性子の核との散乱現象は弾性散乱および非弾性散乱の両現象を考慮に入れる。弾性散乱は実際の物理現象をできるだけ正確に取り扱う必要性から，高次の非等方成分も含むことができる程度に充分な非等方散乱の取り扱いをする。一方非弾性散乱は実験室系で等方散乱の仮定をする（第3章)。

さて，以後の計算に便利なように (5-1) 式の右辺の散乱積分項を $G(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ で表わすと，$G(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ は (5-2) 式で書き表わせる。

$$G(\bar{r},\bar{\Omega},E)=\sum_i n_i(\bar{r})\int d\bar{\Omega}'\int dE'\sigma_{S,i}(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega},E'\to E)\times\Phi(\bar{r},\bar{\Omega}',E') \quad \cdots\cdots(5\text{-}2)$$

さらに $G(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ を弾性散乱による積分項 $G_{el}(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ と非弾性散乱による積分項 $G_{in}(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ とに分けて計算する。すなわち，

$$G(\bar{r},\bar{\Omega},E)=G_{el}(\bar{r},\bar{\Omega},E)+G_{in}(\bar{r},\bar{\Omega},E) \quad (5\text{-}3)$$

ここで，

$$G_{el}(\bar{r},\bar{\Omega},E)=\sum_i n_i(\bar{r})\int d\bar{\Omega}'\int dE'\sigma^{el}_{S,i}(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega},E'\to E)\times\Phi(\bar{r},\bar{\Omega}',E') \quad \cdots\cdots(5\text{-}4)$$

$$G_{in}(\bar{r},\bar{\Omega},E)=\sum_i n_i(\bar{r})\int d\bar{\Omega}'\int dE'\sigma^{in}_{S,i}(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega},E'\to E)\times\Phi(\bar{r},\bar{\Omega}',E') \quad \cdots\cdots(5\text{-}5)$$

上式で $\sigma^{el}_{S,i}(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega},E'\to E)$ および $\sigma^{in}_{S,i}(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega},E'\to E)$ はそれぞれ弾性散乱および非弾性散乱の微分散乱断面積である。

5.3.1 弾性散乱積分項 $G_{el}(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ の計算

(5-4) 式の計算をすすめる上で簡単のために核種を表わす i は省略する。微分散乱断面積 $\sigma_{el}(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega},E'\to E)$ を付録Dの (D-9) 式のように書き表わす。すなわち，

$$\sigma(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega},E'\to E)=\sigma^{el}_{S}(E')f(E',\mu)\delta(\cos\Theta-\alpha)\frac{(M+1)^2}{2ME'} \quad \cdots\cdots(5\text{-}6)$$

ここで μ は重心系での散乱角の余弦 ($=\cos\vartheta$)，Θ は実験室系での散乱角，α は付録Dの (D-2) 式から計算される実験室系における散乱角の余弦 ($\alpha=\cos\Theta$) である。また M は標的核の質量数である。さらに $f(E',\mu)$ は付録Dで定義される散乱角度分布関数である。

(5-4) 式でエネルギ E の代わりに中性子レサジ u ((4-3) 式) で表わすと，(4-5) 式の導出と同じように次式が導出される。

$$G_{el}(\bar{r},\bar{\Omega},u)=\int_{-1}^{1}d\mu\int_0^{2\pi}d\psi n(\bar{r})\sigma^{el}_{S}(u')f(u',\mu)\times\delta(\cos\Theta-\alpha)e^{u-u'}\Phi(\bar{r},\bar{\Omega}',u') \quad \cdots\cdots(5\text{-}7)$$

第4章 4.3 において，中性子束 $\Phi(\bar{r},\bar{\Omega},u)$ は有限項のルジャンドル多項式で展開近似されたが，本計算法では中性子束 $\Phi(\bar{r},\bar{\Omega},u)$ についての多項式展開近似は一切行なわない。一方 $f(u,\mu)$ については有限項のルジャンドル多項式展開近似してもよいし[55),56),57)]，そのままの形[58),59)]でも以降の計算に本質的な差はない。しかし実際の計算に使用する $f(u,\mu)$ のデータはルジャンドル多項式展開の展開係数 f_l として得られているのが普通である。したがって $f(u,\mu)$ を有限項のルジャンドル多項式で展開しておく方が便利である。そこで

$$f(u',\mu)=\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{4\pi}f_l(u')P_l(\mu) \quad \cdots(5\text{-}8)$$

上式で展開次数を表わす L は任意の大きな数を定めることができる。

次ぎに，(5-7) 式の積分計算を実行するために中性子の進行方向 $\bar{\Omega}$ を Discrete Ordinate の角度分点 $\bar{\Omega}_{pq}$ で表わす必要がある。$\bar{\Omega}$ は Fig. 4.4 を参照して極角 θ および方位角 ϕ の2つの角度で表わせる。すなわち，$\bar{\Omega}\equiv\bar{\Omega}(\theta,\phi)$ である。本章における以下の計算では極角 θ の代わりに $\omega=\cos\theta$ を極角に関する変数として使うので，$\bar{\Omega}\equiv\bar{\Omega}(\omega,\phi)$ と書き表わす。

Discrete Ordinate 角度分点 $\bar{\Omega}_{pq}$ の決め方はいくつか考えられるが，理想的には角度分点 $\bar{\Omega}_{pq}$ が各座標軸に対して対称に単位球面上に分布していることが望ましい。例えば三次元 (x,y,z) 形状では角度分点 $\bar{\Omega}_{pq}$ が x,y,z の3軸に対して対称に分布していることである。Discrete Sn 法ではこの角度分点の選び方につき特に研究されて，特別の角度分点およびその重みのセットが出来ている[44)]。本研究では一次元形状の場合に角度分点 $\Omega_p=\omega_p$ をガウス求積法における積分点に選ぶ必要から，一般の場合においても極角に関する ω の分点 ω_p をガウス求積法の積分点に選ぶ[57)]。これに対し方位角 ϕ については Fig. 5.1 を参照して 1/8 球面上で ϕ の範囲 $(0,\pi/2)$ を極角の余弦 ω_p の p に関係して等分割し，その中心点を ϕ の分点 ϕ_{pq} とす

る[57]。したがって $\bar{\Omega}$ の角度分点 $\bar{\Omega}_{pq}$ は Fig. 5.1 のように選ばれる。付録 E に一例として $p=1-6$ $(-1<\omega_p<1)$ の場合の ω_p および ϕ_{pq}, さらにそれぞれの重み，それから ω_p の重みと ϕ_{pq} の重みの積で決まる $\bar{\Omega}_{pq}$ の重みを載せておく[60]。

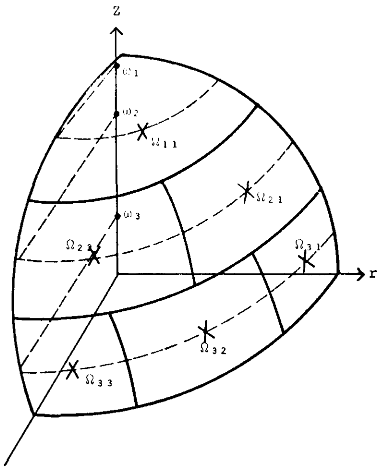

Fig. 5.1 Discrete-ordinate directions on 1/8 unit sphere

本研究における角度分点の選び方は単位球面上における等面積分割法に相当し，角度分点 $\bar{\Omega}_{pq}$ に対する重みが全て等しければ単位球面を正確に等面積に分割したことになり，これは厳密に三次元形状における 3 軸に対する対称性を満足する。しかし付録 E の例から $\bar{\Omega}_{pq}$ に対する重みが必ずしも全て等しくないことから，本解法で使用する角度分点セットは厳密には 3 軸に関する対称性を満足しているとはいえない。ただし，重みの差が最大で 13.5% 以内であることから近似的には上述の対称条件を満たしているといえよう。なお上述の Sn 法に対する特別の角度分点およびその重みのセットを本解法に適用してもよい。また一次元形状の場合には，座標軸に対する対称条件はなくなる。そして本解法ではガウス求積法の積分点とその重みを一次元形状における角度分点とその重みとして採用する。このガウス積分点およびその重みを，分点数が 14, 16 および 20 の場合について付録Eに示しておく。

以上が中性子の進行方向角 $\bar{\Omega}$ についての角度分点の定め方である。次いで中性子のエネルギについてもエネルギ分点を定める。この場合にはエネルギ E の代わりに中性子レサジ u に対して，レサジ単位の h で u を等間隔に分け，各レサジ分点を u_j $(j=1,2,\cdots,J)$ で表わす。したがって j 番目のレサジ u_j は

$$u_j=u_1+(j-1)h$$

となる。また u_1 は (4-3) 式から $u_1=0$ である。

中性子の進行方向 $\bar{\Omega}$ およびレサジ u が分点表示できたので，(5-7) 式の右辺の積分計算は数値積分によって計算できる。その際次に述べる 2 つの仮定にもとづいて数値積分計算する[55),56),57)]。

(1) 中性子束 $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}(\omega, \phi), u)$ は角度およびレサジについて微小区間 $\Delta\bar{\Omega}(\Delta\omega, \Delta\phi)$ および Δu 内でステップ関数で近似できる。

(2) 散乱断面積 $\sigma_S(u)$ および散乱角度分布関数 $f(u, \mu)$ のルジャンドル多項式展開係数である $f_l(u)$ は，微小区間 Δu 内でステップ関数で近似できる。

以上の仮定にもとづいて (5-7) 式における μ についての積分はガウス求積法を適用して数値積分計算する。このために μ を区間 $(-1, 1)$ で M 個の積分点 μ_m $(m=1,2,\cdots,M)$ に分ける。この場合の積分点 μ_m はガウス求積法における積分点に一致して選ばれる。一方散乱の方位角 ψ についての積分は次に述べるような数値積分によって計算する。すなわち，まず ψ についての積分区間を決める必要がある。ψ は $(z$ 軸, $\bar{\Omega})$ 平面に対する対称性 (Fig. 5.2 参照) から区間は $(0, \pi)$ を対象とすればよい。この区間 $(0, \pi)$ を中性子の進行方向の極角の余弦 ω の分点 ω_p に対応して，ψ についても分点 ψ_n $(n=1,2,\cdots,P)$ を設ける (Fig. 5.3)。Fig. 5.3 からわかるように積分変数である ψ は他の変数に対して独立な変数ではなく，$\psi=\psi(\alpha, \omega)$ のように α と ω の従属変数である。さらに実験室系における散乱角の余弦である α は $\alpha=\alpha(\mu, \rho)$ のように μ と

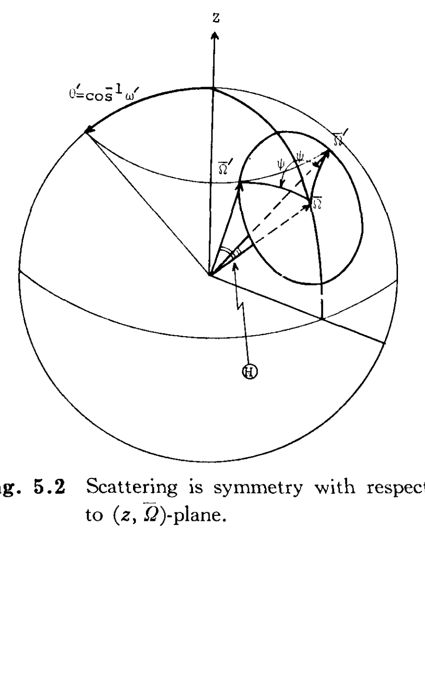

Fig. 5.2 Scattering is symmetry with respect to $(z, \bar{\Omega})$-plane.

ρ の従属変数である（付録B）。なお ρ は標的核の質量数の逆数である。したがって ϕ についての分点 ϕ_n は $\mu=\mu_m$ と ρ とから決まる α_m および $\omega=\omega_n$ により決められる（Fig. 5.4)。以下に $\phi=\phi_n$ の求め方を詳しく述べる。

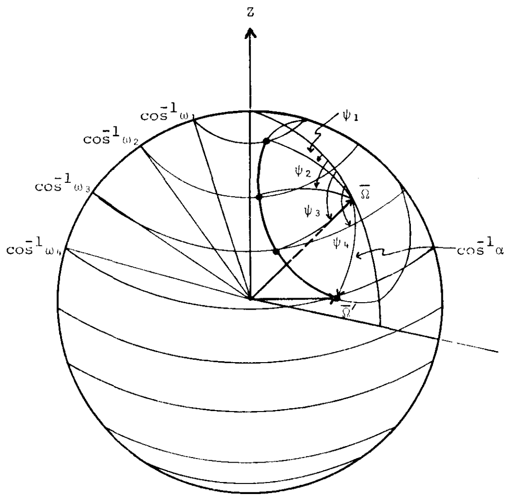

Fig. 5.3 Relation between discrete points ϕ_n of azimuthal angle and discrete points ω_n of cosine of polar angle in scattering

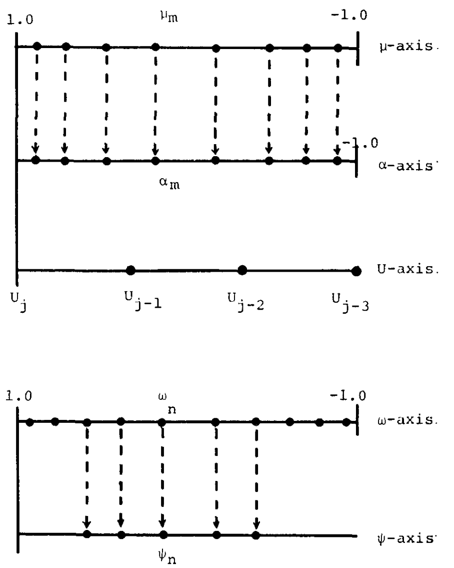

Fig. 5.4 Cosine of scattering angles, μ and α, in center of mass and laboratory systems, and relation between cosine of angle of neutron direction ω and azimuthal angle of scattering ϕ

いま中性子の進行方向 $\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_{pq}$ および散乱角の余弦 $\mu=\mu_m$ に対し，散乱の方位角 ϕ および中性子の散乱前の進行方向 $\bar{\Omega}'$ を決める。重心系および実験室系における散乱角の余弦の間には次式の関係がある（(B-2) 式)。

$$\alpha_m(\mu_m,\ \rho)=\frac{\mu_m+\rho}{(1+2\rho\mu_m+\rho^2)^{1/2}} \quad \cdots(5\text{-}9)$$

また散乱前後の中性子の極角の余弦の間には次式に示す関係がある（(4-10) 式)。

$$\omega'=\omega_p\alpha_m+\sqrt{(1-\omega_p^2)(1-\alpha_m^2)}\cos\phi \quad (5\text{-}10)$$

いま $\omega'=\omega_n$ と定め (Fig. 5.3), ω_n に対応して (5-10) 式における ϕ を $\phi=\phi_n$ とすると，ϕ_n は次のように求まる (Fig. 5.4)。すなわち，(5-10) 式を変形して次式を得る。

$$\cos\phi_n=\frac{\omega_n-\omega_p\alpha_m}{\sqrt{(1-\omega_p^2)(1-\alpha_m^2)}}\equiv\eta_n(\alpha_m,\ \omega_p,\ \omega_n) \quad \cdots\cdots(5\text{-}11)$$

(5-11) 式から ϕ_n を計算し，また ϕ_n 点を数値積分点とする際の重み $W_n{}^*$ も以下のように計算する (Fig. 5.5)。

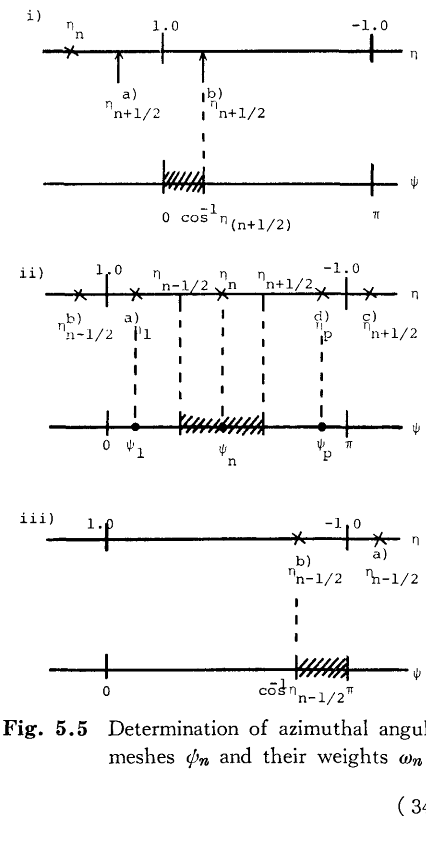

Fig. 5.5 Determination of azimuthal angular meshes ϕ_n and their weights ω_n

i) $\eta_n>1$ の場合

a) $\eta_{n+1/2}\geqq 1$ の場合，

$\phi_n=0 \quad W_n^*=0$

b) $\eta_{n+1/2}<1$ の場合，

$\phi_n=0 \quad W_n^*=\cos^{-1}\eta_{(n+1/2)}$

ii) $1\geqq\eta_n\geqq-1$ の場合

$\phi_n=\cos^{-1}\eta_n$

$W_n^*=|\cos^{-1}\eta_{(n-1/2)}-\cos^{-1}\eta_{(n+1/2)}|$

ただし

a) $n=1$ の場合 $\cos^{-1}\eta_{1/2}=0$

b) $\eta_{(n-1/2)}>1$ の場合 $\cos^{-1}\eta_{(n-1/2)}=0$

c) $\eta_{(n+1/2)}<1$ の場合 $\cos^{-1}\eta_{(n+1/2)}=\pi$

d) $n=P$ の場合 $\cos^{-1}\eta_{(P+1/2)}=\pi$

iii) $\eta_n<-1$ の場合

a) $\eta_{(n-1/2)}\leqq-1$ の場合，

$\phi_n=\pi \quad W_n^*=0$

b) $\eta_{(n-1/2)}>-1$ の場合，

$\phi_n=\pi \quad W_n^*=|\cos^{-1}\eta_{(n-1/2)}-\pi|$

(5-12)

以上の計算で散乱の方位角に関する積分点 ϕ_n とその重み W_n^* が決められた。

次ぎに散乱前の中性子の進行方向の方位角 ϕ' を求める。Fig. 4.4 を参照して (z 軸, $\overline{\Omega}'$) 平面と (z 軸, $\overline{\Omega}$) 平面とのなす角度を $\varDelta$ で表わすと，ϕ' は次式から求められる。

$$\phi'=\phi-\varDelta$$

なお散乱角 Θ が同じで $\omega'=\omega_n$ の場合がもう一つあり (Fig. 5.2), それは，$\phi'=\phi+\varDelta$ の場合である。また角度 $\varDelta$ は第4章の (4-9) 式で $\varDelta=\phi-\phi'$, $\alpha=\cos\Theta$, $\omega=\cos\theta$ と置いて式を変形し，$\alpha=\alpha_m$, $\omega=\omega_p$, $\omega'=\omega_n$ と分点表示すれば角度 $\varDelta$ は次式から計算される。

$$\cos\varDelta=\frac{\alpha_m-\omega_p\omega_n}{\sqrt{(1-\omega_p^2)(1-\omega_n^2)}}\equiv\xi_n(\alpha_m,\omega_p,\omega_n) \quad \cdots\cdots(5\text{-}13)$$

上式で ξ の値は $1\geqq\xi_n\geqq-1$ の範囲にあるもののみを採用する。ξ_n の値が求まれば角度 $\varDelta$ は求まり，さらに ϕ' も求めることができる。すなわち，

$$\left.\begin{array}{l}\varDelta=\cos^{-1}\xi_n\\ \phi'=\phi_{pq}\pm\varDelta\end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(5\text{-}14)$$

ϕ' についても分点表示する必要がある。そこで分点 ϕ_{pq} は Fig. 5.1 の例のように ϕ についてのある領域を代表していると考えて，ϕ' の属する領域の代表分点を $\phi_{nq'}$ および $\phi_{nq''}$ とする。この関係を式で表わせば次式の

$$\phi_{pq}+\varDelta\in\phi_{nq'}, \quad \phi_{pq}-\varDelta\in\phi_{nq''} \cdots(5\text{-}15)$$

であり，(5-15) 式から ϕ' の属する分点が決められる。

最後に散乱前の中性子のもつレサジ u' を μ の関数として，$\mu=\mu_m$ に対して $u'=u'(\mu_m)$ から求める (Fig. 5.4)。いま $u=u_j$ とした場合，u' は付録Dの (D-5) 式から各 $\mu=\mu_m$ に対して次のように求められる。

$$u'=u_j-\ln\frac{(1+\rho)^2}{1+2\rho\mu_m+\rho^2} \quad \cdots\cdots(5\text{-}16)$$

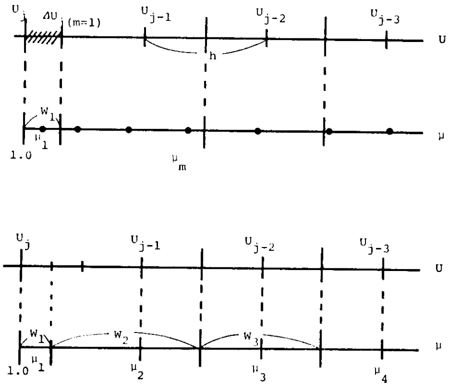

Fig. 5.6 Relation between lethargy meshes and mesh points of cosine of scattering angle in center of mass system

上式から計算される u' に対し

$$u_g-\frac{h}{2}<u'\leqq u_g+\frac{h}{2}, \quad g\leqq j-2 \cdots(5\text{-}17)$$

の範囲にある u' を $u'=u_{g(m)}\,(2\leqq m\leqq M)$ で代表させる (Fig. 5.6)。また $g=j-1$ の場合には特別に

$$u_{j-1}-\frac{h}{2}<u'\leqq u_j-\varDelta u_{j(m=1)} \quad \cdots(5\text{-}18)$$

を定め，この範囲内の u' を $u'=u_{j-1(m)}$ とおく (Fig 5.6)。なお $\varDelta u_{j(m=1)}$ は 5.5 節の (5-72) 式で与えられる。

以上の計算で (5-7) 式の積分は数値積分計算され，位置 $\bar{r}$ においてレサジが $u=u_j$ で進行方向が $\overline{\Omega}=\overline{\Omega}_{pq}$ である弾性散乱項 $G_{el}(\bar{r},\overline{\Omega}_{pq},u_j)$ は (5-19) 式のように求まる。

$$G_{el}(\bar{r},\overline{\Omega}_{pq},u_j)$$
$$=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{P}a_{mn}T_{g(m),m}(\bar{r})\Phi_{g(m),n}(\bar{r}) \quad (5\text{-}19)$$

ここでマトリックス $a_{mn}=W_mW_n^*$ であり，W_m ($m=1,2,\cdots,M$) はガウス求積法の重みである。一方 W_n^* ($n=1,2,\cdots,P$) は (5-12) 式から計算される重

みである。また

$$T_{g(m),m}(\bar{r})$$
$$=\Sigma^{el}_{g(m)}(\bar{r})\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{4\pi}f_{l,g(m)}P_{lm}R_m(\rho) \quad \cdots\cdots(5\text{-}20)$$

さらに

$$\left.\begin{aligned}\Sigma^{el}_{g(m)}(\bar{r})&=n(\bar{r})\sigma^{el}_S(u_{g(m)}),\\ f_{l,g(m)}&=f_l(u_{g(m)}),\\ P_{lm}&=P_l(\mu_m).\end{aligned}\right\} \quad \cdots(5\text{-}21)$$

また，$R_m(\rho)$ は (5-16) 式を変形して

$$e^{u_j-u'}=\frac{(1+\rho)^2}{1+2\rho\mu_m+\rho^2}\equiv R_m(\rho) \quad \cdots(5\text{-}21)$$

から計算される。

(5-19) 式における $\Phi_{g(m),n}(\bar{r})$ は次式から求められる。

$$\Phi_{g(m),n}(\bar{r})=\Phi(\bar{r},\bar{\Omega}_{nq'}(\omega_n,\phi_{nq'}),u_{g(m)})$$
$$+\Phi(\bar{r},\bar{\Omega}_{nq''}(\omega_n,\phi_{nq''}),u_{g(m)}) \quad \cdots\cdots(5\text{-}23)$$

水素原子以外の一般の核に対する弾性散乱の積分計算は以上のように行なわれる。これに対し，水素原子による散乱減速の場合は，いま注目しているエネルギから必ず最高エネルギ群まで計算の範囲に入れなければならない。したがって (5-7) 式の積分における μ による積分を上述のガウス求積法で計算しないで次に述べる数値積分法で行なう。すなわち μ についての積分点はレサジメッシュ u_g $(g=1,2,\cdots,j)$ に対応する μ のメッシュ点 μ_m とする (Fig. 5.6)。なお μ_m は付録Dの (D-5) 式で $M=1.0$ とおき，エネルギ E の代わりにレサジ u で表わせば次式のように求まる。

$$\mu_m=2e^{-(m-1)h}-1 \quad \cdots\cdots(5\text{-}25)$$

水素原子の場合，$f(u,\mu)$ は重心系で等方散乱の取り扱いができる (3 章 3.2 節) ので簡単に $f(u,\mu)=\frac{1}{4\pi}$ とおける。したがって (5-20) 式は簡単に次式のように書ける。

$$T_{g(m),m}(\bar{r})=\Sigma^{el}_{g(m)}(\bar{r})\frac{R_m(\rho=1)}{4\pi} \cdots(5\text{-}25)$$

ここで

$$R_m(\rho=1)=\frac{2}{1+\mu_m}=e^{(m-1)h} \quad \cdots(5\text{-}26)$$

また μ_m に対する重みは Fig. 5.6 の下図を参照して次のように決める。

$$W_m=\begin{cases}2\left\{1-\exp\left(-\dfrac{h}{4}\right)\right\}, & m=1\\ 2\exp\left(-\dfrac{h}{4}\right)\left\{1-\exp\left(-1\dfrac{1}{4}h\right)\right\}, & m=2\\ 2\exp\{-(m-1)h\}\exp\left(-\dfrac{h}{2}\right)\{\exp(h)-1\}, & m>2\end{cases}$$

なお $g(m)=j-(m-1)$。

以上の計算で一般の核の場合および水素原子の場合における中性子の弾性散乱による散乱積分項が求められた。本節で記述した計算法は，実際の中性子の弾性散乱を記述する関係式が (5-10) 式のように実験室系における散乱角に直接関係しているのに対し，散乱積分の式，(5-7) 式が重心系における散乱角の余弦 μ で積分する形になっているので，この μ を基本的な変数として他の変数である $\psi',\Omega'(\omega',\phi'),u'$ 等を μ の従属変数として書き表わし (5-7) 式の散乱積分計算を数値積分によって行なった。

本散乱積分計算法は初めから数値積分を実行する点に特徴がある。そのため従来の計算法のように，多項式展開近似や関数変換技法を使用しないので，実際の弾性散乱の現象を忠実に記述するのに最適である。したがって高エネルギの中性子の核による弾性散乱で起こる極度の非等方散乱を正確に取り扱うことができる点，特に速中性子の透過計算に大きな利点を有する。

5.3.2 非弾性散乱積分項 $G_{in}(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ の計算

非弾性散乱は実験室系で等方散乱仮定 (第 3 章参照) であるから，微分散乱断面積 $\sigma^{in}_{S,i}(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega},E'\to E)$ は次式のように簡単になる。

$$\sigma^{in}_{S,i}(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega},E'\to E)=\sigma^{in}_{S,i}(E')\frac{f^{in}_i(E',E)}{4\pi} \quad \cdots\cdots(5\text{-}27)$$

ここで $\sigma^{in}_{S,i}(E')$ は i 番目の核種の微視的非弾性散乱断面積であり，$f^{in}_i(E',E)$ は i 番目の核種に中性子が非弾性散乱され，単位エネルギあたりエネルギ E' から E へ減速される確率を表わし，通常減速核と呼ばれる。したがって，$f^{in}_i(E',E)$ は次のように規格化される。

$$\int_0^{E'}f^{in}_i(E',E)dE=1,\quad E'\geqq E^1 \cdots(5\text{-}28)$$

ここで E^1 は標的核の第 1 番目の励起エネルギ準位と基底状態とのエネルギ間隔である。

(5-5) 式に (5-27) 式を代入すると次式を得る。

$$G_{in}(\bar{r},\bar{\Omega},E)=\sum_i n_i(\bar{r})\int_E^{E_{\max}}\sigma^{in}_{S,i}(E')\frac{f^{in}_i(E',E)}{4\pi}$$
$$\times\int\Phi(\bar{r},\bar{\Omega}'E')d\bar{\Omega}'dE' \quad \cdots(5\text{-}29)$$

(5-29) 式の計算は文献 (50) のモーメント法における

中性子の非弾性散乱の計算方法を参考にして，まず減速核 $f_i^{in}(E', E)$ を標的核の励起エネルギ準位のエネルギ準位間隔により2通りに分けて計算を行なう。すなわち，標的核の基底状態に近い低い励起エネルギ準位は明らかに大きいエネルギ差で分離しているが（離散的励起状態という），高い励起エネルギ準位になってくるとエネルギ準位の密度が増して連続的分布とみなすことができるようになる（連続的励起状態）。そして前者の離散的励起状態に対する非弾性散乱の断面積の計算は複合核模型における Hauser-Feshbach の理論で計算できる。一方後者の連続的励起状態の場合は準位の数を準位密度で表わし核過程の統計理論で計算できる（第3章）。

いま，$E_{i,B}$ を i 番目の核種における離散的励起状態と連続的励起状態の扱いをする境界のエネルギとする。$E_{i,B}$ の値は核種によって異なる。

