船舶技術研究所報告　第11巻　第2号　研究報告　(昭和49年3月)

非定常吸込み吹出しのある平板境界層の数値解

徳　田　　仁*

Numerical Solution of the Flat Plate Boundary Layer with Progressing Sinks and Sources

By
Shinobu TOKUDA

Abstract

A theoretical consideration of the interaction of small disturbances with the time mean velocity distribution is presented. The consideration is restricted to the laminar boundary layer over a flat plate with uniformly distributed two dimensional sinks and sources. The blowing and suction rates of these sinks and sources vary in time and space sinusoidary so that the sinks and sources seem to progress with wave motion. The velocity amplitude of these sinks and sources is very small compared with the uniform flow velocity. The fundamental equations for this boundary layer are obtained and solved numerically. From these solutions, it is shown that the time mean friction rate is very different from the steady state one, even when the disturbances are very small. And it is also shown that the approximate and the numerical solutions are in good agreement with each other.

1. 諸　　言

一様な流れの中に壁面が一様流と平行に置かれた平板に沿って発達する境界層は壁面摩擦や伝熱特性を支配するものであるため，工業上基本的ではあるが非常に重要な問題である。そのため従来種々の角度から詳しく調べられてきた。

平板の壁面に一様に分布する吸込み，または吹出しが平板境界層に与える影響については多くの研究がなされ，層流あるいは乱流のいずれの場合に対しても理論的，半経験的な解析あるいは実験により調べられSchlichting[1] などが解説している。しかし吸込みや吹出しが変動する場合に対しての研究はあまり見当たらないようである。一方，平板に沿う圧力勾配のない一様流の流速，または平板自身が流れ方向に時間とともに調和関数的に変動する場合でその変動速度振幅が一様流速より小さいときには Nickerson[2] やその他多くの理論的および実験的な研究があり，２次元層流境界層内の速度分布等の時間平均値は，変動振幅，振動数がかなり大きな場合に対しても，変動成分のない定常値とほとんど差のないことが明らかにされている。また流れ方向に圧力勾配のあるようなとき，例えば流れが壁面に垂直に当たる場合に対しても，圧力勾配がない場合と同様に時間平均値は定常値と大差ないことが，森，徳田[3] らにより明らかにされている。さらに平板境界層の非定常な乱れに対する安定性の研究は，これまで数多くの研究がなされ文献 1) に詳しく解説されている。最近では計算機の発達に伴いこの方面の理論的研究が進み，Osborn[4] や Jordinson[5] らが速度分布や臨界値に対して詳しい値を得ている。一方 Miles[6] は水面を吹く風の時間平均速度分布が乱流速度分布を持つとした場合に，安定方程式から導かれる乱れが波面におよぼす影響を調べている。しかしこれら不安定理論に対する研究は，変動成分のみに着目したものがほとんどで，その変動成分が時間平均の流速等に与える影響を調べたものは数少ない。

*　機関性能部　原稿受付：昭和47年11月9日

そこで以下では平板の壁面に存在する微小な攪乱が平均流速や摩擦係数，伝熱量にどのような影響を与えるかを理論的に考察する。特に本報告では，一様流中に流れと平行に置かれた平板の壁面の攪乱として波状に進行する微小な2次元的な吸込みと吹出しを考える。ただしその吸込みと吹出し量の時間的または場所的な平均値は0，すなわち，実質的な吸込みや吹出しはない。このような場合，平板の前縁からかなり後方のところで，この攪乱が平板層流2次元境界層内の時間平均速度分布，摩擦係数，伝熱係数にどのような影響を与えるかを特殊な場合について，数値的な解を求めて検討する。

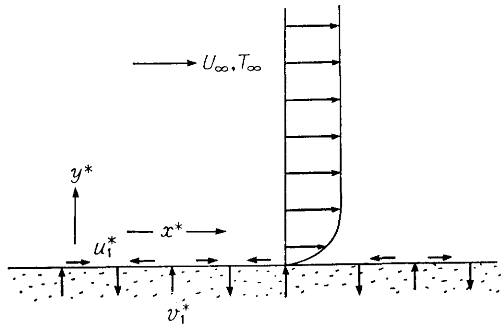
2. 主な記号

C_f	摩擦係数	α	任意変数
F	平均温度関数	γ	変動波数
f	平均流関数	ε	変動速度振幅
G	変動温度関数	ε_T	変動温度振幅
g	変動流関数	ζ	渦度
H	$=F+\dfrac{\alpha}{2}G$	η	距離
h	$=f+\dfrac{\alpha}{2}g$	θ	温度
k	変動移動速度	λ	変動波数
N_u	ヌセルト数	ν	動粘性係数
p	圧力	ξ	距離
P_r	プラントル数	ρ	密度
S	変動振動数	ψ	流関数
T	温度	ω	変動振動数
t	時間	R	実部
u	x 方向速度	*	共役，または有次元
v	y 方向速度		
x	距離	—	時間平均
y	距離	∞	主流

3. 基礎式

流れの中に置かれた平板の壁面に均質に存在する吸込み吹出しの量が時間的に変動し，しかもその平板の前縁からかなり離れた後方では，平板に沿う境界層は普通の場合乱流であると考えられる。しかし本報告では微小な吸込みや吹出しが平均的な値にどの程度の影響をおよぼすかを考察するのが目的である。したがって簡単のために流れは，層流，非圧縮性，2次元流れであり，物性値は一定とする。

