

# 中性子遮蔽解析に用いる輸送方程式の数値解法の研究

竹 内 清\*

## Study on a Numerical Approach to the Boltzmann Transport Equation for the Purpose of Analyzing Neutron Shields

By

Kiyoshi TAKEUCHI

A numerical method for solving the Boltzmann transport equation is presented for practical neutron shielding calculations. The energy-dependent transport equation written in its general form is converted into a set of coupled one-group integral equations for each energy mesh, with the sources due both to the true source and to the elastically and inelastically scattered neutrons. The scattering source is evaluated by means of numerical integration of the scattering integral through the application of quadrature schemes. Highly anisotropic scattering is taken into account for elastic scattering, while isotropic scattering is assumed for inelastic scattering. The derived integral equation is solved by performing line integration over spatial  $\vec{r}$  along the neutron flight path in the direction of neutron motion between successive spatial mesh intervals at each discrete direction. No iterative technique is applied in the calculation of the integral equation for the benefit of shortening the computing time and of providing always reasonable solutions.

Discussions are given in chapter 4 on the advantages and disadvantages of all the procedures which have been currently used in neutron shielding calculations. The application of the present method to a variety of actual geometries is illustrated in chapter 6, on the basis of which PALLAS program has been designated to perform neutron penetration calculations for one dimensional plane and spherical, and two dimensional cylindrical geometries.

The calculational accuracy of the present method are judged by performing comparisons of its calculated results with analytical solutions for unscattered flux and angular distribution in plane, spherical and two dimensional cylindrical geometries, and with experimental angular spectra in water for fission neutrons from reactor core, and in graphite and polyethylene for fission neutrons from Linac source. Excellent agreement is obtained between the present calculations and analytical or experimental results. To verify the applicability of the method to practical neutron shielding calculations, further comparison is made of the calculated with the experimental results for the reaction rate of penetrated fast neutrons through a stratified iron-water shield, with good agreement obtained between them. From the discussions made in chapter 10 on the advantages and disadvantages of the present method, it is concluded that the method is a reliable and useful tool for the analysis of neutron shields in a variety of source problems.

### 目 次

要 旨	..... 2	1.1 緒 言	..... 3
第1章 序 論	..... 3	1.2 在来の中性子遮蔽計算法	..... 7

\* 東海支所 原稿受付: 昭和47年8月1日

第2章 定常の中性子輸送方程式	10	6.5 三次元 $(x, y, z)$ 座標形状	35
第3章 中子と物質との相互作用	11	第7章 非散乱線の計算結果と解析解との比較	36
3.1 緒言	11	7.1 平板体積線源	36
3.2 弾性散乱	11	7.2 球体積線源	37
3.3 非弾性散乱	12	7.3 二次元円柱形状線源	39
3.4 放射捕獲	13	第8章 実験および他の計算方法による結果と本 解法による計算結果との比較	41
3.5 荷電粒子放出の核反応	13	第9章 JRR-4号炉における鉄—水多重層透過速 中子線の計算	49
3.6 $(n, 2n)$ 反応	13	第10章 検討	54
3.7 遅い中子線による核反応	13	第11章 結言および今後の課題	58
3.8 中速中子線による核反応	14	11.1 結言	58
3.9 速中子線による核反応	14	11.2 今後の課題	59
3.10 中子線遮蔽計算に重要な中子線断面積	14	11.2.1 二次元形状における比較計算の必要 性	59
第4章 中子線遮蔽計算における輸送方程式の数値 解法	14	11.2.2 中子線透過計算に必要な核データの問 題	59
4.1 緒言	14	11.2.3 本計算法の拡充の第1として熱中子線 透過計算問題	59
4.2 中子線遮蔽計算における Discrete Ordinates 解法	14	11.2.4 本計算法の拡充の第2としてガンマ線 透過計算問題	60
4.3 Discrete Sn 法	15	11.2.5 本計算法の中子線ストリーミング計算 への適用	60
4.4 直接積分法 (NIOBE)	16	11.2.6 本計算法の遮蔽最適設計への適用	60
4.5 直接積分法 (EOS)	16	11.2.7 三次元形状に対する計算コードの作 製	60
第5章 Discrete Ordinates 直接積分法 (MENE, PALLAS)	20	11.2.8 総合的な放射線遮蔽の解析法の確立	61
5.1 緒言	20	付録 A 複合核	62
5.2 定常のボルツマン輸送方程式	20	付録 B 弾性散乱における諸関係式	62
5.3 散乱積分計算	21	付録 C ダイヤモンド差分法とステップ近似	63
5.3.1 弾性散乱積分項 $G_{el}(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$ の計算	21	付録 D 微分散乱断面積の取り扱い	64
5.3.2 非弾性散乱積分項 $G_{in}(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$ の計算	25	付録 E 角度分点の選び方	64
5.4 輸送方程式の直接積分計算	28	引用文献	65
5.5 同一エネルギー群内散乱中子線の計算	30	謝辞	67
5.6 差分形の計算式	31		
第6章 実際の座標形状への適用	32		
6.1 一次元平板形状	32		
6.2 一次元球対称形状	32		
6.3 無限円柱形状	33		
6.4 二次元 $(r, z)$ 円柱形状	34		

## 要 旨

線源から放射された中子線の物質透過現象を解明することは、中子線遮蔽上基本的な情報が得られる点が重要である。原子炉の放射線遮蔽においては中子線およびガンマ線の遮蔽体透過が主要な問題である。このうち中子線の透過問題はそれ自身の重要さとともにガンマ線透過問題の要因となる二次ガンマ線の線源計算

の基本となるものである。したがって、中子線の物質透過問題を正確に解析する理論的解析法の確立は、原子炉の放射線遮蔽設計に必要な諸量を算出することができることを意味するので最も重要なことである。

これまでに数多くの研究が中子線透過問題に対して行われている。これらのうち中子線の遮蔽体透過を理論的に取り扱った各種の計算法については第1章で概説し、在来のこれらの計算法を中子線遮蔽計算に適

用した場合の各計算法のもつ不利な点や適用限界を明らかにした。その結果、中性子の遮蔽体透過を理論的に解析するにはいかなる方法が適しているかが明らかにされた。第4章では中性子透過計算に適しているといわれる輸送方程式の Discrete Ordinates 法にもとづく数値解法につき検討を加えた。まず Discrete Ordinates 法が中性子透過計算に適している理由を明らかにし、次いで同法にもとづく数値解法である Sn 法や同じく Discrete Ordinates 法にもとづく直接積分法の NIOBE および EOS につき検討を加えた。その結果、これらの計算法を中性子透過計算に適用した場合の不利な点や適用限界が明らかにされた。

本研究の目的は、在来のこれらの中性子透過計算法のもつ不利な点や適用限界を克服して、中性子透過問題を正確に、かつ効果的に計算できる理論的方法の確立にある。そのために、遮蔽計算で重要な定常状態を対象として、定常の中性子輸送方程式を第2章でたてた。第3章で中性子の物質との相互作用に関する基本的な諸現象について述べ、中性子透過の理論的解析上重要となる現象を明らかにした。第5章で中性子透過問題を正確に、かつ効果的に取り扱うことができる理論的解析法として、中性子の定常の輸送方程式を境界条件を満足する比較的厳密に近い方法で解く直接積分法を導いた。本解法は、中性子束の空間、エネルギー、角度に関して必要に応じて詳細な分布を与えることができる。したがって遮蔽体内の中性子束分布から遮蔽体内で中性子に起因して発生する二次ガンマ線の線源分布を求めることができる点で優れている。また本解法は多重層の内側境界および外側境界で大きく変化する中性子角度分布を取り扱うのに適している。一般に遮蔽体は多重層で構成されるのが普通であるから、上述の利点は本解法の中性子透過問題適用に対する特長となる。

第5章で導出された最終式は空間形状に関して何の制限も設けられていないので任意の遮蔽形状に適用することが可能である。したがって第6章に実際の遮蔽形状への適用例として、一次元平板形状、球対称形状、無限円柱形状、二次元円柱形状、さらに三次元直角座標形状への適用について述べた。

第7章では本研究による輸送方程式の数値解法の計算精度を確かめるために、一次元平板形状における有限厚さで吸収断面積を有する線源に対する非散乱線の計算と解析解との比較、一次元球形状における大きな半径で吸収断面積を有する球体積線源および小さな半

径で同種類の球体積線源に対する非散乱線の計算と解析解との比較を行なった。さらに二次元円柱形状における吸収断面積を有する円柱体積線源に対する線源内および遮蔽体内における非散乱線の計算と解析解との比較を行なった。

第8章では実際の中性子透過問題に対して本計算法の精度を確かめるために、絶対値で測定値の求められている信頼のできる実験として2例を選び、本計算法にもとづく計算コード PALLAS によりこの2例に対し比較計算を行なった。すなわち、その1はBSR-1(およびFNR)炉における水中の中性子角度スペクトルであり、その2は米国における中性子透過のベンチマーク問題であるグラフィット中の中性子角度スペクトルである。さらに第3の比較計算問題は絶対値で測定値が求められていないが、ポリエチレン層透過の中性子角度スペクトルの測定値が発表されているので、この問題を計算し透過中性子の前方方向角度の中性子スペクトル上1点で測定値を計算値に規格化して比較検討を行なった。

第9章では実際の原子炉遮蔽の理論的解析の1例として、日本原子力研究所の4号炉の中に鉄層を3枚配置して一次遮蔽を模擬し、この問題を一次元球形状で計算し遮蔽体の各物質の境界における速中性子エネルギースペクトルおよび角度分布を求め、さらにしきい検出器による速中性子の反応率の測定値と計算による速中性子の反応率との比較を行ない、速中性子の減衰計算の正確さを確かめた。

第10章では検討の章を設け本解法の中性子透過問題適用への利点および不利な点を明らかにし、解析解や実験結果に対する比較計算による比較の結果から、本解法による中性子透過計算の精度を確かめ、本解法の中性子遮蔽解析に対する信頼性を検討した。

第11章では結言として本解法の中性子遮蔽解析に対する有効性を述べた。さらに本研究の今後の課題として総合的な放射線遮蔽の設計および解析を目標として、中性子に起因する二次ガンマ線の計算から原子炉のガンマ線遮蔽計算の包含、簡単な形状のダクトに対する中性子ストリーミング計算への適用、さらに遮蔽最適設計計算への寄与にも言及した。

## 第1章 序 論

### 1.1 緒 言

現在、放射線遮蔽の主眼となる対象物は原子炉である。その他にも放射線遮蔽の対象となるものに放射性

同位元素や各種の加速器などがあげられるが、これらの放射線源の遮蔽は原子炉の遮蔽のために開発された各種の技法を応用することによって遂行され得る。原子炉の放射線遮蔽を効果的に行なう技法の開発は一般の陸上炉に対しても望ましいことであるが、原子力船の原子炉の遮蔽では特に遮蔽重量が経済的な観点で大きな負の要因となるので、必然的な要望となる。

本研究の目的な原子炉の遮蔽を効果的に行なうために必要な理論的技法の確立にある。原子炉の遮蔽の分野では対象となる放射線に中性子とガンマ線とがあるが、ガンマ線の遮蔽体透過は遮蔽体内で中性子に起因して発生する二次ガンマ線の透過が炉心から放射される一次ガンマ線の透過とともに透過の要因となる。したがって中性子の遮蔽体透過現象を正確に解析する理論的解析法の確立は遮蔽を効果的に行なうための基本となる。

中性子の物質透過を正確に解析する理論解析法としては、中性子の輸送方程式を解く方法が最も望ましい。しかし、エネルギー、空間、角度依存の中性子輸送方程式を解析的に解くことは不可能に近い。したがって遮蔽の理論解析法としての輸送方程式の解法は全て近似解法であり、しかも大型高速の電子計算機使用の数値解法とならざるを得ない。さらに遮蔽における輸送方程式の解法の研究は解の存在を前提とした解法の技術の研究ということになる(第4章)。本研究による中性子輸送方程式の数値解法も解法の技術の研究であり、それは多重層より成る厚い遮蔽体を透過する中性子の解析に最も有効であることを目的として行なわれた。

放射線透過計算に対する輸送方程式の数値解法は、Discrete Ordinates 法にもとづく解法がほとんどである。Discrete Ordinates 法が放射線透過計算に優れている理由は次のようである。すなわち中性子の進行方向角を有限個の分点に分け、各角度分点で独立に輸送方程式を解く Discrete Ordinates 法は多重層の内側境界および外側境界で大きく変化する中性子角度分布の取り扱いに適している。また速中性子の深い透過で問題となる鋭い前方ピークの中性子角度分布を首尾良く取り扱い得る利点があるからである(第4章)。したがって本論文で提案する定常の中性子輸送方程式の数値解法も Discrete Ordinates 法にもとづいており、中性子の進行方向角を単位球面上で有限個の角度分点で代表させる。そしてこの角度分点の各分点で中性子の進行方向にその飛程に沿って輸送方程式を直接積分して

解を求める。エネルギー依存はエネルギーを中性子レサジで表わし、このレサジ単位で等間隔に有限個に分け、その分点をレサジ分点として逆にこれからエネルギーメッシュを決めてエネルギー組分け表示を行なう。また散乱積分計算は次のように数値積分によって行なう。すなわち、非等方散乱の弾性散乱は散乱角度分布関数を任意の高次のルジャンドル多項式で展開近似することにより散乱の非等方を取り扱う。一方非弾性散乱は実験室系で等方散乱の仮定(第3章)を設けることにより、散乱減速関数を用いて計算を行なう。これらの弾性散乱および非弾性散乱に起因する中性子の散乱積分の計算は第5章で設定する仮定にもとづいて数値積分計算される。この仮定の基本は中性子束  $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, u)$  が角度およびレサジについて微小区間  $d\vec{\Omega}$  および  $du$  内でステップ関数で近似できる、というのである。したがって、本解法の計算精度は角度分点数およびレサジ間隔の幅によって決まることなる(第10章)。

さらに本解法の特徴として、在来の輸送方程式の解法で数値解を得るのに一般に使用されている繰返し収斂法の使用を回避した点がある。これは繰返し回数だけ計算時間の短縮が可能であるのと、在来の数値解法で問題となっている対象とする遮蔽問題によっては収斂が一樣でないこと、また収斂をしないこともあるという不安、さらに収斂した値が負の値のような異常な値に収斂することもあるという恐れを取り除くためである(第5章)。この繰返し収斂法の使用の回避により本解法は遮蔽計算として大きな利点を持つことになるが、その反面計算におけるレサジ間隔を密に定めないと計算精度が悪くなる不利な点も併せ持つことになる(第10章)。しかし、計算精度に対してあまり厳しい要求をしない限りレサジ間隔を適当な値に定めることができるので(第10章)、繰返し収斂法の不使用による計算時間の短縮は本計算法をパラメタサーベイ用の計算に適用することを可能にし、さらに遮蔽設計計算に対しても適用することが可能となるので極めて重要な利点である。

一般に遮蔽体は形状が大きいので、計算上数多くの空間メッシュが必要となる。しかし、もし空間メッシュ間隔を粗く選んでも計算精度に及ぼす影響が少なければ、空間メッシュ数を減ずることが可能となる。したがって、空間メッシュ間隔を粗く選べることは遮蔽計算上大きな利点となる。本解法は輸送方程式の空間積分を空間メッシュ間で直接積分することにより計算するので空間メッシュ間隔を粗く選ぶことができる

(第10章)。これに対し、中性子透過計算に最も一般的に使用されている Discrete Sn 法は空間および角度メッシュに関して小さなセルを仮定し、このセル上で互いに向かい合う対辺の midpoint 上の中性子束はその変化の程度が線型関数で表わされる程度であるという基本的な仮定の上に成り立っている(第4章)。このために Discrete Sn 法は空間および角度メッシュを細かく選ばないと減衰の激しい、また速中性子の物質透過のように角度分布の変化の激しい遮蔽計算では計算精度が悪くなる恐れがある。

遮蔽体の形状が大きいことに起因するもう一つの問題点は、線源から放射される核分裂スペクトルの中性子は厚い遮蔽体を透過するのに従ってスペクトルを硬化することである。その結果、遮蔽体の外側に近いほど速中性子が主要となる。一方低いエネルギーの中性子はこの外側近くでは厚い遮蔽体を透過して来た速中性子が散乱減速されて生じたものである。したがって遮蔽体の外側に近いところでは速中性子が中性子全体に影響を及ぼすようになるので、透過速中性子束を正確に求めることが中性子の遮蔽体透過問題を正確に計算するための要点となる。しかし、速中性子は深い透過で鋭い前方ピークの角度分布を示すので、輸送方程式を解いてこの鋭い前方ピークの中性子角度分布を正確に求めることは極わめて困難なことであった。在来の輸送方程式の解法で一般的に使用されている球調和法はこの種の現象を取り扱うのに最も不向きである(第1章1.2)。さらに Discrete Ordinates 法にもとづく在来の各種の数値解法(Sn法やNIOBE, EOS等)でも、極端に前方ピークの角度分布をもつ速中性子の深い透過問題の取り扱いには難点があった(第4章)。この難点を克服して速中性子の深い透過を正確に取り扱う中性子透過計算法の確立が本研究の目的である。それは速中性子の深い透過問題を特に精度良く計算できれば、上述のように低いエネルギーの中性子は速中性子の散乱減速によって生じたものであり、しかも低いエネルギーの中性子の透過問題の取り扱いには特別の難点はないので、中性子全体の透過問題を精度良く取り扱うことが可能となるからである。

本論文で提案する中性子輸送方程式の数値解法は数式の導出の過程で空間形状を固定しないので、導出された最終式は任意の遮蔽体形状へ適用することが可能である。そこで第6章で一次元平板、球、無限円柱形状、二次元円柱形状、さらに三次元直角座標形状への適用を述べる。

本計算法の計算精度は第7章で各種形状における吸収係数がある場合の体積線源に対する非散乱線の減衰計算を行ない、解析解と比較し精度の高いことを確かめた。次いで第8章で速中性子の物質透過問題に対する計算精度を確かめるために、絶対値で測定値の求められている実験に対し、比較計算を行ない実験結果との比較を試みた。その結果、本計算法は速中性子の物質透過問題を精度良く取り扱うことが明らかにされた。さらに第9章で実際の原子炉の一次遮蔽を模擬した水-鉄三重層に対する速中性子透過計算を行ない、速中性子遮蔽の解析を試みた。その際、速中性子の減衰が絶対値で正しく計算されているかどうかを確かめるために、しきい検出器による速中性子の反応率と計算による同反応率とを比較した。その結果、減衰計算を正確に行なっていることが確かめられた。以上の比較計算の結果、本解法による中性子透過計算に対する信頼性が確認された。

最後に、本研究の成果である中性子遮蔽の理論的解析法の総合的な放射線遮蔽問題への適用可能性について言及する。

参考文献は本文中右肩に)を付して記し、本論文の末にまとめた。また付録も本論文の末にまとめた。なお本論文で使用する記号は次にまとめて記しておく。

#### 【記号の説明】

$\vec{r}$ : 位置を示すベクトル。直角座標では  $(x, y, z)$  で表わし、円柱座標では  $(r, z)$  で表わす。単に  $r$  は半径方向の位置を表わし、 $d$  や  $t$  も距離を表わす変数として使用する。