さて，入射中性子のエネルギがこの $E_{i,B}$ 以上である場合は減速核 $f_i^{in}(E', E)$ は E' について連続関数 $g_i^c(E', E)$ で表わせるとする[50]。すなわち，

$$f_i^{in}(E', E)=g_i^c(E', E), \quad E' \geqq E_{i,B} \cdots(5\text{-}30)$$

一方入射中性子のエネルギが $E_{i,B}$ 未満である場合は減速核 $f_i^{in}(E', E)$ は次式のように δ —関数の和として表わす[50]。すなわち，

$$f_i^{in}(E', E)=\sum_\nu a_\nu(E')\delta\{E'-(E+E^\nu)\},$$
$$E^1<E'<E_{i,B} \quad \cdots\cdots(5\text{-}31)$$

ここで E^ν は標的核の ν 番目の励起エネルギ準位と基底状態とのエネルギ差であり，$a_\nu(E')$ はエネルギ E' の中性子が非弾性散乱され単位エネルギあたりエネルギが $E=E'-E^\nu$ に減速される確率を表わす。

減速核 $f_i^{in}(E', E)$ が上述のようにエネルギにより2通りに分けて取り扱われるので，(5-29) 式の計算も中性子のエネルギにより2通りに分けて計算する[50]。以下の計算では核種を示す添字 i は簡単のため省略する。

（1）$E \geqq E_B$ の場合

減速核は連続関数 $g^c(E', E)$ として取り扱われる。(5-29) 式においてエネルギについての積分は再び中性子レサジについての積分に変換して行なう。したがって (5-29) 式は

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)=n(\bar{r})\int_0^u \sigma_S^{in}(u')\frac{g^c(u', u)}{4\pi}$$
$$\times\int_{4\pi}\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', u')d\bar{\Omega}'E'du' \quad \cdots\cdots(5\text{-}32)$$

と書き換えられる。

上式において中性子束を全立体角で積分すると

$$\int_{4\pi}\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', u')d\bar{\Omega}'=\Phi_0(\bar{r}, u') \quad \cdots(5\text{-}33)$$

となる。ここで $\Phi_0(\bar{r}, u')$ は中性子スカラー束である。(5-33) 式を (5-32) 式に代入し，$E'=E_{\max}e^{-u'}$ に置き換えると

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)=n(\bar{r})\int_0^u \sigma_S^{in}(u')\frac{g^c(u', u)}{4\pi}$$
$$\times\Phi_0(\bar{r}, u')E_{\max}e^{-u'}du' \quad \cdots\cdots(5\text{-}34)$$

となり，u' のみの積分になる。u' についての積分計算を前節で定義したレサジメッシュ u_g ($g=1, 2, \cdots, J$) に対して台形公式を適用して行なうと次式のように計算される。

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, u_j)=n(\bar{r})\sum_{g=1}^{j}\zeta_g\sigma_{in}(u_g)\frac{g^c(u_g, u_j)}{4\pi}$$
$$\times\Phi_0(\bar{r}, u_g)E_{\max}e^{-u_g} \cdots(5\text{-}35)$$

ここで ζ_g は台形公式の重みである。

なお中性子スカラー束 $\Phi_0(\bar{r}, u_g)$ は容易に数値積分計算によって次式のように求められる。

$$\Phi_0(\bar{r}, u_g)=\sum_{p'=1}^{P}\sum_{q'=1}^{Q_{p'}}b_{p'}\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{p'q'}(\omega_{p'}, \phi_{p'q'}), u_g) \quad \cdots\cdots(5\text{-}36)$$

ここで $b_{p'}$ は数値積分の際の重みであり次式で計算される。

$$b_{p'}=\frac{2\pi}{Q_{p'}}\lambda_{p'} \quad \cdots\cdots(5\text{-}37)$$

ここで $\lambda_{p'}$ ($p'=1, 2, \cdots, P$) はガウス求積法における重みであり，一方 $Q_{p'}$ は次式から求められる。

$$Q_{p'}=\begin{cases}2p' & 1\leqq p'\leqq\dfrac{P}{2}\\[2mm] 2(P+1-p') & \dfrac{P}{2}<p'\leqq P\end{cases} \quad \cdots(5\text{-}38)$$

(5-35) 式を以降の計算に便利なように $\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_{pq}$ に対して書いておく。なお右辺をマトリックスの形で表わすと次式のように書ける。

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, u_j)=\sum_{g=1}^{j}\sum_{p'=1}^{P}\sum_{q'=1}^{Q_{p'}}b_{p'}c_g^j(\bar{r})\Phi_{p'q'g}(\bar{r}) \quad \cdots\cdots(5\text{-}39)$$

ここで

$$c_g^j(\bar{r})=n(\bar{r})\zeta_g\sigma_S^{in}(u_g)\frac{g^c(u_g, u_j)}{4\pi}E_{\max}e^{-u_g}$$

$$\cdots\cdots(5\text{-}40)$$

$$\Phi_{p'q'g}(\bar{r})=\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{p'q'}, u_g) \qquad \cdots\cdots(5\text{-}41)$$

（2） $E<E_B$ の場合

減速核 $f^{in}(E', E)$ は連続的励起状態と離散的励起状態の両状態に関係してくるので，非弾性散乱された中性子が連続分布領域より減速されて来る項と離散分布領域より減速されて来る項に分けて計算する必要がある[50)]。

i) $E'\geqq E_B$ の場合（連続領域からの減速）

(1) の場合と全く同様に計算することができる。すなわち，この場合 $G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)$ を $G_{in}^1(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)$ と書けばこの項は次式のように書き表わせる。

$$G_{in}^1(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)=n(\bar{r})\int_0^{u_B}\sigma_S^{in}(u')\frac{g^c(u', u)}{4\pi}$$
$$\times\Phi_0(\bar{r}, u')E_{\max}e^{-u'}du'$$
$$\cdots\cdots(5\text{-}42)$$

上式で u' についての積分計算を (1) の場合と同様に台形公式により行なった結果は，$u=u_J$ に対して次式のように求まる。

$$G_{in}^1(\bar{r}, \bar{\Omega}, u_J)=n(\bar{r})\sum_{g=1}^{B}\zeta_g\sigma_S^{in}(u_g)\frac{g^c(u_g, u_J)}{4\pi}$$
$$\times\Phi_0(\bar{r}, u_g)E_{\max}e^{-u_g} \quad \cdots(5\text{-}43)$$

ここで u_B はエネルギ E_B に対応するレサジメッシュである。なお E_B はレサジメッシュ u_J $(j=1, 2, \cdots, J)$ のいずれかに一致するように定めるのが計算上望ましい。

ii) $E'\leqq E_B$ の場合（離散領域からの減速）

(5-29) 式に (5-31) 式を代入すると次式を得る。この場合の $G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ を $G_{in}^2(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ と書いておく。したがって

$$G_{in}^2(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)=n(\bar{r})\int_E^{E_B}\sigma_S^{in}(E')\frac{1}{4\pi}\sum_\nu a_\nu(E')\delta\{E'$$
$$-(E+E^\nu)\}\int_{4\pi}\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', E')d\bar{\Omega}'dE'$$
$$\cdots\cdots(5\text{-}44)$$

上式において中性子束を全立体角で積分すれば再び中性子スカラー束 $\Phi_0(\bar{r}, E')$ になるから，エネルギ E' についての積分計算の方法を考えればよい。

(5-44) 式においてエネルギについての積分計算を，5.2.1 における弾性散乱積分の計算の際に設定した仮定と同様な仮定のもとに行なう。すなわち中性子束 $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ および散乱断面積 $\sigma_S^{in}(E)$ はエネルギについて微小区間 ΔE 内でステップ関数で近似できるとする。この仮定のもとに (5-44) 式のエネルギに関する積分をエネルギ E についてレサジメッシュ u_g $(g=1, 2, \cdots, J)$ に対応してエネルギメッシュ E_g $(g=1, 2, \cdots, J)$ を割り当て，この E_g メッシュ点につき数値積分で計算する。その結果は次式のように求められる。

$$G_{in}^2(\bar{r}, \bar{\Omega}, E_J)=\frac{n(\bar{r})}{4\pi}\sum_{g=B}^{j}\sum_{\nu\in S_g}\sigma_S^{in}(E_g)a_\nu^j(E_g)$$
$$\times\Phi_0(\bar{r}, E_g) \qquad \cdots\cdots(5\text{-}45)$$

ここで $a_\nu^j(E_g)$ は $a_\nu(E')\delta\{E'-(E_J+E^\nu)\}$ で $E'\in E_g$ であることを意味する。また S_g はグループに属する ν についての和をとることを意味する。

ここで ν についての和は次の条件を満足する全ての ν についてとる (Fig. 5.7 参照)。

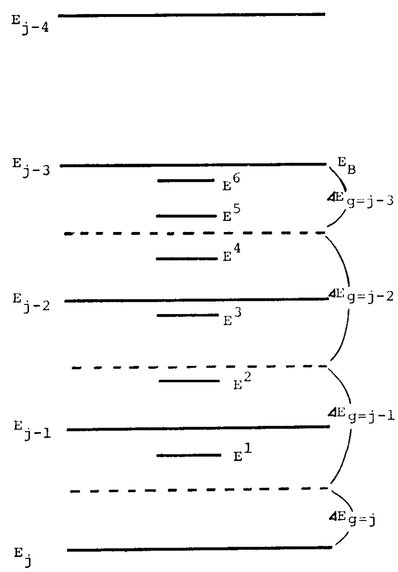

Fig. 5.7 Relation between energy levels of target nucleus and energy meshes

条件

$$E_J+E^\nu\leqq E_B, \quad \nu=1, 2, \cdots \quad \cdots(5\text{-}46)$$

かつ

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{2}(E_{B+1}+E_B)\leqq E_J+E^\nu\leqq E_B, \quad g=B \\ \frac{1}{2}(E_{g+1}+E_g)\leqq E_J+E^\nu<\frac{1}{2}(E_g+E_{g-1}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad B<g<j \\ E_J\leqq E_J+E^\nu<\frac{1}{2}(E_J+E_{J-1}), \quad g=j\end{array}\right\}(5\text{-}47)$$

(5-45) 式を $\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_{pq}$ に対し，右辺をマトリックスの形で書き表わしておくと実際の計算に便利である。す

なわち

$$G_{in}^2(\bar{r}, \overline{\Omega_{pq}}, E_j)=\sum_{g=B}^{j}\sum_{p'=1}^{P}\sum_{q'=1}^{Q_{p'}} b_{p'}c_g^j(\bar{r})\Phi_{p'q'g}(\bar{r}) \quad \cdots\cdots(5\text{-}48)$$

ここで $b_{p'}$ は (5-37) 式に，一方 $\Phi_{p'q'g}(\bar{r})$ は (5-41) 式に与えられている。$c_g^j(\bar{r})$ は次式から計算される。

$$c_g^j(\bar{r})=\frac{n(\bar{r})}{4\pi}\sum_{\nu\epsilon S_g}\sigma_S^{in}(E_\nu)a_\nu^j(E_g)\cdots(5\text{-}49)$$

したがって $E<E_B$ の場合における非弾性散乱された中性子は

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, u_j)=G_{in}^1(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, u_j)+G_{in}^2(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, u_j) \quad \cdots\cdots(5\text{-}50)$$

から求められる。以上の計算で非弾性散乱にもとづく散乱中性子は全て求めることができた。なお整理のため各種の条件における非弾性散乱積分計算結果をまとめておく。

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, u_j)=\sum_{g=1}^{j}\sum_{p'=1}^{P}\sum_{q'=1}^{Q_{p'}} b_{p'}c_g^j(\bar{r})\Phi_{p'q'g}(\bar{r}) \quad \cdots\cdots(5\text{-}51)$$

ここで $c_g^j(\bar{r})$ は各種の条件により次のように表わされる。

$$c_g^j(\bar{r})=\begin{cases} \dfrac{n(\bar{r})}{4\pi}\zeta_g\sigma_S^{in}(u_g)g^c(u_g, u_j)E_{\max}e^{-u_g} & 1\leqq g<B \\ \dfrac{n(\bar{r})}{4\pi}\zeta_g\sigma_S^{in}(u_g)g^c(u_g, u_j)E_{\max}e^{-u_g} + \dfrac{n(\bar{r})}{4\pi}\sum_{\nu\epsilon S_g}\sigma_S^{in}(E_g)a_\nu^j(E_g) & g=B \\ \dfrac{n(\bar{r})}{4\pi}\sum_{\nu\epsilon S_g}\sigma_S^{in}(E_g)a_\nu^j(E_g) & B<g\leqq j \end{cases} \quad (5\text{-}52)$$

5.3.1 および 5.3.2 において弾性散乱および非弾性散乱による散乱積分が計算されたので，(5-3) 式から輸送方程式の右辺の散乱積分を計算することができる。すなわち，$E=E_j$ および $\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_{pq}$ メッシュ点に対し散乱積分項は次式のように和の形で求められる。

$$\begin{aligned} G(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)&=G_{el}(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)+G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ &=\sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{P} a_{mn}T_{g(m),m}(\bar{r})\Phi_{g(m),n}(\bar{r}) \\ &\quad+\sum_{g=1}^{j}\sum_{p'=1}^{P}\sum_{q'=1}^{Q_{p'}} b_{p'}c_g^j(\bar{r})\Phi_{p'q'g}(\bar{r}) \end{aligned} \quad \cdots\cdots(5\text{-}53)$$

5.4 輸送方程式の直接積分計算

前節で輸送方程式 (5-1) 式の右辺の散乱積分項 $G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ が数値積分によって計算され，位置 $\bar{r}$ における各エネルギメッシュ E_j（レサジメッシュ u_j）($j=1, 2, \cdots, J$) につき，また中性子の進行方向角度分点 $\bar{\Omega}_{pq}$ ($p=1, 2, \cdots, P$, $q=1, 2, \cdots, Q_p$) について求められた。一方右辺の第2項の純線源 $S(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ は前もって与えられる量であるから，各エネルギメッシュ E_j につき，また進行方向角度分点 $\bar{\Omega}_{pq}$ について $S(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$ を与えることは容易である。したがって輸送方程式の右辺のいわゆる線源項は各エネルギメッシュ E_j につき，また角度分点 $\bar{\Omega}_{pq}$ につき直ちに計算され，これを $Q(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$ で表わす。すなわち

$$Q(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)=G(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)+S(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \quad \cdots\cdots(5\text{-}54)$$

輸送方程式 (5-1) 式の右辺の線源項が (5-54) 式からエネルギおよび角度についての各メッシュ点に対し求められたから，(5-1) 式はエネルギ $E=E_j$, 中性子の進行方向角 $\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_{pq}$ に対して次式のように書ける。

$$\begin{aligned} G_{pq}\cdot\mathrm{grad}\,\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)+\Sigma_t(\bar{r}, E_j)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ =Q(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \end{aligned} \quad \cdots\cdots(5\text{-}55)$$

(5-55) 式は各エネルギメッシュ $E=E_j$ につき一群の輸送方程式である。

(5-55) 式の左辺の第1項の $\bar{\Omega}\cdot\mathrm{grad}$ は単に中性子の進行方向 $\bar{\Omega}$ にそってとった微分係数であるから，上式は空間変数 $\bar{r}$ の代わりに $\bar{r}-R\bar{\Omega}$ で置き換えれば次式のように書き換えられる[34)]。

$$\begin{aligned} &-\frac{d}{dR}\Phi(\bar{r}-R\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ &+\Sigma_t(\bar{r}-R\bar{\Omega}_{pq}, E_j)\Phi(\bar{r}-R\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ &=\bar{Q}(\bar{r}-R\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \end{aligned} \quad \cdots\cdots(5\text{-}56)$$

上式は R にそって容易に積分することができ次式を得る。

$$\begin{aligned} &\Phi(\bar{r}-R\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ &=\Phi(\bar{r}-R_0\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ &\times\exp\left\{\int_{R_0}^{R}\Sigma_t(\bar{r}-R''\bar{\Omega}_{pq}, E_j)dR''\right\} \\ &+\int_{R}^{R_0}Q(\bar{r}-R'\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ &\times\exp\left\{\int_{R'}^{R}\Sigma_t(\bar{r}-R''\bar{\Omega}_{pq}, E_j)dR''\right\}dR' \end{aligned} \quad \cdots\cdots(5\text{-}57)$$

上式で，いま $R=0$, $\bar{r}-R_0\bar{\Omega}_{pq}=\bar{r}'$ とおけば

$$\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$$

$$=\Phi(\bar{r}', \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$$
$$\times\exp\left\{-\int_0^{R_0}\Sigma_t(\bar{r}-R''\bar{\Omega}_{pq}, E_j)dR''\right\}$$
$$+\int_0^{R_0}Q(\bar{r}-R'\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$$
$$\times\exp\left\{-\int_0^{R'}\Sigma_t(\bar{r}-R''\bar{\Omega}_{pq}, E_j)dR''\right\}dR' \quad \cdots\cdots(5\text{-}58)$$

と書ける。(5-58) 式は定常の中性子積分型輸送方程式であり，Fig. 5.8 を参照して (5-58) 式の物理的意味

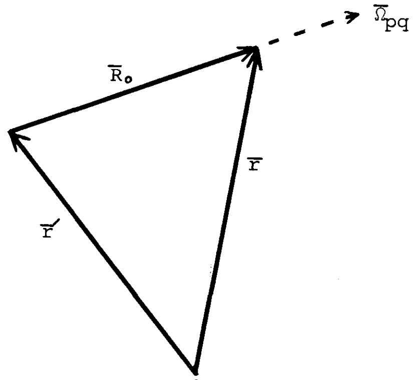

Fig. 5.8 Vector system adopted

は右辺の第1項が，位置 $\bar{r}'$ でエネルギ E_j をもち進行方向 $\bar{\Omega}_{pq}$ の中性子が R_0 にそって直進し，その間に指数減衰して位置 $\bar{r}$ に到達することを意味する。一方第2項は距離 $(\bar{r}', \bar{r})$ 間で，より高いエネルギの中性子が核により散乱されてエネルギを落とし E_j になり，かつ進行方向が $\bar{\Omega}_{pq}$ になった中性子，およびエネルギが E_j で進行方向が $\bar{\Omega}_{pq}$ の中性子が純線源から発生する，これらの中性子が位置 $\bar{r}$ まで R_0 にそって直進しその間に指数減衰して $\bar{r}$ に到達することを意味する。上式で指数関数に含まれる積分を次式の関数で表わす。すなわち

$$\tau(\bar{r}, \bar{r}-R'\bar{\Omega}_{pq}, E_j)=\int_0^{R'}\Sigma_t(\bar{r}-R''\bar{\Omega}_{pq}, E_j)dR'' \quad \cdots\cdots(5\text{-}59)$$

ここで $\tau(\bar{r}, \bar{r}-R'\bar{\Omega}_{pq}, E_j)$ は $\bar{r}$ と $\bar{r}-R'\bar{\Omega}_{pq}$ との間の光学距離と呼ばれる[34]。

さて，(5-58) 式の計算をすすめるため，空間変数 $\bar{r}$ についても Discrete Ordinate 空間メッシュ点 $\bar{r}_i$ で表わすことにする。そこで (5-58) 式で $\bar{r}=\bar{r}_i$ および $\bar{r}'=\bar{r}_{i-1}$ と置く。空間メッシュ点の選び方は，多重層の内側境界面ではその境界面に一致させてその両側に，境界メッシュ点をそれぞれ1個づつ割り当て，合計2個のメッシュ点を与える。また外側境界では外側境界面に一致させて空間メッシュ点を選ぶ。同じ領域内では下記の条件により定まる任意の数の空間メッシュ点が選ばれる。空間メッシュ区間は上記の条件により選ばれると，任意に選んだ空間メッシュ区間 $(\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i)$ 内では全断面積 $\Sigma_t(\bar{r}, E)$ が一定の値をもつことができるので，(5-59) 式の積分は容易に計算され次式のように求まる。

$$\tau(\bar{r}, \bar{r}-R'\bar{\Omega}_{pq}, E_j)=\Sigma_t(\bar{r}-R'\bar{\Omega}_{pq}, E_j)R' \quad \cdots\cdots(5\text{-}59')$$

さらに (5-58) 式の右辺の第2項の R' についての積分計算を容易に実行するために次の条件を設ける。すなわち，上述の条件にもとづき任意に選んだ空間メッシュ区間 $(\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i)$ で線源項 $Q(\bar{r}_i-R'\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$ が線形関数で近似することができるように空間メッシュ区間 $(\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i)$ を選ぶ。

以上の条件のもとで選ばれた空間メッシュ区間 $(\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i)$ で (5-58) 式の右辺の第2項は容易に積分計算される。まず線源項 $Q(\bar{r}_i-R'\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$ を線形関数で近似する。すなわち，

$$Q(\bar{r}_i-R'\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)\equiv Q(\bar{r}_i-R'\bar{\Omega}_{pq})$$
$$=a(\bar{r}_i)+b(\bar{r}_i)R' \quad \cdots\cdots(5\text{-}60)$$

また，$\Sigma_t(\bar{r}-R'\bar{\Omega}_{pq}, E_j)$ は区間 $(\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i)$ 内で一定の値であるからこれを $\Sigma_t(\bar{r}_i-R'\bar{\Omega}_{pq}, E_j)=\beta(\bar{r}_i)$ と置く。したがって (5-58) 式の右辺の第2項は次のように計算される。

$$\text{第2項}=\int_0^{R_0}(a+bR')\exp(-\beta R')dR'$$
$$=\frac{a}{\beta}\{1-\exp(-\beta R_0)\}-\frac{b}{\beta^2}\{\beta R_0\exp(-\beta R_0)+\exp(-\beta R_0)-1\} \quad \cdots\cdots(5\text{-}61)$$

ここで $a(\bar{r})$ および $b(\bar{r})$ は次式で表わせるから，

$$\left.\begin{aligned} a(\bar{r}_i)&=Q(\bar{r}_i)\\ b(\bar{r}_i)&=\frac{Q(\bar{r}_{i-1})-Q(\bar{r}_i)}{R_0}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5\text{-}62)$$

(5-62) 式の関係を (5-61) 式に代入すると次式を得る。

$$\text{第2項}=\frac{1}{\beta^2R_0}[Q(\bar{r}_i)\{\beta R_0+\exp(-\beta R_0)-1\}$$
$$+Q(\bar{r}_{i-1})\{1-(1+\beta R_0)\exp(-\beta R_0)\}] \quad \cdots\cdots(5\text{-}63)$$

以上の計算で (5-58) 式の第2項は求められる。ま

た (5-58) 式の第1項は容易に計算できるから，結局 (5-58) 式は次式のように計算される。すなわち，

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{r}_i, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) =& \Phi(\bar{r}_{i-1}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ & \times \exp\{-\Sigma_t(\bar{r}_{i-1}, E_j)R_0\} \\ & + \frac{1}{\Sigma_t(\bar{r}_{i-1}, E_j)^2 R_0}[Q(\bar{r}_i, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)\{\Sigma_t(\bar{r}_{i-1}, E_j)R_0 \\ & + \exp\{-\Sigma_t(\bar{r}_{i-1}, E_j)R_0\} - 1\} \\ & + Q(\bar{r}_{i-1}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)\{1 - \{1 + \Sigma_t(\bar{r}_{i-1}, E_j)R_0\} \\ & \times \exp\{-\Sigma_t(\bar{r}_{i-1}, E_j)R_0\}\}] \qquad \cdots\cdots(5\text{-}64)\end{aligned}$$

上式で $\sum_t(\bar{r}_{i-1}, E_j)$ は便宜上空間メッシュ間 $(\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i)$ 内で一定である巨視的全断面積を表わすとする。

(5-64) 式は空間メッシュについて差分の形をしているから計算機で計算するのに都合の良い形である。実際の計算手順は最高エネルギの群から順次下のエネルギ群へ計算をすすめる。また一つの群についての計算手順は外側境界条件（通常は外側境界で外側から内側に向う中性子角度束 $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ は零とする）から出発し外側空間メッシュから順次内側空間メッシュへ計算をすすめる。この操作は外側から内側へ向く全角度分点について各角度分点ごとに行ない，計算がすすみ内側境界に到達するまで行なう。内側へ向かう全角度分点につき計算が内側境界へ到達した後は，次に述べる条件のいずれか一つを適用し内側境界で外側へ向かう全ての角度分点に対する中性子角度束を計算する。

条件

i) 有限厚さの平板線源，有限円柱線源，直方体線源等の線源の場合は内側境界で反射条件を適用する。

ii) 平板 (Plane) 線源，ディスクおよび有限広さの平板 (Plane) 線源，球殻線源の場合は内側境界条件を適用する。

iii) 球体積線源の場合は最も内側半径メッシュ上で負の ω（角度でいえば 90 度 $<\theta<$ 180 度）にする中性子角度束から正の ω（角度では $0<\theta<90$ 度）に対する中性子角度束を計算によって求める。

以上の条件から内側境界での内側から外側へ向かう全角度分点につき中性子角度束が計算されるから，今度は上述の計算手順の逆に従って内側空間メッシュから外側空間メッシュへ順次計算をすすめる。この操作は外側へ向かう全角度分点につき計算が外側境界に到達するまで行なう。以上の操作が全て完了すれば，本解法では繰り返えし収斂法を使用しない（次節で述べる）ので，直ちに次のエネルギ群の計算へすすむことができる。

5.5 同一エネルギ群内散乱中性子の計算

中性子が自分自身のエネルギ群内で散乱され自分自身のエネルギ群へ落ちる場合の計算は，繰り返えし収斂法を適用して計算するのが通例である。しかし，繰り返えし収斂法を使用すると，まず第1に計算時間が長くなる欠点があり，第2に対象とする問題の種類によっては最悪の場合には収斂しないことがあり，また収斂するにしても収斂が一様でないために余計に長い計算時間を要することがある。

本解法では計算時間短縮を目的とし，さらに問題の種類によっては収斂しないこともあるという。繰り返えし収斂法の不安を取り除くために，繰り返えし収斂法の使用を避けその代わりに以下に述べる手法[55)~58)]を用いる。

まず散乱積分項 $G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ を2通りに分けて次のように書く。

$$G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = G^D(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) + G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \quad (5\text{-}65)$$

ここで

$G^D(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ は中性子が上のエネルギ群から散乱減速されて位相空間 $(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ に加わる項，

$G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ は中性子が自分自身のエネルギ群内で散乱され再び自分自身のエネルギ群内の位相空間 $(\bar{r}, \bar{\Omega}, E$ に入る項。

この $G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ は次の仮定にもとづいて計算する。すなわち $r=r_i$ 位置において位相空間上のメッシュ $(\bar{\Omega}_{pq}, E_j)$ が代表している微小位相空間 $\Delta\bar{\Omega}_{pq}\Delta E_j$ 内の中性子が散乱され，再びこの微小位相空間内に留まる中性子を $G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ で表わす。したがって $G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ は

$$G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = A(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \cdots(5\text{-}66)$$

と書き表わすことができる。

さて (5-55) 式の両辺から $A(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ を差し引くと次式のように書ける。簡単のために添字を省く。

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}\cdot\mathrm{grad}\,\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) + \Sigma_t(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \\ - A(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \\ = Q(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) - A(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \cdots(5\text{-}67)\end{aligned}$$

いま $\Sigma_t'(\bar{r}, E) = \Sigma_t(\bar{r}, E) - A(\bar{r}, E) \quad \cdots\cdots(5\text{-}68)$

$$Q'(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = Q(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) - A(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \quad \cdots\cdots(5\text{-}69)$$

で表わすと (5-67) 式は次式のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}\cdot\mathrm{grad}\,\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) + \textstyle\sum_t'(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \\ = Q'(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \qquad \cdots\cdots(5\text{-}70)\end{aligned}$$

したがって (5-70) 式の計算は (5-64) 式で全断面積 $\sum_t(\bar{r},E)$ の代わりに $\Sigma_t'(\bar{r},E)$ を，また線源項 $Q(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ の代わりに $Q'(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ を置き換えればそのままの形でよい。

残された問題は (5-66) 式における係数 $A(\bar{r},E)$ を求めることである。$A(\bar{r},E)$ を求めるために，まず次の2つの仮定を設ける。すなわち，

i) 弾性散乱の場合，重心系における散乱角の余弦 $\mu=\mu_1$ (小角度散乱) メッシュが代表する範囲 $\Delta\mu_1$ 内の μ で散乱された中性子は，自分の属する進行方向 $\bar{\Omega}=\bar{\Omega}_{pq}$ メッシュが代表する範囲 $\Delta\bar{\Omega}_{pq}$ 内に留まる。

ii) 非弾性散乱の場合，中性子は明らかに減速され，通常自分自身のエネルギ群内に留まらない。しかし，エネルギメッシュの幅 (レサジメッシュの幅) を大きく選ぶ場合には自分自身のエネルギ群内に留まる中性子も現われる。この自分自身のエネルギ群内に留まる中性子の計算は5.3.2の非弾性散乱積分の計算の項で (5-52) 式から求められるマトリックス $c_g^j(\bar{r})$ において $g=j$ と置いた $c_j^j(\bar{r})$ を使用して行なうことにする。この場合，いま注目している中性子のレサジメッシュを u_j とすれば，$u_j \geqq u > u_j-\dfrac{h}{2}$ (h はレサジメッシュ幅，なおエネルギで書くと (5-47) 式で $g=j$ の場合であり厳密にはレサジ表示の区間と一致しないが近似的には一致する。) の範囲のレサジをもつ中性子が非弾性散乱され，自分自身の位相空間 $(\bar{\Omega}_{pq}, u_j)$ に留まることを意味する。この仮定は粗い近似であるが，自分自身のエネルギ群内に留まる中性子が現われる程度に粗くレサジメッシュ幅を選ぶ場合，他の種々の条件から決まる近似の程度もこの程度の粗さになることが予想されるので，この仮定は認容されよう。