図1に示すように，流速 U_∞，温度 T_∞ なる一様流



$u_1^*=\varepsilon_u^* e^{i(wt^*+\lambda x^*)}$

$v_1^*=-ic\varepsilon^* e^{i(wt^*+\lambda x^*)}$

図-1 座　　標

中に流れと壁面が平行になるように設置された平板上に均質に分布させた吸込み，吹出し量が $e^{i(wt^*+\lambda x^*)}$ の実部で示されるような，実質の吸込みあるいは吹出し量は零ではあるが，その量が時間とともに振動数 ω，波数 λ の2次元的な波状で変動するときを考える。そこで図1に示すように平板の前縁からの距離を x^*，それと垂直な方向の距離を y^*，時間を t^* とする。また境界層内の流速の x^*, y^* 方向の速度成分をそれぞれ u^*，v^* 圧力を p^*，温度を T^*，また動粘性係数を ν，流体密度を ρ とする。次にこれら $x^*, y^*\cdots$ 等を一様流速度 U_∞，動粘性係数 ν，主流温度 T_∞ と平均壁温 T_w との差 T_w-T_∞ を用いて次のように無次元化する。

$$u=u^*/U_\infty,\quad v=v^*/U_\infty,\quad x=x^*U_\infty/\nu$$
$$y=y^*U_\infty/\nu,\quad t=t^*U_\infty^2/\nu,\quad P=p^*/\rho U_\infty^2 \qquad (1)$$
$$S=\omega\nu/U_\infty^2,\quad \gamma=\lambda\nu/U_\infty,\quad \theta=\frac{T^*-T_\infty}{T_w-T_\infty}$$

また流関数として ψ を次のように定義する。

$$u=\partial\psi/\partial y,\quad v=-\partial\psi/\partial x \qquad (2)$$

これらを用いて渦度を

$$\zeta=-\nabla^2\psi \qquad (3)$$

ただし $\nabla^2=\dfrac{\partial}{\partial x^2}+\dfrac{\partial}{\partial y^2}$ とすれば，平板に沿う境界層内の連続および x, y 方向の運動方程式，エネルギ式はそれぞれ

連続

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \qquad (4)$$

運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\nabla^2 u \qquad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\nabla^2 v \qquad (6)$$

または

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}=\nabla^2 \zeta \qquad (7)$$

エネルギ式

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{1}{P_r}\nabla^2 \theta \qquad (8)$$

と書ける。境界条件としては吸込みおよび吹出し量の壁面における x 方向および y 方向の速度変動の振幅を $\varepsilon_u, -ic\varepsilon$ とする。ここに c は，(14) 式で示す値である。また壁面における温度変動の振幅を ε_T とする。さらに一様流中に変動成分がある時，それが平均流速にどのような影響を与えるかを見るため，主流中の変動速度の x, y 方向の振幅を $\varepsilon_{u\infty}$ および $-ic\varepsilon_\infty$ とする。また時間平均をした定常成分に対しては，壁面から離れたところで一様流速度，一様流温度となり，壁面で壁温となるとする。一方，速度の定常成分は吸込みや吹出しのために壁面でスリップの状態であると考えられるが，ここでは簡単のために壁面でスリップがないとして壁面速度を0とする。したがって境界条件に対する式は

$$\begin{aligned} &y=0;\ u=\varepsilon_u e^{i(st+\gamma x)},\ v=-ic\varepsilon e^{i(st+\gamma x)} \\ &\qquad \theta=1+\epsilon_T e^{i(st+\gamma x)} \\ &y\to\infty;\ u\to 1+\varepsilon_{u\infty} e^{i(st+\gamma x)},\ v\to -ic\varepsilon_\infty e^{i(st+\gamma x)} \\ &\qquad \theta\to 0 \end{aligned} \qquad (9)$$

と書ける。ここに前述のように吸込み，吹出し量は一様流より非常に小さいので $\varepsilon, \varepsilon_u \cdots \ll 1$ である。

次に $u, v, \theta, \phi, \zeta$ 等は境界条件（9），すなわち攪乱である壁面の吸込みや吹出しが波状に進行するということを考慮すると，

$$\begin{aligned} &u=u_0+u_1 e^{i(st+\gamma x)},\ v=v_0+v_1 e^{i(st+\gamma x)} \\ &\phi=\phi_0+\phi_1 e^{i(st+\gamma x)},\ \theta=\theta_0+\theta_1 e^{i(st+\gamma x)} \\ &\zeta=\zeta_0+\zeta_1 e^{i(st+\gamma x)} \end{aligned} \qquad (10)$$

等と，時間と x 方向の局所的な場所に関して平均された定常成分 $u_0, v_0, \theta_0, \phi_0, \zeta_0, \cdots$ と，時間的場所的に波状に変化する変動成分 $u_1, v_1, \phi_1, \theta_1, \cdots$との和の形で近似的に表されるものとする。そこで (10) 式を（4），（5），（6），（8）式に代入し，これらの式を時間的，または x 方向の局所的な場所に関して平均すれば，u_0, v_0, θ_0 等は，変動成分 $u_1, v_1, \theta_1, \cdots$ 等を含んだ形で，

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y}=0 \\ &u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial u_0}{\partial y}=\nabla^2 u_0-\frac{1}{2}\boldsymbol{R}\left\{u_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+i\gamma u_1\right)^*\right. \\ &\qquad\qquad \left.+v_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^*\right\} \\ &\frac{\partial p_0}{\partial y}=\frac{1}{2}\boldsymbol{R}\left\{u_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+i\gamma v_1\right)^*+v_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)^*\right\} \\ &u_0\frac{\partial \theta_0}{\partial x}+v_0\frac{\partial \theta_0}{\partial y}=\frac{1}{P_r}\nabla^2\theta_0-\frac{1}{2} \\ &\qquad\qquad \times\boldsymbol{R}\left\{u_1\left(\frac{\partial \theta_1}{\theta x}+i\gamma\theta_1\right)^*+v_1\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y}\right)^*\right\} \end{aligned} \qquad (11)$$

と書き表せる。ここで平板上の境界層であるから，定常成分に対しては $u_0 \gg v_0$ であり，$\partial p_0/\partial x \approx 0$ とした。