$\vec{\Omega}$ : 中性子の進行方向の単位ベクトル。また散乱の場合は散乱後の進行方向単位ベクトル。これに対し、 $\vec{\Omega}'$  で散乱前の中性子の進行方向単位ベクトルを表わす。

$\vec{\Omega}(\theta, \phi)$ : 上述の  $\vec{\Omega}$  を極角  $\theta$  と方位角  $\phi$  で表わしたもの。

$\theta$ : 中性子の進行方向と軸とのなす角。

$\phi$ : 中性子の進行方向単位ベクトルを  $(x, y)$  平面に斜影し、それと  $x$  軸とのなす角。分点表示では  $\phi_{pq}$  と書く。

$\omega$ : 極角の余弦、 $\omega = \cos \theta$ 。分点表示では  $\omega_p$  と書く。

$\bar{\Omega}_{pq}(\omega_p, \phi_{pq})$ : 上述の  $\bar{\Omega}(\theta, \phi)$  を  $\theta$  の代わりに  $\omega$  で書き換え, Discrete Ordinates 角度分点で表わしたもの。

$\Delta\Omega_D$ :  $D$  番目の角度分点の代表する角度の区間

$\Delta\bar{\Omega}(\Delta\omega, \Delta\phi)$ :  $\bar{\Omega}$  方向の微小角度区間

$E$ : 中性子のエネルギー, または散乱後のエネルギー。これに対し,  $E'$  は散乱前の中性子のエネルギーを表わす。

$\Delta E_G$ :  $G$  グループのエネルギー幅

$E_{\max}$ : 解くべき問題の中性子の最大エネルギー

$u$ : 中性子レサジ

$u_j$ :  $j$  番目の中性子レサジ

$\Delta u$ : 微小レサジ区間

$h$ : レサジ等間隔に選んだレサジメッシュの幅

$J$ : エネルギー組み分けの総数

$\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ : 中性子角度束密度; 位置  $\bar{r}$  で単位エネルギー, 単位立体角あたりエネルギー  $E$  をもつ中性子が  $\bar{\Omega}$  方向へ進行し,  $\bar{\Omega}$  方向に垂直な単位面積を単位時間に通過する数。なおレサジ単位で表わせば  $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)$  である。

$\Phi_0(\bar{r}, E)$ : 中性子スカラー束;  $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  を  $\bar{\Omega}$  の全立体角で積分したもの。なおレサジ単位で表わせば  $\Phi_0(\bar{r}, u)$  である。

$\Phi_l(x, E)$ :  $\Phi(x, \omega, E)$  をルジャンドル多項式展開した場合の展開係数。なおレサジ単位で表わせば  $\Phi_l(x, u)$  である。

$d\bar{r}$ : 微小位相空間,  $d\bar{r}d\bar{\Omega}dE$ 。

$\Sigma_t(\bar{r}, E)$ : 巨視的全断面積 ( $\text{cm}^{-1}$ )。なお単一エネルギーの比較計算では  $\Sigma_1$  を線源内,  $\Sigma_2$  を遮蔽体内における巨視的全断面積として使用する。

$S(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ : 純線源 (外部線源); 位置  $\bar{r}$  で単位エネルギー単位立体角あたり, エネルギー  $E$  をもち進行方向が  $\bar{\Omega}$  である中性子が単位体積あたり単位時間に生まれる数。なお単一エネルギーの比較計算では  $S(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  を全立体角で積分した線源の強さとして  $S_V(x)$  を使用する。

$n(\bar{r})$ : 位置  $\bar{r}$  における単位体積あたりの原子の数。

$M$ : 原子の質量。なお  $M$  の逆数  $\rho$  をと書

く。

$\sigma_{S,i}(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E)$ :  $i$  番目の核種の微視的微分散乱断面積; エネルギーが  $E'$  で進行方向が  $\bar{\Omega}'$  の中性子が核に散乱されてエネルギーが  $E$  で方向が  $\bar{\Omega}$  に単位エネルギー, 単位立体角あたりなる微分散乱断面積。

$\sigma_{S,i}^{el}(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E)$ : 弾性散乱による微視的微分散乱断面積。

$\sigma_{S,i}^{in}(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E)$ : 非弾性散乱による微視的微分散乱断面積。

$f(E, \mu)$ : 弾性散乱による散乱角度分布関数。なおレサジ単位で表わせば  $f(u, \mu)$  となる。

$f_i^{in}(E', E)$ :  $i$  番目の核による非弾性散乱でエネルギー  $E'$  の中性子がエネルギー  $E$  に単位エネルギーあたり減速される確率。

$g_i^{in}(E', E)$ :  $f_i^{in}(E', E)$  を連続関数で表わした場合の減速確率を表わす関数。

$\sigma_t$ : 微視的全断面積 (バーン)。

$\sigma_S$ : 微視的散乱断面積 (バーン)。

$\sigma_S^{el}$ : 微視的弾性散乱断面積 (バーン)。なお簡単のため  $\sigma_{el}$  と表わすこともある。

$\sigma_S^{in}(E)$ : 微視的非弾性散乱断面積 (バーン)。なお簡単のため  $\sigma_{in}$  と表わすこともある。

$\sigma_a$ : 微視的吸収断面積 (バーン)。

$\sigma_{nr}$ : 微視的 ( $n, r$ ) 反応断面積 (バーン)。

$\sigma_{np}$ : 微視的 ( $n, p$ ) 反応断面積 (バーン)。

$\sigma_{n\alpha}$ : 微視的 ( $n, \alpha$ ) 反応断面積 (バーン)。

$\sigma_{n2n}$ : 微視的 ( $n, 2n$ ) 反応断面積 (バーン)。

$\vartheta$ : 重心系における散乱角。

$\Theta$ : 実験室系における散乱角。

$\mu$ :  $\mu = \cos \vartheta$ , なお分点表示では  $\mu_m$  と書く。

$\alpha$ :  $\alpha = \cos \Theta$ , なお  $\alpha$  を分点表示する場合は  $\alpha_m$  と書く。

$\phi$ : 散乱の方位角, なお分点表示では  $\phi_n$  と書く。

$A$ : 水素原子による弾性散乱における非等方パラメタ。

$f_p(u)$ :  $f(u, \mu)$  をルジャンドル多項式展開した場合の展開係数。

$P_l(\alpha)$ :  $l$  次のルジャンドル多項式。

$P_p(\mu)$ :  $p$  次のルジャンドル多項式。

- $P_n^m(\cos \theta)$ : ルジャンドルの陪関数。
- $V$ : 体積, なお  $V_1$  は I 番目の体積要素。
- $G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ : 散乱積分項。
- $G_{el}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ : 弾性散乱による散乱積分項。
- $G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ : 非弾性散乱による散乱積分項。
- $\eta_n$ :  $\eta_n = \cos \psi_n$
- $W_n^*$ :  $\psi$  についての積分を数値積分する際の積分点  $\psi_n$  に対する重み。
- $D$ : ( $z$  軸,  $\bar{\Omega}'$ ) 平面と ( $z$  軸,  $\bar{\Omega}$ ) 平面とのなす角。
- $\xi_n$ :  $\xi_n = \cos d$
- $W_m$ :  $\mu$  についての積分をガウス求積法で数値積分する際の  $\mu_m$  に対する重み。
- $a_{mm}$ : 重みマトリックス;  $a_{mm} = W_m W_n^*$ 。
- $T_{g(m), m}(\bar{r})$ : 転移マトリックス; 位置  $\bar{r}$  で  $g(m)$  グループの中性子が散乱角  $\vartheta_m$  で弾性散乱され単位エネルギー, 単位立体角あたり  $j$  グループの  $\Omega_{pq}$  方向に入ってくる割合。
- $a_\nu(E')$ : 非弾性散乱により中性子がエネルギー  $E'$  から  $E$  に減速される割合。
- $E_\nu$ : 標的核の基底状態と  $\nu$  番目の励起エネルギー準位とのエネルギー差。
- $E_{i,B}$ :  $i$  番目の核の励起エネルギー準位を離散準位の取り扱いと連続分布の準位の取り扱いにする境界のエネルギー。
- $\zeta_p$ : 台形公式の重み。
- $b_p$ :  $\bar{\Omega}$  についての積分を数値積分する際の重み。
- $\lambda_p$ :  $\omega$  についての積分をガウス求積法で行なう際の重み。
- $c_g^j(r)$ : 転移マトリックス; 位置  $\bar{r}$  で非弾性散乱により  $g$  グループの中性子が  $j$  グループの  $\bar{\Omega}_{pq}$  方向に単位エネルギーあたり, 単位立体角あたり落ちてくる割合。
- $Q(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ : 線源項;  $Q(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) + S(r, \bar{\Omega}, E)$ 。
- $R, R_0$ : 中性子の飛程に沿って測られた距離, また球および円柱線源の半径としても使用。
- $\tau(\bar{r}, \bar{r}', E)$ : 光学距離; エネルギー  $E$  の中性子が位置  $\bar{r}'$  から  $\bar{r}$  に到達するまでに  $\exp(-\tau)$  で減衰する。
- $G^D(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ : 上のエネルギーグループから散乱減速されて線源となる量。
- $G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ : 自分自身のエネルギーグループ内で散乱され位相空間 ( $\bar{r}, \bar{\Omega}, E$ ) 内に留まる量。
- $A(\bar{r}, E)$ :  $G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = A(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ 。
- $\Sigma_t'(\bar{r}, E)$ :  $\Sigma_t'(\bar{r}, E) = \Sigma_t(\bar{r}, E) - A(\bar{r}, E)$ 。
- $Q'(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ :  $Q'(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = Q(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) - G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ 。
- $\Phi_i$ :  $\Phi_{ij}$  を要素とするベクトル。
- $\Phi_{ij}$ :  $\Phi_{ij} \equiv \Phi(\bar{r}_i, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$ 。
- $Q_i$ :  $Q_{ij}$  を要素とするベクトル。
- $Q_{ij}$ :  $Q_{ij} \equiv Q(\bar{r}_i, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$ 。
- $E_i$ :  $E_{ij}$  を要素とする対角線マトリックス。
- $F_i$ :  $F_{ij}$  を要素とする対角線マトリックス。
- $H_i$ :  $H_{ij}$  を要素とする対角線マトリックス。
- $E_2(x)$ :  $E_2$  関数
- $m_s, m_c$ : 球および円柱線源に対する非散乱線を計算する際の係数。
- $\varphi_0, \theta_0, \theta_1, \theta_2$ : 球および円柱線源に対する非散乱線を計算する際の角度変数。
- $l_1, l_2, b_1, b_3, b_4, b_5, b_6$ : 球および円柱線源に対する非散乱線を計算する際の距離に関する変数。
- $S_2(x, y), L_2(x, y), G(x, y)$ : 球および円柱線源に対する非散乱線を計算する際の関数。

## 1.2 在来の中性子遮蔽計算法

中性子遮蔽の計算法としてこれまでに数多くの方法が開発されており, このうち実際に中性子遮蔽の計算に使用された, あるいは現在も使用されている方法を列挙すると次のようになる。

- (1) 拡散法
- (2) 年令一拡散法
- (3) 点減衰核積分法
- (4) 除去一拡散法
- (5) 球調和法 ( $P_l$  法)
- (6) モンテカルロ法
- (7) モーメント法
- (8) Invariant Imbedding 法
- (9) Discrete Sn 法
- (10) Discrete Ordinates 直接数値積分法

上述の各計算法はそれぞれ特有の仮定の上になり立っているため, 中性子遮蔽計算に適用する場合に限界がある。したがって以下に各計算法に対し, それぞれ

の仮定に起因する制限条件を列挙し遮蔽計算適用の限界を明らかにする。

### (1) 拡散法

制限条件<sup>1)</sup>としては次のようなものがある。

- (a) 散乱は実験室系で等方である。
- (b) 中性子束の角度分布はほとんど等方である。
- (c) 媒質の吸収は小さい。すなわち  
 $\Sigma_a \ll \Sigma_s$  である。
- (d) 境界や強い線源および強い吸収体から 2~3 *mfp* 以上離れていること。

以上の制限条件から拡散法はほとんど低エネルギー領域の中性子遮蔽計算にその適用が限られる。

### (2) 年令一拡散法

拡散法と同様の制限条件を持ち合わせているので如計算には適しているが、遮蔽計算にはその適用に制限がある。拡散法と同様に低エネルギー領域の中性子透過計算に適しているが、速中性子領域の計算には不適当である。通常のフェルミ・年令理論は水素より重い核を取り扱うが、この制限は Goertzel-Greuling 近似の使用により取り除かれる<sup>2)</sup>。実際の中性子遮蔽計算は 7 群あるいは 5 群<sup>4)</sup>の例があるが、減衰の程度を簡単に調べるのに使用されるぐらいである。

### (3) 点減衰核積分法

最も簡単な計算技法にもとづく放射線透過計算法で、主にガンマ線遮蔽設計の計算に使用されている。中性子透過計算に使用する際の減衰核は Albert-Welton 核<sup>5)</sup>であり、これは中性子の減衰を計算するのに除去断面積を用いる。その際、水素の除去断面積としてはエネルギー依存の水素の全断面積を使用し、一方水素以外の一般の核については、エネルギーに独立に決められた除去断面積<sup>6)</sup>を使用する。

Albert-Welton 法の考えは中性子が水素により散乱される場合は全て吸収と仮定し、散乱された中性子は無視する。さらに非弾性散乱も吸収として取り扱う。水素以外の核による弾性散乱の場合は、中性子の進行方向に対し小角度で散乱された中性子は散乱を受けないとみなし、中性子はそのままの進行方向に進む。一方大角度で散乱された中性子は吸収されたとみなされる。

本解法は簡単な数式にもとづいているので、精度の高い詳細な情報を得るための計算には不向きである。しかし、簡単な予備計算や形状が複雑なために他の計算方法では取り扱うことができないような問題の計算には適している。

(330)

### (4) 除去一拡散法

前述の (1) 拡散法や (2) 年令一拡散法は速中性子の透過計算に難点がある。したがって中性子遮蔽計算に適用する場合には大きな制限があった。この難点を克服するために、速中性子領域における中性子透過計算はエネルギー依存の除去断面積を使用して除去計算を行なう。また除去された速中性子はエネルギーを落して拡散法で取り扱えるエネルギー領域に入って来る。この除去中性子は拡散方程式の線源項に加わり、この方程式で計算される。速中性子を除去計算し、低エネルギーの中性子を拡散法で計算する除去一拡散法は拡散法や年令一拡散法に比べて中性子遮蔽計算に対し大きな成功をおさめている。

初期の除去一拡散法を Spinney 法<sup>7)</sup>といい、次の仮定にもとづいている<sup>8)</sup>。

- a. 線源から放出される中性子の透過成分は非散乱線と小角度の弾性散乱中性子から成る。
- b. 大角度の弾性散乱中性子および非弾性散乱された中性子は高速中性子ビームから除去される。
- c. 除去中性子は年令理論によりエネルギーを落す。
- d. 除去中性子は年令理論で記述されるスペクトルおよび空間分布を有する。

欠点として、

- a. 除去中性子は全て 2 MeV の拡散領域の 1 群に置かれるから、2 MeV 以上のエネルギーでの中性子の拡散タイプの透過現象は無視される。
- b. 拡散領域は 5 群であり群数が少ない。
- c. 拡散の一群から次の一群にのみエネルギーの落ちがないとしているので、非弾性散乱や水素との衝突による大きなエネルギー損失を十分に記述することができない。

Spinney 法の改良として次の 3 つの除去一拡散コードが開発されている。すなわち、RASH E<sup>9)</sup>、MAC<sup>10)</sup>あるいは MAC-RAD<sup>11)</sup> および NRN<sup>12)</sup> である。これらのコードは Spinney 法に比べて除去と拡散群との結合方法や減速の取り扱い、群の数および除去断面積の決め方等に改良が施されている。例えばエネルギーグループの定め方についていえば、除去グループは Spinney 法の 18 群 (0~18 MeV) に対し NRN では 30 群 (0~18 MeV) であり、拡散グループは Spinney 法の 5 群 (熱中性子~2 MeV) に対し RASH E が 16 群、MAC-RAD が 31 群 (いずれも熱中性子~10 MeV)、さらに NRN が 24 群 (熱中性子~18 MeV) である。除去群と拡散群との結合方法も Spinney 法は

全ての除去中性子は拡散群の最高エネルギー群 (2 MeV) に落ちるのに対し、NRN では各除去群から数多くの拡散群へ転移マトリックスを使用して除去中性子の転移を計算することができる。また減速の取り扱いも Spinney 法は年令理論によりエネルギーの落ちを連続的に計算するのに対し、MAC-RAD や NRN では各拡散群から散乱減速された中性子は幾つものより低いエネルギーの拡散群へ落ちることが可能となる。このことにより非弾性散乱および水素との散乱による減速中性子の取り扱いが Spinney 法より正確に行なわれる。

以上の改良を考慮に入れても除去—拡散法は次のような不利な点を有する<sup>8)</sup>。

- a. 除去断面積はいずれの方法でも経験的に決めなければならない。これは実験結果や精度の良い輸送コードの計算結果と比較して決められる。
- b. エネルギーの組み分け方法やエネルギー群の幅も除去断面積と同様に、他の精度の良い結果との比較により決められる。
- c. 中性子遮蔽の設計計算を目的として作られているため、遮蔽の解析計算に適用するには計算精度が良くない。
- d. 最も重要な点であるが、遮蔽問題を計算する際にあらかじめその問題と同種の問題に対し比較計算を行なって計算精度を確かめたものでなくては適用できない。

### (5) 球調和法 ( $P_l$ 法)

ボルツマン輸送方程式をルジャンドル多項式展開近似により解く方法であるが、実用計算には多群の  $P_1$  近似が最も一般的に使用されている。 $P_1$  近似法は拡散法と同等であるから、中性子遮蔽計算に  $P_1$  近似を適用する場合には拡散法の項で述べたのと同様の大きな制限 (速中性子透過計算に不適) を受ける。一般に、 $P_l$  法では  $l$  の大きさにより  $P_l$  法の遮蔽問題への適用可否が問題とされ、また計算精度も  $l$  によって決まる。例えば  $P_3$  近似による計算は  $P_1$  近似に比べ顕著な改良となることが報告されている<sup>13)</sup>。しかし、速中性子透過計算で問題となる前方ピークの極端な非等方角度分布や高次の非等方散乱を正確に取り扱うには 1 桁程度の  $l$  次の  $P_l$  法では無理であろう。

上述の  $P_l$  法に対する改良の 1 つに、中性子の角度分布を前方方向と後方方向の 2 通りに分けて取り扱う Double  $P_l$  法がある。確かに Double  $P_l$  法は  $P_l$  法に比べ顕著な改良をもたらすといわれているが、ガンマ線の透過計算に Double  $P_1$  近似が適用された報告<sup>14)</sup>

があるのみで、中性子透過計算に実際に適用された報告はみあたらない。

一般に  $P_l$  法は低い  $l$  については計算が容易であるが、高次の  $l$  になると計算が複雑になる不利な点がある。また多重層遮蔽を透過する速中性子は内側境界で角度分布が大きな変化を示すので、この変化を忠実に記述することはむずかしい。さらに上述の速中性子が深い透過で示す鋭い前方ピークの角度分布を  $P_l$  法で正確に取り扱うことは無理である。