上の2つの仮定にもとづいて各エネルギメッシュ $E=E_j$ に対して $A(\bar{r},E_j)$ を計算すると次式のように求まる。

$$A(\bar{r},E_j)=2\pi W_1 T_{j,1}(\bar{r})+4\pi c_j^j(\bar{r}) \cdots(5\text{-}71)$$

ここで W_1 は $\mu=\mu_1$ に対する重みであり，$T_{j,1}(\bar{r})$ および $c_j^j(\bar{r})$ と共に 5.3.1 および 5.3.2 に与えられている。なお (5-18) 式における微小レサジ $\Delta u_{j(m=1)}$ は上の仮定 i) から次のように求められる。

$$\Delta u_{j(m=1)}=\ln\frac{(1+\rho)^2}{1+2\rho W_1+\rho^2} \cdots\cdots(5\text{-}72)$$

5.6 差分形の計算式

前節で自分自身のエネルギ群内での散乱中性子の評価が行なわれたので，差分形の (5-64) 式は (5-68) および (5-69) の関係式を使って次式のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{r}_i,\bar{\Omega}_{pq},E_j)=&\Phi(\bar{r}_{i-1},\bar{\Omega}_{pq},E_j)\\ &\times\exp\{-\Sigma_t'(\bar{r}_{i-1},E_j)R_0\}\\ &+\frac{1}{\Sigma_t'(\bar{r}_{i-1},E_j)^2R_0}[Q'(\bar{r}_i,\bar{\Omega}_{pq},E_j)\{\Sigma_t'(\bar{r}_{i-1},E_j)R_0\\ &+\exp\{-\Sigma_t'(\bar{r}_{i-1},E_j)R_0\}-1\}\\ &+Q'(\bar{r}_{i-1},\bar{\Omega}_{pq},E_j)\{1-\{1+\Sigma_t'(\bar{r}_{i-1},E_j)R_0\}\\ &\times\exp\{-\Sigma_t'(\bar{r}_{i-1},E_j)R_0\}\}] \qquad \cdots\cdots(5\text{-}73)\end{aligned}$$

上式をマトリックスの形で書くと次式のようになる。

$$\boldsymbol{\Phi}_i=\boldsymbol{E}_{i-1}\boldsymbol{\Phi}_{i-1}+\boldsymbol{F}_i\boldsymbol{Q}_i+\boldsymbol{H}_{i-1}\boldsymbol{Q}_{i-1} \cdots(5\text{-}74)$$

あるいは

$$\boldsymbol{\Phi}_i=\boldsymbol{A}_0^{i-1}\boldsymbol{\Phi}_0+\boldsymbol{B}_i^{i-1},\quad i\geqq 1 \cdots\cdots(5\text{-}75)$$

ここで

$$\boldsymbol{A}_l^{i-1}=\begin{cases}\prod_{k=l}^{i-1}\boldsymbol{E}_k, & l\leqq i-1\\ \boldsymbol{I}, & l=i\end{cases} \cdots\cdots(5\text{-}76)$$

$$\boldsymbol{B}_i^{i-1}=\sum_{l=1}^{i}\boldsymbol{A}_l^{i-1}(\boldsymbol{F}_l\boldsymbol{Q}_l+\boldsymbol{H}_{l-1}\boldsymbol{Q}_{l-1}), \cdots(5\text{-}77)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_i=\begin{pmatrix}\Phi_{i1}\\ \Phi_{i2}\\ \vdots\\ \Phi_{iJ}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{Q}_i=\begin{pmatrix}Q_{i1}\\ Q_{i2}\\ \vdots\\ Q_{iJ}\end{pmatrix}, \cdots\cdots(5\text{-}78)$$

また $\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{H}_i$ は $(J\times J)$ の対角線マトリックスであり，$\boldsymbol{I}$ は $(J\times J)$ の単位マトリックスである。さらに，$\boldsymbol{\Phi}_0$ は境界条件に相当する。媒質は単層でも多重層でも (5-74) あるいは (5-75) 式の計算手順は全く同じであり，多重層の外側境界から出発し内側へ計算をすすめ，今計算している層の内側境界に達した場合，その内側境界の中性子束をさらに1つ内側の層の外側境界値として再び内側へ向って計算をすすめればよい。また内側から外向きに計算をすすめる場合にも上述の逆を全く同様に行なえばよい。

(5-57) 式から (5-78) 式までの式に表われるマトリックスの各要素を以下に与える。まず $\boldsymbol{E}_i$, $\boldsymbol{F}_i$, $\boldsymbol{H}_i$ の各要素 E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} はそれぞれ

$$E_{ij}=\exp\{\Sigma_t'(\bar{r}_i,E_j)R_{i+1}\}, \qquad \cdots\cdots(5\text{-}79)$$

$$F_{ij}=\frac{\Sigma_t'(\bar{r}_{i-1},E_j)R_i+\exp\{-\Sigma_t'(\bar{r}_{i-1},E_j)R_i\}-1}{\Sigma_t'(\bar{r}_{i-1},E_j)^2R_i}, \cdots\cdots(5\text{-}80)$$

$$H_{ij}=\frac{1-\{1+\Sigma_t'(\bar{r}_i, E_j)R_{i+1}\}\exp\{-\Sigma_t'(\bar{r}_i, E_j)R_{i+1}\}}{\Sigma_t'(\bar{r}_i, E_j)^2 R_{i+1}}. \quad \cdots\cdots(5\text{-}81)$$

である。また Φ_{ij} および Q_{ij} はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{ij}&=\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)\\ Q_{ij}&=Q'(\bar{r}_i, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5\text{-}82)$$

である。なお (5-79)～(5-81) 式における R_i は

$$R_i=|\bar{r}_i-\bar{r}_{i-1}| \quad \cdots\cdots(5\text{-}83)$$

である。

以上で中性子束 $\Phi(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ は位相空間 $(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ の各メッシュの組 $(\bar{r}_i,\bar{\Omega}_{pq},E_j)$ に対して求めることができた。中性子スカラー束 $\Phi_0(\bar{r},E)$ は $(\bar{r},E)$ の各メッシュの組 $(\bar{r}_i,E_j)$ に対して次のように計算される。

$$\Phi_0(\bar{r}_i, E_j)=\sum_{p=1}^{P}\sum_{q=1}^{Q_p} b_p\Phi(\bar{r}_i, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \quad (5\text{-}84)$$

上式で Q_p および b_p はそれぞれ (5-38) および (5-37) 式で与えられている。

以上の計算で定常の中性子輸送方程式は，任意の空間形状に対して中性子の進行方向にその飛程に沿って積分することにより解くことができた。その数値解は中性子角度束 $(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ が位相空間上の各メッシュの組 $(\bar{r}_i,\bar{\Omega}_{pq},E_j)$ について求められ，さらに中性子角度束を角度について数値積分することにより中性子スカラー束 $\Phi_0(\bar{r},E)$ がメッシュの組 $(\bar{r}_i,E_j)$ に対して求められた。

本章で提案した直接積分解法の特長の一つは輸送方程式 (5-1) 式から最終式 (5-73) 式を導出するのに，空間形状を固定しないで導出しているので，導出された最終式は任意の空間形状に対して適用できる点にある。したがって次章では本章で導出された最終式の実際の形状への適用を述べる。

第6章　実際の座標形状への適用

前章において輸送方程式を任意の空間変数 $\bar{r}$ について数値解法で解き解を導出した。本章では前章で導出した解 $\Phi(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ を実際の各種の座標形状に対して書く。対象とする実際の座標形状としては遮蔽計算に利用される，平板形状，球対称形状，無限円柱および有限円柱形状，さらに直角座標形状である。以下にこの順序に従って各形状に対して中性子束 $\Phi(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ を求める。

6.1　一次元平板形状

一次元平板形状における空間変数を x とし，x 軸と中性子の進行方向 $\bar{\Omega}$ とのなす角度を θ とすれば，(5-73) 式の R_0 は容易に求まり次式で表わせる (Fig. 6.1)。

$$R_0=\frac{x-x'}{\cos\theta} \quad \cdots\cdots(6\text{-}1)$$

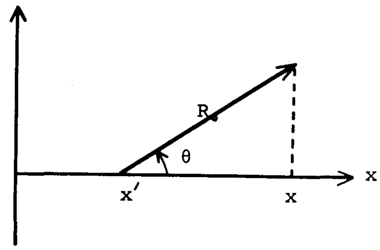

Fig. 6.1 Neutron flight path R_0 in plane geometry

また空間メッシュで表わせば次式のように表わせる。

$$R_i=\frac{x_i-x_{i-1}}{\omega_p} \quad \cdots\cdots(6\text{-}2)$$

(5-74) 式におけるマトリックスの要素である $\Phi_{i,j}$, $\Phi_{i-1,j}$ および Q_{ij}, $Q_{i-1,j}$ はそれぞれ

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{ij}&=\Phi(x_i, \omega_p, E_j),\\ \Phi_{i-1,j}&=\Phi(x_{i-1}, \omega_p, E_j),\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6\text{-}3)$$

$$\left.\begin{aligned}Q_{i-1,j}&=Q'(x_{i-1}, \omega_p, E_j),\\ Q_{ij}&=Q'(x_i, \omega_p, E_j),\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6\text{-}4)$$

であり，全断面積は $\Sigma_t'(\bar{r}_i,E_j)=\Sigma_t'(x_i,E_j)$ であるから $\boldsymbol{E}_i, \boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{H}_i$ の各要素 E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} は次のように書き表わせる。

$$\left.\begin{aligned}E_{ij}&=\exp\left\{-\Sigma_t'(x_i, E_j)\frac{x_{i+1}-x_i}{\omega_p}\right\},\\ F_{ij}&=\frac{\Sigma_t'(x_{i-1}, E_j)\dfrac{x_i-x_{i-1}}{\omega_p}+E_{i-1,j}-1}{\Sigma_t'(x_{i-1}, E_j)^2\dfrac{x_i-x_{i-1}}{\omega_p}},\\ H_{ij}&=\frac{1-\left\{1+\Sigma_t'(x_i, E_j)\dfrac{x_{i+1}-x_i}{\omega_p}\right\}E_{ij}}{\Sigma_t'(x_i, E_j)^2\dfrac{x_{i+1}-x_i}{\omega_p}}.\end{aligned}\right\} (6\text{-}5)$$

したがって中性子束 $\Phi(x_i,\omega_p,E_j)$ は (5-74) 式から求められる。

6.2　一次元球対称形状

一次元球対称形状における空間変数を r とし，r 軸と中性子の進行方向 $\bar{\Omega}$ とのなす角度を θ, さらに $\cos\theta$ を ω で表わせば R_0 は容易に求まり次式で表わせる (Fig. 6.2)。

$$R_0=r\cos\theta-r'\cos\theta' \quad \cdots\cdots(6\text{-}6)$$

また R_i は次式のように表わせる。

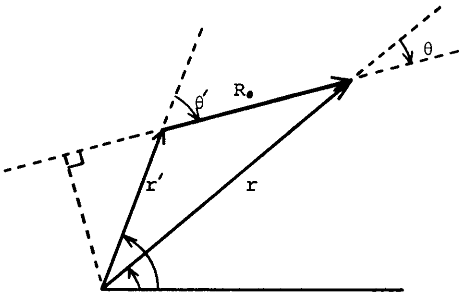

Fig. 6.2 Neutron flight path R_0 in spherical geometry

$$R_i=r_i\omega_p-r'\omega' \qquad \cdots\cdots(6\text{-}7)$$

上式の r' および ω' は以下のように決められる。

i) $0<\omega_p<1$ の場合

$$\left.\begin{aligned} &r'=r_{i-1} \quad とおけば \\ &\omega'=\frac{\sqrt{r_{i-1}^2-r_i^2(1-\omega_p^2)}}{r_{i-1}}, \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(6\text{-}8)$$

ただし，$r_i\sqrt{1-\omega_p^2}\leqq r_{i-1}$ の条件内で (6-8) 式は成立する。これに対し $r_i\sqrt{1-\omega_p^2}>r_{i-1}$ の場合は次式により決められる。

$$\left.\begin{aligned} &\omega'=\omega_{p+1} \\ &r'=\frac{r_i\sqrt{1-\omega_p^2}}{\sqrt{1-\omega_{p+1}^2}} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(6\text{-}9)$$

ii) $-1<\omega_p<0$ の場合

$$\left.\begin{aligned} &r'=r_{i+1} \quad とおけば \\ &\omega'=\frac{-\sqrt{r_{i+1}^2-r_i^2(1-\omega_p^2)}}{r_{i+1}} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots(6\text{-}10)$$

また (5-74) 式の各マトリックスの要素はそれぞれ以下のように書ける。

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{ij}&=\Phi(r_i, \omega_p, E_j), \\ Q_{ij}&=Q'(r_i, \omega_p, E_j), \\ \Phi_{i-1,j}&=\Phi(r', \omega', E_j), \\ Q_{i-1,j}&=Q'(r', \omega', E_j), \\ E_{ij}&=\exp\{-\Sigma_t'(r_i, E_j)R_{i+1}\}, \\ F_{ij}&=\frac{\Sigma_t'(r_{i-1}, E_j)R_i+E_{i-1,j}-1}{\Sigma_t'(r_{i-1}, E_j)^2R_i}, \\ H_{ij}&=\frac{1-\{1+\Sigma_t'(r_i, E_j)R_{i+1}\}E_{ij}}{\Sigma_t'(r_i, E_j)^2R_{i+1}}. \end{aligned}\right\}(6\text{-}11)$$

なお上式で未決定の量は $\Phi(r', \omega', E_j)$ および $Q'(r', \omega', E_j)$ である。(r', ω') の組み合わせは (6-8)~(6-10) 式で決まるが，r' あるいは ω' が r および ω についてのメッシュ点に一致しない場合が問題となる。その場合は，一致しない r' あるいは ω' について補間公式を適用して $\Phi(r', \omega', E_j)$ および $Q'(r', \omega', E_j)$ を計算する。

6.3 無限円柱形状

円柱の軸を z 軸で表わし中性子の進行方向 $\bar{\Omega}$ と z 軸とのなす角を θ (極角) とし，これに対し方位角を ϕ で表わせば，R_0 は次式で表わせる (Fig. 6.3)。

$$R_0=\frac{R_{XY}}{\sin\theta}=\frac{r\cos\phi-r'\cos\phi'}{\sqrt{1-\omega^2}} \qquad \cdots(6\text{-}12)$$

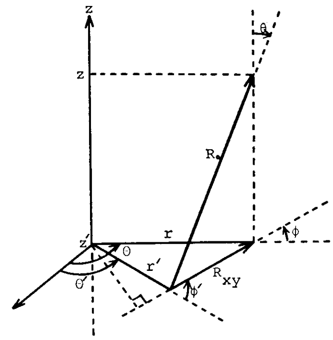

Fig. 6.3 Neutron flight path R_0 in cylindrical geometry

したがって R_i は

$$R_i=\frac{r_i\cos\phi_{pq}-r'\cos\phi'}{\sqrt{1-\omega_p^2}} \qquad \cdots\cdots(6\text{-}13)$$

で表わされる。上式における r', ϕ' は次のように決められる。

i) $0<\phi_{pq}<\dfrac{\pi}{2}$ の場合

$r_i\sin\phi_{pq}\leqq r_{i-1}$ の成り立つ範囲では次式のようである。

$$\left.\begin{aligned} &r'=r_{i-1}, \\ &\phi'=\sin^{-1}\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\sin\phi_{pq}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(6\text{-}14)$$

一方，$r_i\sin\phi_{pq}>r_{i-1}$ の場合には次式のようである。

$$\left.\begin{aligned} &\phi'=\phi_{p,q+1} \\ &r'=\frac{r_i\sin\phi_{pq}}{\sin\phi_{p,q+1}} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(6\text{-}15)$$

ii) $\dfrac{\pi}{2}<\phi_{pq}<\pi$ の場合

$$\left.\begin{aligned} &r'=r_{i+1}, \\ &\phi'=\pi-\sin^{-1}\left(\frac{r_i}{r_{i+1}}\sin\phi_{pq}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \cdots(6\text{-}16)$$

また (5-74) 式の各マトリックスの要素はそれぞれ以下のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{ij}&=\Phi(r_i,\bar{\Omega}_{pq}(\omega_p,\phi_{pq}),E_j)\,,\\
Q_{ij}&=Q'(r,\bar{\Omega}_{pq}(\omega_p,\phi_{pq}),E_j)\,,\\
\Phi_{i-1,j}&=\Phi(r',\bar{\Omega}'(\omega_p,\phi'),E_j)\,,\\
Q_{i-1,j}&=Q'(r',\bar{\Omega}'(\omega_p,\phi'),E_j)\,,\\
E_{ij}&=\exp\{-\Sigma_t'(r_i,E_j)R_{i+1}\}\,,\\
F_{ij}&=\frac{\Sigma_t'(r_{i-1},E_j)R_i+E_{i-1,j}-1}{\Sigma_t'(r_{i-1},E_j)^2R_i}\,,\\
H_{ij}&=\frac{1-\{1+\Sigma_t'(r_i,E_j)R_{i+1}\}E_{ij}}{\Sigma_t'(r_i,E_j)^2R_{i+1}}\,.
\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}17)$$

なお上式で未決定の量は $\Phi'(r',\bar{\Omega}'(\omega_p,\phi'),E_i)$ および $Q'(r',\bar{\Omega}'(\omega_p,\phi'),E_j)$ である。(r',ϕ') の組は (6-14) ～(6-16) 式から決められるが，問題は r' あるいは ϕ' が r または ϕ についてのメッシュ点に一致しない場合である。その場合は一致しない r' あるいは ϕ' について補間公式を適用して Φ および Q' を計算する。

6.4 二次元 (r,z) 円柱形状

空間座標 (r,z) に対し z 軸と中性子の進行方向 $\bar{\Omega}$ とのなす角を再び θ (極角)，方位角を ϕ とすれば，R_0 は 6.3 と同様に次式で表わせる (Fig. 6.3)。

$$R_0=\frac{R_{XY}}{\sin\theta}=\frac{r\cos\phi-r'\cos\phi'}{\sqrt{1-\omega^2}}\quad\cdots(6\text{-}18)$$

さらに R_0 を z 軸に斜影して

$$R_0=\frac{z-z'}{\cos\theta}=\frac{z-z'}{\omega}\quad\cdots\cdots(6\text{-}19)$$

を得る。したがって R_i は次のように書き表わせる。

$$R_i=\begin{cases}\dfrac{r_m\cos\phi_{pq}-r'\cos\phi'}{\sqrt{1-\omega_p^2}}\\[2mm]\dfrac{z_n-z'}{\omega_p}\end{cases}\quad\cdots(6\text{-}20)$$

(6-20) 式で r',z' および ϕ' は以下のように決められる。

i) $0<\phi_{pq}<\dfrac{\pi}{2}$ の場合

$r_m\sin\phi_{pq}\leqq r_{m-1}$ の成り立つ範囲では以下のように求まる。

$$\left.\begin{aligned}
r'&=r_{m-1}\,,\\
\phi'&=\sin^{-1}\left(\frac{r_m}{r_{m-1}}\sin\phi_{pq}\right),\\
z'&=z_n-\frac{\omega_p}{\sqrt{1-\omega_p^2}}(r_m\cos\phi_{pq}-r_{m-1}\cos\phi')\,.
\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(6\text{-}21)$$

一方，$r_m\sin\phi_{pq}>r_{m-1}$ となる場合には以下のように求まる。

$$\left.\begin{aligned}
\phi'&=\phi_{p,q+1}\,,\\
r'&=\frac{r_i\sin\phi_{p,q}}{\sin\phi_{p,q+1}}\,,\\
z'&=z_n-\frac{\omega_p}{\sqrt{1-\omega_p^2}}(r_m\cos\phi_{pq}-r'\cos\phi')\,.
\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}22)$$

ただし，(6-21)，(6-22) の両式で計算された z' の値が次に示す範囲に入った場合，すなわち，

$0<\omega_p<1$ の ω_p に対し $z'<z_{n-1}$，

$-1<\omega_p<0$ の ω_p に対し $z'>z_{n+1}$，

の場合は (6-21) および (6-22) 式に代わり次式から求められる r',z',ϕ' の値を採用する。

$$\left.\begin{aligned}
z'&=z_{n\pm1}\,,\\
r'&=\left\{r_m^2+\frac{1-\omega_p^2}{\omega_p^2}(z_n-z_{n\pm1})^2\right.\\
&\qquad\left.-2r_m\cos\phi_{pq}\frac{\sqrt{1-\omega_p^2}}{\omega_p}(z_n-z_{n\pm1})\right\}^{1/2},
\end{aligned}\right\}(6\text{-}23)$$

また ϕ' については

$\dfrac{\sqrt{1-\omega_p^2}}{\omega_p}(z_n-z_{n\pm1})<r_m\cos\phi_{pq}$ の場合には次のように求められる。

$$\phi'=\sin^{-1}\left(\frac{r_m}{r'}\sin\phi_{pq}\right),\quad\cdots\cdots(6\text{-}24)$$

また $\dfrac{\sqrt{1-\omega_p^2}}{\omega_p}(z_n-z_{n\pm1})\geqq r_m\cos\phi_{pq}$ の場合には

$$\phi'=\pi-\sin^{-1}\left(\frac{r_m}{r'}\sin\phi_{pq}\right).\quad\cdots\cdots(6\text{-}25)$$

のように求められる。

ii) $\dfrac{\pi}{2}<\phi_{pq}<\pi$ の場合

$$\left.\begin{aligned}
r'&=r_{m+1}\,,\\
\phi'&=\pi-\sin^{-1}\left(\frac{r_m}{r_{m+1}}\sin\phi_{pq}\right),\\
z'&=z_n-\frac{\omega_p}{\sqrt{1-\omega_p^2}}(r_m\cos\phi_{pq}-r_{m+1}\cos\phi')\,.
\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(6\text{-}26)$$

ただし，(6-26) 式で求めた z' の値が次に示す範囲に入った場合，すなわち，

$0<\omega_p<1$ の ω_p に対し $z'<z_{n-1}$，

$-1<\omega_p<0$ の ω_p に対し $z'>z_{n+1}$.

の場合は (6-26) 式に代わり次式から求められる r',z',ϕ の値を採用する。

$$\left.\begin{aligned}
z'&=z_{n\pm1}\,,\\
r'&=\left\{r_m^2+\frac{1-\omega_p^2}{\omega_p^2}(z_n-z_{n\pm1})^2\right.\\
&\qquad\left.-2r_m\cos\phi_{pq}\frac{\sqrt{1-\omega_p^2}}{\omega_p}(z_n-z_{n\pm1})\right\}^{1/2},\\
\phi'&=\pi-\sin^{-1}\left(\frac{r_m}{r'}\sin\phi_{pq}\right).
\end{aligned}\right\}(6\text{-}27)$$

また (5-74) 式の各マトリックスの要素はそれぞれ以下のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{ij}=\Phi(r_m, z_n, \bar{\Omega}_{pq}(\omega_p, \phi_{pq}), E_j),\\
&Q_{ij}=Q'(r_m, z_n, \bar{\Omega}_{pq}(\omega_p, \phi_{pq}), E_j),\\
&\Phi_{i-1,j}=\Phi(r', z', \bar{\Omega}'(\omega_p, \phi'), E_j),\\
&Q_{i-1,j}=Q'(r', z', \bar{\Omega}'(\omega_p, \phi'), E_j),\\
&E_{ij}=\exp\{-\Sigma_t'(r_m, z_n, E_j)R_{i+1}\},\\
&F_{ij}=\frac{\Sigma_t'(r', z', E_j)R_i+E_{i-i,j}-1}{\Sigma_t'(r', z', E_j)^2R_i},\\
&H_{ij}=\frac{1-\{1+\Sigma_t'(r_m, z_n, E_j)R_{i+1}\}E_{ij}}{\Sigma_t'(r_m, z_n, E_j)^2R_{i+1}}.
\end{aligned}\right\}\text{(6-28)}$$

上式における $\Phi(r', z', \bar{\Omega}'(\omega_p, \phi'), E_j)$ および $Q'(r', z', \bar{\Omega}'(\omega_p, \phi'), E_j)$ は (6-21)～(6-27) 式から (r', z') のどちらかが r あるいは z のメッシュで表わされるから，(r', z') のうちメッシュ点に一致しない方と ϕ' とに関して，すなわち (r', ϕ') の組か (z', ϕ') の組について二重補間公式を使用して求める。

6.5 三次元 (x, y, z) 座標形状

(x, y, z) 直角座標において z 軸と中性子の進行方向 $\bar{\Omega}$ とのなす角を θ，$\bar{\Omega}$ の (x, y) 平面への斜影 $\bar{\Omega}_{xy}$ と x 軸とのなす角を ϕ とすれば，R_0 は次のように求められる (Fig. 6.4)。

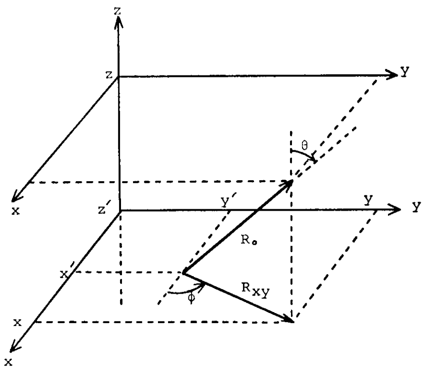

Fig. 6.4 Neutron flight path R_0 in rectangular geometry

$$\left.\begin{aligned}
R_0&=\frac{R_{XY}}{\sin\theta}=\frac{x-x'}{\cos\phi\sin\theta},\\
&=\frac{y-y'}{\sin\phi\sin\theta}.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(6-29)}$$

さらに

$$R_0=\frac{z-z'}{\cos\theta}\qquad\cdots\cdots\text{(6-30)}$$

したがって R_i は次のように書き表わせる。

$$R_i=\left\{\begin{aligned}
&\frac{x_l-x'}{\cos\phi_{pq}\sqrt{1-\omega_p^2}},\\
&\frac{y_m-y'}{\sin\phi_{pq}\sqrt{1-\omega_p^2}},\\
&\frac{z_n-z'}{\omega_p}.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(6-31)}$$

(6-31) 式における x', y', z' は次のように求められる。いま (x, y, z) に対するメッシュを (x_l, y_m, z_n) で表わす。

i) $z'=z_{n\pm1}$ で，かつ $x_{l-1}\leqq x'\leqq x_{l+1}$，$y_{m-1}\leqq y'\leqq y_{m+1}$ の場合には x' および y' は以下のように決められる。

$$\left.\begin{aligned}
x'&=x_l-(z_n-z_{n\pm1})\frac{\cos\phi_{pq}\sqrt{1-\omega_p^2}}{\omega_p},\\
y'&=y_m-(z_n-z_{n\pm1})\frac{\sin\phi_{pq}\sqrt{1-\omega_p^2}}{\omega_p}.
\end{aligned}\right\}\text{(6-32)}$$

ii) $x'=x_{l\pm1}$ で，かつ $y_{m-1}\leqq y'\leqq y_{m+1}$，$z_{n-1}\leqq z'\leqq z_{n+1}$ の場合には y' および z' は以下のように決められる。

$$\left.\begin{aligned}
y'&=y_m-(x_l-x_{l\pm1})\tan\phi_{pq},\\
z'&=z_n-(x_l-x_{l\pm1})\frac{\omega_p}{\cos\phi_{pq}\sqrt{1-\omega_p^2}}.
\end{aligned}\right\}\text{(6-33)}$$

iii) $y'=y_{m\pm1}$ で，かつ $z_{n-1}\leqq z'\leqq z_{n+1}$，$x_{l-1}\leqq x'\leqq x_{l+1}$ の場合には x' および z' は以下のように決められる。

$$\left.\begin{aligned}
x'&=x_l-(y_m-y_{m\pm1})\cot\phi_{pq},\\
z'&=z_n-(y_m-y_{m\pm1})\frac{\omega_p}{\sin\phi_{pq}\sqrt{1-\omega_p^2}}.
\end{aligned}\right\}\text{(6-34)}$$

また (5-74) 式の各マトリックスの要素はそれぞれ以下のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_{ij}=\Phi(x_l, y_m, z_n, \bar{\Omega}_{pq}(\omega_p, \phi_{pq}), E_j),\\
&Q_{ij}=Q'(x_l, y_m, z_n, \bar{\Omega}_{pq}(\omega_p, \phi_{pq}), E_j),\\
&\Phi_{i-1,j}=\Phi(x', y', z', \bar{\Omega}_{pq}(\omega_p, \phi_{pq}), E_j),\\
&Q_{i-1,j}=Q'(x', y', z', \bar{\Omega}_{pq}(\omega_p, \phi_{pq}), E_j),\\
&E_{ij}=\exp\{-\Sigma_t'(x_l, y_m, z_n, E_j)R_{i+1}\},\\
&F_{ij}=\frac{\Sigma_t'(x', y', z', E_j)R_i+E_{i-1,j}-1}{\Sigma_t'(x', y', z', E_j)^2R_i},\\
&H_{ij}=\frac{1-\{1+\Sigma_t'(x_l, y_m, z_n, E_j)R_{i+1}\}E_{ij}}{\Sigma_t'(x_l, y_m, z_n, E_j)^2R_{i+1}},
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(6-35)}$$

上式における $\Phi(x', y', z', \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$ および $Q'(x', y', z', \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$ は (6-32)～(6-34) から (x', y', z') のうち1つはメッシュ点に一致するから，他の2つの変数について二重補間公式を使用して求める。