次に変動成分に対する方程式について考える。変動速度は主流速度に比して微小ではあるが，壁面において吹出しおよび吸込みが分布する境界層であることを考えると，定常成分 $u_0, \phi_0, \cdots$ の大きさと変動成分 $u_1, \phi_1, \cdots$ 等の大きさが同じ程度になる場所が存在する。しかも境界層内の流れは（4）～（8）式に示されているように非線型項が含まれている。このことを考えると (10) 式の表示は必ずしも最良のものとはいえず，さらに高次の項を級数の形で追加する方が良いように思われる。しかしながらそのようにした場合には級数は無限に長くなり，しかも収束性の吟味もしなければならないため，労力的にもあまり好ましいものとはいえない。そこで (10) 式のような簡単な近似的表示でも，$u_0, u_1, v_0, v_1, \cdots$ の適当な組合わせの仕方で，要求されるものが可能な限り良い近似を示すようにすれば良い。そこで本報告では (10) 式を (4), (7), (8) 式に代入し，それらの式に $(e^{i(st+\gamma x)}+\alpha e^{2i(st+\gamma x)})^*$ を掛けて時間平均を行う。すなわち α によって変化する波形でフィルタリングを行うことにする。このようにして変動成分に対する方程式として，定常成分 $u_0, v_0, \theta_0, \cdots$ 等を含んだ形で

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}=0 \\ &is\zeta_1+u_1\frac{\partial \zeta_0}{\partial x}+u_0\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}+i\gamma\zeta_1\right)+\frac{\alpha}{2}u_1\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}+i\gamma\zeta_1\right) \\ &\qquad +v_1\frac{\partial \zeta_0}{\partial y}+v_0\frac{\partial \zeta_1}{\partial y}+\frac{\alpha}{2}v_1\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} \\ &\qquad\qquad =\nabla^2\zeta_1+2i\gamma\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}+(i\gamma)^2\zeta_1 \end{aligned}$$

$$is\theta_1+u_1\frac{\partial\theta_0}{\partial x}+u_0\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+i\gamma\theta_1\right)+\frac{\alpha}{2}u_1\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+i\gamma\theta_1\right)$$
$$+v_1\frac{\partial\theta_0}{\partial y}+v_0\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+\frac{\alpha}{2}v_1\frac{\partial\theta_1}{\partial y}$$
$$=\frac{1}{P_r}\left\{\nabla^2\theta_1+2i\gamma\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+(i\gamma)^2\theta_1\right\} \quad (12)$$

のように得られる。上式は，α のいかなる値に対しても成立するように $u_1, v_1, \theta_1, \cdots$ 等を決めることが望ましいが，それは非常に困難であるため可能な限り多くの α の値に対して成立すればよいとする。本報告では $\alpha\approx 0(1)$ の大きさの可変量であるとして以下の考察を行う。そこで定常成分に対する流関数を $\eta=y/\sqrt{x}$ なる変数を用いて

$$\begin{aligned}\psi_0&=\sqrt{x}\,f(\eta, x_0, s, \varepsilon, \cdots)\\ \theta_0&=F(\eta, x_0, s, \varepsilon, P_r\cdots)\end{aligned} \quad (13)$$

と，f, F を用いて書き換える。ここに x_0 は定数であり，平板前縁から x_0 の点に着目していることを示している。さらに変動成分に対しては，x 方向の変化は，定常成分に対する変化よりも充分大きいと考えて $(1/\sqrt{x}\ll\gamma)$，前述のようにある点 $x=x_0$ のまわりの局所的な部分のみに注目することにする。したがって x, y の代わりに

$$\begin{aligned}x&=x_0+\sqrt{x_0}\xi\\ y&=\sqrt{x_0}\eta\\ C&=\gamma\sqrt{x_0}\end{aligned} \quad (14)$$

なる，ξ, η を用いて，変動成分に対する流関数 ψ_1 および，温度関数 θ_1 を

$$\begin{aligned}\psi_1&=\sqrt{x_0}\,g(\eta, x_0, s, \varepsilon, c\cdots)\\ \theta_1&=G(\eta, x_0, s, \varepsilon, P_r, c\cdots)\end{aligned} \quad (15)$$

と g, G を用いて書き換える。これら (13), (15) 式を (11), (12) 式に代入し，平板前縁からかなり離れていること ($x_0\gg 1$) を考慮すると (11), (12) 式は近似的に

$$f'''+\frac{1}{2}ff''=-\frac{c\sqrt{x_0}}{2}\boldsymbol{R}[ig(g'')^*] \quad (16\cdot\mathrm{a})$$

$$\frac{1}{p_r}F''+\frac{1}{2}fF'=\frac{c\sqrt{x_0}}{2}\boldsymbol{R}[iGg'^*-igG'^*] \quad (16\cdot\mathrm{b})$$

$$g''''-\frac{f'\eta-f}{2}g'''-[isx_0+ic\sqrt{x_0}h'+2c^2]g''$$
$$+\frac{c^2}{2}(f'\eta-f)g'+[isx_0c^2+ic^3\sqrt{x_0}f'$$
$$+ic\sqrt{x_0}h'''+c^4]g=0 \quad (17.\mathrm{a})$$

$$\frac{1}{pr}G''-\frac{f'\eta-f}{2}G'-\left[isx_0+ic\sqrt{x_0}h'-\frac{c^2}{P_r}\right]G$$
$$=-ic\sqrt{x_0}gH' \quad (17\cdot\mathrm{b})$$

ここで $h\equiv f+\frac{\alpha}{2}g$, $H\equiv F+\frac{\alpha}{2}G$ とする。一方，境界条件 (9) は f, F, g, G を用いて，

$$\begin{aligned}\eta=0:\ & f=f'=0,\ g=\varepsilon,\ g'=\varepsilon_u\\ & F=1,\ G=\epsilon_T\\ \eta\to\infty:\ & f'\to 1,\ g\to\varepsilon_\infty,\ g'\to\varepsilon_{u\infty}\\ & F\to 0,\ G\to 0\end{aligned} \quad (18)$$