### (6) モンテカルロ法<sup>15),16)</sup>

原理的には全ての遮蔽問題を取り扱い得るのであるが、実際に遮蔽問題を計算する場合には種々の諸問題が生じてくる。元来、遮蔽体は放射線が外にもれ出ないために施すのであるから、もれ出る放射線の数が多いほど精度が良くなるモンテカルロ法の放射線遮蔽透過計算への適用は本質的に矛盾しているといえよう。したがって、遮蔽体透過問題をモンテカルロ法で計算するには、膨大な数の放射線を遮蔽体に入射させなければ遮蔽体を透過する放射線の数が少な過ぎて、その結果大きな統計誤差を生ずることになる。

あらゆる中性子遮蔽問題を計算できるといわれるモンテカルロコードに OSR<sup>17)</sup> がある。しかし、逆にこの計算コード自身の取り扱いが複雑過ぎて、直ちに計算したい遮蔽問題の計算ができない大きな欠点がある。

したがってモンテカルロ法を遮蔽問題に適用する場合は、モンテカルロ計算が適している問題に限った方がよい。例えば、他の計算方法では取り扱うことのできない複雑形状問題や形状が小さい問題 (検出器の応答関数計算問題) 等への適用が望ましい。

### (7) モーメント法<sup>2),18)</sup>

ボルツマン輸送方程式を球調和法の場合と同様に、まずルジャンドル多項式展開する。次いで空間変数を除去するためにモーメント変換を施す。この変換によりモーメントで書き換えられた方程式を計算することによってモーメントを求める。最後に計算されたモーメントから中性子束を再生する。モーメント法の大きな制限条件として

- a. 無限一様媒質
- b. 線源は平板および点線源

がある。実際の計算では有限な数のモーメントを数値積分計算によって求めることになる。これらの有限な数のモーメントを使用して中性子束を再生することになり、この再生方法に問題が残されている。ガンマ線

に対するモーメント法計算では、計算されたモーメントから線束を再生するのに最適の関数が見つけれられたので非常に精度の良い解を得ることができた。これに対し、中性子の計算では、

- c. 計算されたモーメントから中性子束を再生するのに最適の関数が見い出せない。

したがって、実際は各計算問題ごとに中性子束を再生するための最適な関数を見つけなければならない。最近でもこの再生関数についての研究が続けられている。

モーメント法の場合は、一般に求められる解はスカラー束である。これはルジャンドル展開の0次の項であるから容易に計算できるわけである。それ以上の高次の成分はせいぜい第1次のいわゆる流束  $\Phi_1(x, E)$  程度が計算できる限度である。その理由は  $l \geq 2$  以上の高次の成分を計算するには大量の数のモーメントを計算しなくてはならないからである。今  $\Phi_l(x, E)$  を  $l$  項のモーメントで表わすためには、

$$\left[ \frac{(l+2p)(l+2p+1)}{2} - l \right]$$

の数のモーメントを計算しなくてはならない<sup>8)</sup>。したがって、

- d. 中性子角度分布の計算は困難である。

結局モーメント法は簡単な形状における中性子エネルギースペクトルを計算し、他の計算方法の計算精度を比較計算によって調べる際の標準として使用されることになる。

### (8) Invariant Imbedding 法

天体物理における光の輸送の問題<sup>20)</sup>から出発し、最近になって中性子の輸送計算<sup>21), 22), 23)</sup>に適用されるようになった。本解法は透過と反射の関数を使用して中性子遮蔽の計算を行なう。まず中性子の反射を計算するために反射方程式を導出する。反射関数が求められたら、この反射関数をもとにして透過を計算するための透過方程式を導出する。いずれの方程式も非線型の微積分方程式である。また本解法は初期値問題であり、これはボルツマン輸送方程式が線型の微積分方程式で境界値問題であるのに対照的である。実際の遮蔽問題に対し上述の非線型の微積分方程式を解析的に解くことは不可能であるから数値解法で解く。したがって、この場合、ボルツマン輸送方程式を Discrete Ordinates 数値解法で解くのと同程度の困難さとなるので、この点に関して特に良い点はない<sup>24)</sup>。

本解法の不利な点は一次元平板以外の形状に対して

は計算の実績がないこと、および遮蔽体内における任意の位置での情報が得られないことである。なお最近二次元  $(x, y)$  平板形状に対する単一エネルギー方散乱の場合の中性子透過計算の試みが報告されている<sup>25)</sup>。

結局 Invariant Imbedding 法は一次元平板形状に対しては Discrete Ordinates 法と競合状態にあるが、他の形状へ適用できないのは大きな弱点である。

なお (9) および (10) の Discrete Ordinates 法にもとづく計算法については、本研究による中性子透過計算法と同じ分類に属するので第4章で詳しく論ずる。

## 第2章 定常の中性子輸送方程式

中性子遮蔽計算では時間的変化のない定常の問題が重要であり、時間依存の問題は非常に特殊な問題に限られるので本論文では定常の中性子透過問題のみを対象とする。

ボルツマン輸送方程式は個々の粒子の挙動を記述するのではなく、全体の粒子の平均的な挙動を記述する方程式である。この方程式は空間、粒子の進行方向、粒子のエネルギーから成る位相空間体積要素を考えた場合、この体積要素における粒子の保存則すなわち粒子の生成、流出および消滅が釣り合っていることにもとづいている。したがってボルツマン輸送方程式は次のような基本的な仮定のもとに導出される<sup>26)</sup>。

(1) 位相空間体積要素はこの要素内で粒子の統計的変動が無視できる位大きくとる。統計的変動はボルツマン輸送方程式では考慮されない。

(2) 中性子の標的核との衝突の時間は零と仮定する。次章で述べる複合核生成の時間は比較的長い時間を要するが、それでも  $10^{-14}$  秒程度である。

(3) 中性子相互間の衝突は無視できる。これは標的核の密度に比べて中性子の密度がはるかに小さいと考えられるからである。したがってボルツマン輸送方程式は線型になる。

(4) 中性子の減速過程で物質中の原子や分子の振動のエネルギーは無視できるとする。中性子のエネルギーが原子や結晶の分子の結合エネルギーの2ないし3倍程度に低くなると、中性子の減速は平均エネルギー損失のみに関係するようになる。したがって本論文ではそれ以上のエネルギーの中性子のみを対象とする。

(5) 中性子に働く力の場は無視できる。核の場のみを考える。したがって中性子は標的核との衝突間では一直線に進行する。

いま、位置  $\vec{r}$  で単位方向ベクトル  $\vec{\Omega}$  の  $\vec{\Omega}$  方向の立体角要素  $d\vec{\Omega}$  内に進行方向を持ち、 $\vec{\Omega}$  方向に垂直な単位面積あたり単位時間に通過する中性子のうち、そのエネルギーが  $E$  と  $E+dE$  の内にある中性子の個数を  $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)d\vec{\Omega}dE$  とする。この  $\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)$  を中性子密度の分布関数というが、以降では簡単に中性子角度束あるいは中性子角度分布と称する。

定常状態の場合、いま考えている位相空間体積要素  $d\vec{r}=d\vec{r}d\vec{\Omega}dE$  から中性子が失われる過程は次の2つの過程である。すなわち

(a) 進行方向  $\vec{\Omega}$  の中性子の  $d\vec{r}$  からの流失;

$$[\vec{\Omega} \cdot \text{grad } \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)]d\vec{r}d\vec{\Omega}dE$$

(b) 標的核との衝突により  $d\vec{r}$  中で  $d\vec{\Omega}dE$  から中性子の消滅;

$$\Sigma_t(\vec{r}, E)\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)d\vec{r}d\vec{\Omega}dE$$

なお  $\Sigma_t(\vec{r}, E)$  はエネルギーの中性子の位置  $\vec{r}$  における物質に対する巨視的断面積であり、単位は  $\text{cm}^{-1}$  である。

また中性子がこの体積要素  $d\vec{r}$  に入ってくる過程は次の2つの過程である。すなわち

(c)  $d\vec{r}$  内での中性子の純線源 (あるいは外部線源ともいう) からの誕生;

$$S(\vec{r}, \vec{\Omega}, E)d\vec{r}d\vec{\Omega}dE$$

(d)  $d\vec{r}$  内でエネルギー  $E'$  で進行方向が  $\vec{\Omega}'$  の中性子が標的核に散乱されてエネルギーが  $E$  で進行方向が  $\vec{\Omega}$  に、単位時間あたり  $d\vec{\Omega}'dE'$  から  $d\vec{\Omega}dE$  に流入する;

$$n(\vec{r})d\vec{r}\sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E)d\vec{\Omega}'dE' \\ \times [\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E')d\vec{\Omega}'dE']$$

上式で  $n(\vec{r})$  は位置  $\vec{r}$  における標的核の密度であり、 $\sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E)$  は微視的微分散乱断面積であり単位はバーン ( $10^{-24} \text{cm}^2$ ) である。

平衡状態では中性子の流入と流出は等しいので

$$(a)+(b)=(c)+(d)$$

となり、上式の両辺を  $d\vec{r}=d\vec{r}d\vec{\Omega}dE$  で除すると

$$\vec{\Omega} \cdot \text{grad } \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) + \Sigma_t(\vec{r}, E)\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) \\ = S(\vec{r}, \vec{\Omega}, E) + n(\vec{r}) \int d\vec{\Omega}' \int dE' \\ \times \sigma_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E)\Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E') \dots (2-1)$$

を得る。一般に物質は異種類の核から成ると考えられるので、(2-1) 式の右辺の散乱積分項は物質を構成する核の種類のととして次のように表わす。

$$\sum_i n_i(\vec{r}) \int d\vec{\Omega}' \int dE' \sigma_{s,i}(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}, E' \rightarrow E)$$

$$\times \Phi(\vec{r}, \vec{\Omega}', E') \dots (2-2)$$

ここで  $i$  は核の種類を表わす。

輸送方程式 (2-1) 式の右辺は一般に線源項と呼ばれるが、このうち散乱線源については次章で詳しく検討する。

### 第3章 中性子と物質と相互作用

#### 3.1 緒言

中性子は物質中を透過する場合、物質を構成している原子核および電子と相互作用を起す。中性子と物質との相互作用を分類するとおよそ次のようになる<sup>27)</sup>。

相互作用	{	電子との相互作用
		核との相互作用
		散乱 { 弾性散乱 ( $n, n$ )
		{ 非弾性散乱 ( $n, n', \gamma$ )
		吸収 { 捕獲 ( $n, \gamma$ )
		{ 核変換 ( $n, p$ ), ( $n, \alpha$ ),
		( $n, f$ ) など

中性子と電子との間には両者のスピンの向きに無関係な相互作用が存在する。これは中性子がある瞬間に  $N \rightleftharpoons P + \pi^-$  のように陽子と負の  $\pi$  中間子とに解離していると考えられることに起因する。この断面積は  $5 \times 10^{-31} \text{cm}^2$  ( $5 \times 10^{-7}$  バーン) の程度で、核との相互作用の断面積 ( $\sim 10^{-24} \text{cm}^2$ , バーン) に比して無視できるほど小さい<sup>27)</sup>。したがって本研究においては中性子と電子との相互作用は無視する。したがって本研究における中性子と物質との相互作用は原子核との相互作用のみを取り扱うことにする。原子核との相互作用のうち、弾性散乱および非弾性散乱は中性子の減速に重要な役割をはたす。一方吸収として取り扱われる捕獲や核変換のうち捕獲はガンマ線を放出するので遮蔽計算上重要である。遮蔽計算においては核分裂現象は比較的重要視されない。核変換で価電粒子放出の現象は中性子測定の方で重要である。

一般に中性子と核との相互作用の断面積は核の種類によって、さらに中性子のエネルギーによっても複雑な変化を示す。一方中性子の物質透過の計算を精度良く行なうには物質を構成する各原子核に対する中性子のエネルギー依存の詳細な断面積が精度良く求められていることが必要条件となる。

#### 3.2 弾性散乱

中性子が物質を透過する場合、中性子は主に軽い核による弾性散乱および重い核による非弾性散乱によって減速される。弾性散乱は標的核の内部エネルギーに変

化をもたらさないで運動量と運動エネルギーを標的核とやり取りを行なう現象である。さらに詳しく述べると弾性散乱は複合核形成 (付録 A 参照) による共鳴散乱および複合核を形成しないで核の表面のポテンシャルと相互作用をして散乱されるポテンシャル散乱から成る。前者の共鳴吸収のピークは重い核の場合 1 KeV 以下であり、中程度の核 (鉄, ニッケル, コバルト等) の場合 0.01 MeV から 2~3 MeV 領域に現われ, 軽い核 (炭素, ちっ素, 酸素等) の場合 0.1 MeV から 10 MeV 領域に現われる。ただし重い核でも魔法数 (50, 82, 116) の中性子数をもつ核種 (例えば鉛やビスマス) はあたかもはるかに軽い核のように振舞い, 共鳴ピークは 1 KeV~1 MeV 領域に現われる。

共鳴領域でもポテンシャル散乱は存在するが, 共鳴領域以外のエネルギー領域での弾性散乱はほとんどポテンシャル散乱である。ポテンシャル散乱は入射中性子の中性子波が核力のポテンシャル場と相互作用し, 二次的な散乱波を生ずるものである。散乱断面積は散乱波の振幅の絶対値の二乗に比例する<sup>29)</sup>。数学的には波動関数をルジャンドル多項式展開し, その各項が各々の部分波に対応している。10<sup>4</sup> eV より低いエネルギーの中性子の波長は長い (2.86 × 10<sup>-11</sup> cm) のでルジャンドル展開の  $l=0$  すなわち S 波の散乱のみが起る。したがって散乱は等方的となる。 $l=1$  の相互作用が認められる程度になるのは核の質量  $A=10$  の場合 2.5 MeV であり,  $A=200$  の場合は 0.33 MeV であり, このエネルギー以上では  $l=1$  すなわち p 波の散乱も寄与してくる<sup>29)</sup>。

中性子が弾性散乱される場合, 中性子と原子核の系の運動エネルギーは保存される。核分裂中性子のエネルギー程度では非相対論的に取り扱ってよい。また標的核は自由原子で実験室系で静止しているとする。この仮定が成立するのは物質の分子構造や系の熱による擾乱に起因する種々の効果を見捨てる場合である。すなわち中性子のエネルギーが物質中の分子や結晶中における原子の振動のエネルギーに比べて大きい限り成立する。しかし中性子の減速の結果, そのエネルギーが原子の振動エネルギーに近づくと化学結合力を無視することができなくなり, また系のもつ熱による擾乱を受けるようになる<sup>29)</sup>。さらにこのような低エネルギーでは結晶構造に起因する中性子波の干渉効果 (干渉性散乱) が問題となる<sup>29)</sup>。

以上のことから中性子の減速過程でおおよそ 1 eV 程度以下の低エネルギー領域では物質の分子や結晶構造を

考慮に入れなければならない。そこで本研究で対象とする中性子は核分裂中性子のエネルギーのうち 1 eV 程度以上のエネルギーを有する中性子に限定し, 1 eV 程度以下で起こる上述の複雑な現象は考慮しないことにする。

したがって実験室系で衝突する前の標的核は静止しているとすれば, 散乱前後の中性子のエネルギーの関係は次式のように求められる (付録 B)。すなわち散乱前後の中性子のエネルギーを  $E'$  および  $E$  とすれば

$$\frac{E}{E'} = \frac{M^2 + 2M \cos \vartheta + 1}{(M+1)^2} \quad \dots\dots (3-1)$$

ここで  $M$  は標的核の質量数,  $\vartheta$  は重心系での散乱角度である。また重心系の散乱角度  $\vartheta$  と実験室系における散乱角度  $\theta$  との間には次式の関係がある (付録 B)。

$$\cos \theta = \frac{M \cos \vartheta + 1}{\sqrt{M^2 + 2M \cos \vartheta + 1}} \quad \dots\dots (3-2)$$

水素原子以外の一般の原子に対する中性子の散乱は低エネルギーの場合は重心系で等方であるが, 高エネルギーの場合には非等方となる。一方水素原子の場合は, 10 MeV 程度までは重心系で等方散乱であり, それ以上の高エネルギーでは重心系における微分散乱断面積は次式で表わせる<sup>29)</sup>。

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \sigma(90^\circ) (1 + A \cos \vartheta) \quad \dots\dots (3-3)$$

ここで非等方パラメタ  $A$  は中性子エネルギーとともに単調に増加する。しかし 14 MeV 程度では  $A=0.05$  であり非常に小さい。したがって本研究では水素原子に対する弾性散乱は対象とする全エネルギーにわたって重心系で等方とする。

### 3.3 非弾性散乱

非弾性散乱は複合核形成から残留核を励起状態に残して中性子を放出する反応である。励起状態の残留核は 1 個以上のガンマ線を放出して基底状態に戻る。したがって標的核の第 1 励起エネルギー準位より小さいエネルギーの中性子に対しては非弾性散乱は起こらない。このエネルギーをしきい (threshold) エネルギーといい, 一般に軽い核や魔法数の中性子数をもつ重い核 (例えば鉛やビスマス) は, このしきいエネルギーは大である。一方一般の重い核ではしきいエネルギーが小さいので中性子減速過程では非弾性散乱が重要な役割をはたす (Table 1 参照)。

非弾性散乱による減速の計算は非弾性散乱の断面積の計算方法と密接に関係して行なわれる。すなわち標

Table 1 Thresholds for inelastic scattering<sup>2)</sup>

Nucleus	$E_{tr}$ , MeV
Li <sup>6</sup>	2.19
Li <sup>7</sup>	0.478, 4.61
Be <sup>9</sup>	2.43
B <sup>10</sup>	0.72
B <sup>11</sup>	2.14
C <sup>12</sup>	4.42
N <sup>14</sup>	2.30
O <sup>16</sup>	6.09
F <sup>19</sup>	0.11, 0.19, 1.37
Na <sup>23</sup>	0.44, 2.07
Al <sup>27</sup>	0.84, 1.01, 2.23
Cr <sup>52</sup>	1.45
Mn <sup>55</sup>	0.126, 0.98
Fe <sup>56</sup>	0.85, 1.81
Co	1.10
Ni	1.33
Cu	0.97
y	0.91
Zr	0.90
Nb	0.030, 0.764
W	0.10
Pb <sup>206</sup>	0.81
Pb <sup>207</sup>	0.6
Pb <sup>208</sup>	2.62
Bi <sup>209</sup>	0.91
U <sup>235</sup>	0.046
U <sup>238</sup>	0.044
Pu <sup>239</sup>	0.050

核の励起エネルギー準位の準位間隔に従い、断面積は次の2通りに分けて求められる。その1は標的核の低い励起準位においては準位間隔が大きく離れているので離散分布として取り扱う。この終状態が離散分布の場合の非弾性散乱の断面積は複合核生成から Hauser-Feshbach の理論<sup>30)</sup>あるいは同理論の改良である Moldauer の理論<sup>31), 32)</sup>によって計算される。これに対し入射中性子のエネルギーが高くなり、残留核が高い励起準位に励起されるようになると、そこでは準位幅が準位間隔より広くなり終状態を分離することができなくなる。このような場合は複合核理論では残留核の準位分布密度の概念を導入して終状態に対する統計的な取り扱いが必要となり<sup>33)</sup>、いわゆる統計理論による蒸発模型で非弾性散乱の断面積は計算される。