以上6.1から6.5節までに記述した簡単な書き換えにより，前章で導出した最終式 (5-74) 式は一次元平板，球対称，無限円柱形状，さらに二次元円柱形状および三次元直角座標形状等に対する中性子透過計算を遂行するために適用できることが明らかとなった。

現在本解法にもとづく中性子透過計算用コードとして PALLAS コードが IBM 360-75 計算機に対して作製されている。PALLAS コードは一次元平板および球対称形状[61]，さらに二次円柱形状[60]に対する中性子透過計算用コードである。計算の対象となる線源の条件としては一次元平板形状については内側境界条件として線源を与える平面 (Plane) 線源，また有限厚さの平板体積線源 (Slab Source) がある。一方球対称形状については球体積線源および最も内側の半径メッシュに内側境界条件を与える球殻線源がある。さらに二次元円柱形状については円柱体積線源がある。二次元円柱形状についてはこの他にディスク線源が取り扱い得るのであるが，現時点では PALLAS コードはディスク線源を計算する計算ルーチンは作られていない。もしその必要があれば極わめて容易に付け加えることが可能である。

次章および第8章で本解法を中性子透過計算に適用した場合の計算精度を解析解や信頼できる実験結果との比較の形で検討を加えるが，それらの計算結果は PALLAS コードで計算したものである。なお PALLAS 計算コードの前身に MENE 計算コードが作られている。MENE コードは2種類の形状に対する中性子透過計算用コードであり，その1は MENE-1[62] で一次元平板形状用であり，この計算コードで計算した例が第9章における鉄—水，水—鉄，水—鉄—水の多重層透過速中性子スペクトルである。この MENE コードは NEAC 2206 計算機に対して Fortran II で書かれている。一方，もう一つの計算コードは二次元円柱形状用の MENE-2 であり，IBM 360-67 計算機に対して Fortran IV で書かれている。この MENE-2 コード[63]による計算結果例は本論文には掲載していない。この理由は本コードを作製した時点での計算機システムの大きさの制限により実際の問題の計算を行なうのに充分なメッシュ点がとれなかったことと，本来の目的が中性子の散乱現象を正確に取り扱う二次元形状輸送コードの試験的作製にあったことによる。したがって，PALLAS コードは上述の MENE コードにより中性子透過問題を取り扱う際の問題点を明らかにし，さらにその問題点を処理する技法を見出した上で作製された計算コードである。

第7章　非散乱線の計算結果と解析解との比較

7.1　平板体積線源

簡単のため線源の強さを一定の強度 $S_V(x)=c$ とする。その場合の平板体積線源の内では解析解[64]は

$$\Phi(x)=\frac{S_V}{2\Sigma_1}\{2-E_2(\Sigma_1 x)-E_2(\Sigma_1(d-x))\} \qquad (7\text{-}1)$$

で与えられる。上式で x は平板の一方の端からの距離であり，d は線源の厚さ，Σ_1 は線源内の吸収断面積 (cm^{-1}) であり，$E_2(t)$ は E_2 関数である。一方遮蔽体内における解析解[64]は次式で与えられる。

$$\Phi(x)=\frac{S_V}{2\Sigma_1}\{E_2(\Sigma_2 t)-E_2(\Sigma_1 d+\Sigma_2 t)\} \qquad (7\text{-}2)$$

上式で t は遮蔽体内距離で

$$t=x-d$$

である。また Σ_2 は遮蔽体における吸収断面積 (cm^{-1})

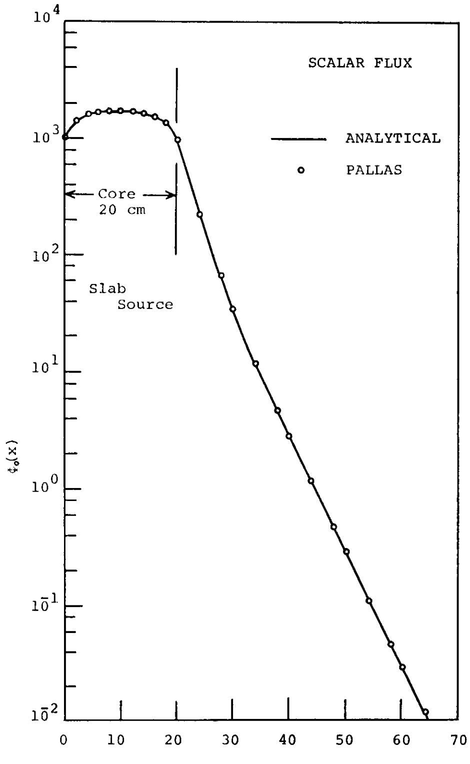

Fig. 7.1 Comparison between PALLAS- and analytical calculated attenuation of unscattered flux from slab source of 20 cm thickness

Table 2 Comparison between PALLAS-calculated and analytical unscattered angular fluxes in plane geometry

ω \ Thickness	3 mfp	6 mfp	9 mfp	12 mfp	18 mfp	30 mfp
ω=0.9894 Analytical	4.831×10^{-2}	2.325×10^{-3}	1.121×10^{-4}	5.402×10^{-6}	1.256×10^{-8}	6.784×10^{-14}
PALLAS	4.823	2.325	1.121	5.404	1.256	6.736
0.9446 Analytical	4.175×10^{-2}	1.743×10^{-3}	7.279×10^{-5}	3.039×10^{-6}	5.298×10^{-9}	1.610×10^{-14}
PALLAS	4.175	1.743	7.281	3.039	5.297	1.610
0.8656 Analytical	3.124×10^{-2}	9.765×10^{-4}	3.052×10^{-5}	9.534×10^{-7}	9.317×10^{-10}	8.885×10^{-16}
PALLAS	3.124	9.765	3.051	9.536	9.314	8.884
0.7554 Analytical	1.886×10^{-2}	3.551×10^{-4}	6.695×10^{-6}	1.261×10^{-7}	4.484×10^{-11}	5.655×10^{-18}
PALLAS	1.885	3.553	6.696	1.262	4.482	5.655
0.6179 Analytical	7.789×10^{-3}	6.062×10^{-5}	4.722×10^{-7}	3.677×10^{-9}	2.229×10^{-13}	8.199×10^{-22}
PALLAS	7.785	6.063	4.721	3.676	2.229	8.194
0.4580 Analytical	1.430×10^{-3}	2.045×10^{-6}	2.922×10^{-9}	4.122×10^{-12}	8.555×10^{-18}	3.572×10^{-29}
PALLAS	1.430	2.045	2.925	4.183	8.552	3.580
0.2816 Analytical	2.361×10^{-5}	5.578×10^{-10}	1.318×10^{-14}	3.112×10^{-19}	1.737×10^{-28}	
PALLAS	2.361	5.578	1.317	3.112	1.737	
0.0950 Analytical	1.929×10^{-14}	3.723×10^{-28}	7.182×10^{-42}			
PALLAS	1.936	3.748	7.255			

である。

PALLAS コードによる計算結果は解析解と比較の形で Fig. 7.1 に図示してある。この計算例におけるパラメタは $S_V=2.0\,\mathrm{n/cm^3}$, $\Sigma_1=0.1\,\mathrm{cm^{-1}}$, $\Sigma_2=0.2\,\mathrm{cm^{-1}}$, $d=20\,\mathrm{cm}$ である。計算結果はほとんど誤差なく解析解と一致した。

次いで平板線源に対する非散乱線の角度分布について PALLAS 計算の精度を調べるため上述の問題を角度分点 16 で計算した。解析解の計算を簡単に行なうため線源表面で中性子の角度分布は1とした。すなわち $\Phi(x,\omega)=1.0$ である。PALLAS 計算値は解析解との比較の形で Table 2 に示されている。Table 2 からわかるように計算値は解析解とほとんど誤差なく一致した。なお，最大誤差は $\omega=0.0950$ の角度分点で 9 mfp の距離点で 1% であるが，絶対値が 10^{-42} と小さいのでスカラー束に対する影響は全くない。

7.2 球体積線源

球体積線源の半径を R とし簡単のため再び線源強度を一定 $S_V=c$ とする。この場合の線源内のスカラー束の解析解[64]は次式で与えられる。

$$\Phi(r)=\frac{S_V}{\Sigma_1}\left[1-\frac{e^{-b_4}}{2}-\frac{e^{-b_5}}{2}-\frac{1}{4\Sigma_1 r}\{e^{-b_4}(1+b_4)-e^{-b_5}(1+b_5)\}+\frac{b_4 b_5}{4\Sigma_1 r}\{E_2(b_4)-E_2(b_5)\}\right] \quad \cdots\cdots(7\text{-}3)$$

上式で Σ_1 は線源内における全断面積 ($\mathrm{cm^{-1}}$) であり，また $b_4\equiv\Sigma_1(R-r)$, $b_5\equiv\Sigma_1(R+r)$ である。一方，遮蔽体内におけるスカラー束の解析解[65]は次式で与えられる。

$$\Phi(r)=\frac{S_V}{2\Sigma_1}S_2(t/R,\Sigma_2 t)(1-e^{-m_S\Sigma_1 R})\times\{E_2(\Sigma_2 t)-\cos\phi_0 E_2(\Sigma_2 t\sec\phi_0)\} \quad \cdots\cdots(7\text{-}4)$$

上式で $t=r-R$ であり，Σ_2 は遮蔽体内における吸収断面積 ($\mathrm{cm^{-1}}$) である。関数 $S_2(t/R,\Sigma_2 t)$ は文献 (65) の Fig. 4 に求められている。また m_S および ϕ_0 も

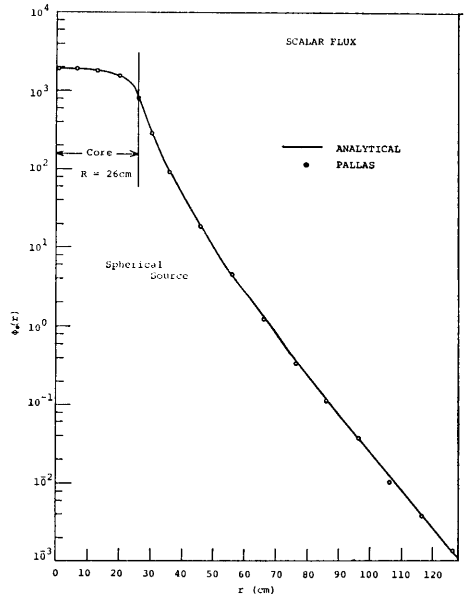

Fig. 7.2 Comparison between PALLAS- and analytical calculated attenuation of unscattered flux from spherical source

文献 (65) に定義され求められている。

PALLAS 計算結果と解析解との比較は Fig. 7.2 に図示してある。この場合のパラメタは線源の半径 $R=26\,\text{cm}$ であり，$S_V=200\,\text{n/cm}^3$, $\Sigma_1=\Sigma_2=0.0923\,\text{cm}^{-1}$ である。PALLAS 計算値は Fig. 7.2 で 105 cm の距離で解析解に対し 12% 程小さな値を示したが，他は良い一致を示している。球形状の場合，線源の半径が 26 cm 程度の大きさの時には非散乱線の角度分布は遮蔽体内で直ちに鋭い前方ピークにはならないので比較的精度の良い計算結果が得られる。これに対し線源の半径が小さい場合には，非散乱線は遮蔽体に入ると直ちに鋭い前方ピークの角度分布になるので，この種の計算を精度良く行なうのはむずかしい。そこで次に線源の半径が 5 cm と小さい場合の非散乱線の角度分布およびスカラー束を PALLAS コードで計算し解析解と比較した。この計算に使用した線源の強さは半径方向については一定の $S_V=4\pi\,\text{n/cm}^3$ とし，線源の吸収断面積を $0.1\,\text{cm}^{-1}$, 遮蔽体の吸収断面積を $0.2\,\text{cm}^{-1}$ とした。非散乱線の角度分布についての解析解は次の式から求まる。

$r=R$ (線源表面上)

$$\Phi(r=R,\omega)=\frac{S_V}{4\pi}\int_0^{2R\omega}e^{-\Sigma_1 t}dt$$

$$=\frac{S_V}{4\pi\Sigma_1}\{1-\exp(-2\Sigma_1 R\omega)\} \quad (7\text{-}5)$$

$r>R$

$$\Phi(r,\omega)=\frac{S_V}{4\pi\Sigma_1}e^{-\Sigma_2 l_2}\{1-\exp(-\Sigma_1 l_1)\} \quad (7\text{-}6)$$

(7.6) 式で

$$l_1=2R\sqrt{1-\left(1+\frac{t}{R}\right)^2(1-\omega^2)}$$

$$l_2=R\left\{\left(1+\frac{t}{R}\right)\omega-\sqrt{1-\left(1+\frac{t}{R}\right)^2(1-\omega^2)}\right\}$$

また t は $t=r-R$ から求められる。なお Σ_1 および Σ_2 はそれぞれ線源内および遮蔽体内における吸収断面積 (cm^{-1}) である。

Fig. 7.3 に距離が線源表面上 $r=R$ および線源半径の 3 倍 (15 cm), 7 倍 (35 cm) の距離における角度分布の PALLAS 計算値と解析解との比較を図示する。図の横軸は角度の余弦 ω を表わす。PALLAS 計算値は 2 通り図示されており，一つは角度分点をガウス求積法の 20 点の積分点に一致させた場合であり，他は

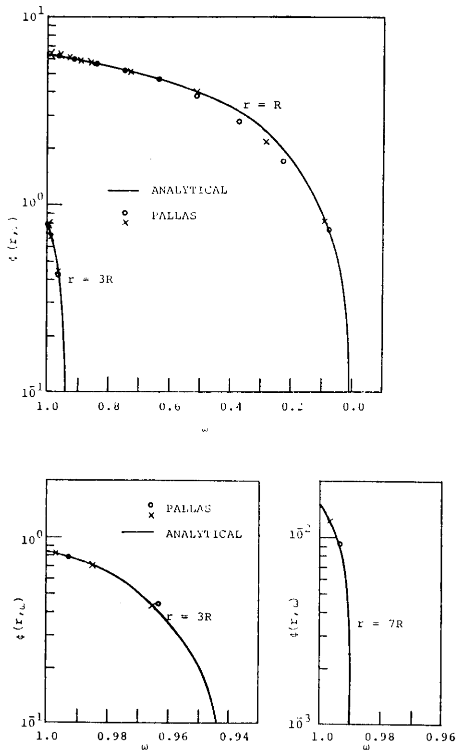

Fig. 7.3 Comparison between PALLAS- and analytical angular distributions of unscattered flux from spherical source of 5 cm radius

前方方向を密に 90 度方向を粗に選んだ角度分点で全分点数はやはり 20 の場合である。非散乱線の角度分布は $r=15\,\mathrm{cm}$ の距離で鋭い前方ピークを示すようになる。さらに離れると鋭い前方ピークはますます極端になり，距離が $r=7R$ (35 cm) の距離では計算における前方方向の第 1 角度分点のみが値を持ち他の角度分点では全て零となる角度分布を示す。Fig. 7.3 からわかるように PALLAS 計算値はいずれの場合でも解析解と極めて良い一致を示した。

最後にこの問題に対する非散乱線のスカラー束の減衰を Fig. 7.4 に示す。PALLAS 計算値は点線で解析解は実線で図示してある。同図における横軸は r 軸で，0 mfp は 5 cm 半径の線源表面の位置を示す。PALLAS 計算値は解析解に対し 7 mfp 以上では 10

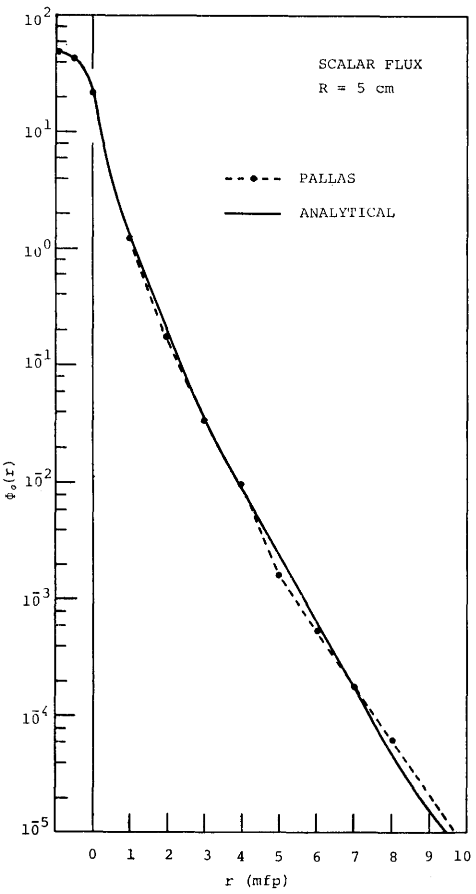

Fig. 7.4 Comparison between PALLAS- and analytical calculated attenuation of unscattered flux from spherical source of 5 cm radius

～20% 程度大きな値を示すが，5 桁以上の減衰に対するこの程度の差であれば良く一致しているといえる。

7.3 二次元円柱形状線源

ここでも簡単のために有限円柱線源内における線源の強さは一定 $S_V=c$ とする。まず円柱線源内における非散乱線の分布を計算し解析解と比較する。解析解は厳密には求まらない。したがって次に示す上限および下限の式[64]で代用する。すなわち，

上限；

$$\Phi=\frac{S_V}{4\Sigma_1}\{G(\Sigma_1 h_1;\, b_5)+G(\Sigma_1 h_2;\, b_5)+G(\Sigma_1 h_1;\, b_6)+G(\Sigma_1 h_2;\, b_6)\} \qquad (7\text{-}7)$$

下限；

$$\Phi=\frac{S_V}{4\Sigma_1}\{G(\Sigma_1 h_1;\, b_6)+G(\Sigma_1 h_2;\, b_6)+G(\Sigma_1 h_1;\, b_4)+G(\Sigma_1 h_2;\, b_4)\} \qquad (7\text{-}8)$$

ここで h は円柱の高さであり $h=h_1+h_2$ の関係がある。また

$b_4\equiv\Sigma_1(R_0-d)$，$b_5\equiv\Sigma_1(R_0+d)$，$b_6\equiv\Sigma_1\sqrt{R_0^2-d^2}$

であり，R_0 は円柱線源の半径で d は線源内の半径方向の位置を表わす。なお Σ_1 は線源の吸収断面積 (cm^{-1}) である。

PALLAS 計算における各パラメタの値は $R_0=12$ cm $h=24$ cm で $\Sigma_1=0.0923\,\mathrm{cm}^{-1}$ とした。Fig. 7.5 に幾つかの場合の PALLAS 計算値と解析解の上限および下限との比較を示す。同図で横軸を z 軸にとった上から 3 つの場合は，円柱の中心を原点とし z 方向距離はこの原点から測った距離である。最上段の図は $r=9\,\mathrm{cm}$ および $r=12\,\mathrm{cm}$ (円柱線源の表面) における非散乱線の z 方向の分布であり，線源表面位置では解析解の下限は (7.8) 式で零となり求められない。一方，最下段の図は円柱の上部表面上で r 軸に沿っての非散乱線の分布を示す。Fig. 7.5 からわかるように，いずれの場合にも計算値は解析解の上限と下限の間にその値をもっているので，円柱線源内では PALLAS 計算は正確に非散乱線を計算しているといえる。

次ぎに遮蔽体内における非散乱線の減衰を計算し解析解と比較する。解析解は文献 (65) の近似解を使用して求めた。すなわち，

$$\Phi_0(r)=\frac{S_V\phi_0}{2\pi\Sigma_1}L_2(t/R_0,\Sigma_2 t)\times\{G(\theta_0,\Sigma_2 t)-G(\theta_0,\Sigma_2 t+m_c\Sigma_1 R_0)\} \qquad \cdots\cdots(7\text{-}9)$$

上式で R_0 は円柱線源の半径，$t=r-R_0$，Σ_1 および Σ_2

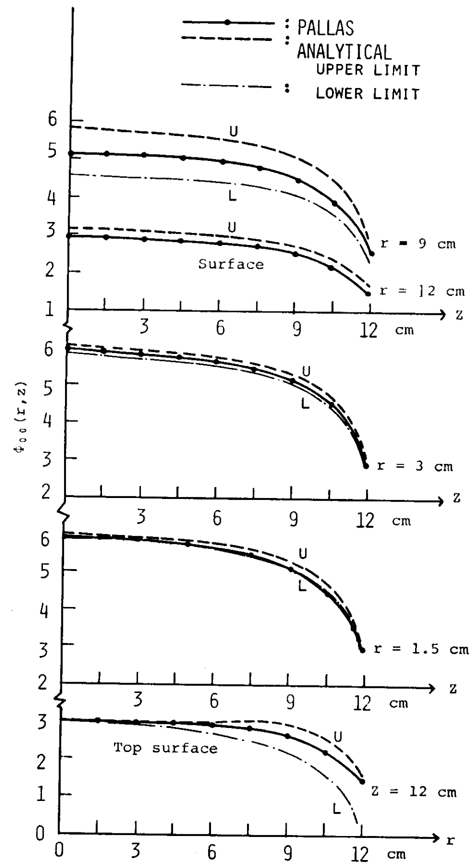

Fig. 7.5 Comparison between PALLAS- and analytical calculated unscattered flux within cylindrical source of 12 cm radius × 24 cm length

は線源内および遮蔽体内における吸収断面積 (cm^{-1}) である。また $\Phi_0=\sin^{-1}\left(\frac{R_0}{r}\right)$, $m_c=\left\{\left(\frac{t}{R_0}\right)^2+\frac{\pi}{\Phi_0}\right\}^{1/2}-\left(\frac{t}{R_0}\right)$ である。$L_2(t/R_0, \Sigma_2 t)$ 関数は文献 (65) の Fig. 6 に与えられている。また $G(\theta_0, \Sigma_2 t)$ 関数は文献 (66) の Fig. 4 に求められている。

Fig. 7.6 の計算例で，まず上図の場合は 20 cm 半径×36 cm 高さの円柱線源で，線源内および遮蔽体内における吸収断面積はともに 0.0923 cm^{-1} である。図示されている計算結果は円柱線源の中心および円柱線源の上部表面における r 方向計算例である。PALLAS 計算値は解析解の近似解に対し，図示されている範囲では ±10% 程度の差で良く一致している。

一方 Fig. 7.6 の下図の場合は 20 cm 半径 × 52 cm 高さの円柱線源で線源内および遮蔽体内における吸収断面積は上図と同じ 0.0923 cm^{-1} である。図示されて

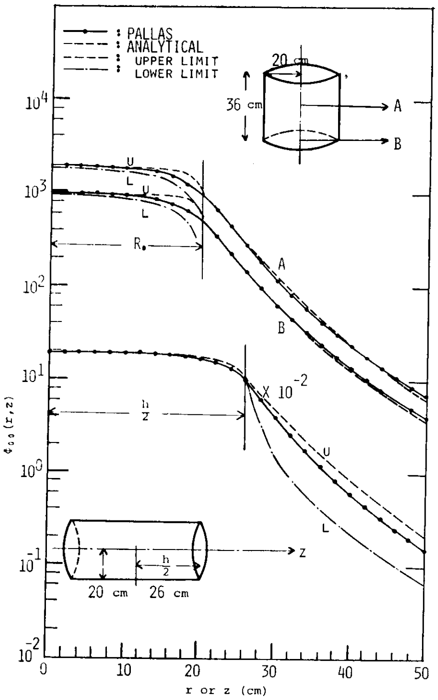

Fig. 7.6 Comparison between PALLAS- and analytical calculated attenuations of unscattered flux from cylindrical sources

いる計算結果は z 方向に対する減衰計算例である。なお線源内での z 軸上の解析解は (7-7) 式で求められる。また z 軸の線源外における解析解は厳密には求まらないので，再び上限および下限を求める近似式[64]を使用する。すなわち，

上限

$$\Phi_0(z)=\frac{S_V}{2\Sigma_1}\left[E_2(b_1)-E_2(b_3)+\frac{E_2(b_3\sec\theta_1)}{\sec\theta_1}-\frac{E_2(b_1\sec\theta_1)}{\sec\theta_1}\right] \qquad \cdots\cdots(7\text{-}10)$$

下限

$$\Phi_0(z)=\frac{S_V}{2\Sigma_1}\left[E_2(b_1)-E_2(b_3)+\frac{E_2(b_3\sec\theta_2)}{\sec\theta_2}-\frac{E_2(b_1\sec\theta_2)}{\sec\theta_2}\right] \qquad \cdots\cdots(7\text{-}11)$$

上式で Σ_1 は円柱線源内における吸収断面積 (cm^{-1}) であり，S_V は線源強度，b_1 および b_3 はそれぞれ

$$b_1=\Sigma_2(z-h/2),$$

$$b_3=b_1+\Sigma_1 h$$

である。なお Σ_2 は遮蔽体における吸収断面積 (cm^{-1}) である。また θ_1 および θ_2 はそれぞれ

$$\theta_1=\tan^{-1}\left(\frac{R_0}{z-\frac{h}{2}}\right),$$

$$\theta_2=\tan^{-1}\left(\frac{R_0}{z+\frac{h}{2}}\right)$$

である。さらに $E_2(x)$ は E_2 関数である。

PALLAS 計算では $r=0$ の z 軸上の値は求められないので，$r=0$ に最も近い r-メッシュ (1.0 cm) 上の計算値を z 軸上の値として使用した。Fig. 7.6 の下図からわかるよう計算値は円柱線源内で解析解と良い一致を示し，また遮蔽体中では解析解の近似式である上限と下限の間に値があるので正確に計算されているといえよう。

以上の非散乱線の計算と解析解との比較の結果，本計算法は一次元平板および球形状，さらに二次元円柱形状の諸形状線源に対し，非散乱線の計算を線源内および遮蔽体内の両面において正確に行なうことが確かめられた。

第8章　実験および他の計算方法による結果と本解法にもとづく計算結果との比較

本解法にもとづく計算の精度を調べるために，物質透過の中性子の実験結果および他の計算方法による計算結果との比較を試みる。比較計算問題として望ましいのは，透過中性子のエネルギスペクトルおよび角度分布が絶対値で求められていることである。しかし，実験によりこれらの量を絶対値で測定することは極わめて困難なことであり，大部分測定値が相対値で求められている。以下に採用した比較問題の BSR-1 原子炉および FNR 原子炉における水中透過中性子角度スペクトル，また線型加速器使用による飛行時間測定法で測定したグラファイト透過中性子の角度スペクトルは，ともに絶対値で測定値を求めた数少ない例である。

まず第一に BSR-1 および FNR 炉における水中透過中性子問題に対する比較計算を試みた。BSR-1 炉はオークリッジ研究所に設置されているスイミングプール型原子炉であり[67]，また FNR[68]炉はミシガン大学に設置されているスイミングプール型原子炉で BSR-1 炉と同型である。したがって計算は文献 (67) における BSR-1 の線源条件で行ない，比較は出力 1 W に計算結果も測定値も規化して行なった。

比較計算は一次元球対称形状および二次元円柱形状の両形状で行なった。一次元球形状における中性子線源の大きさおよび強度は文献 (67) において NIOBE および Sn 計算コードの DTK の計算に使用したのと全く同じにした。すなわち，線源の半径を 26 cm とし，半径方向の線源の強さは文献 (67) の場合に一致させて出力を 1 W に規格した (Fig. 8.1)。また線源の

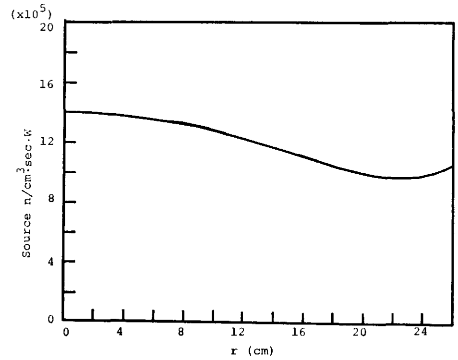

Fig. 8.1 Neutron source density[67] for spherical reactor configuration used in the PALLAS calculation

エネルギスペクトルは核分裂スペクトルとし次式[69]に示すワットの公式から求めた。すなわち

$$N(E)=\sqrt{2/\pi e}\cdot\sinh\sqrt{2E}\cdot e^{-E}\ \cdots\cdots(8\text{-}1)$$

であり，上式で E は中性子のエネルギ (MeV) である。

線源内の各元素の原子密度は文献 (67) の BSR-1 の炉心 (FNR の炉心も同じ構成) の場合と同様に，水，アルミニウム，ウランがそれぞれ 0.0323, 0.0415, 0.00017 モル/cm^3 とした。

一方，二次元円柱形状における線源の大きさは，$r\times z$ が 20.4 cm×52.0 cm の円柱形とし，また線源の強さは r 方向については一定の値の 1.0 と置く。これに対し，z 方向は炉心の中心点で z 軸に垂直な面に対し対称と仮定して計算を行なうので，52 cm の半分の 26 cm について球形状炉心の半径方向の線源の強さと一致させる。これで全線源体積につき 1 W の出力に規格化できる。なお線源内の各元素の原子密度は球炉心の場合と同じである。

一次元球形状に対する水層は 26 cm の炉心半径の外側に 74 cm 厚の水層を設けた。計算は角度分点数が 16，レサジ間隔が 0.1，r 方向メッシュ間隔が 2 cm で行なった。一方，二次元円柱形状における計算は，炉心の外側に r 方向につき 20.4 cm 厚，また z 方向