と書き表せる。以上得られた (16), (17) 式を (18) なる境界条件のもとで解くことにより，微小な吸込み吹出し変動のある平板境界層の挙動を知ることができる。ここで $k=c/s\sqrt{x_0}$ なるパラメータを新たに定める。これは吸込み吹出しが波動状に移動する際の移動速度を表すパラーメータであるが以下の考察においては $k\approx 0(1)$，すなわち変動の移動速度は一様流速度と同程度の大きさで移動するとする。また簡単のために S や γ は実定数，すなわち変動成分の形や大きさは場所的にも，時間的にも変化しないとして取扱うことにする。

4. 数　値　解

以上 (16), (17) 式の基礎式を電算機を用いて厳密に解いたものと，すでに文献 7) に報告してある近似解が適用できる範囲内ではどの程度の一致を見るか，また適用できないところでの隔たりはどの程度であるかを検証してみる。そこで (18)式の境界条件で $\varepsilon_\infty=\varepsilon_{u\infty}=0$，すなわち主流に変動成分が無い場合の速度成分のみに対して着目し，(16.a), (17.a) を数値的に解いて，文献 7) で得られた近似解と比較する。この際，近似解より得られる C_f や N_u は $\alpha\approx 0(1)$ 程度の大きさであるならば，α による変化はほとんど無いことを示しているので以下の数値計算ではすべて $\alpha=0$ として計算を行った。

文献 7) の近似解が示すように，g は $\eta=0\left(\frac{1}{\sqrt{sx_0}}\right)$ なる領域と $\eta=0(1)$ と $\eta\geq 0(1/c)$ なる領域の 3 つの領域に分かれて変化することがわかる。また f に対しても文献 7) の近似解が示すように，f は $\eta=0\left(\frac{1}{\sqrt{sx_0}}\right)$ と $\eta=0(1)$ の 2 つの領域で変化する部分に分かれている。すなわち速度成分 f および g は $\eta=0\ (1/\sqrt{sx_0})$, $\eta=0(1)$ と $\eta\geq(1/c)$ なる 3 つの領域に分かれて変化することが知れる。したがって数値計算を行う際の分

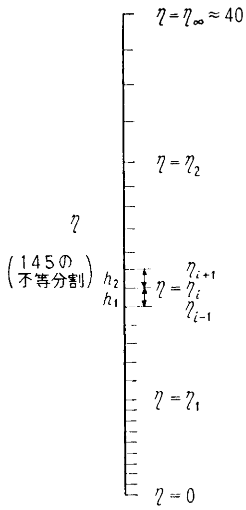


図-2 η に対する分割

割は各領域に対して図2に示すように，壁の近くの $\eta\to 0$ の部分では細かく，壁から離れた η の中間の部分で普通に，壁からかなり離れた $\eta\to\infty$ の領域で粗くしなければならない。本計算では sx_0 や k 等の値によって異なるが η を 0 から $\eta\approx 30\sim 40$ 程度までを採り，その間を先に述べたような仕方で145に分割した。このような η の分割を用いて，g に対する基礎式 (17･a) 式が，線型である g に対してはルンゲ・クッタ法を用いて解いた。f に対しては，基礎式 (16･a) 式が非線型でもあり，g を計算する際には f を用いる必要がある。したがって計算途中での f の値は，求めるべき解からあまり大きく離れないようにしなければならない。さらに f に対する境界条件は (18) 式に示されるように $\eta=0$ と $\eta\to\infty$ の両端で与えられている。これらのことを考慮して f は緩和法を用いて解く。まず (16･a) 式を

$$p=f'' \qquad (19)$$

$$p'+\frac{1}{2}fp=-\frac{c\sqrt{x_0}}{2}\boldsymbol{R}\{igg''^*\} \qquad (20)$$

と書き換える。さらに図2に示すように η に対する分割は等間隔ではないので i 番目の前後の分割の間隔を図に示すように h_1, h_2 とし，その前後の点の諸量は $i-1$, i, $i+1$ で表す。また各分割の中では諸量は線型的に変化していると考えて (19) 式を

$$\frac{1}{2}h_1h_2(h_1+h_2)p_i=h_1f_{i+1}+h_2f_{i-1}-(h_1+h_2)f_i \qquad (21)$$

と書き換える。上式は前述のように緩和法を用いて解くために，(21)式の収束性について次に述べる。まず n 回目の f の誤差を $\varepsilon^{(n)}$ とすれば，ε に関する式は (21) 式より α を緩和係数として

$$\varepsilon_i^{(n+1)}=\varepsilon_i^{(n)}+\alpha(\gamma\varepsilon_{i+1}^{(n)}+\beta\varepsilon_{i-1}^{(n+1)}-\varepsilon_i^{(n)}) \qquad (22)$$

ただし　$\gamma+\beta=1$

と得られる。さらに $k(\alpha)$ を演算子として

$$\varepsilon^{(n+1)}=k(\alpha)\varepsilon^{(n)} \qquad (23)$$

とする。ここで $\|k(\alpha)\|<1$ でかつ0に近ければ収束上より好ましいものである。また誤差 ε は (21) 式に対応する固有関数系 ε^γ を用いて表すことができる。

$$\varepsilon_i^\gamma=A^i\sin\left(\frac{\gamma\pi}{p}i\right)\ (\gamma=1,2\cdots p-1) \qquad (24)$$

ここに p は分割の仕方に対応して定まる定数である。したがって (22)，(24) 式より

$$(k+\alpha-1)A^i\sin\left(\frac{\gamma\pi}{p}i\right)$$
$$=\alpha\left\{\gamma A^{i+1}\sin\left(\frac{\gamma\pi}{p}(i+1)\right)+\beta kA^{i-1}\sin\left(\frac{\gamma\pi}{p}(i-1)\right)\right\} \qquad (25)$$