また非弾性散乱の角度分布は入射エネルギーが低いほ

ど等方的であり複合核過程が主役を演じ、入射エネルギーが高く、かつ励起エネルギーが低いほど非等方的になり、複合核過程を経由しない直接反応過程の寄与が現われる<sup>33)</sup>。

しかし得られている非弾性散乱の角度分布のデータは遮蔽計算に直ちに使用できるように、対象とする全エネルギーにわたって編集されていない。さらに現在までの中性子計算方法ではいずれの場合でも非弾性散乱の角度分布を等方散乱仮定にしている。また非弾性散乱が重要な減速の役割をはたす鉄では非弾性散乱の角度分布はほとんど等方散乱扱ひできる。以上の理由から本研究でも非弾性散乱は等方散乱を仮定する。

### 3.4 放射捕獲

低エネルギーの中性子が原子核に捕獲されて複合核を形成し、この励起された複合核がガンマ線を放出して基底状態に戻る反応である。二次ガンマ線の線源として重要な反応であるが中性子の観点に立って見れば単なる中性子の吸収である。

### 3.5 荷電粒子放出の核反応

中性子が標的核に捕獲され複合核を形成し、 $\alpha$ 粒子や陽子が二次放出粒子として残留核のクーロン障壁に打ち勝って放出される反応である。クーロン障壁の小さい核は質量数の小さい核であるから軽い核で起りやすい。荷電粒子放出反応は本研究では単に中性子の吸収として取り扱う。なお核分裂反応は中性子遮蔽計算では対象外とし、その断面積は単に吸収断面積として取り扱う。

### 3.6 $(n, 2n)$ 反応

入射中性子のエネルギーが標的核の中性子結合エネルギーより大となると、中性子を吸収し2個の中性子を放出する $(n, 2n)$ 反応が可能となる。この中性子結合エネルギーが $(n, 2n)$ 反応のしきいエネルギーである。そして遮蔽物質を構成する核についてはおよそ10 MeVと高いが、鉛の場合は6~8 MeVであり、ベリリウムと重水素の場合は特に低く1.84 MeVと3.3 MeV(実験室系)である。重水素に対する非弾性散乱は起らないから、 $(n, 2n)$ 反応は重水素の場合重要な反応である。

### 3.7 遅い中性子による中性子による核反応<sup>27)</sup>

1 KeV程度以下の遅い中性子で起る反応は弾性散乱 $(n, n)$ と放射捕獲 $(n, \gamma)$ が主で、まれに軽い核に対し $(n, p)$ 、 $(n, \alpha)$ 反応が起る。核分裂反応は遮蔽計算では対象外とする。標的核が中位や重い場合に共鳴散乱および放射捕獲が起るが、一般に中位の核では共鳴散乱が主として起り、重い核では放射捕獲が主とし

て起る。一方、軽い核ではポテンシャル散乱が主として起る。

### 3.8 中速中性子による核反応<sup>27)</sup>

1~500 KeV の中性子では軽および中位の核については放射捕獲の断面積は一層小さくなり、重い核ではまだある程度大きい散乱が次第に主になって来る。重い核でははっきりした共鳴は現われなくなるが、鉛やビスマスなどの魔法数の中性子数を有する核でははっきりした共鳴がみられる。中位の核でははっきりした共鳴がみられ、また軽い核でも共鳴がみられるがその数は少ない。非弾性散乱はまだ起らない。

### 3.9 速中性子による核反応<sup>27)</sup>

0.5~10 MeV の速中性子では弾性散乱はポテンシャル散乱が共鳴散乱に比べて優勢となる。しかし軽い核ではまだ共鳴の山が数多くみられる。1 MeV 程度以上になると非弾性散乱が起るようになる。数 MeV 以上になると残留核は高い励起状態に残されるので連続体理論が成立し、蒸発モデルの適用が可能となる。 $(n, p)$ ,  $(n, \alpha)$  などの荷電粒子放出反応も中位の核では1~3 MeV 程度で可能になって来る。しかしこの反応の断面積は小さい。

10 MeV 程度に高いエネルギーになると非弾性散乱や荷電粒子放出の反応が充分起こり得るようになり、また  $(n, 2n)$ ,  $(n, np)$  などの1個以上の放出粒子が現われる核反応が起るようになる。弾性散乱の角度分布は鋭い前方ピークを示すようになる。

### 3.10 中性子遮蔽計算に重要な中性子断面積

前述の議論から遮蔽体中での中性子の核反応にもとづく重要な断面積としては、弾性散乱および非弾性散乱の散乱断面積  $\sigma_s$ , ならびに  $(n, 2n)$  反応の断面積  $\sigma_{n, 2n}$ , さらに全ての反応の断面積を加え合せた全断面積  $\sigma_t$  がある。中性子を吸収し他の粒子を放出する各種の反応はまとめて吸収として取り扱い、吸収断面積で考慮される。したがって、

$$\sigma_t = \sigma_s + \sigma_{n, 2n} + \sigma_a,$$

$$\sigma_s = \sigma_{el} + \sigma_{in},$$

$$\sigma_a = \sigma_{n, \gamma} + \sigma_{n, p} + \sigma_{n, \alpha} + \dots$$

ここで  $\sigma_{el}$ ,  $\sigma_{in}$  はそれぞれ弾性散乱および非弾性散乱断面積であり、 $\sigma_{n, \gamma}$ ,  $\sigma_{n, p}$ ,  $\sigma_{n, \alpha}$  等はそれぞれ  $(n, \gamma)$ ,  $(n, p)$ ,  $(n, \alpha)$  反応の断面積である。

以上の積分断面積の他に中性子減速を計算するのに微分散乱断面積が必要である。弾性散乱については一般に非等方散乱の取り扱いをするので、散乱の角度分布を考慮に入れた微分散乱断面積  $\sigma_s(E' \rightarrow E, \bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega})$

が必要となる。実際の計算には、この微分散乱断面積を中性子の散乱角についてルジャンドル多項式展開した時の各エネルギーにおけるルジャンドル係数  $f_l(E)$  が必要である。

一方非弾性散乱については実験室系で散乱角度分布は等方であると仮定するので、中性子の減速のみの微分散乱断面積  $\sigma_s(E' \rightarrow E)$  が必要となる。

また  $(n, 2n)$  反応の取り扱いは理論式の上では特に行わず、計算に用いる断面積の上で  $(n, 2n)$  の断面積を非弾性散乱の断面積に含めてしまう。したがって  $(n, 2n)$  の微分断面積も非弾性散乱の場合と同様に散乱は実験室系で等方分布とし、微分断面積も  $\sigma_s(E' \rightarrow E)$  となる。ただし、二次中性子は2個放出することを微分断面積上で考慮する。

## 第4章 中性子遮蔽計算における輸送方程式の数値解法

### 4.1 緒言

輸送方程式の解法について、これまでに開発された各種の解法は文献 (34) に集大成されている。また最近開発された解法については文献 (35) に Case の方法を中心に詳しく述べられている。また輸送方程式の解法を数学的な観点に立って論じた論文をまとめたものに文献 (36)、同じく数学的理論の現状をまとめたものに文献 (37) がある。

中性子遮蔽計算における輸送方程式の解法はいずれも文献 (37) の分類に従えば、解法 (技術) の研究であり、このうちの近似解法である。そして、すべての近似解法は解の存在を前提としている<sup>27)</sup>ように、遮蔽計算における近似解法も解の存在を前提として議論をすすめる。

### 4.2 中性子遮蔽計算における Discrete Ordinates 法

中性子遮蔽の実用計算を輸送方程式の近似解法で行なう場合、ほとんど Discrete Ordinates 法により、しかも数値計算によって行なわれる。遮蔽計算に Discrete Ordinates 法が適している理由はおよそ次のようである。

一般に多重層遮蔽体の内部境界面や外部境界面で中性子束は角度によって著しく変化する。このため中性子の角度分布が一様であると仮定する拡散理論は遮蔽計算には不適当である (第1章 1.2)。また中性子の角度分布を有限項のルジャンドル多項式で展開近似する  $P_l$  近似法も境界での角度依存性を正確に表現する

には不十分である<sup>38)</sup>。これに対し、角度空間を多領域に分割し、各領域内で独立の角度分布関数をとる考え方は非常に有効である。したがって Discrete Ordinates 法のように角度空間を有限個の角度分点で表わし、各角度分点で輸送方程式を解いて中性子束を算出する解法は遮蔽計算に適している<sup>38)</sup>。

Discrete Ordinates 法は  $P_L$  近似法と等価であるという議論がある<sup>39),40)</sup>。しかしこれはあくまで線束および微分散乱断面積、さらに線源が  $l$  次のルジャンドル多項式展開近似で表わすことが可能であること、および Discrete Ordinates 法における散乱積分計算がガウス求積法によって行なわれる場合に限られる。一般に遮蔽体中での速中性子束は極端な前方ピークの角度分布を有するので、これを有限項のルジャンドル多項式で展開近似することはむずかしい。したがって速中性子の透過問題に対しては Discrete Ordinates 法と  $P_L$  近似法とが等価であるとはいえない。

Discrete Ordinates 法は境界条件の定義が簡単で見通しのよいことも特長である<sup>38)</sup>。これに対し  $P_L$  近似法では、中性子の角度分布が境界条件を厳密に満足することはむずかしい<sup>39)</sup>。本研究による Discrete Ordinates 数値解法においては中性子角度分布は角度分点のみならず分点間の全角度にわたって境界条件は厳密に満足されている。

以上のことから Discrete Ordinates 数値解法の一つである Discrete Sn 法や本研究における Discrete Ordinates 直接積分法は、中性子遮蔽で特に問題になる現象——速中性子束の極端な前方ピークの角度分布、速中性子領域における鋭い前方ピークの非等方散乱角度分布および境界において大きく変化する中性子角度分布——を首尾良く取り扱うことができる点で遮蔽計算に適している。

Discrete Ordinates 法は初め Wick<sup>41)</sup>-Chandrasekhar<sup>42)</sup> 法といわれ、ボルツマン輸送方程式における散乱積分計算をガウス求積法で行ない、輸送方程式を角度分点につき解く方法である。その際角度分点はルジャンドル多項式の根に一致させる。次いで原子炉の計算に本解法を適用し、数値計算で解く方法として Sn 法が Carlson によって開発された<sup>43)</sup>。この初期の Sn 法は角度分点の選び方が Wick-Chandrasekhar 法と異なり、角度の余弦につき等間隔に選んだ。また中性子角度分布は各角度分点間を直線で結ぶ、いわゆる折線近似で表わした。この折線近似法は中性子角度分布の計算で 90 度方向に対し対称性が失われる欠点<sup>44)</sup>がある (輸送

方程式は基本的に対称性を有している)。このため境界条件および対称条件を満たすのが困難であった。また散乱の取り扱いも等方散乱を仮定している。その後  $S_n$  法は発展し、次に記述する Discrete Sn 法<sup>44),45)</sup>となる。

### 4.3 Discrete Sn 法

Discrete Sn 法は中性子の角度分布を Discrete Ordinates 角度分点の各分点につき、その各分点の代表する角度区間で中性子束を積分することによって表わす。Discrete Sn 法は次の仮定にもとづきボルツマン輸送方程式を計算する<sup>24)</sup>。

- a. ボルツマン輸送方程式を finite-difference cell で表わす。すなわち

$$\text{finite-difference cell}^{24)} \equiv \int_{V \in V_I} dV \int_{\Omega \in \Omega_D} d\Omega \int_{E \in E_G} dE$$

ここで  $V$  は体積、 $\Omega$  は中性子の進行方向単位ベクトル、 $E$  は中性子のエネルギーである。

輸送方程式の微分形は上述の finite-difference cell で表わすと差分形で近似される。

- b. エネルギーは多群の形をとる。
- c. 数式の導出の過程で、次のような平均値の定理を適用して積分計算をする。

$$\int_{x_1}^{x_2} x f(x) dx \cong \bar{x} f(\bar{x}) \Delta x, \quad x_1 < \bar{x} < x_2$$

- d. 余計な未知関数 (セルの中心点における中性子束、セルの各対辺の中心点における中性子束等 (Fig. 4.1)) を減ずるため、ダイヤモンド差分法を導入 (付録 C 参照)。
- e. ダイヤモンド差分法の使用により、中性子角度

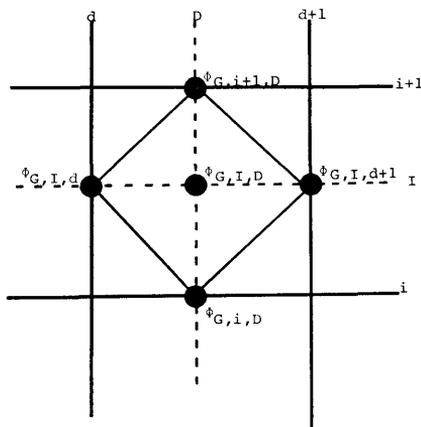


Fig. 4.1 Diamond difference technique in Sn method

分布が 90 度方向に近い角度分点で負になることが多い。この場合ダイヤモンド差分法の使用の代わりにステップ関数で近似する (付録 C 参照)。

- f. 差分形表示の輸送方程式は、繰り返し収斂法により計算される。

最近の遮蔽計算用 Discrete Sn コード<sup>46),47)</sup>は遮蔽計算に適するように弾性散乱は高次の非等方の取り扱いをする。さらに等方散乱仮定の非弾性散乱の計算も行なう。

Discrete Sn 法の不利な点は次のようである。

(1) ダイヤモンド差分にもとづいていることから、セルの大きさは隣り合うメッシュ点で中性子角度分布の変化が少なく、その変化の程度は線型近似で表わし得る程度である。したがって遮蔽体中での中性子束のように空間について急激な減衰を示し、その上角度分布が極端な前方ピークを示す場合には小さなセルを定める必要がある。すなわち距離および角度メッシュ両方とも細かく定める必要がある。

(2) ステップ関数近似の使用はセルを構成する隣り合うメッシュ点で中性子角度分布が一定であるという仮定であるから、(1) で述べた条件は一層厳しくなる。

(3) 繰り返し収斂法で計算するが、その際収斂が必ずしも一様ではない。また必ず収斂する保証もない。

#### 4.4 直接積分法 (NIOBE)<sup>48),49)</sup>

一次元球対称形状におけるボルツマン輸送方程式の Discrete Ordinates 解法の一つである。輸送方程式は Discrete Ordinates 角度分点 (この場合ガウス求積法における積分点に一致) の各分点につき計算される。計算技法は一次偏微分方程式の数学的取り扱いにもとづいて特性線にそって輸送方程式を直接積分計算する。エネルギー依存は多群に組み分けすることにより、エネルギーの高い群から 1 群づつ順に計算することによって処理される。この 1 群ごとの計算に繰り返し収斂法を使用して解を得る。

非等方散乱扱いの弾性散乱および等方散乱仮定の非弾性散乱にもとづく散乱積分計算の技法は、モーメント法における中性子の弾性および非弾性散乱積分計算に使用された技法<sup>2),18),50)</sup>を適用して行なわれる。

NIOBE の弱点は小さな体積線源の取り扱いにある。すなわち、この場合非散乱線は極端に前方ピークの角度分布になるので、散乱線も含めた中性子束の角度分布も前方ピークとなる。このような極端な非等方の角

度分布をもつ中性子束を計算すると、解は収斂しないので求まらないか、あるいは収斂しても負の角度分布のような無意味な計算結果を与えることがある。この原因は NIOBE 計算では散乱積分計算を行なうのに、中性子束角度分布を有限項のルジャンドル多項式で展開近似している。したがって中性子束角度分布が有限項のルジャンドル多項式で展開近似できる程度になめらかな非等方角度分布であるならば、解は一様に収斂し正しい解を与える。しかし、鋭い前方ピークの角度分布のように有限項のルジャンドル展開近似で表わすことがむずかしい場合は、上述のように収斂しないか、あるいは無意味な解を与えることになる。

したがって点線源に近い問題の計算は不可能である。また大きな体積線源に対する計算においても、しばしば計算した中性子束角度分布が実際の現象には現われない振動型の角度分布を示すことがある。したがってこのような場合は角度について積分した中性子スカラー束が仮りに正しい解であったとしても、角度分布は正しいとはいえない。

#### 4.5 直接積分法 (EOS)<sup>51),52)</sup>

著者および片岡の研究によるもので、一次元平板形状における定常のボルツマン輸送方程式を Discrete Ordinates 法にもとづいて解く計算方法である。

まず Discrete Ordinate 角度分点をガウス求積法の積分点に選び、輸送方程式をこの各角度分点に対し中性子の進行方向にそって直接積分する。エネルギー依存は NIOBE と同じく多群に組み分けし、エネルギーの高い群から 1 群づつ低い群へ計算をすすめる。

散乱積分計算は非等方扱いの弾性散乱および実験室系で等方散乱仮定の非弾性散乱にもとづいて、NIOBE における散乱積分計算に適用したのと同じ技法<sup>2),18),50)</sup>を適用して行なう。したがって EOS は NIOBE と同じ弱点を持つことになった。ただし、EOS の場合は形状が平板形状であるために、単一方向に近い角度分布の入射線源問題を除いて、平板等方線源問題や平板余弦分布線源問題などの一様な角度分布を持つ線源問題の場合には、非散乱線の減衰の仕方に差があっても零になることはないで解は一様に収斂する。しかし収斂した角度分布が、遮蔽問題にもよるが、高エネルギー領域で振動することがある (Fig. 4.2)。Fig. 4.2 に示されている計算例は核分裂線源からの中性子のカーボン媒質中における中性子角度分布である。線源は板形状であり、 $x=0$  cm で 50 cm 厚のカーボン媒質に入射する。また線源の角度分布は等方とした。図中実線

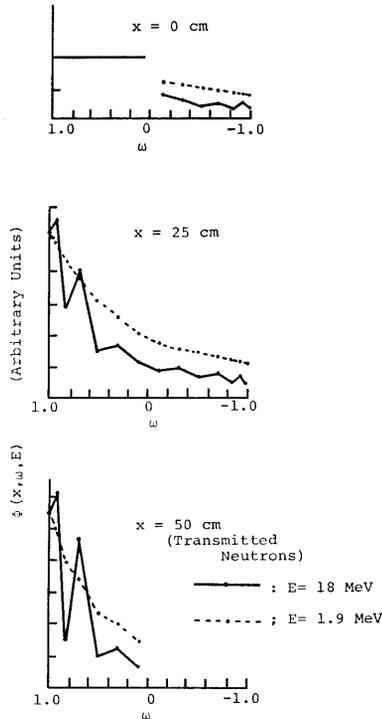


Fig. 4.2 Fast neutron angular distributions in graphite from plane isotropic fission source (EOS calculation)

は 18 MeV のエネルギーの場合であり、一方点線は 1.9 MeV の場合である。この計算例の場合でも角度について積分した中性子スカラー束は正しく求められている。その計算例を Fig. 4.3 に示す。これは上述の問題を計算した中性子エネルギースペクトルである。図中には EOS-2 の計算結果を点線で示し、他の計算結果としてモーメント法による無限平板中のエネルギースペクトル<sup>53)</sup>を実線で、さらに次章で述べる MENE による計算結果<sup>59)</sup>を一点鎖線で示し比較した。同図に示された計算結果は EOS-2 および MENE とともに計算のレザジ間隔が 0.25 と粗いためにカーボン中の中性子スペクトルが示すべき激しい変化は Fig. 4.3 には現われていない。以上の計算例から EOS により算出された透過中性子の角度分布は高いエネルギー領域ではその使用には注意を要する。