については64 cm 厚の水層を設けて，角度分点数が半球面上で 24 分点，レサジ間隔が 0.2，また空間メッシュ間隔が 2 cm で行なった。

両計算による水中透過中性子の角度スペクトルは測定値との比較の形で Figs. 8.2, 8.3, 8.4 に示してある。Fig. 8.2 に図示してある角度スペクトルは0度方向の中性子スペクトルで，測定値[68]は FNR 炉における実験結果である。図中で 0 cm と記してあるのは炉心表面の位置を示す。したがって他の距離は炉心表面から測った時の値である。なお円柱形状の計算値は全て z 軸上の距離に対する値である。Fig. 8.2 で両計算値とも測定値と良い一致を示している。しかし 8 MeV および 5.5 MeV 近傍で一次元球形状における計算値は測定値に対し大きな値を示している。これは酸素の全断面積が 8.1 MeV および 5.43 MeV で鋭い谷を有しており，計算におけるエネルギメッシュ点がこの谷のエネルギ点に一致したためと思われる。二次元計算で上述のエネルギに対し 60 cm の距離で顕著な山を示さないのは，Fig. 8.7 を参照すればわかるように 5.43MeV の 60 cm の距離で中性子角度分布は鋭い前方ピークを示す。この角度分布に対し一次元球形状の 0 度方向の値としては $\omega=0.989$ に対する値を採用した。一方，二次元形状では $\omega=0.950$ に対する値を採用したので一次元形状の値より低い値になったわけである。なお BSR-1 炉における 0 度方向の測定中性子角度スペクトル[67]は，3.5 MeV 近傍の大きな谷および 5~6 MeV の広い山が明らかに 0.5 MeV 程度高いエネルギの方へずれているので，本計算結果との比較には使用しなかった。

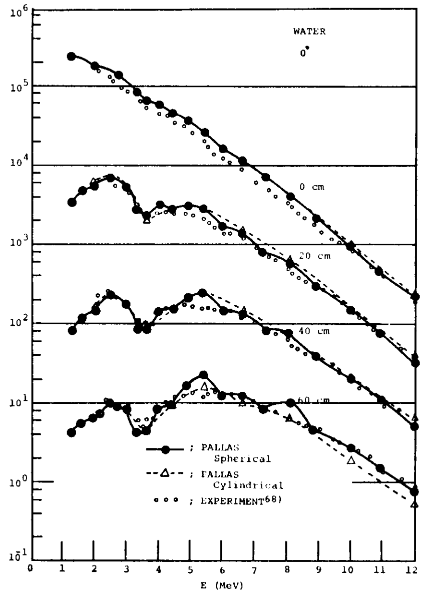

Fig. 8.2 Comparison between PALLAS-calculated and experimental neutron angular spectra in FNR[68] water shield at 0°

次ぎに 40 度方向に対する角度スペクトルの計算結果と BSR-1 における測定値[67]との比較を Fig. 8.3 に示す。20 cm の距離で高エネルギ領域では測定値は計算値より 2 倍程度大きな値を示している。また，一次元および二次元形状における計算スペクトルはあまり顕著ではないが幾分二次元円柱形状における計算値の方が一次元球形状における計算値より大きい値を示している。

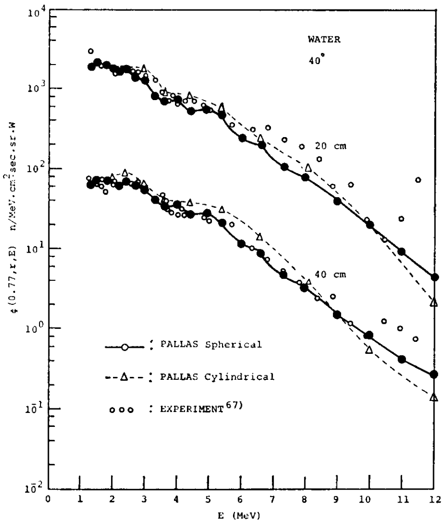

Fig. 8.3 Comparison between PALLAS-calculated and experimental[67] neutron angular spectra in the BSR-1 water shield at 40°

また，52 度方向に対する角度スペクトルの計算結果と BSR-1 における測定値[67]との比較を Fig. 8.4 に示す。20 cm の距離で測定値は計算値よりも全エネルギ領域にわたって 30% から最大で 4 倍程度の大きな値を示す。一方 40 cm の距離では 6 MeV 以下で，両計算値とも測定値と極めて良い一致を示すが，高エネルギ領域では測定値が最大で 3 倍程度の大きな値を示している。測定値が 40 度および 52 度方向で計算値よりも大きな値を示す傾向は，文献 (67) におけ

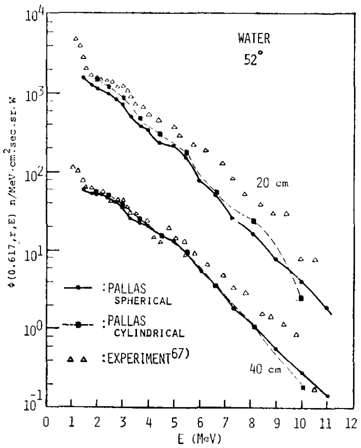

Fig. 8.4 Comparison of PALLLS-calculated with experimental[67] neutron angular spectra in the BSR-1 water shield at 52°

る NIOBE および DTK による計算値に対する測定値も全く同じ傾向を示している。文献 (67) ではこの差の原因は実際の炉心の幾何学形状が直方体であり，そのために直方体の角からの非散乱線および小角度散乱線の寄与により測定は計算値より大きな値を示すと推論している。しかしそのことだけが原因の全てであるかどうかは明らかでない。

次ぎに Fig. 8.5 に水中透過中性子のエネルギスペクトルを示す。これは計算値のみであり，計算は NIOBE[67] および一次元球形状の PALLAS による。エネルギスペクトルは全体的に各透過距離で極わめて良い一致を示している。細かい点での両計算値の差の原因は計算に使用した酸素の全断面積にあるのかどうかは明かではない。なお PALLAS 計算に使用した断面積は ENDF/B の断面積であり，酸素の断面積は Slaggie, Reynolds[70] のデータである。一方，NIOBE 計算に使用された酸素の断面積は BNL-325[71] の 1958 年度版である。この版の酸素の全断面積は Fossan 等の測定値[72]より 5～7.5 MeV 領域で，より大きな値を示しているとの指摘が文献 (67) にある。

Fig. 8.6 に 0 度方向の水中における中性子スペクトルを PALLAS, NIOBE[67], DTK[67] の 3 つの計算コードで計算した結果の比較を示す。DTK 計算値[67]は Fossan 等の測定による酸素の全断面積を使用した時の値である。全体的に 3 つの計算結果は良い一致を示している。

Figs. 8.7 および 8.8 に，一次元球形状および二次

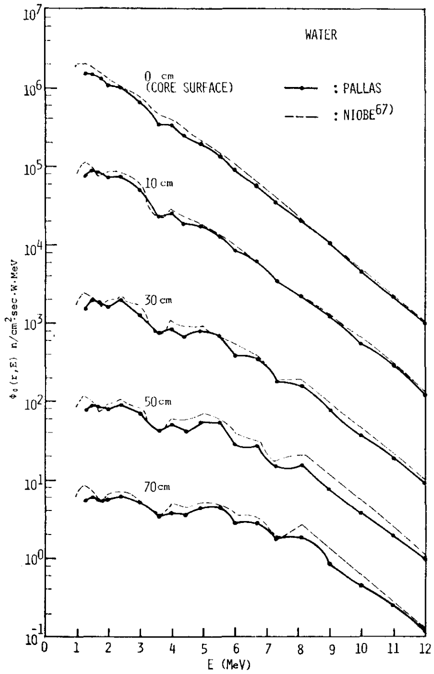

Fig. 8.5 Comparison of PALLAS- and NIOBE-[67] calculated neutron energy spectra in water

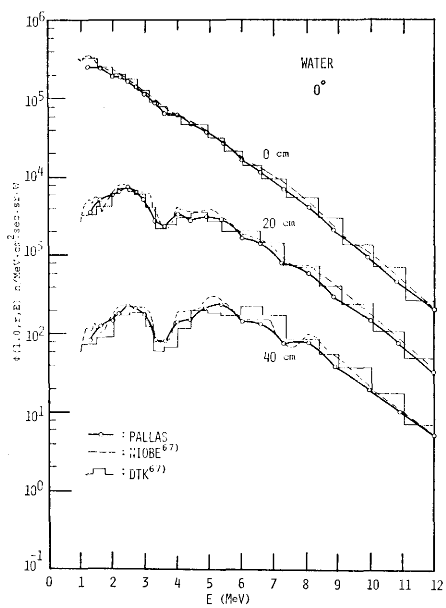

Fig. 8.6 Comparison of PALLAS-calculated with NIOBE-[67] and DTK-[67] calculated neutron spectra in water at 0°

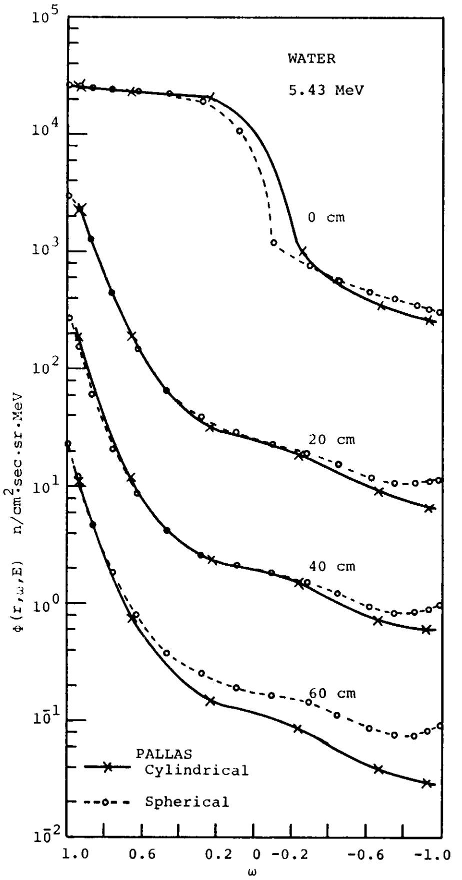

Fig. 8.7 Neutron angular distributions in water at 5.43 MeV

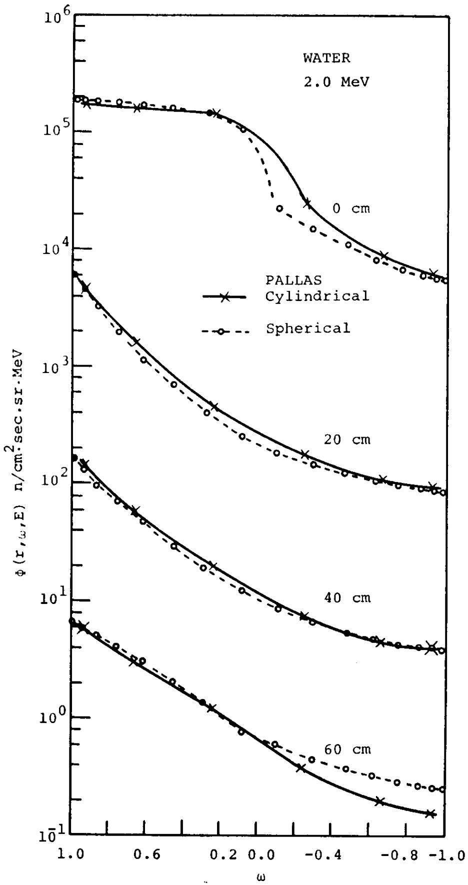

Fig. 8.8 Neutron angular distributions in water at 2.0 MeV

元円柱形状における PALLAS 計算による水中の中性子角度分布をエネルギが 5.43 MeV および 2.0 MeV に対して示す。二次元円柱形状の場合，角度分点が極角の余弦 ω について 6 点と少ないのにもかかわらず一次元球形状における角度分布に極わめて良く一致している。ただし，60 cm の距離で角度が 90 度より大きい場合（ω が負の領域）には二次元形状における計算値が一次元球形状における値より小さく出ている。この原因は二次元形状における水層の厚さが 64 cm であるため，60 cm の距離での角度分布に外側境界の影響が現われて小さい値になったためである。

以上の比較検討の結果，線源の大きさが半径 26 cm 程度に大きな実際の原子炉の場合，線源さえ正確に評価すれば本計算法は遮蔽体透過中性子の角度分布およびエネルギスペクトルを絶対値で正確に計算することが確認された。

第二の比較計算問題としてグラファイト中の中性子の角度スペクトルを飛行時間法で測定し，中性子透過計算に対する比較のための標準となることを目的として行なわれた実験結果[73]があるのでこの問題を選んだ。なおこの問題は米国における放射線遮蔽標準小委員会（ANS-6）のうちの ANS-6.2 ベンチマーク問題で設定した 4 つのベンチマーク問題のうちの第 1 の問題である。

実際は 7.62 cm 直径の球形の減損ウランに 28 MeV の電子線を線型加速器で発生させてウランの中心に入射させ光中性子を発生させる。減損ウランの周囲は水の層がありウランを冷却している。グラファイトの層は 4.45 cm の内径で外側の形状は 132 cm 幅 × 152 cm 長さ × 152 cm 高さの直方体である。またグラファイトの原子密度は 0.0833×10^{24} 個/cm^3 である。

PALLAS 計算は一次元球形状で，半径 4.45 cm の

位置で各エネルギメッシュごとに線源から放射される中性子のエネルギスペクトルおよび角度分布を境界条件として与えて計算した。計算におけるグラファイトの外層は半径 80 cm の球形状とし，原子密度は実験に用いられたグラファイトと同様に 0.0833×10^{24} 個/cm^3 とした。減損ウラン球より放射される中性子エネルギスペクトルは文献（73）の表1に与えられている値を

Table 3 Normalized target leakage spectrum[73)]

Energy	$N(E)$	Energy	$N(E)$
10.93 MeV	9.00×10^{-10}	2.44 MeV	8.70×10^{-8}
9.89	1.65×10^{-9}	2.21	1.05×10^{-7}
8.95	2.90	1.99	1.22
8.10	4.70	1.81	1.47
7.32	7.00	1.63	1.75
6.62	1.00×10^{-8}	1.48	2.05
6.00	1.45	1.34	2.40
5.43	1.80	1.21	2.85
4.91	2.30	1.10	3.45
4.44	2.80	0.99	4.10
4.02	3.50	0.897	5.05
3.64	4.30	0.812	6.30
3.29	5.00	0.734	6.30
2.98	6.10	0.665	7.00
2.69	7.50	0.601	7.80

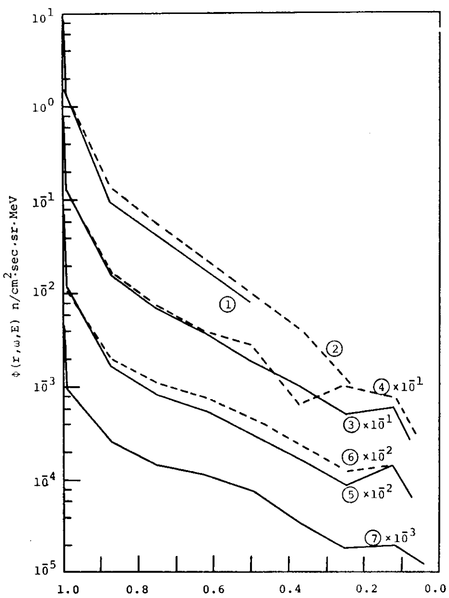

Fig. 8.9 Leakage neutron angular distributions from sphere of depleted U-238[73)]

PALLAS計算の各エネルギ点で内挿して求めた。この放射中性子スペクトルは 0.22～15 MeV で放射中性子が1個であると規格化されている。また放射中性子の角度分布は同文献の表 2 に 0 度から 90 度までの角度に対し累積確率の形で与えられている。この表 2 の値を PALLAS 計算用に $\omega=1.0\sim0$ に対し単位立体角あたりの値に変換した。これらの PALLAS 計算に使用したグラファイト層入射中性子エネルギスペクトルおよび角度分布は Table 3 および Fig. 8.9 に示してある。なお Fig. 8.9 における丸印の中の数字については Table 4 にエネルギ範囲を示しておく[73)]。なお PALLAS 計算はレサジ間隔が 0.1, r 方向メッシュ間隔が 1 cm, 角度分点数が 20 で行なった。

Table 4 Energy range shown in Fig. 8.9[73)]

In Fig. 8.9	Energy range (MeV)
①	10.0 — 6.70
②	6.70 — 4.49
③	4.49 — 3.01
④	3.01 — 2.02
⑤	2.02 — 1.35
⑥	1.35 — 0.821
⑦	0.821 — 0.498

Figs. 8.10, 8.11 に $r=20.3$ および 35.6 cm における角度スペクトルの計算と実験との比較を示す。$r=20.3$ cm における 0 度方向および 30 度方向の計算スペクトルは測定スペクトルに極わめて良い一致を示している。ただし，30 度方向のスペクトルで 0.7～2.0 MeV 領域で計算値は測定値より最大で 10% 低く出ている。一方 $r=35.6$ cm の距離では計算による角度スペクトルは全体的にみると測定による角度スペクトルに良い一致を示している。しかし 0 度方向の角度スペクトルの場合に 0.8～2.0 MeV で計算値の方が測定値より大きい値を示している。また 16.6 度および 60 度の角度スペクトルについても計算値の方が 1 MeV 以上で測定値よりも大きな値を示しており，最大で測定値よりも 60% 大きい。なお実験における測定角度の精度は文献（73）によると，20.3 cm の距離で 0 度 ±10.4 度および 30 度±10 度であり，一方 35.6 cm の距離では 0 度±5.9 度，16.6 度±6 度，58.9 度+12 度（−9 度）である。これに対し PALLAS 計算の方は 0 度方向については 6.7 度（$\omega=0.993$）の値であり，その他の図示されている角度については内挿によりその角度に対する値を求めた。

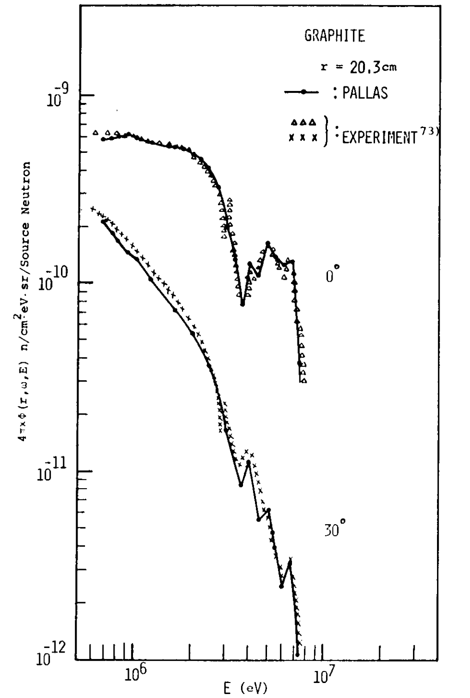

Fig. 8.10 Comparison of PALLAS-calculated with experimental[73] neutron angular spectra at 20.3 cm in graphite

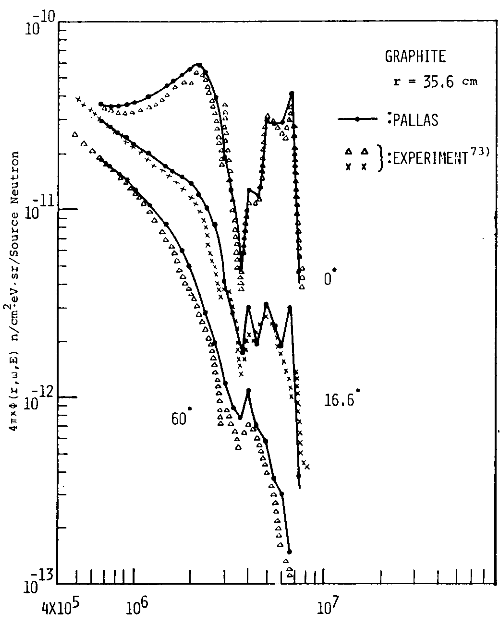

Fig. 8.11 Comparison of PALLAS-calculated with experimental[73] neutron angular spectra at 35.6 cm in graphite

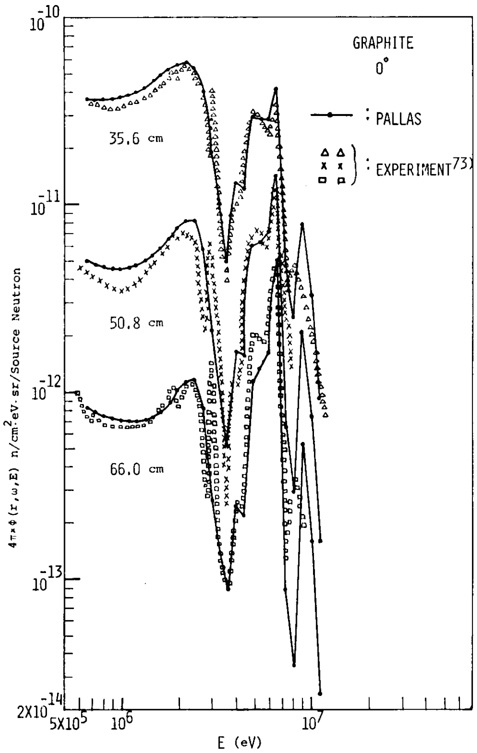

Fig. 8.12 Comparison of PALLAS-calculated with experimental[76] 0° neutron spectra at 35.6, 50.8, and 66.0 cm

次ぎに Fig. 8.12 に 0 度方向の進行方向を持つ中性子の減衰の精度を調べるため，35.6 cm, 50.8 cm, 66.0 cm の各距離における PALLAS 計算値と測定値との比較を示す。全体のスペクトルは極わめて良い一致を示しているが，詳細な点になるとあるエネルギでは両者の間に多少の差がある。高エネルギ領域の 0 度方向の角度スペクトルは媒質の全断面積に強く依存するはずであるから，Fig. 8.13 にグラファイトの全断面積 σ_t (バーン単位) を下部に図示し，上部に 35.6 cm の距離における 0 度方向角度スペクトルの PALLAS 計算値および測定値を図示した。図示したグラファイトの全断面積中の黒点のプロットは PALLAS 計算に使用したエネルギ点における断面積である。図示した 0 度方向中性子スペクトルにおける 7.5 MeV 以上で，測定値は計算値と異なったスペクトルを示し 8 MeV 付近で山を示しているが，下部に図示した断面積から 8 MeV 付近では逆に谷を示すべきである。これは測定スペクトルのエネルギに対する位置が 0.5～1.0 MeV 程度このエネルギ領域では低い方へずれたものと思わ

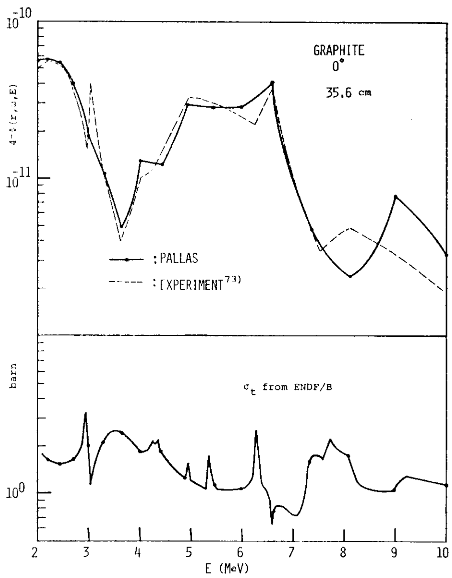

Fig. 8.13 Relation between 0° neutron spectrum and total cross section in graphite

れる。この 8 MeV における測定スペクトルのずれは Fig. 8.12 における 66.0 cm での測定スペクトルでも現われている。一方 3 MeV 前後に現われる測定スペクトルの鋭い山と谷は PALLAS 計算では現われなかった。この理由は PALLAS 計算では計算におけるエネルギメッシュ点がちょうどその中間の 3 MeV 点での断面積を選んだためである。なおこの 3 MeV 前後の鋭い山と谷の位置は Fig. 8.12 からわかるように測定スペクトルでは深い透過になるのに従って低エネルギの方へずれる傾向にある。

本計算に使用したグラファイトの断面積は ENDF/B の断面積であり，これは Slaggie, Reynolds[74] のデータである。そして PALLAS 計算による 0 度方向中性子スペクトルが測定した中性子スペクトルと良い一致を示したことから，ENDF/B に収められているグラファイトの断面積は少なくともここに図示したエネルギ範囲については精度が良いように思われる。ただし，文献 (73) におけるモンテカルロコード 05R による計算結果では 3.5 MeV 近傍のするどい谷は現われていない。Profio はこの差の原因を ENDF/B のグラファイトの全断面積に帰している。一方 PALLAS 計算値は 3.5 MeV 近傍でするどい谷を示し測定値と良く一致している。さらに文献(73)によると 3.5 MeV 近傍のエネルギ範囲で Yergin 等[75]のグラファイトの全断面積の測定値は，ENDF/B における値よりも大きな値を持つことが報告されている。文献(75)の Yergin 等の測定値は確かに ENDF/B の値より 3.5 MeV 近傍でのみ数パーセントの大きな値を示している。したがってこの数パーセントの大きい断面積で 3.5 MeV 近傍の 0° スペクトルを計算すれば 20.3 cm で 18%，35.6 cm の距離で 32%，50.8 cm で 43%，66.0 cm の位置で 53% 程度図示されている PALLAS 計算値より低い値になることが予想される。

最後に 20.3 cm および 35.6 cm の距離での中性子エネルギスペクトルの計算値を Fig. 8.14 に示す。なお中性子エネルギスペクトルの測定値はないので，モンテカルロコード 05R およびモーメント法による計算値[73]と比較した。モーメント法の計算値は点線源であり，文献 (73) ではこのグラファイト問題に適用できるように計算値を換算している。Fig. 8.14 で PALLAS 計算のスペクトルは 20.3 cm の距離で 4 MeV～7 MeV のエネルギ領域で他の計算によるスペ

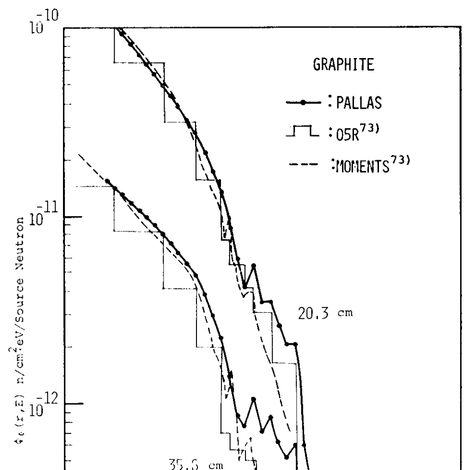

Fig. 8.14 Comparison of PALLAS-calculated with 05R-calculated[73] spectra and measured spectra[73] in graphite

クトルより大きな値を示している。この原因は0度方向および 30 度方向の測定によるスペクトルと PALLAS 計算による同方向のスペクトルは良く一致しているにもかかわらず，モンテカルロ計算による0度および 30 度方向の角度スペクトルは測定結果よりこのエネルギ領域では低い値を示すことにある。さらに 35.6 cm の距離における PALLAS 計算のスペクトルは 3 MeV～7 MeV のエネルギ領域で他の計算によるスペクトルより大きな値を示している。この原因は PALLAS 計算による 16.6 度および 60 度方向の角度スペクトルが Fig. 8.11 からわかるように測定によるスペクトルより大きな値を示すことにある。

一方モンテカルロ計算による0度方向以外の角度の角度スペクトルは，4 MeV 以上では測定による角度スペクトルより低い値を示す。したがって PALLAS 計算値とモンテカルロ計算値との差は 4 MeV 以上では一層大きくなる。現在のところ PALLAS 計算値が 0 度方向以外の角度方向で測定値より大きな値を持つ理由はわからない。

以上の比較計算で，米国の遮蔽標準小委員会で設定した物質透過中性子問題では唯一のベンチマーク問題であるグラファイト透過中性子問題を極わめて良い精度で計算したことから，本解法は小さな線源に対する深い透過問題を正確に計算することが確かめられた。

第3の比較計算問題は測定値が絶対値で得られていないが，相対値でポリエチレン透過中性子の角度スペクトルが測定されている[76]のでこの問題を本計算法で計算し実験との比較を試みた。実験はイギリスのハウエルで行なわれ，45 MeV の電子をウラン球に入射させ光中性子を発生させ，これを飛行時間法で測定した。実験の形状は 3 cm 半径のウラン球を線源として使い，その周囲を 2.08 cm 厚の空気の層があり，さらにその外側に 5.08 cm 厚のポリエチレンの層を設けた。線源のエネルギスペクトルは周囲の物質層を除いて漏れ出る中性子のエネルギスペクトル[77]を測定した (Fig. 8.15)。この実験で使用されたポリエチレンの比重は 0.92 g/cm^3 である。

一方，PALLAS 計算は形状を実験の形状に一致させて，またポリエレンの比重も実験の場合と同様に 0.92 g/cm^3 とした。ただし，線源はこの問題に対する実験と NIOBE 計算との比較の形で報告されている文献 (76) で，NIOBE 計算に使用されたのと全く同様に 3 cm 半径のウラン球の中に一様に線源が分布すると仮定した。また線源のエネルギスペクトルは上述の

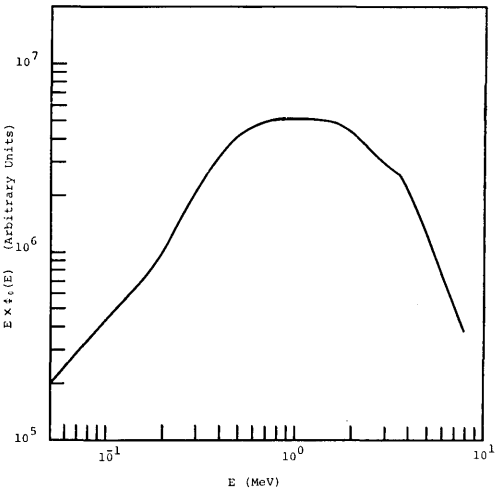

Fig. 8.15 Leakage neutron spectrum from a thin uranium disc source[77]