ここで $\cos(\gamma\pi i/p)$ と節点番号に関係する項がでるため

$$\gamma A^2=\beta k \qquad (26)$$

とする。すると (25) 式より

$$A^2-2\alpha\beta\cos\frac{\gamma\pi}{p}\cdot A+(\alpha-1)\frac{\beta}{\gamma}=0 \qquad (27)$$

となる。そこでいま $\alpha=1$ とすれば

$$A=2\beta\cos\frac{\gamma\pi}{p} \qquad (28)$$

となり

$$k=4\gamma\beta\left(\cos\frac{\gamma\pi}{p}\right)^2 \qquad (29)$$

となる。一方 (29) 式は $\gamma=1$ のとき最大となりそのときの k すなわち k^* は

$$k^*=4\gamma\beta\{1-(\pi/p)^2\} \qquad (30)$$

と求まり $\alpha=1$ とすれば (21) 式は分割の方法に関係なく $|k^*|<1$ となって収束することがわかった。さらに収束を最も早くするためには (27) 式において A

が重根を持つ条件より定めることができる。すなわち

$$\left(\alpha\beta\cos\frac{\gamma\pi}{p}\right)^2-\frac{\beta}{\gamma}(\alpha-1)=0 \tag{31}$$

これより $||k||<1$ とする α は

$$\alpha_0=\frac{1-\sqrt{1-4\gamma\beta(1-\pi^2/p^2)}}{2\gamma\beta(1-\pi^2/p^2)} \tag{32}$$

となる。その際の k^* は

$$k^*=\frac{1}{2}\{1-\sqrt{1-4\gamma\beta(1-\pi^2/p^2)}\} \tag{33}$$

となり，不等分割をすることにより緩和係数も収束速度も異なってくる。ここでは (30) 式のところで述べた α および (32) 式より α を適当に定めて計算を行った。一方 (20) 式は

$$(p_i-p_{i-1})/h_1=-\frac{1}{4}\{[fp+c\sqrt{x_0}\boldsymbol{R}(igg''^*)]_i+[fp+c\sqrt{x_0}\boldsymbol{R}(igg''^*)]_{i-1}\} \tag{34}$$

となるが，先に述べたように境界条件は $\eta=0$ と $\eta\to\infty$ で与えられている。また (34) 式と同様な式が i と $i+1$ の間でも成立する。これらのことを考慮して (20) 式を

$$2p_i\left(\frac{1}{h_1}+\frac{1}{h_2}\right)=\left(\frac{2}{h_1}-\frac{f_{i-1}}{2}\right)p_{i-1}+\left(\frac{2}{h_2}+\frac{f_{i+1}}{3}\right)p_{i+1}+\frac{c\sqrt{x_0}}{2}\boldsymbol{R}\{ig_{i+1}g''^*_{i+1}-ig_{i-1}g''^*_{i-1}\} \tag{35}$$

と書き表す。これら(21)式，(35)式を用いて定まる，f, p の i 番目の分割の k 回目の近似 f_i^k, p_i^k と前述のような適当な緩和係数を用いて f, p を収束させた。本報告では η の分割の各点での f_i^k の値が一回前の近似 f_i^{k-1} の値と 3×10^{-5} 以下の差になるまで計算を行わせ，その際の f_i^k を収束値とした。

ここで，ただちにわかるように (34) 式だけでも $i=0$ から出発して計算を進めて行くことができるが，$i=0$ において ε_0 なる誤差が存在すれば，端の $i=n$ のところにおいては誤差は (34) 式より

$$\varepsilon_n\approx\varepsilon_0\left(1-\frac{1}{4}<f>\right) \tag{36}$$

の程度の大きさになる。ここに $<f>$ は $i=0\sim n$ の間の f の平均的な値を示すものである。同様に $i=i_0$ におけるものもこれに重ね合わされる。また f が負の値を取るような場合には，p の誤差は非常に大きくなる。一方 (35) 式の形で数値計算を行うならば(21)式のところで述べたように (27) 式に対応する (35) 式の誤差収束評価に対する式は

$$A^2-\alpha tA+\alpha-1=0 \tag{37}$$

と書くことができる。ここに (26) 式に対応するものとして $A^2=k$ を用いた。また t は h_1, h_2, f, 節点 i の関数である。(37) 式は α を各節点，f に対して適当に選べば，すべての t に対して $|k|<1$ とすることができる。すなわち (35) 式を各点において誤差を小さくすることができる。また f は g の計算においても重要な量であるため，(34)式に比して時間はかかるが，誤差の少なくなる(35)式を用いて解かなければ正しい解は得ることはできない。また文献 7) の近似計算の結果からも推定されるように，sx_0 が大なる場合には g の値は f にそれ程大きく左右されないので，f が求める解より少々離れていても，g が一度定まった後は，f の計算だけをかなり進めることができる。

また (16) 式，(17)式に示されるような境界層方程式は一般に，$a\gg1$ として

$$y^{(n)}+af(y^{(n-1)},\ y^{(n-2)},\ \cdots\cdots)=0$$
$$\eta=0:\ y^{(r)}\cdots=c_r\cdots,\quad \eta\to\infty:\ y^{(s)}\cdots\to c_s\cdots \tag{38}$$