また単一方向入射線源（通常垂直入射線源）や鋭い前方ピークの角度分布をもつ入射線源問題の場合は、物質透過の中性子角度分布は鋭い前方ピークを示す。このことから NIOBE 計算で問題になったのと同様の悪い影響が現われる。すなわち計算結果は収斂し

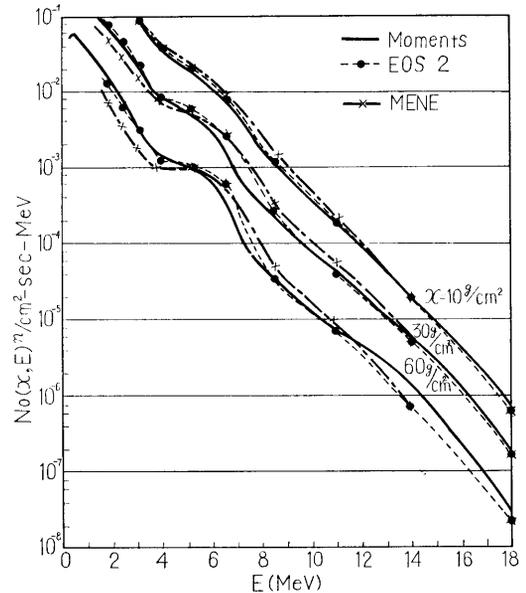


Fig. 4.3 Fast neutron energy spectra in graphite from plane isotropic fission source. Comparison of EOS calculation with Moments and MENE calculations

ないので求まらないか、あるいは収斂しても無意味な負の値に収斂することがある。

上述の中性子束角度分布が高エネルギー領域で振動したり、あるいは無意味な負の値になる原因は輸送方程式の右辺の散乱積分の計算方法にある。そこで文献(52)を参照して EOS における散乱積分の計算方法を検討してみる。その際非弾性散乱は実験室系で等方散乱を仮定しているので中性子束角度分布の変化にはあまり影響を及ぼさない。したがって以下の議論では弾性散乱による積分計算のみを取り上げ、非弾性散乱による積分計算については省略する。

一次元平板形状における中性子束角度分布を  $\Phi(x, \omega, E)$  で表わす。ここで  $x$  は空間座標、 $\omega$  は中性子の進行方向と  $x$  軸とのなす角の余弦、 $E$  は中性子のエネルギーである。この場合の弾性散乱による散乱積分項は(2-2)式から次のように書き表わせる。

$$I = \int_E^{E_{\max}} dE' \int_{4\pi} d\bar{\Omega}' \cdot n(x) \sigma_s(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E) \times \Phi(x, \bar{\Omega}', E') \quad \dots (4-1)$$

なお、散乱積分項を上式のように  $I$  で代表させる。ここで  $n(x)$  は位置  $x$  における原子の密度であり、また  $\sigma_s(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E)$  は微視的散乱断面積である。

付録 D を参照すれば (4-1) 式は次式のように書き表わせる。

$$I = \int dE' \int d\bar{\Omega}' \cdot n(x) \sigma_s(E') f(E', \mu) \times \delta(\cos \theta - \alpha) \frac{(M+1)^2}{2ME'} \Phi(x, \omega', E') \quad \dots\dots(4-2)$$

散乱積分計算はエネルギーの代わりに次式で定義する中性子レサジによって行なう。

$$u = \ln \frac{E_{\max}}{E} \quad \dots\dots(4-3)$$

また  $d\bar{\Omega}'$  は次式の関係式を使って表わす。

$$\int d\bar{\Omega}' = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\psi \quad \dots\dots(4-4)$$

ここで  $\mu = \cos \vartheta$  は重心系における散乱角の余弦,  $\psi$  は散乱の方位角である (Fig. 4.4 参照)。

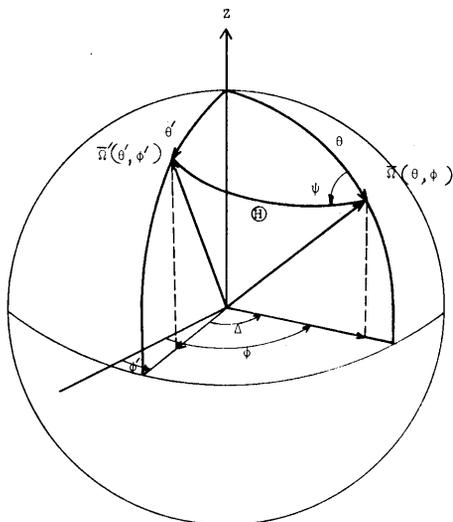


Fig. 4.4 Scattering angle in laboratory system. The  $\bar{\Omega}'$  is direction of incident neutron and the  $\bar{\Omega}$  direction of emergent neutron.

(4-3) 式から,  $dE' = -E' du'$ , また付録 D の (D-5) 式から  $du' = \frac{2M}{(M+1)^2} e^{u-u'} d\mu$  を得る。したがって,

$$I = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\psi \cdot n(x) \sigma_s(u') f(u', \mu) \delta(\cos \theta - \alpha) e^{u-u'} \times \Phi(x, \omega', u') \quad \dots\dots(4-5)$$

さて, 中性子束  $\Phi(x, \omega', u')$  および散乱角度分布関数  $f(u', \mu)$  を有限項のルジャンドル多項式展開近似する。すなわち,

$$\Phi(x, \omega', u') = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \Phi_l(x, u') P_l(\omega') \quad (4-6)$$

(340)

$$f(u', \mu) = \sum_{p=0}^P \frac{2p+1}{4\pi} f_p(u') P_p(\mu). \quad (4-7)$$

したがって (4-5) 式は次式のように書ける。

$$I = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\psi \cdot n(x) \sigma_s(u') \sum_{p=0}^P \frac{2p+1}{4\pi} \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} \times f_p(u') P_p(\mu) \Phi_l(x, u') P_l(\omega') e^{u-u'} \delta(\cos \theta - \alpha) \quad \dots\dots(4-8)$$

Fig. 4.4 を参照して単位球面上の 2 点  $\bar{\Omega}(\theta, \phi)$ ,  $\bar{\Omega}'(\theta', \phi')$  を原点から見た角を  $\theta$  とすると, 球面三角の公式から

$$\cos \theta = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \quad \dots\dots(4-9)$$

あるいは  $\psi$  を  $(\bar{\Omega}, \bar{\Omega}')$  平面と  $(z, \bar{\Omega})$  平面とのなす角 (前述の散乱の方位角である) とすると,

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos \theta + \sin \theta \sin \theta \cos \psi \quad \dots\dots(4-10)$$

また, 球面関数の加法定理として次の関係式がある。

$$P_n(\cos \theta) = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta') \times \cos m(\phi - \phi') \quad \dots\dots(4-11)$$

あるいは (4-11) 式を書き換えれば次式となる。

$$P_n(\cos \theta') = P_n(\cos \theta) P_n(\cos \theta) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta) P_n^m(\cos \theta) \times \cos m\psi \quad \dots\dots(4-12)$$

ここで  $P_n^m(\cos \theta)$  はルジャンドルの陪関数である。以上の (4-9) 式から (4-12) 式は Fig. 4.4 で示される単位球面上における  $z$  軸と中性子の進行方向の単位ベクトル  $\bar{\Omega}$  および  $\bar{\Omega}'$  の 3 点から成る球面三角に関する公式である。球面三角に関する基本的な公式は数学公式集に出ている。

(4-12) 式を使用して (4-8) 式の散乱の方位角  $\psi$  についての積分を計算する。そのために (4-8) 式で  $\cos \theta' = \omega'$ ,  $\cos \theta = \omega$ ,  $\cos \theta = \alpha$  で表わし,  $\psi$  について 0 から  $2\pi$  まで積分すると次式となる。

$$\int_0^{2\pi} P_n(\omega') d\psi = 2\pi P_n(\omega) P_n(\alpha) + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\omega) P_n^m(\alpha) \times \int_0^{2\pi} \cos m\psi d\psi = 2\pi P_n(\omega) P_n(\alpha) \quad \dots\dots(4-13)$$

したがって (4-8) 式で  $\psi$  についての積分は

$$\int_0^{2\pi} P_l(\omega') d\psi = 2\pi P_l(\omega) P_l(\alpha)$$

のように求まる。これゆえに (4-8) 式は次式のように書ける。

$$I = \sum_{p=0}^P \frac{2p+1}{2} \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} n(x) P_l(\omega) \times \int_{-1}^1 \sigma_S(u') f_p(u') P_p(\mu) \Phi_l(x, u') P_l(\alpha) e^{u-u'} d\mu \quad \dots\dots(4-14)$$

(4-14) 式は  $\mu$  についての積分だけになったので、次にこの  $\mu$  についての積分を実行する、積分計算は数値積分によって行なう。文献 (52) の付録 B および C を参照して、

$$H_p(u') = \Phi_l(x, u') \sigma_S(u') f_p(u') \quad \dots(4-15)$$

とき、

$$\int_{-1}^1 H_p(u') P_p(\mu) P_l(\alpha) e^{u-u'} d\mu \quad \dots(4-16)$$

の積分計算は文献 (2) および (52) を参照して次のように行なう。まず  $\mu$  とレサジは密接なる関係がある。すなわち付録 D の (D-5) から次式の関係を得る。

$$\mu = 1 - \frac{(M+1)^2}{2M} (1 - e^{u'-u}) \quad \dots\dots(4-17)$$

したがって (4-16) 式を  $\mu$  について数値積分するのに、その積分点を  $\mu$  について選んでも  $u$  について選んでもよいから、積分点を  $u = jh$  点に選ぶ。ここで  $j$  は整数であり、 $h$  はレサジステップである。いま、 $e^{-u'} H_p(u')$  がレサジメッシュ区間で線型関数で近似できる<sup>2)</sup>とすると、

$$\frac{2p+1}{2} \int_{-1}^1 H_p(u') e^{u-u'} P_p(\mu) P_l(\alpha) d\mu = \sum_{k=0}^{N+1} H_{pk} \phi_{pk}^l \quad \dots\dots(4-18)$$

のようにレサジメッシュ点についての和の形で近似される。上式で  $k=0$  は自分自身のエネルギーメッシュ点に対する値を意味し、 $k=k$  は自分自身のエネルギーメッシュより  $k$  番目高いエネルギーメッシュに対する値を意味する。なおマトリックス  $\phi_{pk}^l$  は文献 (51) の付録 C, D, E, F に計算されている。したがって積分項  $I$  は次式のように計算される。

$$I = \sum_{p=0}^P \sum_{l=0}^L \sum_{k=0}^{N+1} n(x) \sigma_S(u-kh) f_p(u-kh) P_l(\omega) \times \phi_{pk}^l \frac{2l+1}{4\pi} \Phi_l(x, u-kh) \quad \dots\dots(4-19)$$

上式における  $\Phi_l(x, u)$  は次式から計算される。

$$\Phi_l(x, u) = 2\pi \int_{-1}^1 \Phi(x, \omega, u) P_l(\omega) d\omega = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{q=1}^Q a_{lq} \Phi(x, \omega_q, u) \quad (4-20)$$

ここで重み  $a_{lq}$  は

$$a_{lq} = \frac{2l+1}{2} a_q P_l(\omega_q) \quad \dots\dots(4-21)$$

から求められる。上式における  $\omega_q$  はガウス求積法の積分点であり、また  $a_q$  はその重みである。

したがって散乱積分項 (4-1) 式は次式のように和の形に導出される。すなわち、

$$I = \sum_{p=0}^P \sum_{l=0}^L \sum_{k=0}^{N+1} n(x) \cdot \sigma_S(u-kh) f_p(u-kh) P_l(\omega) \times \phi_{pk}^l \sum_{q=1}^Q a_{lq} \Phi(x, \omega_q, u-kh) \quad \dots\dots(4-22)$$

以上の数式の導出における特徴は次のようである。

- i) 中性子束は有限項のルジャンドル多項式展開近似された。このことにより中性子束は角度変数とエネルギー変数を分離して取り扱うことができた。
- ii) 微分散乱角度分布関数も有限項のルジャンドル多項式展開近似された。このことにより角度分布関数はエネルギー変数と重心系における散乱角度変数に分離して取り扱うことができた。
- iii) 球面三角における加法定理を使用することにより、散乱の方位角  $\psi$  についての積分計算を行なった。
- iv) 重心系における散乱角  $\mu$  についての積分計算は、(4-15) 式で表わされる  $H_p(u')$  に  $e^{-u'}$  を掛けたものがレサジメッシュ間で線型関数で近似できると仮定してレサジメッシュについての和の形に近似計算された。

以上の過程で中性子束を有限項のルジャンドル展開近似できるという仮定が、速中性子の透過計算で起こる中性子角度分布の鋭い前方ピークを首尾良く近似することができないことから、算出された透過中性子の角度分布に実際の現象では現われない振動が現われることになる。

なお散乱角度分布関数を有限項のルジャンドル多項式で展開近似する方法は、散乱角度分布が鋭い前方ピークになる高エネルギー領域 (10 MeV 程度以上) を除いて、項数を重心系で 8~12 程度取れば十分に散乱角度分布を近似することができる。実用計算では 10 MeV 程度以上に高いエネルギーにおける散乱角度分布関数でも有限項のルジャンドル多項式で展開近似する。この場合にルジャンドル多項式展開係数  $f_p(E)$  が入力データとして入力されるが、この  $f_p(E)$  を使って元の関数  $f(E, \mu)$  を再生してみると、ある散乱角度で負になることがあるので注意を要する。

## 第5章 Discrete Ordinates 直接積分法 (MENE, PALLAS)

### 5.1 緒 言

前章で中性子遮蔽計算に使用されている在来の Discrete Ordinates 法にもとづく数値解法に対し、中性子の透過問題適用の見地に立って検討を加えた。その結果、中性子透過問題に適用した場合に在来の Discrete Ordinates 数値解法が持つ問題点および取り扱い得る透過問題の限界等が明らかにされた。本章では、これらの問題点や限界を取り除いて、中性子透過問題を正確にまた効果的に計算することのできる計算法の確立を目的として、定常の中性子輸送方程式を Discrete Ordinates 法にもとづいて解く新たな数値解法を提案する。

本章で提案する輸送方程式の数値解法はおよそ次のようである。すなわち、まず定常の中性子ボルツマン輸送方程式を基礎方程式としてたてる。この輸送方程式を中性子の進行方向単位ベクトル  $\bar{\Omega}$  について単位球面上に選ばれた Discrete Ordinate 角度分点  $\bar{\Omega}_{pq}$  で表わす。さらにエネルギーについても中性子レサジ上でレサジ単位で等間隔に分け、その分点をレサジ分点とし、このレサジ分点に相当するエネルギーをエネルギー分点  $E_j$  ( $j=1, 2, \dots, J$ ) で表わす。このように中性子の進行方向およびエネルギーについて Discrete Ordinate 分点表示の輸送方程式に対して、この輸送方程式の右辺の散乱積分を数値積分によって計算する。散乱積分がエネルギー  $E=E_j$  に対し、各角度分点  $\bar{\Omega}_{pq}$  につき求められれば、輸送方程式のいわゆる線源項は各エネルギーメッシュ  $E=E_j$  に対して直ちに計算される。したがって、Discrete Ordinate 分点表示の輸送方程式は、エネルギー  $E=E_j$  ( $j=1, 2, \dots, J$ ) についての  $J$  個の一群の輸送方程式で書き表わされる。もちろんこれらの  $J$  個の一群の輸送方程式はエネルギーに関して結合されている。これらの  $J$  個の一群のボルツマン輸送方程式は中性子の進行方向の各角度分点  $\bar{\Omega}_{pq}$  で進行方向にその飛程に沿って線積分することにより、一群の積分型輸送方程式が導出される。

そこでさらに空間変数  $\bar{r}$  についても Discrete Ordinate メッシュ点  $\bar{r}_i$  を定めると、上述の一群の積分型輸送方程式はこの空間メッシュ ( $\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i$ ) 間で容易に積分できる。最終的には計算機で計算するのに都合の良い差分型の式が導出される。以上の数式の導出の過程で、空間形状に関しては何ら規定していないので導

(342)

出された差分形の式は、各種空間座標で書き換えることにより各種形状に対する中性子の透過計算を行なうことができる。

なお中性子の飛程にそってボルツマン輸送方程式を積分する方法は、初め R.D. Richtmyer<sup>54)</sup> が球対称形状における時間依存の一群のボルツマン輸送方程式を finite-difference 法で解くために、空間一時間から成る位相空間上中性子の飛程にそって方程式を積分したことに始まる。Richtmyer はまず球対称形状に対して書かれた一群のボルツマン輸送方程式を次式で示す変換により ( $r, \omega = \cos \theta$ ) 変数を ( $x, y$ ) 変数に変換した。すなわち、

$$\begin{cases} x = r\omega = r \cos \theta \\ y = r \sqrt{1 - \omega^2} = r \sin \theta \end{cases}$$

また彼はこの ( $x, y$ ) 座標を Quasi-Cartesian 座標と呼び、この ( $x, y$ ) 座標で書き換えられたボルツマン輸送方程式を  $x - vt = \text{const.}$  および  $y = \text{const.}$  の条件のもとに  $x$  軸にそって方程式を積分した。この条件  $x - vt = \text{const.}$  および  $y = \text{const.}$  は中性子の飛程にそっており、また一階の偏微分方程式の特性線でもある。Richtmyer の Quasi-Cartesian 座標使用および中性子の飛程にそって方程式を積分するこの解法は、その後球対称形状および二次元円柱形状におけるエネルギー依存の定常のボルツマン輸送方程式の直接積分法である NIOBE<sup>48)</sup> や MENE-2<sup>55), 56)</sup> 等に適用されている。中性子の進行方向にその飛程にそって輸送方程式を直接積分するこの解法は、速中性子の遮蔽で特に問題となる鋭い前方ピークの角度分布を比較的容易に取り扱い得るので遮蔽計算に適している。すなわち、中性子角度分布を計算する上で、Discrete Ordinate 角度分点  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{pq}$  につき各角度分点で独立に輸送方程式を直接積分するので、前方方向の角度分布の計算を比較的他の方向の角度分布に影響されずに行なうことができるからである。

### 5.2 定常のボルツマン輸送方程式

定常のボルツマン輸送方程式 (2-1) 式を再び (5-1) 式として書く。

$$\begin{aligned} & \bar{\Omega} \cdot \text{grad } \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) + \Sigma(\bar{r}, E) \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \\ & = \sum_i n_i(\bar{r}) \int d\bar{\Omega}' \int dE' \sigma_{s,i}(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E) \\ & \quad \times \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', E') + S(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \quad \dots \dots (5-1) \end{aligned}$$