ウラン球から漏れ出る中性子のスペクトル (Fig. 8.15) と一致させ，さらに線源の角度分布は等方と仮定した。本計算に使用した各パラメタの値はレサジ間隔が 0.1，角度分点数が 16，半径方向メッシュ間隔が約 1 cm である。またグラファイトと水素の断面積は ENDF/B の断面積を使用し，ウラン 238 の断面積は UNC データ[78]を使用した。

計算結果と実験結果の比較は Fig. 8.16 に示してある。図示されている角度スペクトルは 5.08 cm 厚のポリエチレン層を透過した中性子の角度スペクトルで，計算値と測定値は 0 度方向スペクトルの 1.2×10^5 eV の1点で規格化してある。なお，たて軸はレサジ単位の中性子角度束であり，単位は絶対値ではなく任意の単位である。また計算における 0 度方向は $\cos\theta$ が 0.9894，0.9446，0.8656 の時の値から $\cos\theta=1.0$ に対する値を3点外挿によって求めてある。以上述べた規格化の方法および3点外挿等は文献 (76) における NIOBE の計算結果の処理の仕方と同じ方法である。

Fig. 8.16 からわかるように 45 度方向の計算値は高エネルギ領域で測定値より大きな値を示している。最大の差は 2 MeV のエネルギで，計算値は測定より約 1.4 倍大きい値を示している。この差の原因は計算における線源の設定の方法にある。すなわち，実験における中性子の発生領域は 238 ウランの球の中心からおよそ半径が 0.85 cm 程度である。これに対し計算では 3 cm 半径の球全体で一様の強さの線源を持つと仮定した点にある。その上，線源のエネルギスペクトルを

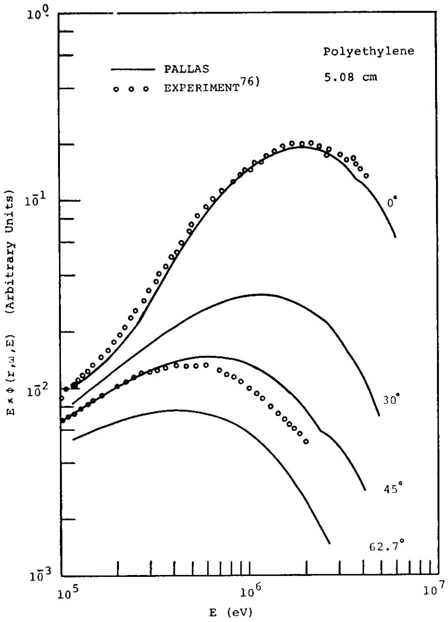

Fig. 8.16 Comparison between PALLAS-calculated and experimental angluar spectra[76)] of neutron penetrated through 5.08 cm-thick polyethylene

ウランの 238 球から外へ漏れ出る中性子のスペクトルに一致させ，等方角度分布線源として計算したために，計算における 3 cm 半径のウラン 238 から漏れ出る中性子のエネルギスペクトルおよび角度分布が，実験における漏れ出る中性子のエネルギスペクトルおよび角度分布と異なってしまった点にある。このことは文献 (76) における NIOBE 計算による 45 度方向角度スペクトルが測定による 45 度スペクトルに一致しないことの原因でもある。

以上のことから計算と実験とを詳細なスペクトルの形で比較を試みる場合には両者の幾何形状や特に線源の条件を一致させることが肝要である。

第 9 章　JRR-4 号炉における鉄—水多重層透過速中性子の計算

JRR-4 号炉は日本原子力研究所の第 4 号炉であり，スイミングプール型原子炉である。この炉の中に鉄層を 3 枚配置して原子炉の一次遮蔽体を模擬する (Fig. 9.1)。一方 PALLAS 計算の形状は球形状とし，その配置は Fig. 9.2 に示す。計算に使用した球形状炉心の大きさは半径が 24.78 cm であり，この値は 4 号炉の炉心体積である 62,985.6 cm^3 を球体積で置き換えて求

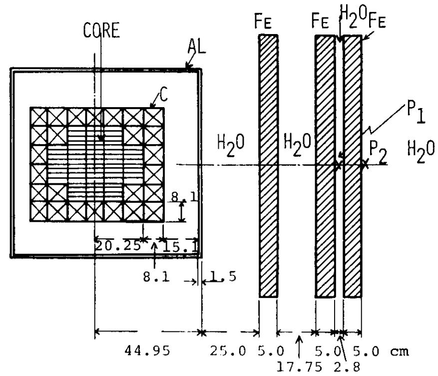

Fig. 9.1 Experimental geometry in the JRR-4 reactor

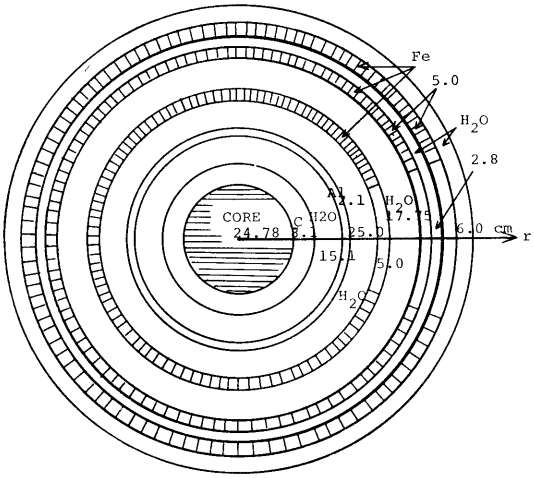

Fig. 9.2 Geometry used in PALLAS calculation

めた値である。計算における炉心内の線源の強度分布は一定強度分布を仮定し，球形状炉心全体で 1 W の出力を得ることができるように線源強度は $S_V=1.276\times10^6$ n/cm^3 に定めた。また線源の角度分布は等方分布であり，線源のエネルギスペクトルは核分裂スペクトルである。このスペクトルは第 8 章における BSR-1 炉の計算の際に使用したのと同じワットの公式[67)]から求めた。

さらに計算に使用した各物質中での原子の密度は，炉心では水素の原子密度が 0.04549×10^{24} n/cm^3，酸素の場合が 0.02293×10^{24} n/cm^3，アルミニウムの場合が 0.01878×10^{24} n/cm^3 であり，ウランの場合は値が桁違いに小さいので省略した。一方遮蔽体における各原子の密度は，水が水素の原子密度の 0.0669×10^{24} n/cm^3 および酸素の 0.03345×10^{24} n/cm^3 であり，アルミニ

ウムの場合が 0.0602×10²⁴ n/cm³，グラファイトの場が 0.08884×10²⁴ n/cm³，それに鉄の場合が 0.0847×10²⁴ n/cm³ である。なお計算に使用した断面積は，水素，酸素，アルミニウム，グラファイトについては ENDF/B の断面積である。また鉄の場合は非弾性散乱による減速核 $f^{in}(E', E)$ のデータを文献(79)から求め，それ以外の断面積はモンテカルロコードの 05R[17] の断面積を使用した。弾性散乱の非等方を扱うルジャンドル多項式展開次数は，酸素の場合が P_{11}，アルミニウムが P_{10}，グラファイトおよび鉄の場合が P_9 である。PALLAS 計算は 13.35 MeV～1.21 MeV を 0.1 レサジ間隔の 25 群で行ない，角度分点数は 16 である。

PALLAS 計算による速中性子エネルギスペクトルは Fig. 9.3 に示してある。図中 0 cm，CORE と記してあるのは炉心表面の位置を意味する。媒質が水のみにおける中性子のエネルギスペクトルは，Fig. 8.5 からわかるように 5 MeV 以下 1 MeV までは透過距離が深くなるのに従ってスペクトルの勾配が低くなって来る。一方鉄層が水の中に加わると鉄中における非弾性散乱減速中性子の影響で 1 MeV～3 MeV 付近でスペクトルは上って来ることが Fig. 9.3 からわかる。

Fig. 9.3 に示されているエネルギスペクトルには媒質の異なる境界での中性子の角度分布の激しい変化による影響が現われないが，次に示す Figs. 9.4～9.6 ではこの変化が明瞭に現われている。Figs. 9.4～9.6 にはエネルギが 8.95 MeV, 4.44 MeV, 1.34 MeV における遮蔽体中における中性子の角度分布を示す。横軸は角度の余弦 ω である。Fig. 9.4 から高いエネルギでは中性子の角度分布は鋭い前方ピークを示すことがわかる。また媒質の異なる境界では角度分布が激しく変化することもよく図示されている。図中の距離は炉心表面から測った距離である。また図中の ④, ⑦, ⑨, ⑫ は境界でない位置での角度分布であるが，いずれも，滑らかな角度分布を示している。これに対し，他の数字で表わされる角度分布は全て境界における角度分布であり，前方方向以外の角度で波型の角度分布を示している。興味深いのは水層の境界では ω が 0.4～0 の範囲で角度分布に盛り上りが見られ，逆に 0～−0.4 の ω の範囲で減衰が見られる（⑤, ⑧, ⑪）。これと対照的に，鉄層―水層の境界では角度分布は逆に ω が 0.4～0 の範囲で初め減衰を示し，0～−0.4 の範囲で盛り上がりを示すようになる（⑥, ⑩, ⑬）。

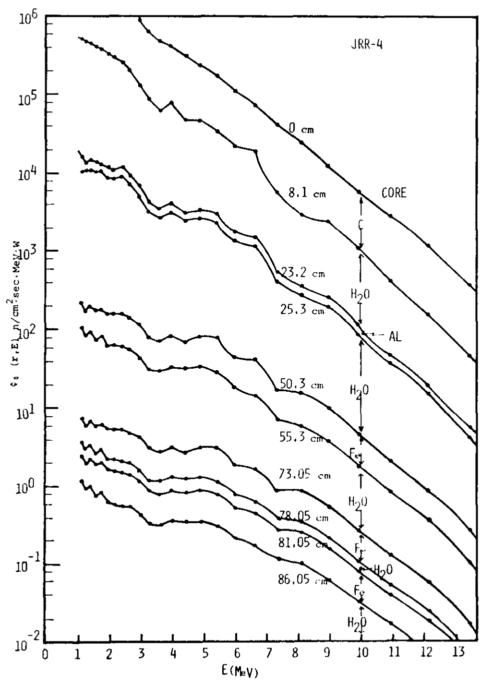

Fig. 9.3 PALLAS-calculated neutron energy spectra in stratified water-iron shields

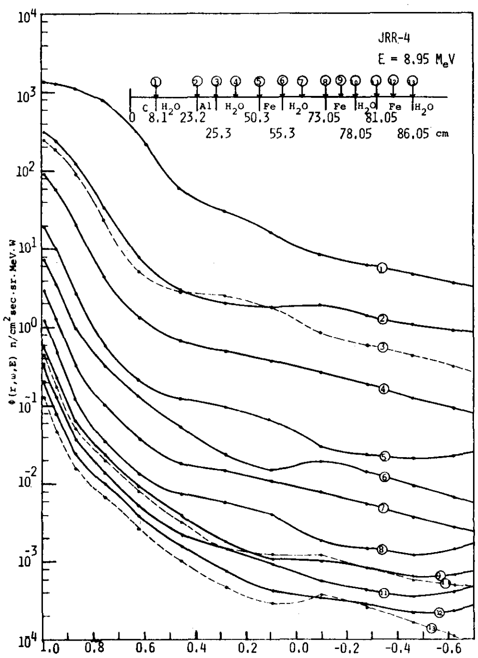

Fig. 9.4 PALLAS-calculated neutron angular distributions at 8.95 MeV in stratified water-iron sheields

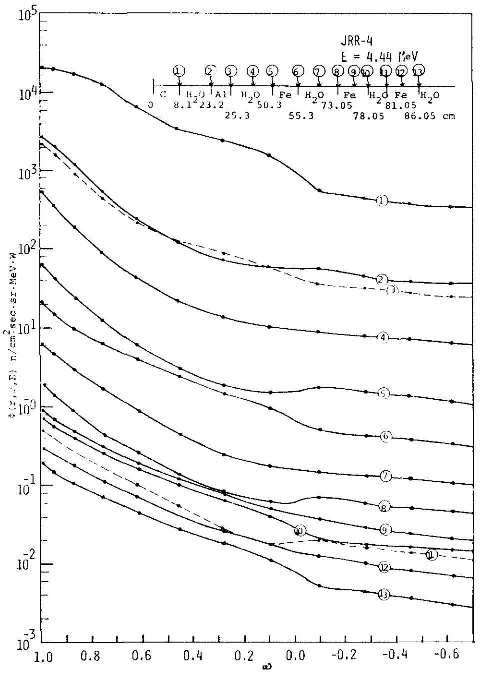

Fig. 9.5 PALLAS-calculated neutron angular distributions at 4.44 MeV in stratified water-iron shields

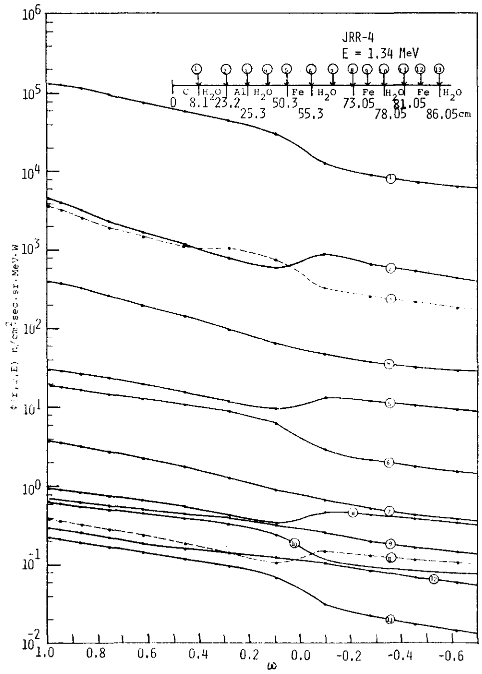

Fig. 9.6 PALLAS-calculated neutron angular distributions at 1.34 MeV in stratified water-iron shields

また Fig. 9.5 からは，エネルギが低くなると極度の前方ピークから緩やかな前方ピークの角度分布になることがわかる。このエネルギでの角度分布も上述の場合と同様に，境界でない位置（④, ⑦, ⑨, ⑫）では滑らかな角度分布を示すのに対し，境界では変化のある角度分布を示している。しかも水層—鉄層の境界（⑤, ⑧, ⑪）における角度分布と鉄層—水層の境界（⑥, ⑩, ⑬）における角度分布は，上述の 8.95 MeV における角度分布の盛り上りと減衰の様子の正反対の変化を示している。

さらに低エネルギになり，エネルギが 1.34 MeV になると，Fig. 9.6 に示すような角度分布になる。角度分布の変化の様子は，この場合もやはり境界でない位置（④, ⑦, ⑨, ⑫）での角度分布は，滑らかであるのに対し，境界での角度分布は大きな変化を示している。しかも水層—鉄層および鉄層—水層の境界における角度分布の変化の様子は，4.44 MeV におけるのと同様である。この程度の低いエネルギになると透過中性子に散乱線の占める割合が大きくなり，また弾性散乱の角度分布は鋭い前方ピークから緩かな前方ピークになって来るので媒質中の中性子角度分布は緩かな前方ピークになる。

上述の水層—鉄層および鉄層—水層の境界における角度分布の変化の傾向が，8.95 MeV の場合と 4.44 MeV および 1.34 MeV の場合と異なる理由は次のようである。まず高エネルギ領域では鉄層内で中性子は非弾性散乱によりエネルギを落とし除去される。また弾性散乱は鋭い前方ピークの散乱角度分布を示すことから，中性子はその進行方向の角度から他の角度へ散乱され難い。したがって Fig. 9.4 で ⑥, ⑩, ⑬ のように ω が 0.4〜0 の範囲で透過中性子は減少する。これとは逆に後方方向の角度分布で ⑥, ⑩, ⑬ が盛り上るのは，水中での後方散乱中性子が高エネルギ領域では鉄中での後方散乱中性子より多いからである。次ぎに 4.44 MeV 程度のエネルギになると，鉄層内で中性子が非弾性散乱されてエネルギを落とす一方，より高いエネルギ領域から非弾性散乱された中性子が大量に加わって来る。また弾性散乱は依然前方ピークの角度分布を有するが，8.95 MeV のエネルギの場合よりは緩やかな分布になる。したがって Fig. 9.5 における ⑤, ⑧, ⑪ のような鉄中での後方散乱中性子がふえることになり，角度分布が後方方向で盛り上ることにな

る。当然のことながら鉄層透過の中性子の角度分布(⑥,⑩,⑬ における正の ω) も同上の理由から盛り上ることになる。さらにエネルギが低くなり 1.34 MeV 程度になると，鉄層内で，非弾性散乱減衰された中性子が増々この程度のエネルギ領域に蓄積される結果，Fig. 9.6 からわかるように 1.34 MeV での ⑤,⑧,⑪ の後方方向角度分布は一層盛り上りを見せ，また,⑥,⑩,⑬ の前方方向角度分布も同様に一層盛り上りを見せるようになる。

なお Fig. 9.1 の配置で点 P_1 および P_2 の位置でしきい検出器により速中性子の反応率を測定したデータがある[80]。そこで Fig. 9.3 に図示されているエネルギスペクトルで距離が 78.05 cm および 86.05 cm の位置における中性子スペクトルに反応断面積を掛けてエネルギについて積分した反応率 ($\int \sigma(E)\Phi_0(r, E)dE$ n/sec·W) を求めた。しきい検出器による積分値も反応率で求められている。計算値と測定値との比較は Table 5 に示す。Table 5 に比較のために使用された

Table 5 Comparison between PALLAS-calculated and measured[80] reaction rates

	Threshold Detector	Measure-ment*	PALLAS Calculation*	Measurement / Calculation
P_1	In	3.38	2.68	1.26
	Zn	0.749	1.039	0.721
	Fe	0.0686	0.0719	0.958
P_2	In	0.845	0.741	1.14
	Zn	0.183	0.284	0.644
	Fe	0.0184	0.0202	0.911

* $\int \sigma \Phi dE$ n/sec·W

しきい検出器はインジウム，鉄，亜鉛である。またこれらの検出器の反応はそれぞれ $^{115}In(n, n')^{115m}In$, $^{56}Fe(n, p)^{56}Mn$, $^{64}Zn(n, p)^{64}Cu$ である。計算による中性子スペクトルに反応断面積 σ を掛けて計算の反応率を求めているが，ここに使用した反応断面積 σ の値を Fig. 9.7 に示しておく。これらの断面積は $^{115}In(n, n')^{115m}In$ および $^{56}Fe(n, p)^{56}Mn$ の場合は文献 (81) から，また $^{64}Zn(n, p)^{64}Cu$ の場合は 5 MeV 以下および 12.5 MeV 以上については文献 (82) から，5 MeV ~12.5 MeV については文献 (83) からの値を使用した。

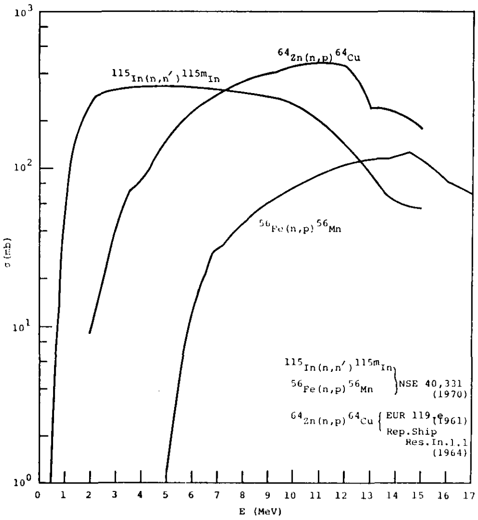

Fig. 9.7 Reaction cross sections used in PALLAS calculation

Table 5 における測定値と計算値との比較から，両者は絶対者で ±30% 以内で良く一致していることがわかる。なお PALLAS 計算の中性子スペクトルはエネルギの下限が 1.25 MeV であり，中性子スペクトルはこのエネルギ以下で急激な上昇を示すことが他の計算および実験結果から明らかなので，インジウムの反応断面積のエネルギの下限と思われる 0.5 MeV まで積分計算を行なうとすれば，最大で数パーセント程度 Table 5 に示されている計算値より大きな値を持つことが予想される。

比較に使用した上記の 3 種類の反応率は中性子スペクトルにおける 1 MeV 以上の速中性子領域を広く網らしていることから，PALLAS 計算による水—鉄 3 重層における速中性子エネルギスペクトル (Fig. 9.3) は，絶対値で正確にその減衰が計算されていると推察される。したがって本計算法を実際の遮蔽問題へ適用した場合に精度の良い計算結果が得られることが確認された。特に Figs. 9.4~9.6 に図示されているような詳細な角度分布が実際に近い遮蔽問題を解析して求められた例はないようである。多重層遮蔽問題を理論的に解析して異物質から成る内側境界で中性子角度分布が大きく変化する様子や速中性子の透過に従って中性子角度分布が鋭い前方ピークになって行く様子，さらにエネルギが低くなるのに従って角度分布が鋭い前方ピークから緩やかな前方ピークに次第に変化していく様子等の詳細な情報を得ることができる点が本解析法

の特色である。

また，Fig. 9.3 に図示してある中性子スペクトルから，鉄層透過後の中性子スペクトルは 1 MeV～3 MeV で水層のみにおける中性子スペクトルに比べて増大する。したがって，速中性子を減少させるためにはなるべく鉄層を炉心に近づけて水層を鉄層の後に厚く設ける方がよいことがわかる。なお参考のためにこの現象をより明瞭に表わした計算結果[59]があるので Figs. 9.8, 9.9, 9.10 に示す。この計算例は一次元平板形状において平板に入射する速中性子の鉄―水，水―鉄，水―鉄―水多重層における透過中性子スペクトルである。計算は MENE コード[62]で行ない，計算における入射線源のエネルギスペクトルは図上①の記号で図示されている中性子スペクトルであり，また線源の角度分布は垂直入射の 0 度方向角度分布である。いずれの場合も鉄層の厚さは 10 cm であり，一方水層の厚さは 50 cm である。図示されている計算例から，鉄層の後に水層がある場合の方が水層の後に鉄層がある場合より低いエネルギ領域で透過速中性子スペクトルは低い値になっていることが明瞭に示されている。なお Fig. 9.9 で④記号の中性子スペクトルに低いエネルギ領域で点線が図示されているが，これは媒質が鉄層なしの水層のみの場合で距離が④記号で表わされて

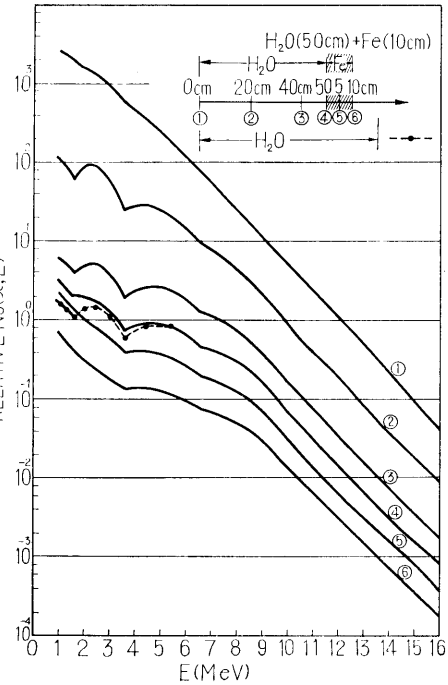

Fig. 9.9 MENE-calculated neutron energy spectra in water-iron layers

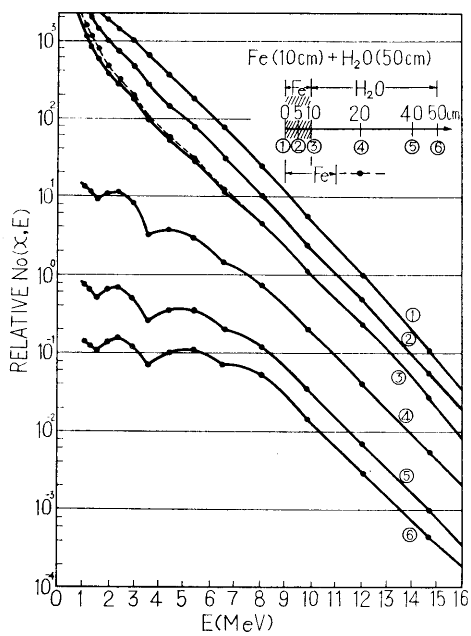

Fig. 9.8 MENE-calculated neutron energy spectra in iron-water layers

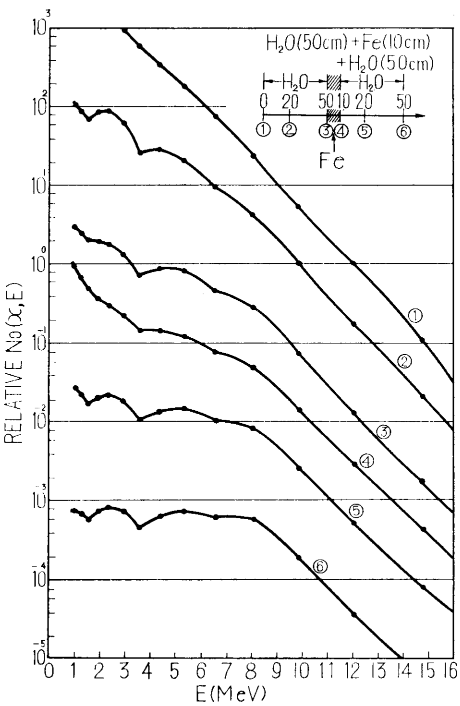

Fig. 9.10 MENE-calculated neutron energy spectra in water-iron-water layers

いる位置における中性子スペクトルを意味する。この点線と実線で表わされているスペクトルの差は，水層の後に鉄層がある場合には水層のみの場合に比べてその差だけ中性子が多くなることを示している。鉄層中で中性子が増加する理由は前述のように高エネルギの中性子の非弾性散乱の結果，エネルギを落した中性子が 3 MeV 以下の低エネルギ領域に蓄積されるからである。Fig. 9.10 に水一鉄の後にさらに水層を設ければ，鉄層中で増加した低エネルギの中性子が再び水層中で減衰させられる様子が明瞭に図示されている。

第10章　検　　討

第1章では在来の中性子遮蔽計算法に対し，各方法ごとに中性子遮蔽計算に適用する場合の限界や不利な点を明らかにした。第2章では遮蔽計算に重要な定常の場合のボルツマン輸送方程式をたてた。第3章では遮蔽の観点に立って，中性子と物質を構成する原子核との相互作用を論じ，中性子遮蔽の解析に重要な断面積を明らかにした。

現時点では，各原子核の断面積が全て精度良く求められているとはいえず，むしろ精度良く求められている断面積の方が少ないであろう。遮蔽計算では断面積のうちでも特に全断面積の精度が問題となる。その理由は中性子の減衰計算に全断面積の精度が直接に影きようを及ぼすからである。例えば，遮蔽計算では炉心から放射される中性子を遮蔽体内で十桁から十数桁減衰させる計算を行なうので，仮りに計算に使用する全断面積にわずか数パーセントの誤差があっても2倍から1桁もの誤差を生ずることになる。一般に，これまでに求められている全断面積は炉計算を対象にしているので，全断面積のエネルギスペクトルのピークの値は比較的に良い精度で求められているが，一方谷の値はあまり精度良く求められているとはいえない。遮蔽計算ではこの谷の全断面積が透過中性子に最も影きようを及ぼすので，この谷の値も精度良く求められることが望まれる。

次ぎに弾性散乱の断面積および微分散乱角度分布を表わすルジャンドル多項式展開係数の $f_l(E)$ も精度良く求められていることが望ましい。その理由は速中性子領域でさえ，深い透過になると非散乱線に比べ散乱線の割合が増して来ること，さらにこの現象はエネルギが低くなるほど顕著となり，低エネルギ領域における深い透過では中性子はほとんど散乱線になってしまうからである。

一方非弾性散乱断面積については鉄のように重要な遮蔽物質で，しかも非弾性散乱の割合が速中性子領域では非常に大きい場合には中性子減速計算に重要な役割を演ずるので，精度の良いデータが必要となる。しかし，現在のところは非弾性散乱断面積の精度よりもむしろ計算に必要なデータが充分に整備される方が急務である。特に非弾性散乱の減速核 $f^{in}(E',E)$ のデータは精度の良し悪しにかかわらず遮蔽計算に利用可能な形でデータが整備されていないのが現状である。

第4章では中性子遮蔽計算法としては，比較的厳密な方法であるボルツマン輸送方程式の Discrete Ordinates 法にもとづく数値解法に対し，遮蔽計算に特に適している理由を明らかにした。次いで Discrete Ordinates 法にもとづく数値解法としては最も広く知られている Discrete Sn 法につき，中性子透過問題に適用した場合の不利な点を明らかにした。さらに Discrete Ordinates 法にもとづく直接積分解法である NIOBE および EOS に対して，対象とする問題によっては異常な値に収斂する不安のあることおよびその原因を明らかにした。その結果，速中性子の深い透過で問題となる極端な前方ピークの角度分布を有限項のルジャンドル多項式で展開近似するのは無理であることが明らかにされた。したがって，速中性子束の角度分布を正確に表わすには，何らの多項式展開近似法を用いない方が良いことがわかった。