のような形をしているので，y の挙動は特異点のかなり近くの解の形に近いと考えられる。したがって(38)式で示されるような方程式を誤差が必ず生ずる数値的な方法で解く際には，この誤差の部分を充分に考慮しなければならない。そこで (38) 式の y を求めたい正解の部分 y_r と，やむを得ず生ずる誤差の部分 ε とに分けて，

$$y=y_r+\varepsilon \tag{39}$$

と書き表す。この際，当然ながら $y_r\gg\varepsilon$ でなければならない。この (39) 式を (38) 式に代入すると，境界条件を考慮して $\eta\to0$ の付近では

$$y_r^{(n)}+af(y_r^{(n-1)},\ y_r^{(n-2)},\ \cdots)+e(\varepsilon)=0 \tag{40}$$

なる式が得られて，第３項目の誤差部分は，第１，第２項目に比して充分小さいと考えられる。

一方 $\eta\to\infty$ では境界条件を考慮すると $af(y_r^{(n-1)}, y_r^{(n-2)}\cdots)\to0$ となるので

$$y^{(n)}+af(\varepsilon)=0 \tag{41}$$

なる式が得られる。すなわち (38) 式を数値的に解く際には $\eta \to 0$ の付近では解くべき方程式 (38) 式とほぼ同じ (40) 式を解くことになるが，$\eta \to \infty$ の付近では必然的に生ずる誤差のために解きたい方程式とは関係のない (41) 式を解くことになる。このため (16) 式，(17)式を先に述べた方法でそのまま数値的に解くことはできないので何らかの工夫を要する。本報告では簡単に，前述のように η の部分を図 2 に示すような 3 つの領域に分けた。第 1 の部分は $\eta=0\sim\eta_1$ までの壁に一番近い部分で，この領域では

$$f'''+\frac{1}{2}ff''=-\frac{c\sqrt{x_0}}{2}\boldsymbol{R}[igg''^*] \qquad (42)$$

$$g''''-\frac{1}{2}(f'\eta-f)g'''-[isx_0+ic\sqrt{x_0}h'+2c]g''$$
$$+\frac{c^2}{2}(f'\eta-f)g'+[isx_0c^2+ic^3\sqrt{x_0}f'$$
$$+ic\sqrt{x_0}h'''+c^4]g=0 \qquad (43)$$

から先の方法で得られる式をそのまま解き，第 2 の $\eta=\eta_1\sim\eta_2$ までの中間の領域では

$$f'''+\frac{1}{2}ff''=-\frac{c\sqrt{x_0}}{2}\boldsymbol{R}[igg''^*] \qquad (44)$$

$$-[isx_0+ic\sqrt{x_0}h'+2c^2]g''+\frac{c^2}{2}(f'\eta-f)g'$$
$$+[isx_0c^2+ic^3\sqrt{x_0}f'+ic\sqrt{x_0}h'''+c^4]g=0 \qquad (45)$$

より得られる式を解く。また第 3 の $\eta=\eta_2\sim\eta_\infty$ の壁から充分離れた領域では

$$f'=0 \qquad (46)$$

$$-[icx_0+ic\sqrt{x_0}h'+2c^2]g''+\frac{c^2}{2}(f'\eta-f)g'$$
$$+[isx_0c^2+ic^3\sqrt{x_0}f'+ic\sqrt{x_0}h'''+c^4]g=0 \qquad (47)$$

より得られる式を用いて解いた。また前述のように g に対してはルンゲ・クッタ法により解いたので f に比してそれ程精度は良くなく η の分割の方法等により多少変化するが，その誤差が f に与える影響は g'' が $\eta\to\infty$ で小となるので小さいと考えられる。

またこの際の境界条件は，$\eta=0$ で，$g=\varepsilon$, $g'=\varepsilon_u$, $f=0$, $f'=0$ とし，$\eta=\eta_1$ で $g''''+g'''=0$ であり，$\eta=\eta_2$ で $f'=1$ とし，$\eta=\eta_\infty$ で $g=0$ となるように解いた。また文献 7) の近似解の結果からもわかるように，η_1 や η_2 の値は sx_0 や k 等のパラメータの値

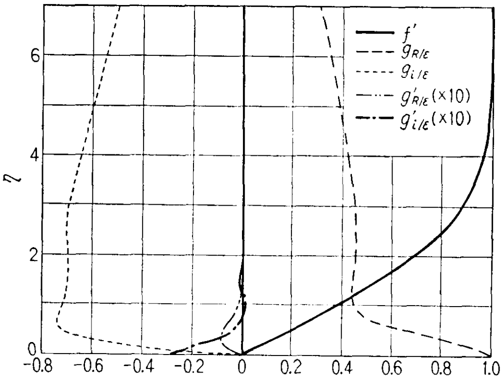
表-1 η_1, η_2 の sx_0, k による変化

sx_0	150	100	75	10
η_1	0.58	0.67	0.8	2.0

k	1	−0.03
η_2	7	9

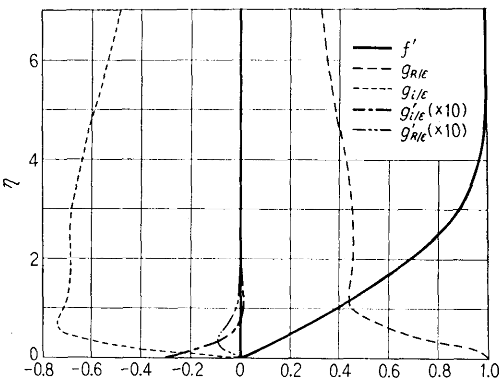
によって変化する。その値を本報告では計算途中の様子から表-1 に示すように sx_0, k に対して定めた。この表からもわかるように η_1 の値は $\sqrt{sx_0}$ に反比例して変わっているが，これは文献 7) の近似解から推定されることと一致している。