(5-1) 式を計算する順序として、まず右辺の第1項の中性子の散乱積分を数値積分計算によって求める。右辺の線源項が各エネルギーメッシュについて求められ

たならば、このエネルギーメッシュについての一群の輸送方程式を直接積分によって解く。この順序に従って以降の各節で式の導出を行なう。

### 5.3 散乱積分計算

中性子の核との散乱現象は弾性散乱および非弾性散乱の両現象を考慮に入れる。弾性散乱は実際の物理現象をできるだけ正確に取り扱う必要性から、高次の非等方成分も含むことができる程度に充分な非等方散乱の取り扱いをする。一方非弾性散乱は実験室系で等方散乱の仮定をする(第3章)。

さて、以後の計算に便利なように(5-1)式の右辺の散乱積分項を  $G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  で表わすと、 $G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  は(5-2)式で書き表わせる。

$$G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = \sum_i n_i(\bar{r}) \int d\bar{\Omega}' \int dE' \sigma_{S,i}(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E) \times \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', E') \quad \dots\dots(5-2)$$

さらに  $G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  を弾性散乱による積分項  $G_{el}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  と非弾性散乱による積分項  $G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  とに分けて計算する。すなわち、

$$G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = G_{el}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) + G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \quad (5-3)$$

ここで、

$$G_{el}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = \sum_i n_i(\bar{r}) \int d\bar{\Omega}' \int dE' \sigma_{S,i}^{el}(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E) \times \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', E') \quad \dots\dots(5-4)$$

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = \sum_i n_i(\bar{r}) \int d\bar{\Omega}' \int dE' \sigma_{S,i}^{in}(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E) \times \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', E') \quad \dots\dots(5-5)$$

上式で  $\sigma_{S,i}^{el}(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E)$  および  $\sigma_{S,i}^{in}(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E)$  はそれぞれ弾性散乱および非弾性散乱の微分散乱断面積である。

#### 5.3.1 弾性散乱積分項 $G_{el}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ の計算

(5-4)式の計算をすすめる上で簡単のために核種を表わす  $i$  は省略する。微分散乱断面積  $\sigma_{el}(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E)$  を付録 D の (D-9) 式のように書き表わす。すなわち、

$$\begin{aligned} \sigma_{el}(\bar{\Omega}' \rightarrow \bar{\Omega}, E' \rightarrow E) \\ = \sigma_{S,i}^{el}(E') f(E', \mu) \delta(\cos \theta - \alpha) \frac{(M+1)^2}{2ME'} \end{aligned} \quad \dots\dots(5-6)$$

ここで  $\mu$  は重心系での散乱角の余弦 (=  $\cos \vartheta$ )、 $\theta$  は実験室系での散乱角、 $\alpha$  は付録 D の (D-2) 式から計算される実験室系における散乱角の余弦 ( $\alpha = \cos \Theta$ ) である。また  $M$  は標的核の質量数である。さらに  $f(E', \mu)$  は付録 D で定義される散乱角度分布関数で

ある。

(5-4)式でエネルギー  $E$  の代わりに中性子レサジ  $u$  ((4-3)式)で表わすと、(4-5)式の導出と同じように次式が導出される。

$$\begin{aligned} G_{el}(\bar{r}, \bar{\Omega}, u) = \int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\psi n(\bar{r}) \sigma_{S,i}^{el}(u') f(u', \mu) \\ \times \delta(\cos \theta - \alpha) e^{u-u'} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', u') \end{aligned} \quad \dots\dots(5-7)$$

第4章 4.3において、中性子束  $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)$  は有限項のルジャンドル多項式で展開近似されたが、本計算法では中性子束  $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)$  についての多項式展開近似は一切行なわない。一方  $f(u, \mu)$  については有限項のルジャンドル多項式展開近似してもよい<sup>55), 56), 57)</sup>、そのままの形<sup>58), 59)</sup>でも以降の計算に本質的な差はない。しかし実際の計算に使用する  $f(u, \mu)$  のデータはルジャンドル多項式展開の展開係数  $f_i$  として得られているのが普通である。したがって  $f(u, \mu)$  を有限項のルジャンドル多項式で展開しておく方が便利である。そこで

$$f(u', \mu) = \sum_{l=0}^L \frac{2l+1}{4\pi} f_l(u') P_l(\mu) \quad \dots(5-8)$$

上式で展開次数を表わす  $L$  は任意の大きな数を定めることができる。

次に、(5-7)式の積分計算を実行するために中性子の進行方向  $\bar{\Omega}$  を Discrete Ordinate の角度分点  $\bar{\Omega}_{pq}$  で表わす必要がある。 $\bar{\Omega}$  は Fig. 4.4 を参照して極角  $\theta$  および方位角  $\phi$  の2つの角度で表わせる。すなわち、 $\bar{\Omega} \equiv \bar{\Omega}(\theta, \phi)$  である。本章における以下の計算では極角  $\theta$  の代わりに  $\omega = \cos \theta$  を極角に関する変数として使うので、 $\bar{\Omega} \equiv \bar{\Omega}(\omega, \phi)$  と書き表わす。

Discrete Ordinate 角度分点  $\bar{\Omega}_{pq}$  の決め方はいくつか考えられるが、理想的には角度分点  $\bar{\Omega}_{pq}$  が各座標軸に対して対称に単位球面上に分布していることが望ましい。例えば三次元  $(x, y, z)$  形状では角度分点  $\bar{\Omega}_{pq}$  が  $x, y, z$  の3軸に対して対称に分布していることである。Discrete Sn 法ではこの角度分点の選び方につき特に研究されて、特別の角度分点およびその重みのセットが出来ている<sup>44)</sup>。本研究では一次元形状の場合に角度分点  $\Omega_p = \omega_p$  をガウス求積法における積分点に選ぶ必要から、一般の場合においても極角に関する  $\omega$  の分点  $\omega_p$  をガウス求積法の積分点に選ぶ<sup>57)</sup>。これに対し方位角  $\phi$  については Fig. 5.1 を参照して  $1/8$  球面上で  $\phi$  の範囲  $(0, \pi/2)$  を極角の余弦  $\omega_p$  の  $p$  に関係して等分割し、その中心点を  $\phi$  の分点  $\phi_{pq}$  とす

る<sup>57)</sup>。したがって  $\bar{\Omega}$  の角度分点  $\bar{\Omega}_{pq}$  は Fig. 5.1 のように選ばれる。付録 E に一例として  $p=1-6$  ( $-1 < \omega_p < 1$ ) の場合の  $\omega_p$  および  $\phi_{pq}$ 、さらにそれぞれの重み、それから  $\omega_p$  の重みと  $\phi_{pq}$  の重みの積で決まる  $\bar{\Omega}_{pq}$  の重みを載せておく<sup>60)</sup>。

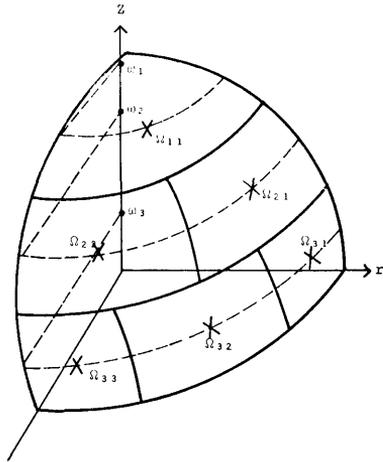


Fig. 5.1 Discrete-ordinate directions on 1/8 unit sphere

本研究における角度分点の選び方は単位球面上における等面積分割法に相当し、角度分点  $\bar{\Omega}_{pq}$  に対する重みが全て等しければ単位球面を正確に等面積に分割したことになり、これは厳密に三次元形状における3軸に対する対称性を満足する。しかし付録 E の例から  $\bar{\Omega}_{pq}$  に対する重みが必ずしも全て等しくないことから、本解法で使用する角度分点セットは厳密には3軸に関する対称性を満足しているとはいえない。ただし、重みの差が最大で 13.5% 以内であることから近似的には上述の対称条件を満たしているといえよう。なお上述の Sn 法に対する特別の角度分点およびその重みのセットを本解法に適用してもよい。また一次元形状の場合には、座標軸に対する対称条件はなくなる。そして本解法ではガウス求積法の積分点とその重みを一次元形状における角度分点とその重みとして採用する。このガウス積分点およびその重みを、分点数が 14, 16 および 20 の場合について付録 E に示しておく。

以上が中性子の進行方向角  $\bar{\Omega}$  についての角度分点の定め方である。次いで中性子のエネルギーについてもエネルギー分点を定める。この場合にはエネルギー  $E$  の代わりに中性子レサジ  $u$  に対して、レサジ単位の  $h$  で  $u$  を等間隔に分け、各レサジ分点を  $u_j$  ( $j=1, 2, \dots, J$ ) で表わす。したがって  $j$  番目のレサジ  $u_j$  は

$$(344)$$

$$u_j = u_1 + (j-1)h$$

となる。また  $u_1$  は (4-3) 式から  $u_1=0$  である。

中性子の進行方向  $\bar{\Omega}$  およびレサジ  $u$  が分点表示できたので、(5-7) 式の右辺の積分計算は数値積分によって計算できる。その際次に述べる2つの仮定にもとづいて数値積分計算する<sup>55), 56), 57)</sup>。

(1) 中性子束  $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}(\omega, \phi), u)$  は角度およびレサジについて微小区間  $d\bar{\Omega}(d\omega, d\phi)$  および  $du$  内でステップ関数で近似できる。

(2) 散乱断面積  $\sigma_s(u)$  および散乱角度分布関数  $f(u, \mu)$  のルジャンドル多項式展開係数である  $f_l(u)$  は、微小区間  $du$  内でステップ関数で近似できる。

以上の仮定にもとづいて (5-7) 式における  $\mu$  についての積分はガウス求積法を適用して数値積分計算する。このために  $\mu$  を区間  $(-1, 1)$  で  $M$  個の積分点  $\mu_m$  ( $m=1, 2, \dots, M$ ) に分ける。この場合の積分点  $\mu_m$  はガウス求積法における積分点に一致して選ばれる。一方散乱の方位角  $\phi$  についての積分は次に述べるような数値積分によって計算する。すなわち、まず  $\phi$  についての積分区間を決める必要がある。 $\phi$  は ( $z$  軸,  $\bar{\Omega}$ ) 平面に対する対称性 (Fig. 5.2 参照) から区間は  $(0, \pi)$  を対象とすればよい。この区間  $(0, \pi)$  を中性子の進行方向の極角の余弦  $\omega$  の分点  $\omega_p$  に対応して、 $\phi$  についても分点  $\phi_n$  ( $n=1, 2, \dots, P$ ) を設ける (Fig. 5.3)。Fig. 5.3 からわかるように積分変数である  $\phi$  は他の変数に対して独立な変数ではなく、 $\phi = \phi(\alpha, \omega)$  のように  $\alpha$  と  $\omega$  の従属変数である。さらに実験室系における散乱角の余弦である  $\alpha$  は  $\alpha = \alpha(\mu, \rho)$  のように  $\mu$  と

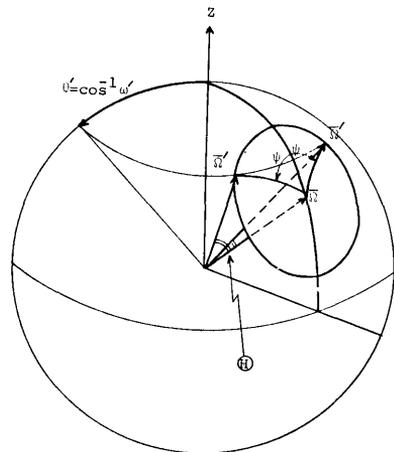


Fig. 5.2 Scattering is symmetry with respect to  $(z, \bar{\Omega})$ -plane.

$\rho$  の従属変数である (付録 B)。なお  $\rho$  は標的核の質量数の逆数である。したがって  $\psi$  についての分点  $\psi_n$  は  $\mu = \mu_m$  と  $\rho$  とから決まる  $\alpha_m$  および  $\omega = \omega_n$  により決められる (Fig. 5.4)。以下に  $\psi = \psi_n$  の求め方を詳しく述べる。

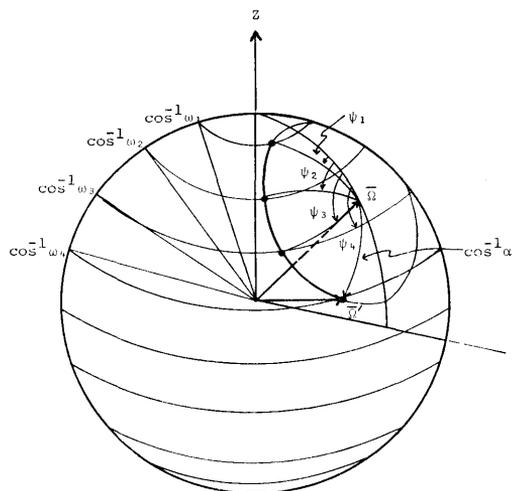


Fig. 5.3 Relation between discrete points  $\psi_n$  of azimuthal angle and discrete points  $\omega_n$  of cosine of polar angle in scattering

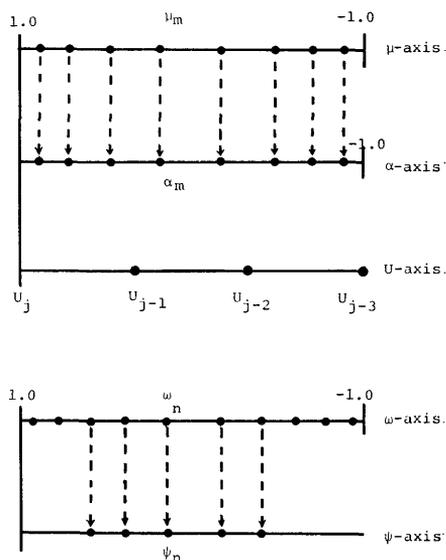


Fig. 5.4 Cosine of scattering angles,  $\mu$  and  $\alpha$ , in center of mass and laboratory systems, and relation between cosine of angle of neutron direction  $\omega$  and azimuthal angle of scattering  $\psi$

いま中性子の進行方向  $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{pq}$  および散乱角の余弦  $\mu = \mu_m$  に対し、散乱の方位角  $\psi$  および中性子の散乱前の進行方向  $\vec{\Omega}'$  を決める。重心系および実験室系における散乱角の余弦の間には次式の関係がある ((B-2) 式)。

$$\alpha_m(\mu_m, \rho) = \frac{\mu_m + \rho}{(1 + 2\rho\mu_m + \rho^2)^{1/2}} \quad \dots (5-9)$$

また散乱前後の中性子の極角の余弦の間には次式に示す関係がある ((4-10) 式)。

$$\omega' = \omega_p \alpha_m + \sqrt{(1 - \omega_p^2)(1 - \alpha_m^2)} \cos \psi \quad (5-10)$$

いま  $\omega' = \omega_n$  と定め (Fig. 5.3),  $\omega_n$  に対応して (5-10) 式における  $\psi$  を  $\psi = \psi_n$  とすると,  $\psi_n$  は次のように求まる (Fig. 5.4)。すなわち, (5-10) 式を変形して次式を得る。

$$\cos \psi_n = \frac{\omega_n - \omega_p \alpha_m}{\sqrt{(1 - \omega_p^2)(1 - \alpha_m^2)}} \equiv \eta_n(\alpha_m, \omega_p, \omega_n) \quad \dots (5-11)$$

(5-11) 式から  $\psi_n$  を計算し, また  $\psi_n$  点を数値積分点とする際の重み  $W_n^*$  も以下のように計算する (Fig. 5.5)。

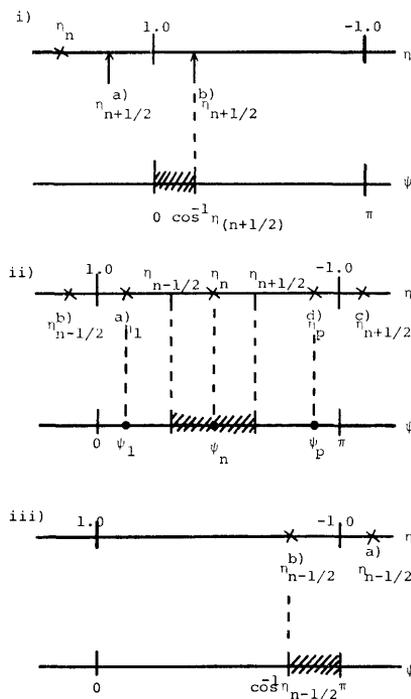


Fig. 5.5 Determination of azimuthal angular meshes  $\psi_n$  and their weights  $\omega_n$

- i)  $\eta_n > 1$  の場合
  - a)  $\eta_{n+1/2} \geq 1$  の場合,  $\phi_n = 0 \quad W_n^* = 0$
  - b)  $\eta_{n+1/2} < 1$  の場合,  $\phi_n = 0 \quad W_n^* = \cos^{-1} \eta_{(n+1/2)}$
- ii)  $1 \geq \eta_n \geq -1$  の場合
  - $\phi_n = \cos^{-1} \eta_n$
  - $W_n^* = |\cos^{-1} \eta_{(n-1/2)} - \cos^{-1} \eta_{(n+1/2)}|$
 ただし
  - a)  $n=1$  の場合  $\cos^{-1} \eta_{1/2} = 0$
  - b)  $\eta_{(n-1/2)} > 1$  の場合  $\cos^{-1} \eta_{(n-1/2)} = 0$
  - c)  $\eta_{(n+1/2)} < 1$  の場合  $\cos^{-1} \eta_{(n+1/2)} = \pi$
  - d)  $n=P$  の場合  $\cos^{-1} \eta_{(P+1/2)} = \pi$
- iii)  $\eta_n < -1$  の場合
  - a)  $\eta_{(n-1/2)} \leq -1$  の場合,  $\phi_n = \pi \quad W_n^* = 0$
  - b)  $\eta_{(n-1/2)} > -1$  の場合,  $\phi_n = \pi \quad W_n^* = |\cos^{-1} \eta_{(n-1/2)} - \pi|$

(5-12)

以上の計算で散乱の方位角に関する積分点  $\phi_n$  とその重み  $W_n^*$  が決められた。

次に散乱前の中性子の進行方向の方位角  $\phi'$  を求める。Fig. 4.4 を参照して ( $z$  軸,  $\bar{\Omega}'$ ) 平面と ( $z$  軸,  $\bar{\Omega}$ ) 平面とのなす角度を  $\Delta$  で表わすと,  $\phi'$  は次式から求められる。

$$\phi' = \phi - \Delta$$

なお散乱角  $\theta$  が同じで  $\omega' = \omega_n$  の場合がもう一つあり (Fig. 5.2), それは,  $\phi' = \phi + \Delta$  の場合である。また角度  $\Delta$  は第4章の (4-9) 式で  $\Delta = \phi - \phi'$ ,  $\alpha = \cos \theta$ ,  $\omega = \cos \theta$  と置いて式を変形し,  $\alpha = \alpha_m$ ,  $\omega = \omega_p$ ,  $\omega' = \omega_n$  と分点表示すれば角度  $\Delta$  は次式から計算される。

$$\cos \Delta = \frac{\alpha_m - \omega_p \omega_n}{\sqrt{(1 - \omega_p^2)(1 - \omega_n^2)}} \equiv \xi_n(\alpha_m, \omega_p, \omega_n) \quad \dots (5-13)$$