第5章ではこれまでの章で述べた中性子遮蔽に対する各種の解析法のもつ制限や不利な点を取り除いて，より効果的な中性子遮蔽解析法の確立を目的として，新らたに定常の中性子輸送方程式を Discrete Ordinates 解法にもとづいて直接積分技法によって解く数値解法を提案した。本解法は，あくまで遮蔽における中性子の透過を最も積度良く，また効果的に計算することを第1の目的として確立したので，在来の輸送方程式の解法における数式の導出および仮定の設定の方法と異なる点が多い。これは全て媒質中における中性子の核との相互作用に起因する複雑な現象をできるだけ正確に取り扱いたいためである。その結果，本解法は，これまで遮蔽の理論解析で最も困難であった速中性子の極端な前方ピークの角度分布を首尾良く取り扱うことができるようになった。以下に本解法の特長および弱点について検討する。まず特長としては次のようなものがある。

1)　輸送方程式からの数式の導出の過程で，空間形状を固定していないので，導出された最終式は任

意の形状の遮蔽問題に適用可能である（第5章および第6章)。したがって，

2) 種々の線源問題（各種形状の体積線源および平面線源や球殻線源等）で任意の線源強度分布の問題に適用可能である（第5章)。

3) 本解法は Discrete Ordinates 法にもとづいているので，Discrete Ordinates 法の利点である境界において大きな変化を示す中性子角度分布の取り扱いが比較的簡単に，しかも正確に行なえる。このことは一般に遮蔽体は多重層より成り，しかも多重層の異物質の境界で中性子の角度分布は大きく変化するから（第9章および Figs. 9.4~9.6)，変化する中性子角度分布を精度良く求めることができる点は遮蔽解析法として優れた特質である。

4) 速中性子の物質透過に対し理論解析上最もむずかしい中性子角度分布の極度の前方ピーク現象を，本解法は正確に解析することができるので（第8章 Figs. 8.11, 8.12)，速中性子の深い物質透過問題の解析に適している（第8章および第9章)。この前方ピークの角度分布を正確に扱える理由は Discrete Ordinate 角度分点で中性子の進行方向にその飛程に沿って方程式を直接積分して解く点にある。

5) 非等方散乱の弾性散乱および等方散乱仮定の非弾性散乱を取り扱えるので，中性子遮蔽計算に適している。特に弾性散乱の非等方扱いはルジャンドル多項式展開の次数に制限を設けていないため，任意の高次の非等方成分まで取り扱うことができる。したがって速中性子の弾性散乱を精度よく取り扱うことができる。

6) 繰返し収斂法の使用を回避したため，問題によっては収斂しないという不安や異常な値に収斂するという恐れがない。また繰返し回数だけ計算時間が短縮できることも利点である。

7) 本解法は中性子のエネルギ依存を計算するのに，一般に使用されている多群の組み分け法とその群定数（指数関数あるいは核分裂スペクトルで中性子のエネルギスペクトルを近似し，各群につき群内で断面積を平均化して求める）を用いない。その代りにレサジ等間隔から決まる各エネルギのメッシュにつき生のままの断面積を使用して計算を行なうので，断面積の評価のための計算にも適用できる。

また上述の多群の組み分けとその群定数を使用する計算法では，組み分け数や各群の幅があらかじめ定められているのが普通である。これに対し，本計算は任意のレサジ間隔を選ぶことができるので詳細な透過中性子エネルギスペクトルおよび角度分布を決めるのに適している。

8) 本解法は空間積分を中性子の飛程に沿って直接積分によって行なうので，比較的粗い空間メッシュでも精度の良い計算結果を得ることができる。このことを調べるため，第8章における比較計算問題の1つである BSR-1 炉問題を空間メッシュをパラメタとして1次元球形状で計算した。計算結果は Fig. 10.1 に示す。これはエネルギが $E=9.89\,\mathrm{MeV}$ における水中での中性子角度分布であり，距離は 20 cm および 60 cm の位置である。半径方向メッシュ間隔を 2.0 cm, 2.5 cm, 4.0 cm に選んだ場合であるが計算した角度分布には明瞭な差は現われなかった。したがって角度について積分したスカラー束についても，上述の3つのメッシュ間隔による計算結果は最大 4.8% 以内の差で極めて良く一致している。この比較計算結果から水媒質および巨視的全断面積が水の場合に近い物質に対しては，4.0 cm 程度粗いメッシュ間隔をとっても差しつかえないといえる。ただし，この

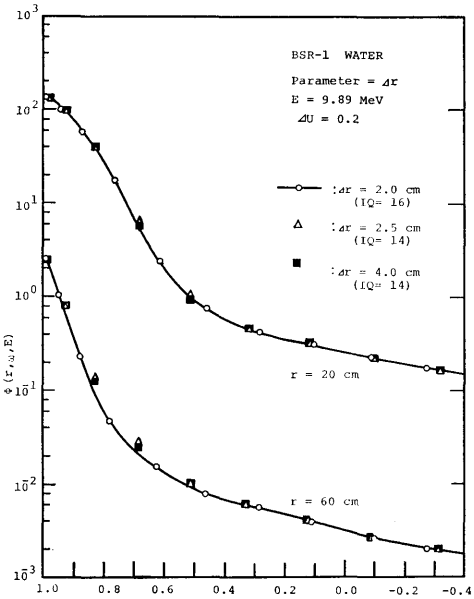

Fig. 10.1 PALLAS-calculated neutron angular distribution. Parameter used in the calculation is spatial mesh Δr.

結果は BSR-1 炉のように半径が 26 cm 程度の大きさの炉心を体積線源としている場合に限る。例えば，線型加速器使用の非常に小さい体積線源の場合は線源の近くを細かい空間メッシュ間隔で計算する必要がある。

9) 本解法は Discrete Ordinates 法にもとづき，各角度分点で中性子の進行方向に方程式を積分して中性子の角度分布を計算するので，比較的少ない角度分点で鋭い前方ピークの角度分布を精度良く計算することができる。このことを例証するために一般の原子炉を代表して BSR-1 炉の問題を再び取り上げた。パラメタとして角度分点数を選び，この分点数が 20, 16, 14 の場合を 1 次元球形状で計算した。その結果を Fig. 10.2 に図示する。これはエネルギが 8.95 MeV における水中の中性子角度分布で，距離が 10 cm，30 cm，50 cm，70 cm の場合である。なおレサジ間隔は 0.1 である。図示してある角度分布の比較の結果からは，角度分点数を変えても明瞭な差は現われていない。したがって角度で積分したスカラー束についても，3 つの計算結果の間では最大 14% の差が 70 cm の透過距離で現われる程度である。このことから実際の原子炉の炉心程度の大きさの問題の場合は，角度分点数を 14 に選んでも大きな誤差は生じないと思われる。ただし，線型加速器を使用した中性子角度分布測定の問題を計算する場合は，角度分点数を 20 程度に選んだ方がよい（第 8 章および Figs. 8.10～8.12)。

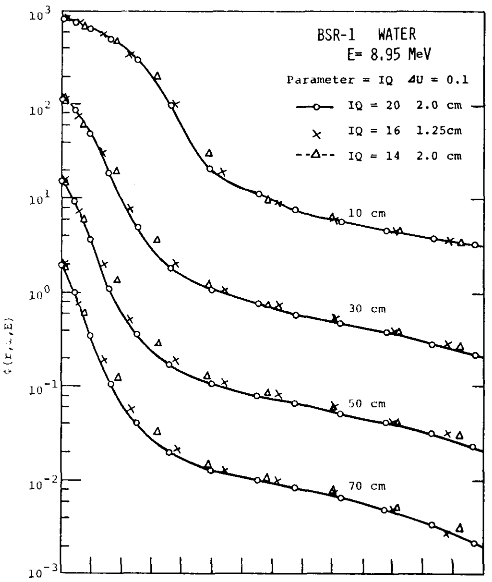

Fig. 10.2 PALLAS-calculated neutron angular distributions. Parameter is the number of angular mesh points.

以上の有利な点に対し本解法の不利な点は次のようである。

1) 空間，角度，エネルギを全てメッシュ点表示するので全体としては大量のメッシュ点が輸送方程式を解くのに必要である。

2) 二次元形状以上では中性子の進行方向を表わすのに極角と方位角が必要となり角度分点数が増加する。もし角度分点数が少ないと単位球面上に分布している中性子の進行方向を粗い角度分点で表わすことになる。したがって透過中性子の計算の精度が落ちる。

3) 一般に Discrete Ordinates 法では体積線源の大きさに比べ大きな距離のところでは，算出された中性子束に非常に大きな誤差が生ずることがある。すなわち，適当な数の角度分点数では大きな距離のところで，全ての角度分点が線源を見ることができない事態が起り得るので，この位置では中性子束は非常に小さな値になるか振動する空間分布を示すようになる。この現象を Ray effect といい，本解法でも二次元形状以上の形状では Ray effect が問題となる。この現象を減ずるには数多くの角度分点数が必要となり，これは大量のメッシュ点数を必要とすることになる。したがって大型の計算機が必要となり，また長時間の計算時間が必要となる。

4) 本解法は散乱積分の計算をするのに，中性子束 $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)$ およびルジャンドル多項式展開係数 $f_l(u)$ が微小区間 Δu 内でステップ関数で近似できるという仮定にもとづいている。したがって輸送方程式を計算するのにレサジ間隔をできるだけ細かく定める必要がある。さらに自分自身の群内での散乱中性子を評価するのに繰返し収斂法の使用を回避するために，微小レサジ区間 Δu_j を仮定し，このため 1 群上のエネルギ群が代表するレサジ区間が大きく仮定されることになる。この仮定からもレサジ間隔の大きさは計算結果に大きな影きようを及ぼすと思われる。この影きようを調べるために実際の原子炉の炉心の大きさを代表する意味から，再び BSR-1 炉の問題を選び，レサジ

間隔を 0.05, 0.1, 0.2, 0.3 に変えて水中の中性子エネルギスペクトルを1次元球形状で計算した。その結果を Fig. 10.3 に図示する。図示してあるエネルギースペクトルは距離が炉心表面, 20 cm, 40 cm, 60 cm, 70 cm の位置における値である。図上で実線に黒丸印がレサジ間隔が $\Delta u=0.05$ の場合で，点線に三角印はレサジ間隔が $\Delta u=0.1$, 角度分点数が 14, $\Delta r=2.0$ cm の場合である。実線と点線のスペクトルが一致しているのは，レサジ間隔が 0.05 から 0.1 に粗くなると最大で 14% 低い値になる (図上で白丸印, $\Delta u=0.1$ および 20 角度分点数, $\Delta r=1.25$ cm) が, Fig. 10.2 から角度分点数を 14 に減ずると逆に最大で 14% 大きな値になるので，たまたま補償し合って 0.05 レサジ間隔の値に一致したわけである。$\Delta u=0.2$ の場合は 60 cm の距離で $\Delta=0.05$ の場合の値の 22% 減になり，また $\Delta u=0.3$ の場合は 70 cm の距離で同じく $\Delta u=0.05$ の値に比べ 24% 減である。この $\Delta u=0.05$ の場合に対する差は透過距離に従ってわずかに増加する傾向にある。例えば, 40 cm における差よりも 60 cm における差の方が 2～3% 大きい。この程度の差の増加では大きな透過距離に対しても大きな誤差をもたらすことにはならないと思われる。以上の比較検討の結果，レサジ間隔を 0.1 に選べば充分精度の高いエネルギースペクトルが求められることがわかった。またレサジ間隔をより粗く，0.2 あるいは 0.3 に選んだ場合でも，中性子の減衰の桁数に比べて認容できないほどの誤差は生じないことも明らかとなった。

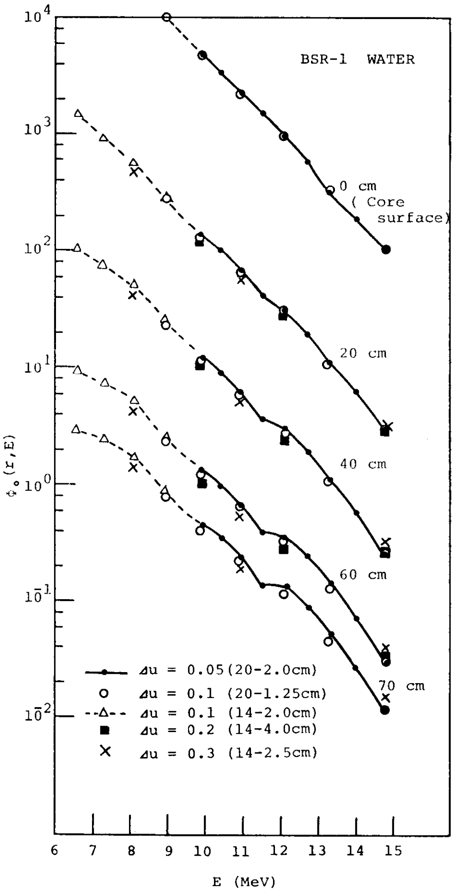

Fig. 10.3 PALLAS-calculated neutron energy spectra. Parameter is lethargy interval Δu.

上述の議論は中性子のエネルギスペクトルに対してであり，角度分布に対してそのまま当てはめるわけにはいかない。特に高いエネルギにおける角度分布には明瞭な差が現われる。Fig. 10.4 に上述の問題で，パラメタとしてレサジ間隔を 0.05, 0.1, 0.2 に選んだ場合の水中における角度分布を示す。これはエネルギが 9.89 MeV と高エネルギの場合である。また透過距離は 10 cm, 40 cm,

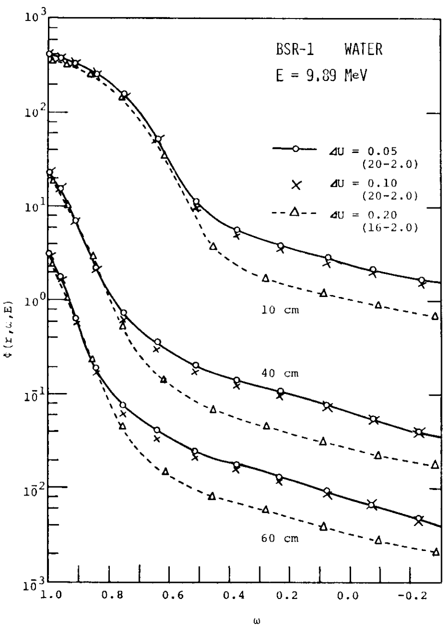

Fig. 10.4 PALLAS-calculated neutron angular distributions. Parameter is lethargy interval Δu.

60 cm である。Fig. 10.4 でレサジ間隔が 0.1 の場合の角度分布は 0.05 の場合と良い一致を示している。これに対し，レサジ間隔が 0.2 の場合は ω が 0.8 程度までの前方方向角度分布については良い一致がみられるが，それ以外の角度分布では 60% 程度も低い値を示している。この原因はレサジメッシュ間隔が粗いために，より高いエネルギからの散乱減速中性子を過少評価しているためである。したがって精度の高い角度分布を PALLAS 計算で求めるためには，レキジ間隔を 0.1 に選ばねばならない。

以上で本解法を中性子遮蔽解析に適用した場合の有利な点と不利な点を明らかにした。次ぎに第6章では任意の空間形状に対して導出した最終式を幾種類かの実際の遮蔽形状に適用した。現在のところ本解法にもとづく計算コードとしては形状が1次元平板，1次元球形状，それに二次元円柱形状の場合についてのみ作られている。必要があればそれ以外の形状についての計算コードを作ることは容易である。

第7章では解析的に求めることのできる非散乱線について，本解法により計算した結果と解析解との比較を試みた。1次元平板形状における非散乱線の計算については，30 mfp の深い透過距離までほとんど誤差なく角度分布が計算される点は驚くべきことである。したがって当然角度について積分したスカラー束も解析解とほとんど誤差なく一致した。また1次元球形状の場合は，大きな炉心 (Fig. 7.2) に対しては非散乱線は深い透過距離まで解析解と良く一致することが明らかにされた。一般に小さい炉心 (極端な場合は点線源) の場合には，深い透過距離では極度の前方ピークの角度分布となるので大きな誤差が生ずる。この問題に対し，本解法では前方方向角度分点の第1角度分点さえ $\omega=1.0$ に近い値を持たせれば極めて良い精度で前方ピークの角度分布を計算することが Fig. 7.3 から明らかにされた。一方，二次元円柱線源の場合は円柱線源から Fig. 7.6 に図示されている程度の距離までは，計算値は解析解と良く一致するが，それ以上離れると誤差が生ずる。この原因は前述の本解法における不利な点の項目の 2) で述べた角度分点数が少ない (Fig. 5.1) ことにあり，また線源から遠く離れた位置では同じく項目の 3) で述べた Ray effect により値が異常に小さくなってしまうことにある。それにもかかわらず，第8章における BSR-1 炉問題に対する二次元形状による計算値は，深い距離まで1次元球形状による計算値に良く一致している (Figs. 8.2, 8.3, 8.4, 8.7, 8.8) 事実は見逃すわけにはいかない。これは今後の研究課題の1つであろう。

第8章では実際の中性子遮蔽問題で信頼のおける実験結果との比較により本解法の精度を確めた。このうち，BSR-1 (および FNR 炉) 問題ならびにグラファイト透過中性子角度分布問題は測定値が絶対値で求められている点，非常に信頼のおける実験結果である。従来，数多くの実験結果および実験と計算との比較が報告されているが，詳細なエネルギスペクトルおよび角度分布についてはほとんどの場合相対値で比較されている。この相対値での比較ではある程度のことはわかっても，減衰の正確な評価にもとづいていないために，その結論の価値は半減してしまう恐れがある。この絶対値の測定の困難さは，線源に対する各種の情報を正確に測定することがむずかしい点にある。したがって計算における線源に対する入力データが欠除するために計算が絶対値で求まらないことになる。

従来の比較計算結果とは対照的に，第8章では絶対値で計算結果は実験結果と比較し検討を加えている。その結果，本解法は高エネルギ領域における中性子の鋭い前方ピークの角度分布を絶対値で精度良く計算することが明らかにされた。特に前方方向の角度スペクトルが絶対値で正確に求められる (Figs. 8.2 および 8.12) ことは特記すべき事柄であり，これは本解法の特長である。

第9章では本解法による実際の中性子遮蔽の解析の例として日本原子力研究所の4号炉内に模擬した一次遮蔽問題を計算した。この問題を解析して，前述の本解法の長所の 3) における多重層の内側境界で大きな変化をする中性子角度分布を正確に取り扱い得ることが明らかにされた。またしきい検出器による測定値と PALLAS による計算値を比較することにより，中性子スペクトルの減衰が正確かどうかが検証された。これらの結果から本解法は中性子遮蔽の解析のみならず実際の中性子遮蔽の設計計算にも適用可能であることが確認された。

第11章　結言および今後の課題

11.1 結　言

本研究により提案された定常の中性子輸送方程式を Discrete Ordinates 法にもとづいて直接積分によって解く解法は，前章で検討したように中性子透過計算に対し次のような特長を持っている。

1) 遮蔽体の空間形状に対する制限を設けていないので，多種類の形状の遮蔽問題に適用できる。

2) 遮蔽体は多重層であるのが普通であり，したがって異物質より成る内側境界での中性子角度分布を正確に取り扱うことが必須条件となる。本解法はこの条件を満足する。

3) 特に速中性子の深い透過の計算に適している。その理由は極端な前方ピークの中性子角度分布を精度良く計算することができるからである。この条件は一般に中性子透過計算法にとっては厳しい条件であり，在来の厳密に近い計算法にとってもこの条件を満足することは困難であった。

4) 繰返し収斂法の使用を回避することにより，繰返し計算時間だけ計算時間の短縮を図った。その上，収斂値が異常になることもあるという不安を取り除いた。しかし，その反面精度の良い計算値を得るためには，できるだけレサジ間隔を密にとることが要請された。

5) 体積線源の内部から遮蔽体背面まで計算することができるので，線源の正確な情報さえ与えることができれば絶対値で遮蔽体の必要な個所における中性子束を求めることが可能である。すなわち，空間形状のある位置で規格化する必要がないということである。

6) 計算結果としては，遮蔽体内およびその背面の任意の位置で最も基礎的な量である中性子角度分布 $\Phi(\bar{r},\bar{\Omega},E)$ が得られる。したがって，この基礎的な量から中性子遮蔽に関するあらゆる情報を得ることが可能である。例えば，角度で積分すれば中性子スカラー束，したがって中性子エネルギスペクトルが求められ，さらにエネルギで積分すれば全線束 $\Phi_0(\bar{r})$ が求められ，これから中性子の遮蔽体中での減衰がわかる。また，吸収断面積をスカラー束に掛けてエネルギで積分すれば吸収線量が求められる。その上，次節で述べる二次ガンマ線の計算の基になる遮蔽体内における中性子束分布をも与えることができる。

以上の特長から本解法は遮蔽の解析および設計計算に対し有効かつ精度の良い計算方法であると結論できる。

11.2 今後の課題

11.2.1 二次元形状における比較計算の必要性

本論文では中性子遮蔽計算に対し有効で精度の良い計算方法の確立とその計算精度の検討を行った。その結果，本計算法の計算精度の良さに対し確証を得ることができた。しかし本論文で行なった比較計算のみであらゆる中性子透過計算に対し精度の良い計算結果を与えることができると断言することはできない。したがって今後の課題は各種の形状で多種類の中性子透過問題に対し比較計算を行ない，本計算法の精度を一層確めることである。特に二次元形状に対する二次元的な中性子束の空間分布やエネルギスペクトルについて，非散乱線のみでなく実際の中性子透過問題に対して比較計算を行ない計算精度の検討を行なう必要がある。本論文で二次元形状に対しこのことを行なわなかった理由は計算で解析するのに適している，しかも精度の高い二次元的実験が行なわれていなかったからである。筆者等はこの二次元的実験を計画し，まずしきい検出器による水中における二次元空間での中性子束分布の測定を開始した。近い将来，計算と実験との比較が行なわれる予定である。

11.2.2 中性子透過計算に必要な核データの問題

遮蔽計算で計算方法と共に問題となるのは，計算に使用する核データの精度である。この問題は非常に大きな問題であるので一個人で取り組むべき課題ではない。しかし，前章の検討の章でも触れたように全断面積の精度は深い透過の中性子の計算に大きな影きようを及ぼす。したがって，信頼できる精度のよい実験結果に対する比較計算を行い，実験結果との比較により計算方法の精度を確めるためには，まず計算に使う核データが精度のよいものであることが前提となる。また，逆に計算方法が一度精度のよい方法であることが確められたならば，その後はこの計算方法を用いて中性子透過計算を行なうことにより核データの精度の評価を行なうことができる。以上のような理由で，中性子透過計算は核データと密接な関係を持っている。したがって，少なくとも遮蔽計算に関係のある核種についての核データの補充整備の問題を軽視するわけにはいかない。

11.2.3 本計算法の拡充の第1として熱中性子透過計算問題

本論文で提案した中性子透過計算法は対象とする中性子を熱外中性子に限定した。しかし全ての中性子透過問題を取り扱うためには熱中性子の透過問題をも取り扱えるようにすべきである。熱中性子の透過計算は在来一般的に使われている拡散法で行なえばよい。したがって本計算法に熱中性子領域を1群で取り扱う拡散法を付け加えることが計画されている。

11.2.4 本計算法の拡充の第2としてガンマ線透過計算問題

遮蔽の評価を総合的な見地に立って行なうには，中性子の計算のみならずガンマ線の計算も併せて行なう必要がある。しかも原子炉の遮蔽の場合は放射性同位元素のガンマ線の遮蔽と異なって，単独に一次ガンマ線だけを対象に計算することは無意味である。その理由は遮蔽体の外側に近いほど二次ガンマ線の方が一次ガンマ線より多量になって来るからである。この二次ガンマ線は熱中性子の補獲によって生ずる補獲ガンマ線や速中性子の非弾性散乱による非弾性散乱二次ガンマ線，その他に媒質を構成する原子核が中性子を補獲して放射性同位元素になって放出する二次ガンマ線等から成る。したがってこれらの二次ガンマ線はいずれも中性子に起因しているので，遮蔽体内の中性子空間分布が明らかでなければ算出することができない。このために原子炉に対するガンマ線遮蔽の計算は必然的に中性子透過計算と結び付いて来る。以上の理由で本計算法にもとづく計算コード PALLAS にガンマ線透過計算ルーチンを付加することは重要な意義を持つことになる。

ガンマ線の物質との相互作用は中性子の場合に比べて極めて簡単であり，すでに平板形状におけるガンマ線透過計算法は確立されている[38]。これを拡大するために本計算法の空間形状を取り扱う技法を適用すれば，平板形状以外の任意の形状に対するガンマ線の透過問題を取り扱うことができるようになる。したがって近い将来この問題に取り組むつもりである。ただし，その際に問題になるのは計算技法ではなく，むしろ二次ガンマ線生成の核データの不備であろう。特に中性子の非弾性散乱に起因する二次ガンマ線生成の核データの不備が問題となろう。

11.2.5 本計算法の中性子ストリーミング計算への適用

現在，中性子のストリーミング計算法は比較的簡単なダクト形状に対してさえ，精度の良い信頼できる計算法は確立されていない。したがって現状では中性子の非散乱線のストリーミングのみを対象とする Ray-analysis 法による計算に頼る以外に方法がない。複雑な形状のダクトやボイドに対する中性子ストリーミングの計算はモンテカロル法で行なえば良いが，原理的には良くても実際の計算となると問題が多い。そこで本解法の二次元，三次元形状の取り扱いを比較的簡単なダクトやボイド形状に対する中性子のストリーミング計算へ適用することが考えられる。これまでに二次元円柱形状における直円筒ダクトに対する中性子の非散乱線のストリーミングを計算し，Ray-analysis 計算との比較[84]を試みた。その結果，本計算法を各種の直円筒ダクトに対する中性子ストリーミング計算へ適用できることが明らかにされた。したがって最近この中性子ストリーミング計算への適用に着手している。

11.2.6 本計算法の遮蔽最適設計への適用

遮蔽最適設計の問題では一般に遮蔽重量の最小化が取り上げられる。その他に遮蔽体積の最小化や遮蔽体建設のコストの最小化等の問題もある。いずれにしても，遮蔽体の外側で規準線量以下ということが条件である。したがって遮蔽最適設計の計算には必然的に中性子およびガンマ線の遮蔽体透過計算が必要となる。在来の遮蔽最適設計の計算法では，この放射線の透過計算を精度の良くない比較的簡単な技法にもとづく計算法で行なっていた。最近，米国で Discrete Sn コードの ANISN を透過計算に使用する遮蔽最適設計コード ASOP[85] が作製され，実際の遮蔽重量最小化の計算に適用された。我が国においても遮蔽最適設計の計算法の研究および計算コードの作製が最近行なわれ[86),87]，計算例も発表された。したがって，この最適化計算コードに本解法にもとづく透過計算コード PALLAS を結び付ければ，より精度の高い遮蔽最適設計計算コードが作られる筈である。近い将来 PALLAS コードで放射透過計算を行なう遮蔽最適設計コードが作られるであろう。

11.2.7 三次元形状に対する計算コードの作製

本解法のように中性子の散乱現象を忠実に取り扱う厳密に近い計算法による三次元形状計算コードは，モンテカルロコードを除いてまだ実現していない。理論の上では三次元形状の取り扱いはすでに可能であるが，計算機のコア記憶容量による制限や計算時間（したがって計算費用）の点で現状では無理であろう。また，一般に三次元形状になるとモンテカロルコードの方が輸送コードに比べて上記の理由で有利であると見なされている。しかしこの予想は将来計算機が大容量化し，その上一層高速化すれば覆るであろう。したがって，近い将来ではないが本解法にもとづく三次元形状中性子計算コードが将来必ず作られると思われる。そうなれば今まで取り扱われ得なかった数多くの遮蔽問題が，精度の高い計算コードによって計算されるようになるであろう。

11.2.8 総合的な放射線遮蔽の解析法の確立

輸送方程式の数値解法の一つである本計算法はこれまでに述べたように中性子遮蔽に対する精度の良い解析法であることが確められた。しかも単に中性子遮蔽の解析法としてだけでなく，中性子遮蔽の設計法としても使用可能であることも確められた。中性子透過問題は原子炉の放射線遮蔽の基本的な問題であるから，精度のよい中性子透過計算法が確立されたことはこれを基にして精度の高い総合的な放射線遮蔽の解析法を確立することが可能であることを意味する。本研究の最終目標は精度の高い信頼できる総合的な放射線遮蔽の理論的解析法および設計法の確立にある。したがって本研究よりなる中性子遮蔽の解析が，この最終目標を達成するための礎になることを切望する。

付　　録

付録 A 複　合　核[27),88)]