以上述べたような方法を用いて得られた数値解の一部を図 3～図 6 に sx_0, ε, k 等のパラメータを図に示すように変えた場合の速度の定常成分 f' と非定常成分 g/ε, g'/ε を η に対して示した。ここで前述のように g/ε の値は図 2 に示す η の分割の間隔の取り方や方法，η_1 の取り方により多少変わるが，それが f に与える影響は本計算の範囲内ではほとんど無かった。またこれらの図や，いままでの記述からも推定されるように，本報告の条件内では速度の変動成分は，定常成分 f に対する境界層のかなり外側まで存在することがわかる。また図 5 (c) には，$sx_0\gg1$, $k\geq1$, $\varepsilon, \varepsilon_u\ll1$, の場合に近似的に得られる定常速度成分 f'_∞ を文献 7) より求め示してある。この図から明らかであるように，定常速度成分に対する近似解と数値解はかなり良く合っている。また図 7 には，sx_0, k, ε 等を種々に変化させた場合の定常速度成分 f' を η に対して示した。図中 $sx_0=10$, $k=1$, $\varepsilon=0.05$, $c=0.1$, $\varepsilon_u/\varepsilon=-3i$ に対する f' の分布は定常の場合に得られるブラジウスの解とほぼ一致している。これらの図から明らかであるように壁面の非定常的な吸込みや吹出しの変動量 ε や ε_u がかなり小さなときでも，その変動の振動数 sx_0 が大きくなるにつれて平板境界層内の速度分布の定常成分は定常の際の分布から大きく変化するようになる。その変わり方は ε や ε_u, k 等のパラメータにより変わるので，特に壁面摩擦係数の定常成分に関係する $f''(0)$ の値を，振動数 sx_0 に対して図 8 に，吸込み吹出し変動量 ε に対して図 9 に示した。図中○，◇ で示した値は数値計算より得られた値であり，実線で示したものは文献 7) の近似計算の結果得られた値である。これら図 8，図 9 が示すように，$f''(0)$ の値は本数値計算の範囲内で，定常時の値の10倍



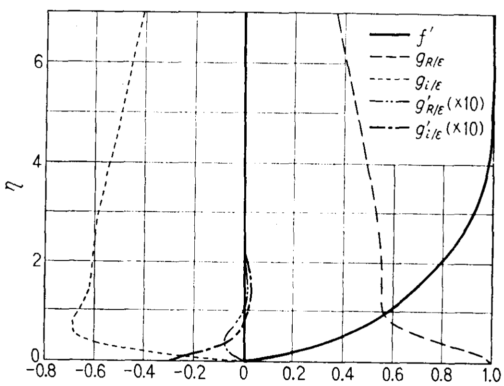
$Sx_0=10$, $\epsilon=0.05$, $C=0.1$, $k=1$, $\mathcal{E}_u/\mathcal{E}=-3i$

3-(a)



$Sx_0=10$, $\epsilon=0.1$, $C=0.1$, $k=1$, $\mathcal{E}_u/\mathcal{E}=-3i$

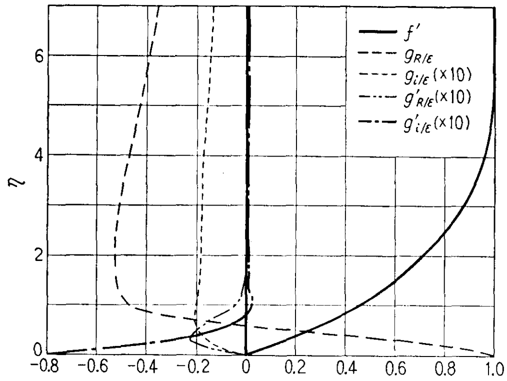
3-(b)



$Sx_0=10$, $\epsilon=0.267$, $C=0.1$, $k=1$, $\mathcal{E}_u/\mathcal{E}=-3i$

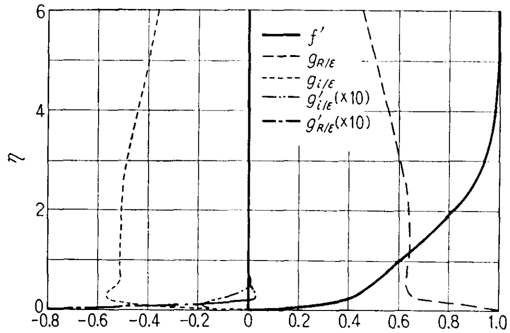
3-(c)

図-3 境界層内速度分布



$Sx_0=10$, $\epsilon=0.1$, $C=0.1$, $k=1$, $\mathcal{E}_u/\mathcal{E}=-8i$

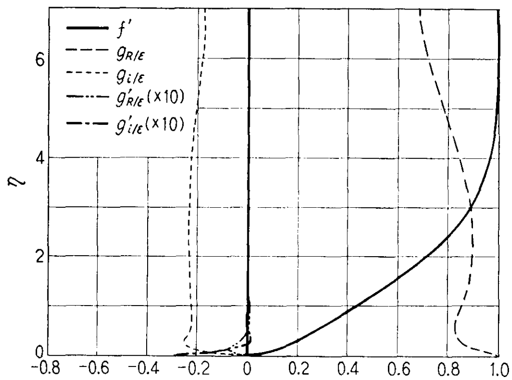
4-(a)



$Sx_0=100$, $\epsilon=0.1$, $C=0.1$, $k=1$, $\mathcal{E}_u/\mathcal{E}=-8i$

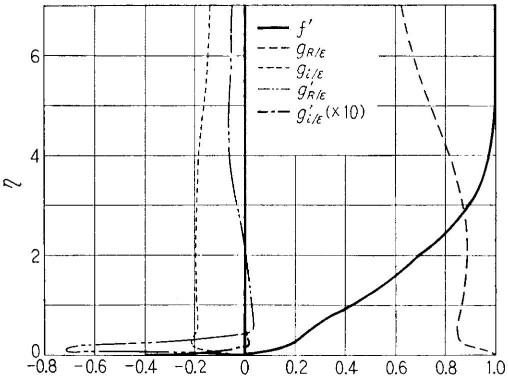
4-(b)

図-4 境界層内速度分布



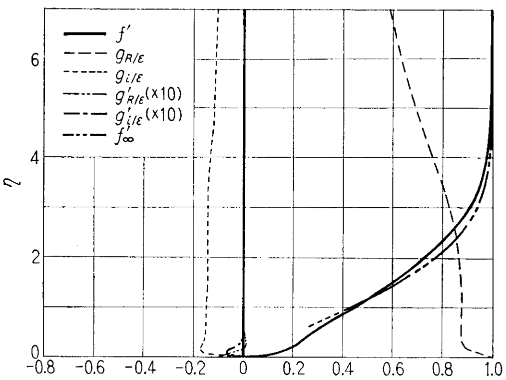
$Sx_0=75$, $\epsilon=0.1$, $C=0.09$, $k=1$, $\mathcal{E}_u/\mathcal{E}=-3i$