上式で  $\xi$  の値は  $1 \geq \xi_n \geq -1$  の範囲にあるもののみを採用する。 $\xi_n$  の値が求まれば角度  $\Delta$  は求まり, さらに  $\phi'$  も求めることができる。すなわち,

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \cos^{-1} \xi_n \\ \phi' &= \phi_{pq} \pm \Delta \end{aligned} \right\} \quad \dots (5-14)$$

$\phi'$  についても分点表示する必要がある。そこで分点  $\phi_{pq}$  は Fig. 5.1 の例のように  $\phi$  についてのある領域を代表していると考えて,  $\phi'$  の属する領域の代表分点を  $\phi_{nq'}$  および  $\phi_{nq''}$  とする。この関係を式で表わせば次式の

(346)

$$\phi_{pq} + \Delta \in \phi_{nq'}, \quad \phi_{pq} - \Delta \in \phi_{nq''} \quad \dots (5-15)$$

であり, (5-15) 式から  $\phi'$  の属する分点が決められる。

最後に散乱前の中性子のもつレサジ  $u'$  を  $\mu$  の関数として,  $\mu = \mu_m$  に対して  $u' = u'(\mu_m)$  から求める (Fig. 5.4)。いま  $u = u_j$  とした場合,  $u'$  は付録Dの (D-5) 式から各  $\mu = \mu_m$  に対して次のように求められる。

$$u' = u_j - \ln \frac{(1 + \rho)^2}{1 + 2\rho\mu_m + \rho^2} \quad \dots (5-16)$$

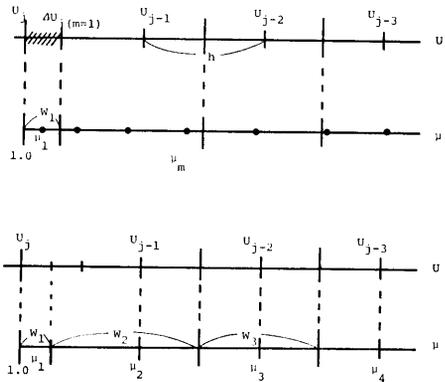


Fig. 5.6 Relation between lethargy meshes and mesh points of cosine of scattering angle in center of mass system

上式から計算される  $u'$  に対し

$$u_g - \frac{h}{2} < u' \leq u_g + \frac{h}{2}, \quad g \leq j-2 \quad \dots (5-17)$$

の範囲にある  $u'$  を  $u' = u_{g(m)}$  ( $2 \leq m \leq M$ ) で代表させる (Fig. 5.6)。また  $g = j-1$  の場合には特別に

$$u_{j-1} - \frac{h}{2} < u' \leq u_{j-1} - \Delta u_{j(m=1)} \quad \dots (5-18)$$

を定め, この範囲内の  $u'$  を  $u' = u_{j-1(m)}$  とおく (Fig 5.6)。なお  $\Delta u_{j(m=1)}$  は 5.5 節の (5-72) 式で与えられる。

以上の計算で (5-7) 式の積分は数値積分計算され, 位置  $\bar{r}$  においてレサジが  $u = u_j$  で進行方向が  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{pq}$  である弾性散乱項  $G_{el}(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, u_j)$  は (5-19) 式のように求まる。

$$\begin{aligned} G_{el}(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, u_j) &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^P a_{mn} T_{g(m), m}(\bar{r}) \Phi_{g(m), n}(\bar{r}) \quad (5-19) \end{aligned}$$

ここでマトリックス  $a_{mn} = W_m W_n^*$  であり,  $W_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ ) はガウス求積法の重みである。一方  $W_n^*$  ( $n = 1, 2, \dots, P$ ) は (5-12) 式から計算される重

みである。また

$$T_{g(m), m}(\bar{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_{l, g(m)} P_{lm} R_m(\rho) \quad \dots\dots (5-20)$$

さらに

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_{g(m)}^{el}(\bar{r}) &= n(\bar{r}) \sigma_S^{el}(u_{g(m)}), \\ f_{l, g(m)} &= f_l(u_{g(m)}), \\ P_{lm} &= P_l(\mu_m). \end{aligned} \right\} \quad \dots (5-21)$$

また,  $R_m(\rho)$  は (5-16) 式を変形して

$$e^{uj-u'} = \frac{(1+\rho)^2}{1+2\rho\mu_m+\rho^2} \equiv R_m(\rho) \quad \dots (5-21)$$

から計算される。

(5-19) 式における  $\Phi_{g(m), n}(\bar{r})$  は次式から求められる。

$$\begin{aligned} \Phi_{g(m), n}(\bar{r}) &= \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{nq'}(\omega_n, \phi_{nq'}), u_{g(m)}) \\ &+ \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{nq''}(\omega_n, \phi_{nq''}), u_{g(m)}) \quad \dots\dots (5-23) \end{aligned}$$

水素原子以外の一般の核に対する弾性散乱の積分計算は以上のように行なわれる。これに対し, 水素原子による散乱減速の場合は, いま注目しているエネルギーから必ず最高エネルギー群まで計算の範囲に入れなければならない。したがって (5-7) 式の積分における  $\mu$  による積分を上述のガウス求積法で計算しないで次に述べる数値積分法で行なう。すなわち  $\mu$  についての積分点はレサジメッシュ  $u_g$  ( $g=1, 2, \dots, j$ ) に対応する  $\mu$  のメッシュ点  $\mu_m$  とする (Fig. 5.6)。なお  $\mu_m$  は付録 D の (D-5) 式で  $M=1.0$  とおき, エネルギー  $E$  の代わりにレサジ  $u$  で表わせば次式のように求まる。

$$\mu_m = 2e^{-(m-1)h} - 1 \quad \dots\dots (5-25)$$

水素原子の場合,  $f(u, \mu)$  は重心系で等方散乱の取り扱いができる (3章 3.2節) ので簡単に  $f(u, \mu) = \frac{1}{4\pi}$  とおける。したがって (5-20) 式は簡単に次式のように書ける。

$$T_{g(m), m}(\bar{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_{l, g(m)} P_{lm} R_m(\rho=1) \quad \dots (5-25)$$

ここで

$$R_m(\rho=1) = \frac{2}{1+\mu_m} = e^{(m-1)h} \quad \dots (5-26)$$

また  $\mu_m$  に対する重みは Fig. 5.6 の下図を参照して次のように決める。

$$W_m = \begin{cases} 2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{h}{4}\right) \right\}, & m=1 \\ 2 \exp\left(-\frac{h}{4}\right) \left\{ 1 - \exp\left(-1\frac{1}{4}h\right) \right\}, & m=2 \end{cases}$$

$$\left\{ 2 \exp\left\{-\frac{h}{2}\right\} \exp\left(-\frac{h}{2}\right) \right\} \left\{ \exp(h) - 1 \right\}, \quad m > 2$$

なお  $g(m) = j - (m-1)$ 。

以上の計算で一般の核の場合および水素原子の場合における中性子の弾性散乱による散乱積分項が求められた。本節で記述した計算法は, 実際の中性子の弾性散乱を記述する関係式が (5-10) 式のように実験室系における散乱角に直接関係しているのに対し, 散乱積分の式, (5-7) 式が重心系における散乱角の余弦  $\mu$  で積分する形になっているので, この  $\mu$  を基本的な変数として他の変数である  $\phi', \Omega'(\omega', \phi'), u'$  等を  $\mu$  の従属変数として書き表わし (5-7) 式の散乱積分計算を数値積分によって行なった。

本散乱積分計算法は初めから数値積分を実行する点に特徴がある。そのため従来の計算法のように, 多項式展開近似や関数変換技法を使用しないので, 実際の弾性散乱の現象を忠実に記述するのに最適である。したがって高エネルギーの中性子の核による弾性散乱で起こる極度の非等方散乱を正確に取り扱うことができる点, 特に速中性子の透過計算に大きな利点を有する。

### 5.3.2 非弾性散乱積分項 $G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$ の計算

非弾性散乱は実験室系で等方散乱仮定 (第3章参照) であるから, 微分散乱断面積  $\sigma_{S,i}^{in}(\bar{Q}' \rightarrow \bar{Q}, E' \rightarrow E)$  は次式のように簡単になる。

$$\sigma_{S,i}^{in}(\bar{Q}' \rightarrow \bar{Q}, E' \rightarrow E) = \sigma_{S,i}^{in}(E') \frac{f_i^{in}(E', E)}{4\pi} \quad \dots\dots (5-27)$$

ここで  $\sigma_{S,i}^{in}(E')$  は  $i$  番目の核種の微視的非弾性散乱断面積であり,  $f_i^{in}(E', E)$  は  $i$  番目の核種に中性子が非弾性散乱され, 単位エネルギーあたりエネルギー  $E'$  から  $E$  へ減速される確率を表わし, 通常減速核と呼ばれる。したがって,  $f_i^{in}(E', E)$  は次のように規格化される。

$$\int_0^{E'} f_i^{in}(E', E) dE = 1, \quad E' \geq E^1 \quad \dots (5-28)$$

ここで  $E^1$  は標的核の第1番目の励起エネルギー準位と基底状態とのエネルギー間隔である。

(5-5) 式に (5-27) 式を代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) &= \sum_i n_i(\bar{r}) \int_E^{E^{\max}} \sigma_{S,i}^{in}(E') \frac{f_i^{in}(E', E)}{4\pi} \\ &\times \int \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}' E') d\bar{\Omega}' dE' \quad \dots (5-29) \end{aligned}$$

(5-29) 式の計算は文献 (50) のモーメント法における

中性子の非弾性散乱の計算方法を参考にして、まず減速核  $f_i^{in}(E', E)$  を標的核の励起エネルギー準位のエネルギー準位間隔により2通りに分けて計算を行なう。すなわち、標的核の基底状態に近い低い励起エネルギー準位は明らかに大きいエネルギー差で分離しているが(離散的励起状態という)、高い励起エネルギー準位になってくるとエネルギー準位の密度が増して連続的の分布とみなすことができるようになる(連続的励起状態)。そして前者の離散的励起状態に対する非弾性散乱の断面積の計算は複合核模型における Hauser-Feshbach の理論で計算できる。一方後者の連続的励起状態の場合は準位の数を生じ密度で表わし核過程の統計理論で計算できる(第3章)。

いま、 $E_{i,B}$  を  $i$  番目の核種における離散的励起状態と連続的励起状態の扱いをする境界のエネルギーとする。 $E_{i,B}$  の値は核種によって異なる。

さて、入射中性子のエネルギーがこの  $E_{i,B}$  以上である場合は減速核  $f_i^{in}(E', E)$  は  $E'$  について連続関数  $g_i^0(E', E)$  で表わせるとする<sup>50)</sup>。すなわち、

$$f_i^{in}(E', E) = g_i^0(E', E), \quad E' \geq E_{i,B} \quad (5-30)$$

一方入射中性子のエネルギーが  $E_{i,B}$  未満である場合は減速核  $f_i^{in}(E', E)$  は次式のように  $\delta$ -関数の和として表わす<sup>50)</sup>。すなわち、

$$f_i^{in}(E', E) = \sum_{\nu} a_{\nu}(E') \delta\{E' - (E + E_{\nu})\}, \\ E' < E' < E_{i,B} \quad \dots (5-31)$$

ここで  $E_{\nu}$  は標的核の  $\nu$  番目の励起エネルギー準位と基底状態とのエネルギー差であり、 $a_{\nu}(E')$  はエネルギー  $E'$  の中性子が非弾性散乱され単位エネルギーあたりエネルギーが  $E = E' - E_{\nu}$  に減速される確率を表わす。

減速核  $f_i^{in}(E', E)$  が上述のようにエネルギーにより2通りに分けて取り扱われるので、(5-29)式の計算も中性子のエネルギーにより2通りに分けて計算する<sup>50)</sup>。以下の計算では核種を示す添字  $i$  は簡単のため省略する。

#### (1) $E \geq E_B$ の場合

減速核は連続関数  $g^0(E', E)$  として取り扱われる。(5-29)式においてエネルギーについての積分は再び中性子レザジについての積分に変換して行なう。したがって(5-29)式は

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, u) = n(\bar{r}) \int_0^u \sigma_S^{in}(u') \frac{g^0(u', u)}{4\pi}$$

(348)

$$\times \int_{4\pi} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', u') d\bar{\Omega}' E' du' \quad \dots (5-32)$$

と書き換えられる。

上式において中性子束を全立体角で積分すると

$$\int_{4\pi} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', u') d\bar{\Omega}' = \Phi_0(\bar{r}, u') \quad \dots (5-33)$$

となる。ここで  $\Phi_0(\bar{r}, u')$  は中性子スカラー束である。(5-33)式を(5-32)式に代入し、 $E' = E_{\max} e^{-u'}$  に置き換えると

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, u) = n(\bar{r}) \int_0^u \sigma_S^{in}(u') \frac{g^0(u', u)}{4\pi} \\ \times \Phi_0(\bar{r}, u') E_{\max} e^{-u'} du' \quad \dots (5-34)$$

となり、 $u'$  のみの積分になる。 $u'$  についての積分計算を前節で定義したレザジメッシュ  $u_g$  ( $g=1, 2, \dots, J$ ) に対して台形公式を適用して行なうと次式のように計算される。

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, u_j) = n(\bar{r}) \sum_{g=1}^j \zeta_g \sigma_{in}(u_g) \frac{g^0(u_g, u_j)}{4\pi} \\ \times \Phi_0(\bar{r}, u_g) E_{\max} e^{-u_g} \quad \dots (5-35)$$

ここで  $\zeta_g$  は台形公式の重みである。

なお中性子スカラー束  $\Phi_0(\bar{r}, u_g)$  は容易に数値積分計算によって次式のように求められる。

$$\Phi_0(\bar{r}, u_g) = \sum_{p'=1}^P \sum_{q'=1}^{Q_{p'}} b_{p'} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{p'q'}(\omega_{p'}, \phi_{p'q'}), u_g) \quad \dots (5-36)$$

ここで  $b_{p'}$  は数値積分の際の重みであり次式で計算される。

$$b_{p'} = \frac{2\pi}{Q_{p'}} \lambda_{p'} \quad \dots (5-37)$$

ここで  $\lambda_{p'}$  ( $p'=1, 2, \dots, P$ ) はガウス求積法における重みであり、一方  $Q_{p'}$  は次式から求められる。

$$Q_{p'} = \begin{cases} 2p' & 1 \leq p' \leq \frac{P}{2} \\ 2(P+1-p') & \frac{P}{2} < p' \leq P \end{cases} \quad \dots (5-38)$$

(5-35)式を以降の計算に便利のように  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{pq}$  に対して書いておく。なお右辺をマトリックスの形で表わすと次式のように書ける。

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, u_j) = \sum_{g=1}^j \sum_{p'=1}^P \sum_{q'=1}^{Q_{p'}} b_{p'} c_{pq}^j(\bar{r}) \Phi_{p'q'}(\bar{r}) \quad \dots (5-39)$$

ここで

$$c_{\rho}^j(\bar{r}) = n(\bar{r}) \zeta_{\rho} \sigma_S^{in}(u_{\rho}) \frac{g^{\rho}(u_{\rho}, u_j)}{4\pi} E_{\max} e^{-u_{\rho}} \quad \dots\dots (5-40)$$

$$\Phi_{p'q'g}(\bar{r}) = \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{p'q'}, u_{\rho}) \quad \dots\dots (5-41)$$

### (2) $E < E_B$ の場合

減速核  $f^{in}(E', E)$  は連続的励起状態と離散的励起状態の両状態に関係してくるので、非弾性散乱された中性子が連続分布領域より減速されて来る項と離散分布領域より減速されて来る項に分けて計算する必要がある<sup>50)</sup>。

i)  $E' \geq E_B$  の場合 (連続領域からの減速)

(1) の場合と全く同様に計算することができる。すなわち、この場合  $G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)$  を  $G_{in}^1(\bar{r}, \bar{\Omega}, u)$  と書けばこの項は次式のように書き表わせる。

$$G_{in}^1(\bar{r}, \bar{\Omega}, u) = n(\bar{r}) \int_0^{u_B} \sigma_S^{in}(u') \frac{g^{\rho}(u', u)}{4\pi} \times \Phi_0(\bar{r}, u') E_{\max} e^{-u'} du' \quad \dots\dots (5-42)$$

上式で  $u'$  についての積分計算を (1) の場合と同様に台形公式により行なった結果は、 $u = u_j$  に対して次式のように求まる。

$$G_{in}^1(\bar{r}, \bar{\Omega}, u_j) = n(\bar{r}) \sum_{g=1}^B \zeta_{\rho} \sigma_S^{in}(u_{\rho}) \frac{g^{\rho}(u_{\rho}, u_j)}{4\pi} \times \Phi_0(\bar{r}, u_{\rho}) E_{\max} e^{-u_{\rho}} \quad \dots\dots (5-43)$$

ここで  $u_B$  はエネルギー  $E_B$  に対応するレサジメッシュである。なお  $E_B$  はレサジメッシュ  $u_j$  ( $j=1, 2, \dots, J$ ) のいずれかに一致するように定めるのが計算上望ましい。

ii)  $E' \leq E_B$  の場合 (離散領域からの減速)

(5-29) 式に (5-31) 式を代入すると次式を得る。この場合の  $G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  を  $G_{in}^2(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  と書いておく。したがって

$$G_{in}^2(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = n(\bar{r}) \int_B^{E_B} \sigma_S^{in}(E') \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu} a_{\nu}(E') \delta\{E' - (E + E_{\nu})\} \int_{4\pi} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}', E') d\bar{\Omega}' dE' \quad \dots\dots (5-44)$$

上式において中性子束を全立体角で積分すれば再び中性子スカラー束  $\Phi_0(\bar{r}, E')$  になるから、エネルギー  $E'$  についての積分計算の方法を考えればよい。

(5-44) 式においてエネルギーについての積分計算を、5.2.1 における弾性散乱積分の計算の際に設定した仮定と同様な仮定のもとに行なう。すなわち中性子束  $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  および散乱断面積  $\sigma_S^{in}(E)$  はエネルギーについて微小区間  $4E$  内でステップ関数で近似できるとす

る。この仮定のもとに (5-44) 式のエネルギーに関する積分をエネルギー  $E$  についてレサジメッシュ  $u_{\rho}$  ( $g=1, 2, \dots, J$ ) に対応してエネルギーメッシュ  $E_{\rho}$  ( $g=1, 2, \dots, J$ ) を割り当て、この  $E_{\rho}$  メッシュ点につき数値積分で計算する。その結果は次式のように求められる。

$$G_{in}^2(\bar{r}, \bar{\Omega}, E_j) = \frac{n(\bar{r})}{4\pi} \sum_{g=B}^J \sum_{\nu \in S_g} \sigma_S^{in}(E_{\rho}) a_{\nu}^j(E_{\rho}) \times \Phi_0(\bar{r}, E_{\rho}) \quad \dots\dots (5-45)$$

ここで  $a_{\nu}^j(E_{\rho})$  は  $a_{\nu}(E') \delta\{E' - (E_j + E_{\nu})\}$  で  $E' \in E_{\rho}$  であることを意味する。また  $S_g$  はグループに属する  $\nu$  についての和をとることを意味する。