複合核のモデルは，ボーア[89)]およびブライトとウィグナー[90)]によって考え出された核反応のモデルである。この反応は2段階に起ると考える。第1段階が標的核に入射粒子が吸収されて複合核を作る。複合核の寿命は，入射粒子が原子核の直径だけの距離を通過するのに要する時間（10^{-17} 秒程度）[88)] に比べて約 10^{-14} 秒と 1000 倍程度長い。次ぎに第2段階として複合核が反応粒子を放出する。すなわち

$$a+X\rightarrow c\rightarrow Y+b$$

と書き表わせる。ここで a は入射粒子，X は標的核，c は複合核，Y は残留核，b は放出粒子である。

複合核は一般に高く励起された状態にある核で，入射粒子 a と標的核 X との重心系における運動エネルギの和を E_α，a の X に対する結合エネルギ（一般に遅い中性子の重い核による捕獲の場合は 8 MeV 程度）を B_a とすると，複合核 c の励起エネルギ E_c[27)] は

$$E_c=E_\alpha+B_a$$

である。

次ぎに高く励起された複合核のこわれ方は複合核の出来方には関係しない。これは励起エネルギの分配の様子が統計的なものだからである。そして励起した複合核のこわれ方により次の3の反応が観測されるのである。

i) 複合核がその余分のエネルギ（励起エネルギ）をガンマ線の形で放出する反応。これは捕獲ガンマ線を出す反応である。

ii) 同じく余分のエネルギを再び中性子の形で放出する反応。これは共鳴散乱現象である。

iii) 高く励起された複合核が，より低い運動エネルギの中性子を放出して，あとには励起状態にある核が残る反応。これは非弾性散乱現象である。

上述の i) および ii) の反応は重い標的核に対して遅い中性子のある特定のエネルギで起る。この理由は複合核の励起準位に関係している。すなわち標的核が遅い中性子を捕獲して励起状態に上る場合，複合核の励起準位に一致しているか近い場合に i) および ii) の反応が起る。これを共鳴吸収という。一方，軽い核の場合は複合核のエネルギ準位の間隔が大きいので，よりエネルギの高い中性子で共鳴吸収が起るようになる。

共鳴吸収の核断面積はブライト―ウィグナーの一準位公式によって計算される。すなわち[88)]

$$\sigma=\frac{A}{\sqrt{E}}\cdot\frac{\Gamma_b}{(E-E_r)^2+\frac{1}{2}\Gamma^2}$$

である。ここで A は定数，E はエネルギ，E_r は共鳴吸収の起るエネルギ，Γ は準位幅といい，あるエネルギ状態にある複合核が単位時間あたり変化する確率に比例する。また Γ は共鳴吸収の断面積の山の半値幅に相当している。一方，Γ_b は b という過程によって変化する単位時間あたりの確率を示す尺度である。そして捕獲ガンマ線を放出する時は Γ_b は Γ_r となり，再び中性子を放出する共鳴散乱の時は Γ_n となる。

以上の過程は入射エネルギがあり高くない場合の現象であるが，入射エネルギが充分高くて複合核が準位密度の充分大きい励起状態になる場合は，複合核の可能な崩壊の仕方が非常に多くあるようになる。このような状態では弾性散乱はなくなり非弾性散乱だけが可能になる。このような場合は連続体理論で取り扱われる[27)]。

付録 B 弾性散乱における諸関係式[26)]

実験室系における散乱前後の中性子の速度を $\bar{v}'$，$\bar{v}$ とし，標的核の質数を M とし，重心系における散乱角を ϑ とすれば次式の関係式がある[26)]。

$$\bar{v}^2=\left(\frac{\bar{v}'}{M+1}\right)^2(M^2+2M\cos\vartheta+1) \quad \text{(B-1)}$$

また，実験室系における散乱角を Θ で表わせば，重心系における散乱角 ϑ との間に次式に示す関係がある[26)]。

$$\cos\Theta=\frac{M\cos\vartheta+1}{\sqrt{M^2+2M\cos\vartheta+1}} \quad \cdots\cdots\text{(B-2)}$$

さらに，散乱前の中性子のエネルギを E'，散乱後の中性子のエネルギを E とすれば（B-1）式から

$$\frac{E}{E'}=\frac{\frac{1}{2}\bar{v}^2}{\frac{1}{2}\bar{v}'^2}=\frac{M^2+2M\cos\vartheta+1}{(M+1)^2} \quad \text{(B-3)}$$

したがって（B-1）式から

$$\cos\vartheta=\frac{1}{2M}\left\{(1+M)^2\frac{E}{E'}-(1+M^2)\right\} \quad \text{(B-4)}$$

の関係式を得る。また（B-4）式を（B-2）式に代入すれば（B-5）式の関係式を得る。

$$\cos\Theta=\frac{1}{2}(M+1)\sqrt{\frac{E}{E'}}+\frac{1}{2}(1-M)\sqrt{\frac{E'}{E}} \quad \cdots\cdots\text{(B-5)}$$

付録 C　ダイヤモンド差分法とステップ近似

Discrete Sn 法では一般にその導出された差分形の式は次式のような形で書き表わせる[24]。

$$\mu_D(A_{i+1}\Phi_{G,i+1,D}-A_i\Phi_{G,i,D})+\frac{1}{\Delta\mu_D}(B_{d+1}\Phi_{G,I,d+1}-B_d\Phi_{G,I,d})+V_I\Sigma^T_{G,I}\Phi_{G,I,D}=V_IS_{G,I,D}+\frac{V_I}{2}F_{G,I,D} \quad \cdots\cdots\text{(C-1)}$$

上式で A_i および V_I はそれぞれ面積要素および体積要素であり，例えば平板形状においては $A_i=1.0$, $V_I=\Delta x_I$ である。また球形状では $A_i=4\pi r_i^2$, $V_I=\frac{4}{3}\pi(r_{i+1}^3-r_i^3)$ であり，さらに円柱形状では $A_i=2\pi r_i$, $V_I=\pi(r_{i+1}^2-r_i^2)$ である。また係数 B は中性子が i メッシュから $i+1$ メッシュに進行するのに従って，その進行方向メッシュから流出およびそのメッシュへ流入する割合を表わす。したがって，平板形状では $B_{d+1}=B_d=0$ であり，球および円柱形状では値を持つ。μ_D は D 番目の進行方向角の余弦であり，Σ^T は全断面積，S は外部線源，F は散乱減速にもとづく内部線源を意味する。中性子角度束 Φ の添字は Fig. 4.1 を参照して，G がグループを表わし，i は空間上のメッシュ，d は中性子の進行方向上のメッシュを表わす。また添字の I, D は i および d についてのメッシュの中間点を意味する。Fig. 4.1 からもわかるように (C-1) 式は Φ について 5 つの異なった位相空間上の値を含んでいる。これでは未知変量の数が多過ぎるので (C-1) 式を解くことはできない。そこで次に述べるダイヤモンド差分法を導入して未知変量の数を減ずる。

(1)　ダイヤモンド差分法

ダイヤモンド差分法は次に示す関係を仮定する。すなわち

$$\Phi_{G,I,D}=\frac{1}{2}(\Phi_{G,i+1,D}+\Phi_{G,i,D}) \quad \cdots\text{(C-2)}$$

$$=\frac{1}{2}(\Phi_{G,I,d+1}+\Phi_{G,I,d}) \quad \cdots\text{(C-3)}$$

(C-2) および (C-3) 式の関係を使って (C-1) 式に含まれる $\Phi_{G,I,d+1}$ さらに $\Phi_{G,I,D}$ を消去し，$\Phi_{G,i+1,D}$ を $\Phi_{G,I,d}$ および $\Phi_{G,i,D}$ から求めるように (C-1) 式を導出すれば次式のように求まる。すなわち，

$$\Phi_{G,i+1,D}=\frac{\left\{\mu_DA_i-\left(\frac{B_{d+1}}{\Delta\mu_D}+\frac{V_I\Sigma^T}{2}\right)\right\}\Phi_{G,iD}+\frac{1}{\Delta\mu_D}(B_{d+1}+B_d)\Phi_{G,I,d}+V_IG_{G,I,D}}{\mu_DA_{i+1}+\frac{B_{d+1}}{\Delta\mu_D}+\frac{V_I\Sigma^T}{2}} \quad \cdots\cdots\text{(C-4)}$$

上式で $G_{G,I,D}=S_{G,I,D}+\frac{1}{2}F_{G,I,D}$ である。

(C-4) 式で問題になる点は右辺の分子の第 1 項に負の項が含まれている点である。速中性子領域で外部線源のない遮蔽体内では内部線源も小さな値なので μ_D が小さな値の時，すなわち 90 度方向に近い進行方向の場合，しばしば負の $\Phi_{G,i+1,D}$ が得られる。この事実を明らかにするためには (C-4) 式を平板形状で書き表わすとよい。すなわち

$$\Phi_{G,i+1,D}=\frac{\left(1-\frac{\Delta x\Sigma^T}{2\mu_D}\right)\Phi_{G,i,D}+\frac{\Delta xG_{G,I,D}}{\mu_D}}{1+\frac{\Delta x\Sigma^T}{2\mu_D}} \quad \cdots\cdots\text{(C-5)}$$

を得る。(C-5) 式で

$\frac{\Delta x\Sigma^T}{2\mu_D}>1$ の場合，$\Phi_{G,i+1,D}$ は負になる恐れがある。もし負の中性子角度束が求められたら，これは明らかに誤りであるので，次に示すステップ近似により再び計算を行なう必要がある。

(2)　ステップ近似

ステップ近似は位相空間セル (Fig. 4.1) 内で中性子束は一定であるという仮定にもとづく。すなわち，

$$\Phi_{G,i+1,D}=\Phi_{G,I,D} \qquad \mu_D>0 \quad \cdots\cdots\text{(C-6)}$$

$$\Phi_{G,i,D}=\Phi_{G,I,D} \qquad \mu_D<0 \quad \cdots\cdots\text{(C-7)}$$

および

$$\Phi_{G,I,d+1}=\Phi_{G,I,D} \quad \cdots\cdots\text{(C-8)}$$

である。ステップ近似を (C-1) 式に適用すれば

$$\Phi_{G,i+1,D}=\frac{\mu_DA_i\Phi_{G,i,D}+\frac{B_d}{\Delta\mu_D}\Phi_{G,I,d}+V_IG_{G,I,D}}{\mu_DA_{i+1}+\frac{B_{d+1}}{\Delta\mu_D}+V_I\Sigma^T} \quad \cdots\cdots\text{(C-9)}$$

となり常に正の $\Phi_{G,i+1,D}$ が得られる。その代りに位相空間セル内で線束は一定であるという仮定にもとづいているので，遮蔽体内における中性子束の挙動を表わすのには最も不向きな近似である。

付録 D　微分散乱断面積の取り扱い

文献 (2) を参照して

$$\sigma(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}, E'\to E)dEd\bar{\Omega}$$
$$=\sigma_S(\Theta)\delta(\cos\Theta-\alpha)\frac{d\alpha}{dE}dEd\bar{\Omega} \quad \cdots\text{(D-1)}$$

ここで $\Theta=\cos^{-1}(\bar{\Omega}'\cdot\bar{\Omega})$ は実験室系における散乱角でエネルギ E と標的核の質量数 M に対し次の関係式がある (B-5)。

$$\cos\Theta=\frac{M+1}{2}\sqrt{\frac{E}{E'}}-\frac{M-1}{2}\sqrt{\frac{E'}{E}}\equiv\alpha \quad \cdots\cdots\text{(D-2)}$$

いま重心系における散乱角を ϑ で表わすと，実験室系と重心系の両系における σ_S は次式の関係式で表わせる。

$$\sigma_S(\Theta)d\alpha=\sigma_S(\vartheta)d\mu \quad \cdots\cdots\text{(D-3)}$$

ここで $\mu=\cos\vartheta$ である。

したがって

$$\sigma_S(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}, E'\to E)=\sigma_S(\vartheta)\frac{d\mu}{d\alpha}\delta(\cos\Theta-\alpha)\frac{d\alpha}{dE}$$
$$=\sigma_S(\vartheta)\delta(\cos\Theta-\alpha)\frac{d\mu}{dE} \quad \text{(D-4)}$$

また μ と E との関係は次式で表わされる (B-4)。

$$\mu=1-\frac{(M+1)^2}{2M}\left(1-\frac{E}{E'}\right) \quad \cdots\cdots\text{(D-5)}$$

上式から $\dfrac{d\mu}{dE}=\dfrac{(M+1)^2}{2ME'}$ であるから

$$\sigma(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}, E'\to E)=\sigma_S(\vartheta)\delta(\cos\Theta-\alpha)\frac{(M+1)^2}{2ME'} \quad \cdots\cdots\text{(D-6)}$$

いま $\sigma_S(\vartheta)$ を散乱角度分布関数 $f(E,\mu)$ を用いて表わすと

$$\sigma_S(E',\vartheta)=\sigma_S(E')f(E',\mu) \quad \cdots\cdots\text{(D-7)}$$

のように書き表わせる。

上式で散乱角度分布関数 $f(E,\mu)$ は次のように規格化される。すなわち，

$$2\pi\int_{-1}^{1}f(E',\mu)d\mu=1 \quad \cdots\cdots\text{(D-8)}$$

したがって (D-4) 式は次のように最き表わすことができる。

$$\sigma(\bar{\Omega}'\to\bar{\Omega}, E'\to E)$$
$$=\sigma_S(E')f(E',\mu)\delta(\cos\Theta-\alpha)\frac{(M+1)^2}{2ME'} \quad \cdots\cdots\text{(D-9)}$$

付録 E　角度分点の選び方

角度分点 Ω_{pq} の例およびガウス求積法の積分点とその重みについて。

（1） 角度分点 $\Omega_{pq}(\omega_p, \phi_{pq})$ の選び方とその重みについて $p=1\sim6(-1<\omega_p<1)$, $q=1\sim6(0<\phi_{pq}<\pi)$ の場合の例[60]

ω_p	重　み
0.93247	0.17132
0.66121	0.36072
0.23862	0.46791
−0.23862	0.46791
−0.66121	0.36072
−0.93247	0.17132

ϕ_{pq} （ラジアン）	重　み
$\phi_{11}=0.7854$	$\pi/2$
$\phi_{12}=2.3562$	$\pi/2$
$\phi_{21}=0.3927$	$\pi/4$
$\phi_{22}=1.1781$	$\pi/4$
$\phi_{23}=1.9635$	$\pi/4$
$\phi_{24}=2.7489$	$\pi/4$
$\phi_{31}=0.2618$	$\pi/6$
$\phi_{32}=0.7854$	$\pi/6$
$\phi_{33}=1.3090$	$\pi/6$
$\phi_{34}=1.8326$	$\pi/6$
$\phi_{35}=2.3562$	$\pi/6$
$\phi_{36}=2.8798$	$\pi/6$

したがって Ω_{pq} に対する重みは次のように決まる。

Ω_{pq}	重　み
Ω_{11}, Ω_{12}	0.26912
$\Omega_{21}, \Omega_{22}, \Omega_{23}, \Omega_{24}$	0.28334
$\Omega_{31}, \Omega_{32}, \cdots, \Omega_{36}$	0.24500
$\Omega_{41}, \Omega_{42}, \cdots, \Omega_{46}$	0.24500
$\Omega_{51}, \Omega_{52}, \Omega_{53}, \Omega_{54}$	0.28334
Ω_{61}, Ω_{62}	0.26912

（2） ガウス求積法における積分点およびその重み

$$\int_{-1}^{+1}f(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n}W_if(x_i)$$

積分点　$\pm x_i$	重み　W_i
$n=14$[91]	
0.9862838	0.0351195
0.9284349	0.0801581
0.8272013	0.1215186
0.6872929	0.1572032

0.5152486	0.1855384
0.3191124	0.2051985
0.1080549	0.2152639
$n=16$[92]	
0.9894009	0.0271525
0.9445750	0.0622535
0.8656312	0.0951585
0.7554044	0.1246290
0.6178762	0.1495960
0.4580168	0.1691565
0.2816036	0.1826034
0.0950125	0.1894506
$n=20$[92]	
0.9931286	0.0176140
0.9639719	0.0406014
0.9122344	0.0626720
0.8391170	0.0832767
0.7463319	0.1019301
0.6360537	0.1181945
0.5108670	0.1316886
0.3737061	0.1420961
0.2277858	0.1491730
0.0765265	0.1527534

【引　用　文　献】

1) E. P. Blizard, L. S. Abbott; Reactor Handbook (2nd ed.) Vol. III Part B, Shieding, Intersciene Publishers, New York, (1962)
2) H. Goldstein; Fundamental Aspects of Reactor Shielding, Addison-Wesley Pub. Co. Inc. Reading, Ma. (1959)
3) D. L. Broder et al.; Atomnaja Energija 12, 129 (1962)
4) A. P. Veselkin et al.; Problems of Dosimetry and Radiation Shielding, Moscow (1966)
5) R. D. Albert and T. A. Welton; A Simplified Theory of Neutron Attenuation and Its Application to Reactor Shielding Design, WAPD-15 (Del.) (1950)
6) G. T. Chapman and C. L. Storrs; Ettective Neutron Removal Cross Sections for Shielding, ORNL-1843 (1955)
7) A. F. Avery et al.; Methods of Calculation for Use in the Design of Shields for Power Reactors, AERE-R-3216 (1960)
8) R. G. Jaeger et al.; Engineering Compendium on Radiation Shielding Vol. I Shielding Fundamentals and Methods, Springer-Verlag, Berlin (1968)
9) J. Butler; The Status of Theoretical Methods for Reactor Shield Design, AEEW-R-361 (1964)
10) E. G. Peterson; MAC-A Bulk Shielding Code, HW-73381 (1962)
11) U. Canali et al.; MAC-RAD, A Reactor Shielding Code, EUR-2152e (1964)
12) L. Hjarne and M. Leimdorfer'; A Method for Predicting the Penetration and Slowing Down of Neutrons in Reactor Shields, Nucl. Sci. Eng. 24, 165 (1966)
13) K. Shure; P-3 Multigroup Calculation of Neutron Attenuation, Nucl. Sci. Eng. 19, 310 (1964)
14) B. G. Bennett and H. L. Beck; Legendre, Tschebyscheff, and Half-Range Legendre Polynomial Solutions of the Gamma Ray Transport Equation in Infinite Homogeneous and Two Media Plane Geometry, HASL-185 (1967)
15) H. Kahn; Random Sampling (Monte Carlo) Techniques in Neutron Attenuation Problems-I and II, Nucleonics 6 (5), 27 and 6 (6), 60 (1950)
16) E. D. Cahwell and C. J. Everett; A Pratical Manual on the Monte Carlo Method for Random Walk Problems, Pergamon, New York (1959)
17) D. C. Irving et al.; 05R, A General-Purpose Monte Carlo Neutron Transport Code, ORNL-(1965)
18) J. Certaine; A Solution of the Neutron Transport Equation Part I, NYO-3081 (1954); Part II, NDA-UNIVAC Moments Calculation, NYO-6268 (1955); Part III, Reconstruction of a Function from Its Moments, NYO-6270 (1956)
19) P. Soran and H. Goldstein; Reconstruction of Neutron Spatial Distributions from Spatial Moments, Trans. Am. Nucl. Soc. Vol. 13 No. 1 405 (1970)
20) V. A. Ambarzumian; Diffusion of Light by Planetary Atomosheres, Astron. Zh. 19, 30 (1942)
21) D. R. Mathews et al.; Deep Penetration of Radiation by the Method of Invariant Imbedding, Nucl. Sci. Eng. 27, 263, (1967)
22) J. O. Mingle; Applications of the Invariant Imbedding Method to Monoenergetic Neutron Transport Theory in Slab Geometry, Nucl. Sci. Eng. 28, 177 (1967)
23) 小松一郎，他；動燃報告書 J 201 の 70-3～70-6 (1970)
24) P. N. Stevens and D. K. Trubey; Weapons Radiation Shielding Handbook, DASA-1892-3 (1968)
25) J. C. Zink and J. W. Lucey; Neutron Transport in Two-Dimensional Slabs by Invariant Imbedding, Trans. Am. Nucl. Soc. Vol. 13 No. 2 855 (1970)

26) M. Clark, Jr. and K. F. Hansen; Numerical Methods of Reactor Analysis, Academic Press, New York (1964)
27) 野中至；核物理学，培風館 (1956)
28) D. J. Hughes; Neutron Cross Sections, Pergamon Press, London, (1957); 西野治訳，中性子断面積，産業図書 (1966)
29) E. Amaldi; The Production and Slowing Down of Neutrons, Handbuch der Physik Vol. XXXVIII/2, Springer-Verlag, Berlin (1959)
30) W. Hauser and H. Feshbach; Phys. Rev., 87, 366 (1952)
31) P. A. Moldauer; Statistical Theory of Nuclear Collision Cross Sections, 135 B642, (1964)
32) P. A. Moldauer; Rev. Modern, Phys., 36, 1079 (1964)
33) 丸山倫夫； 終状態が連続な領域での高速中性子の非弾性散乱，高速中性子断面積研究会報告 JAERI 1102 (1966)
34) B. Davison and J. B. Sykes; Neutron Transport Theory, Oxford Univ. Press, New York (1958)
35) K. M. Case and P.F. Zweifel; Linear Transport Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1967)
36) SIAM-AMS Proceedings Volume I, Transport Theory, AMS Providence, Rhode Island (1969)
37) 鵜飼正二，西原宏； 中性子輸送方程式の数学的理論の現状と問題，日本原子力学会誌 Vol. 13 No. 2 (1971)
38) 片岡巌； γ 線平板多重層遮蔽の解析法の研究，船研報告 第3巻 第4号 (1966)
39) A. M. Weinberg and E. P. Wigner; The Physical Theory of Neutron Chain Reactor, Univ. of Chicago Press, Chicago (1958)
40) R. Gast; On the Equivalence of the Spherical Harmonics Method and the Discrete Ordinate Method using Gauss Quadrature for the Boltzmann Equation, WAPD-TM-118 (1958)
41) G. C. Wick; Zeits. fur Physik, Vol. 121, 702 (1943)
42) S. Chandraseker; Radiative Transfer, Oxford Univ. Press, London (1950)
43) B. G. Carlson; Solution of the Transport Equation by the Sn Method, LA-1891 (1955)
44) C. E. Lee; The Discrete Sn Approximation to Transport Theory, LA-2595 (1962)
45) B. G. Carlson; Numerical Formulation and Solution of Neutron Transport Problems, LA-2996 (1964)
46) W. W. Engle, Jr.; A Users Manual for ANISN, A One Dimensional Discrete Ordinates Transport Code with Anistropic Scattering, K-1693 (1967)
47) F. R. Mynatt; A User's Manual for DOT, A Two-Dimensional Discrete Ordinates Transport Code with Anistropic Scattering, K-1694 (1968)
48) S. Preiser, G. Rabinowitz, and E. de Dufor; A Program for the Numerical Integration of the Boltzmann Transport Equation-NIOBE, ARL Technical Report 60-314 (1960)
49) 片岡巌，竹内清； 球対称形状におけるガンマ線輸送方程式の直接積分コード 06 NIOBE-G について，船研報告 第2巻 第6号 (1965)
50) J. Certaine, J. Brooks; Addition of Inelastic Scattering to the Univac Moment Calculations, NDA 2015-92 (1956)
51) K. Takeuchi and I. Kataoka; A Method for the Numerical Integration of the Neutron Transport Equation in Slab Geometry, J. Nucl. Sci. Technol. Vol. 3 No. 5 (1966)
52) 竹内清，片岡巌； ボルツマン輸送方程式の数値積分による中性子平板問題の解析，船研報告 第3巻 第5号 (1966)
53) A. D. Krumbein; Summary of NDA Unclassified Results of Moments Calculations for the Penetration of Neutrons through Various Materials, NDA-92-2 (Rev), (1957)
54) R. D. Ritchtmyer; A Numerical Method for the Time-Dependent Transport Equation, NYO-7696 (1957)
55) K. Takeuchi; A Numerical Method for the Neutron Transport Equation in Finite Cylindrical Geometry, J. Nucl. Sci. Technol. Vol. 6 No. 8 (1969)
56) 竹内清； 円柱形状遮蔽体に対する中性子輸送方程式の数値解法，船研報告 第6巻 第3号 (1969)
57) K. Takeuchi; Numerical Solution to Space-Angle Energy-Dependent Neutron Integral Transport Equation, J. Nucl. Sci· Technol. Vol. 8 No. 3 (1971)
58) K. Takeuchi and I. Kataok; Discrete Ordinates Numerical Integration Method for Neutron Transport Equation in Slab Geometry, J. Nucl. Sci. Technol. Vol. 5 No. 7 (1968)
69) 竹内清，片岡巌；Discrete Ordinates 直接数値積分解法による中性子平板問題の解析，船研報告 第6巻 第2号 (1969)
60) 竹内清； 有限円柱形状遮蔽体に対する中性子計算コード PALLAS，船研報告 第7巻 第5号 (1970)
61) 竹内清； 船舶技術研究所で開発された電子計算機プログラムの概要，船研報告 第8巻 第6号
62) K. Takeuchi; The MENE Neutron Transport Code, Papers of Ship Research Institute, No. 29 (1968)
63) K. Takeuchi; MENE-2, An R-Z Discrete Ordinate Neutron Transport Code, The Penn. State. Univ. Nuc E 35 (1968)
64) T. Rockwell, III.; Reactor Shielding Design Manual (1956), McGraw-Hill Co. Inc., New York

65) A. Tsuruo; Unscattered Flux from Spherical and Cylindrical Sources with Shell-Shaped Shields, J. Nucl. Sci. Technol., 2 [7], 261 (1965)
66) H. Ōno and A. Tsuruo; An Approximate Calculation Method of Flux for Spherical and Cylindrical Sources with a Slab Shield, J. Nucl. Sci. Technol., 2 [6], 229 (1965)
67) V. V. Verbinski, et al.; Measurements and Calculations of the Spectral and Spatial Details of the Fast-Neutron Flux in Water Shields, Nucl. Sci. Eng. 27, 283 (1967)
68) L. Harris, Jr.; Measurement of Fast Neutron Spectra in Water and Graphite, Technical Report, Univ. of Michigan, 07786-1-T (1967)
69) B. E. Watt; Energy Spectrum of Neutrons from Thermal Fission of U^{235}, Phys. Rev., 87, 1037 (1952)
70) E. L. Slaggie and J. T. Reynolds; O^{16} Fast Neutron Cross Sections and Legendre Moments Below 15.0 MeV, KAPL-M-6452, (1965)
71) D. J. Hughes and R. B. Schwartz; Neutron Cross Sections, BNL-325, 2nd ed. (1958)
72) D. B. Fossan et al.; Neutron Total Cross Sections of Be, B^{10}, B, C and O, Phys. Rev., 123, 209 (1961)
73) A. E. Profio, et al.; The Neutron Spectrum from a Fission Source in Graphite, Nucl. Sci. Eng. 35, 91 (1969)
74) E. L. Slaggie and J. T. Reynolds; C-12 Fast Neutron Cross Sections and Legendre Moments Below 15 MeV, KAPL-3099 (1966)
75) P. F. Yergin et al.; MeV Total Cross Sections with the Rensselaer LINAC, Proc. Conf. Neutron Cross Section Technology, Washington, D. C., (1966)
76) A. F. Avery, et al.; Comparison of Spectra Calculated by Discrete Ordinate Methods With Time-of-Flight Measurements in Polythene, Graphite and Sodium, AERE-R 5773, (1968)
77) D. B. Gayther et al.; Neutron Energy Spectra and Angular Distributions From Targets Bombarded by 45 MeV Electrons, J. Nucl. Energy Vol. 21, 733 (1967)
78) M. C. Bertin, et al.; Neutron Cross Sections of U^{238}, U^{225}, U^{237}, U^{239}, U^{234}, U^{236}, Pu^{239}, Pu^{240}, W, Pb, Ni, Cr, C, Li^{6}, Li^{7}, and T, UNC-5099 (1964)
79) H. Goldstein; Neutron Cross Sections for Neutron Attenuation Problems Proposed by the ANS Shielding Division, TID-21294, (1963)
80) 布施卓嘉，三浦俊正，山路昭雄; Private Communication
81) A. M. Bresesti, et al.; Threshold Reaction Exitation Functions Intercalibrated in a Pure Fission Spectrum, Nucl. Sci. Technol. 40, (1970)
82) H. Liskien and A. Paulsen; Compilation of Cross Sections for Some Neutron Induced Threshold Reactions, EUR 119.e (1961)
83) 布施卓嘉; しきい反応法による中性子の測定，船研報告　第1巻　第1号 (1964)
84) 竹内清; 中性子直円筒ダクト問題に対する積分型輸送方程式の数値解法，昭和44年原子力学会炉物理・学分科会予稿集 D 4
85) W. W. Engle; A User's Manual for ASOP, ANISN Shield optimization program, CTC-INF-941 (1969)
86) 金井康二，片岡巌; 球状遮蔽体の最適化に関する理論的研究 II ダイナミックプログラミングによる数値解法，昭和45年原子力学年会予稿集 A 2
87) 金井康二，伊藤泰義，片岡巌; 遮蔽体の最適化に関する理論的研究——最適配列について——昭和46年原子力学会年会 C 52
88) S. Glasstone and M. C. Edlund; The Elements of Nuclear Reactor Theory, D. Van Nostrand Co. Inc., New York (1952); 伏見康治，大塚益比古訳，原子炉の理論，みすず書房 (1961)
89) N. Bohr; Nature, 137, 344 (1936)
90) G. Breit and E. P. Wigner; Phys. Rev. 49, 519 (1936)
91) A. N. Lowan, et al.; Table of the Zeros of the Legendre Polynomials of Order 1-16 and the Weight Coefficients for Gauss' Mechanical Quadrature Formula, Bulletin of the AMS Vol. 48, No. 10 PP. 739～743 (1943)
92) P. Davis and P. Rabinowitz; Abscissas and Weights for Gaussian Quadratures of High Order, Journal of NBS Vol. 56, No.1 (1956)

謝　辞

本研究は船舶技術研究所における舶用炉の遮蔽の理論的研究の1部として行なったものである。研究遂行にあたり，ご助言，ご激励をいただいた中田原子力船部長，ならびに佐藤前原子力船部長（現，造船研究協会），また本研究の全般にわたりご指導をいただいた片岡前遮蔽構造研究室長（現，三菱原子力工業）に篤く感謝致します。また鉄—水多重層の実験データを提出して下さった布施東海支所長ならびに三浦，山路両技官に感謝の意を表します。

本研究のまとめに際して懇篤なるご助言とご指導をいただいた京都大学兵藤知典教授に篤い感謝の意を表します。