ここで  $\nu$  についての和は次の条件を満足する全ての  $\nu$  についてとる (Fig. 5.7 参照)。

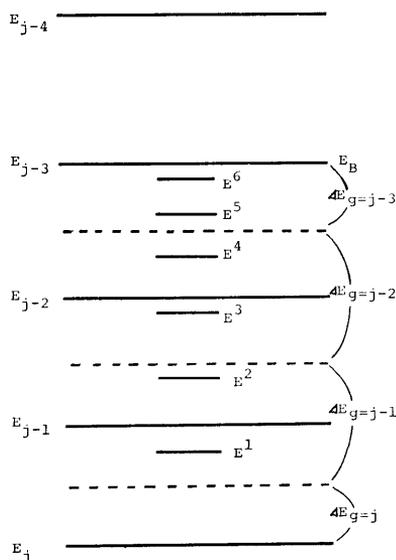


Fig. 5.7 Relation between energy levels of target nucleus and energy meshes

条件

$$E_j + E_{\nu} \leq E_B, \quad \nu = 1, 2, \dots \quad \dots\dots (5-46)$$

かつ

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(E_{B+1} + E_B) &\leq E_j + E_{\nu} \leq E_B, \quad g=B \\ \frac{1}{2}(E_{\rho+1} + E_{\rho}) &\leq E_j + E_{\nu} < \frac{1}{2}(E_{\rho} + E_{\rho-1}), \\ &B < g < j \\ E_j &\leq E_j + E_{\nu} < \frac{1}{2}(E_j + E_{j-1}), \quad g=j \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (5-47)$$

(5-45) 式を  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{\nu q}$  に対し、右辺をマトリックスの形で書き表わしておくとお実際の計算に便利である。す

なわち

$$G_{in}^2(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) = \sum_{g=B}^j \sum_{p=1}^P \sum_{q'=1}^{Q_{p'}} b_{p'} c_g^j(\bar{r}) \Phi_{p'q'o}(\bar{r}) \quad \dots\dots(5-48)$$

ここで  $b_{p'}$  は (5-37) 式に、一方  $\Phi_{p'q'o}(\bar{r})$  は (5-41) 式に与えられている。 $c_g^j(\bar{r})$  は次式から計算される。

$$c_g^j(\bar{r}) = \frac{n(\bar{r})}{4\pi} \sum_{\nu \in S_g} \sigma_S^{in}(E_g) a_\nu^j(E_g) \dots\dots(5-49)$$

したがって  $E < E_B$  の場合における非弾性散乱された中性子は

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, u_j) = G_{in}^1(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, u_j) + G_{in}^2(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, u_j) \quad \dots\dots(5-50)$$

から求められる。以上の計算で非弾性散乱にもとづく散乱中性子は全て求めることができた。なお整理のため各種の条件における非弾性散乱積分計算結果をまとめておく。

$$G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, u_j) = \sum_{g=1}^j \sum_{p'=1}^P \sum_{q'=1}^{Q_{p'}} b_{p'} c_g^j(\bar{r}) \Phi_{p'q'o}(\bar{r}) \quad \dots\dots(5-51)$$

ここで  $c_g^j(\bar{r})$  は各種の条件により次のように表わされる。

$$c_g^j(\bar{r}) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{n(\bar{r})}{4\pi} \zeta_g \sigma_S^{in}(u_g) g^g(u_g, u_j) E_{\max} e^{-u_g} \\ \hspace{10em} 1 \leq g < B \\ \frac{n(\bar{r})}{4\pi} \zeta_g \sigma_S^{in}(u_g) g^g(u_g, u_j) E_{\max} e^{-u_g} \\ + \frac{n(\bar{r})}{4\pi} \sum_{\nu \in S_g} \sigma_S^{in}(E_g) a_\nu^j(E_g) \\ \hspace{10em} g = B \\ \frac{n(\bar{r})}{4\pi} \sum_{\nu \in S_g} \sigma_S^{in}(E_g) a_\nu^j(E_g) \\ \hspace{10em} B < g \leq j \end{array} \right\} \quad (5-52)$$

5.3.1 および 5.3.2 において弾性散乱および非弾性散乱による散乱積分が計算されたので、(5-3) 式から輸送方程式の右辺の散乱積分を計算することができる。すなわち、 $E = E_j$  および  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{pq}$  メッシュ点に対し散乱積分項は次式のように和の形で求められる。

$$\begin{aligned} G(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) &= G_{el}(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) + G_{in}(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^P a_{mn} T_g(m), n(\bar{r}) \Phi_g(m), n(\bar{r}) \\ &\quad + \sum_{g=1}^j \sum_{p'=1}^P \sum_{q'=1}^{Q_{p'}} b_{p'} c_g^j(\bar{r}) \Phi_{p'q'o}(\bar{r}) \quad \dots\dots(5-53) \end{aligned}$$

(350)

#### 5.4 輸送方程式の直接積分計算

前節で輸送方程式 (5-1) 式の右辺の散乱積分項  $G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  が数値積分によって計算され、位置  $\bar{r}$  における各エネルギーメッシュ  $E_j$  (レサジメッシュ  $u_j$ ) ( $j=1, 2, \dots, J$ ) につき、また中性子の進行方向角度分点  $\bar{\Omega}_{pq}$  ( $p=1, 2, \dots, P, q=1, 2, \dots, Q_p$ ) について求められた。一方右辺の第2項の純線源  $S(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  は前もって与えられる量であるから、各エネルギーメッシュ  $E_j$  につき、また進行方向角度分点  $\bar{\Omega}_{pq}$  について  $S(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$  を与えることは容易である。したがって輸送方程式の右辺のいわゆる線源項は各エネルギーメッシュ  $E_j$  につき、また角度分点  $\bar{\Omega}_{pq}$  につき直ちに計算され、これを  $Q(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$  で表わす。すなわち

$$Q(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) = G(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) + S(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \quad \dots\dots(5-54)$$

輸送方程式 (5-1) 式の右辺の線源項が (5-54) 式からエネルギーおよび角度についての各メッシュ点に対し求められたから、(5-1) 式はエネルギー  $E = E_j$ 、中性子の進行方向角  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_{pq}$  に対して次式のように書ける。

$$\begin{aligned} G_{pq} \cdot \text{grad } \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) + \Sigma_t(\bar{r}, E_j) \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ = Q(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \quad \dots\dots(5-55) \end{aligned}$$

(5-55) 式は各エネルギーメッシュ  $E = E_j$  につき一群の輸送方程式である。

(5-55) 式の左辺の第1項の  $\bar{\Omega} \cdot \text{grad}$  は単に中性子の進行方向  $\bar{\Omega}$  にそってとった微分係数であるから、上式は空間変数  $\bar{r}$  の代わりに  $\bar{r} - R\bar{\Omega}$  で置き換えれば次式のように書き換えられる<sup>34)</sup>。

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dR} \Phi(\bar{r} - R\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ + \Sigma_t(\bar{r} - R\bar{\Omega}_{pq}, E_j) \Phi(\bar{r} - R\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ = Q(\bar{r} - R\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \quad \dots\dots(5-56) \end{aligned}$$

上式は  $R$  にそって容易に積分することができ次式を得る。

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{r} - R\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ = \Phi(\bar{r} - R_0\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ \times \exp \left\{ \int_{R_0}^R \Sigma_t(\bar{r} - R''\bar{\Omega}_{pq}, E_j) dR'' \right\} \\ + \int_R^{R_0} Q(\bar{r} - R'\bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ \times \exp \left\{ \int_{R'}^R \Sigma_t(\bar{r} - R''\bar{\Omega}_{pq}, E_j) dR'' \right\} dR' \quad \dots\dots(5-57) \end{aligned}$$

上式で、いま  $R=0, \bar{r} - R_0\bar{\Omega}_{pq} = \bar{r}'$  とおけば

$$\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$$

$$\begin{aligned}
&= \Phi(\bar{r}', \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\
&\times \exp \left\{ - \int_0^{R_0} \Sigma_t(\bar{r} - R' \bar{\Omega}_{pq}, E_j) dR'' \right\} \\
&+ \int_0^{R_0} Q(\bar{r} - R' \bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\
&\times \exp \left\{ - \int_0^{R'} \Sigma_t(\bar{r} - R'' \bar{\Omega}_{pq}, E_j) dR'' \right\} dR' \\
&\dots\dots (5-58)
\end{aligned}$$

と書ける。(5-58)式は定常の中性子積分型輸送方程式であり、Fig. 5.8を参照して(5-58)式の物理的意味

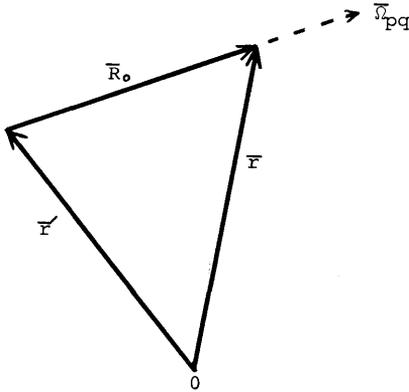


Fig. 5.8 Vector system adopted

は右辺の第1項が、位置  $\bar{r}'$  でエネルギー  $E_j$  をもち進行方向  $\bar{\Omega}_{pq}$  の中性子が  $R_0$  にそって直進し、その間に指数減衰して位置  $\bar{r}$  に到達することを意味する。一方第2項は距離  $(r', \bar{r})$  間で、より高いエネルギーの中性子が核により散乱されてエネルギーを落とし  $E_j$  になり、かつ進行方向が  $\bar{\Omega}_{pq}$  になった中性子、およびエネルギーが  $E_j$  で進行方向が  $\bar{\Omega}_{pq}$  の中性子が純線源から発生する、これらの中性子が位置  $\bar{r}$  まで  $R_0$  にそって直進しその間に指数減衰して  $\bar{r}$  に到達することを意味する。上式で指数関数に含まれる積分を次式の関数で表わす。すなわち

$$\begin{aligned}
\tau(\bar{r}, \bar{r} - R' \bar{\Omega}_{pq}, E_j) &= \int_0^{R'} \Sigma_t(\bar{r} - R'' \bar{\Omega}_{pq}, E_j) dR'' \\
&\dots\dots (5-59)
\end{aligned}$$

ここで  $\tau(\bar{r}, \bar{r} - R' \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$  は  $\bar{r}$  と  $\bar{r} - R' \bar{\Omega}_{pq}$  との間の光学距離と呼ばれる<sup>34)</sup>。

さて、(5-58)式の計算をすすめるため、空間変数  $\bar{r}$  についても Discrete Ordinate 空間メッシュ点  $\bar{r}_i$  で表わすことにする。そこで(5-58)式で  $\bar{r} = \bar{r}_i$  および  $\bar{r}' = \bar{r}_{i-1}$  と置く。空間メッシュ点の選び方は、多重層の内側境界面ではその境界面に一致させてその両側

に、境界メッシュ点をそれぞれ1個ずつ割り当て、合計2個のメッシュ点を与える。また外側境界面では外側境界面に一致させて空間メッシュ点を選ぶ。同じ領域内では下記の条件により定まる任意の数の空間メッシュ点を選ばれる。空間メッシュ区間は上記の条件により選ばれると、任意に選んだ空間メッシュ区間  $(\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i)$  内では全断面積  $\Sigma_t(\bar{r}, E)$  が一定の値をもつことができるので、(5-59)式の積分は容易に計算され次式のように求まる。

$$\begin{aligned}
\tau(\bar{r}, \bar{r} - R' \bar{\Omega}_{pq}, E_j) &= \Sigma_t(\bar{r} - R' \bar{\Omega}_{pq}, E_j) R' \\
&\dots\dots (5-59')
\end{aligned}$$

さらに(5-58)式の右辺の第2項の  $R'$  についての積分計算を容易に実行するために次の条件を設ける。すなわち、上述の条件にもとづき任意に選んだ空間メッシュ区間  $(\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i)$  で線源項  $Q(\bar{r}_i - R' \bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$  が線形関数で近似することができるように空間メッシュ区間  $(\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i)$  を選ぶ。

以上の条件のもとで選ばれた空間メッシュ区間  $(\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i)$  で(5-58)式の右辺の第2項は容易に積分計算される。まず線源項  $Q(\bar{r}_i - R' \bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$  を線形関数で近似する。すなわち、

$$\begin{aligned}
Q(\bar{r}_i - R' \bar{\Omega}_{pq}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) &\equiv Q(\bar{r}_i - R' \bar{\Omega}_{pq}) \\
&= a(\bar{r}_i) + b(\bar{r}_i) R' \\
&\dots\dots (5-60)
\end{aligned}$$

また、 $\Sigma_t(\bar{r} - R' \bar{\Omega}_{pq}, E_j)$  は区間  $(\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i)$  内で一定の値であるからこれを  $\Sigma_t(\bar{r}_i - R' \bar{\Omega}_{pq}, E_j) = \beta(\bar{r}_i)$  と置く。したがって(5-58)式の右辺の第2項は次のように計算される。

$$\begin{aligned}
\text{第2項} &= \int_0^{R_0} (a + bR') \exp(-\beta R') dR' \\
&= \frac{a}{\beta} \{1 - \exp(-\beta R_0)\} - \frac{b}{\beta^2} \{\beta R_0 \exp(-\beta R_0) \\
&\quad + \exp(-\beta R_0) - 1\} \dots\dots (5-61)
\end{aligned}$$

ここで  $a(\bar{r})$  および  $b(\bar{r})$  は次式で表わせるから、

$$\left. \begin{aligned}
a(\bar{r}_i) &= Q(\bar{r}_i) \\
b(\bar{r}_i) &= \frac{Q(\bar{r}_{i-1}) - Q(\bar{r}_i)}{R_0}
\end{aligned} \right\} \dots\dots (5-62)$$

(5-62)式の関係を用いて(5-61)式に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
\text{第2項} &= \frac{1}{\beta^2 R_0} \{ Q(\bar{r}_i) [\beta R_0 + \exp(-\beta R_0) - 1] \\
&\quad + Q(\bar{r}_{i-1}) \{1 - (1 + \beta R_0) \exp(-\beta R_0)\} \} \\
&\dots\dots (5-63)
\end{aligned}$$

以上の計算で(5-58)式の第2項は求められる。ま

た (5-58) 式の第 1 項は容易に計算できるから、結局 (5-58) 式は次式のように計算される。すなわち、

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{r}_i, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) &= \Phi(\bar{r}_{i-1}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \\ &\times \exp \{-\Sigma_i(\bar{r}_{i-1}, E_j)R_0\} \\ &+ \frac{1}{\Sigma_i(\bar{r}_{i-1}, E_j)R_0} [Q(\bar{r}_i, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \{\Sigma_i(\bar{r}_{i-1}, E_j)R_0 \\ &+ \exp \{-\Sigma_i(\bar{r}_{i-1}, E_j)R_0\} - 1\} \\ &+ Q(\bar{r}_{i-1}, \bar{\Omega}_{pq}, E_j) \{1 - \{1 + \Sigma_i(\bar{r}_{i-1}, E_j)R_0\} \\ &\times \exp \{-\Sigma_i(\bar{r}_{i-1}, E_j)R_0\}\}] \quad \dots\dots (5-64) \end{aligned}$$

上式で  $\Sigma_i(\bar{r}_{i-1}, E_j)$  は便宜上空間メッシュ間  $(\bar{r}_{i-1}, \bar{r}_i)$  内で一定である巨視的断面積を表わすとす。

(5-64) 式は空間メッシュについて差分の形をしているから計算機で計算するのに都合の良い形である。実際の計算手順は最高エネルギーの群から順次下のエネルギー群へ計算をすすめる。また一つの群についての計算手順は外側境界条件 (通常は外側境界で外側から内側に向う中性子角度束  $\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  は零とする) から出発し外側空間メッシュから順次内側空間メッシュへ計算をすすめる。この操作は外側から内側へ向う全角度分点について各角度分点ごとに行ない、計算がすすみ内側境界に到達するまで行なう。内側へ向かう全角度分点につき計算が内側境界へ到達した後は、次に述べる条件のいずれか一つを適用し内側境界で外側へ向かう全ての角度分点に対する中性子角度束を計算する。

条件

- i) 有限厚さの平板線源, 有限円柱線源, 直方体線源等の線源の場合は内側境界で反射条件を適用する。
- ii) 平板 (Plane) 線源, ディスクおよび有限広さの平板 (Plane) 線源, 球殻線源の場合は内側境界条件を適用する。
- iii) 球体積線源の場合は最も内側半径メッシュ上で負の  $\omega$  (角度でいえば  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ ) にする中性子角度束から正の  $\omega$  (角度では  $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ) に対する中性子角度束を計算によって求める。

以上の条件から内側境界での内側から外側へ向かう全角度分点につき中性子角度束が計算されるから、今度は上述の計算手順の逆に従って内側空間メッシュから外側空間メッシュへ順次計算をすすめる。この操作は外側へ向かう全角度分点につき計算が外側境界に到達するまで行なう。以上の操作が全て完了すれば、本解法では繰り返し収斂法を使用しない (次節で述べる) ので、直ちに次のエネルギー群の計算へすすむことができる。

(352)

## 5.5 同一エネルギー群内散乱中性子の計算

中性子が自分自身のエネルギー群内で散乱され自分自身のエネルギー群へ落ちる場合の計算は、繰り返し収斂法を適用して計算するのが通例である。しかし、繰り返し収斂法を使用すると、まず第 1 に計算時間が長くなる欠点があり、第 2 に対象とする問題の種類によっては最悪の場合には収斂しないことがあり、また収斂するにしても収斂が一様でないために余計に長い計算時間を要することがある。

本解法では計算時間短縮を目的とし、さらに問題の種類によっては収斂しないこともあるという。繰り返し収斂法の不安を取り除くために、繰り返し収斂法の使用を避けその代わりに以下に述べる手法<sup>55)~58)</sup>を用いる。

まず散乱積分項  $G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  を 2 通りに分けて次のように書く。

$$G(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = G^D(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) + G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \quad (5-65)$$

ここで

$G^D(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  は中性子が上のエネルギー群から散乱減速されて位相空間  $(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  に加わる項、

$G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  は中性子が自分自身のエネルギー群内で散乱され再び自分自身のエネルギー群内の位相空間  $(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  に入る項。

この  $G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  は次の仮定にもとづいて計算する。すなわち  $r=r_i$  位置において位相空間上のメッシュ  $(\bar{\Omega}_{pq}, E_j)$  が代表している微小位相空間  $d\bar{\Omega}_{pq}dE_j$  内の中性子が散乱され、再びこの微小位相空間内に留まる中性子を  $G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  で表わす。したがって  $G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  は

$$G^W(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) = A(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \quad \dots(5-66)$$

と書き表わすことができる。

さて (5-55) 式の両辺から  $A(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E)$  を差し引くと次式のように書ける。簡単のために添字を省く。

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} \cdot \text{grad} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) + \Sigma_i(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \\ - A(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \\ = Q(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) - A(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \quad \dots(5-67) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{いま} \quad \Sigma_i'(\bar{r}, E) &= \Sigma_i(\bar{r}, E) - A(\bar{r}, E) \quad \dots\dots(5-68) \\ Q'(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) &= Q(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) - A(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \\ &\quad \dots\dots(5-69) \end{aligned}$$

で表わすと (5-67) 式は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} \cdot \text{grad} \Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) + \Sigma_i'(\bar{r}, E)\Phi(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \\ = Q'(\bar{r}, \bar{\Omega}, E) \quad \dots\dots(5-70) \end{aligned}$$