5-(a)



$Sx_0=100$, $\epsilon=0.1$, $C=0.1$, $k=1$, $\varepsilon_u/\varepsilon=-3i$

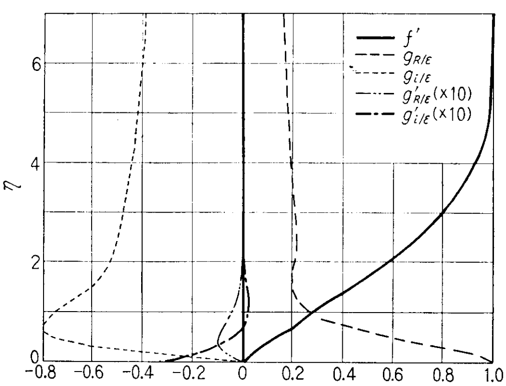
5-(b)



$Sx_0=150$, $\epsilon=0.1$, $C=0.12$, $k=1$, $\varepsilon_u/\varepsilon=-3i$

5-(c)

図-5　境界層内速度分布



$Sx_0=10$, $\epsilon=0.1$, $C=-0.03$, $k=-0.3$, $\varepsilon_u/\varepsilon=-3i$

図-6　境界層内速度分布

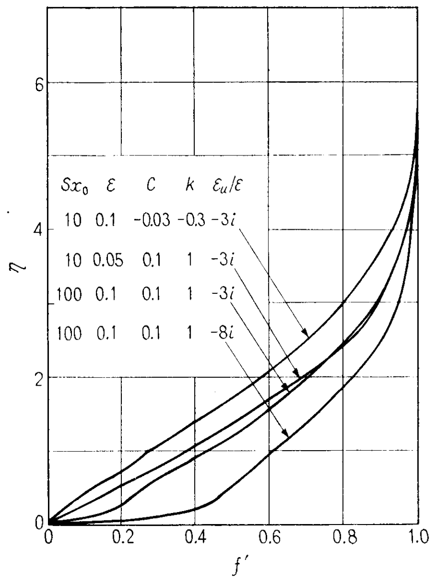


図-7　境界層内定常成分速度分布

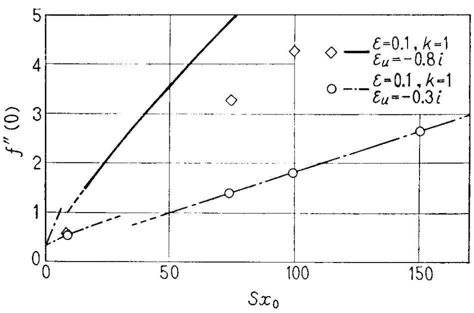


図-8　$f''(0)$ の sx_0 に対する変化

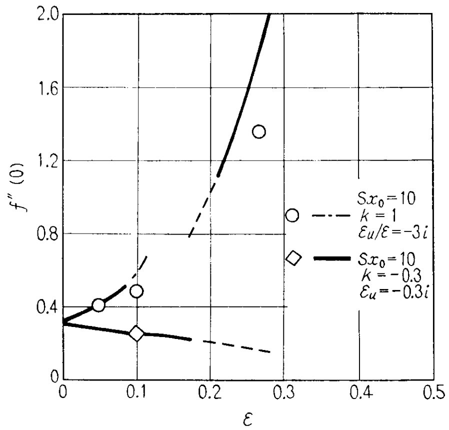


図-9　$f''(0)$ の ε に対する変化

以上に大きくなる結果や，$k=-0.3$ の場合に示されるように定常時より小さくなる結果も得られた。またこれらの図からも明らかであるように，近似計算の適用が可能であるような，ε や ε_u が小さく，sx_0 が大きい領域では，$f''(0)$ の近似計算の結果と数値計算の結果は非常によく一致している。またその他の近似解の適用範囲外の ε や ε_u が大きくなった場合には，これら近似解と数値解から得られる結果はあまりよく一致しなくなるが，その変化の傾向は両者ともかなりよく一致しているといえる。

6. 結　　論

非圧縮な一様流中に，流れと平行に置かれた平板上に非定常的な微小な吸込みと吹出しが均質に分布する場合の平板層流境界層に対しての基礎方程式を導き，この方程式を数値的に解くことにより，壁面にある微小な変動が主流の時間的，局所的な場所に関する平均値である定常成分にどのような影響を与えるかについて考察を行った。その結果微小な変動であっても，その与え方により，定常成分に対して与える変動成分の影響は非常に大きく，本報告の数値計算の範囲内でも，壁面における定常成分の速度勾配は定常時の値の10倍以上までも大きくなったり，逆に定常値より小さくなる結果も得られた。また近似解と数値解は近似解の適用範囲内ではよい一致を見た。

参 考 文 献

1) H. Schlichting: Boundory Layer Theory, McGraw-Hill (1962).
2) R.J. Nickerson: The Effect of Free Stream Oscillations on the Laminar Boundary Layer of a Flat Plate, W.A.D.C. Tech. Rep. 57-481 (1957).
3) 森，徳田：振動する円柱からの非定常熱伝達（第1報：よどみ点付近），機械学会論文集 32-239，1100 (1976).
4) M.R. Osborn: Numerical Methods for Hydrodynamic Stability Problems, SIAM J. Appl. Math 15, 3, 539 (1967).
5) R. Jordinson: The Flat Plat Boundary Layer Part 1: Numerical Integration of the Orr-Sommerfeld Equation, J. Fluid Mech Vol. 43, 801 (1970).
6) J. W. Miles: On the Generation of Surface Waves by Shear Flows, J. Fluid Mech Vol. 6, 568 (1959).
7) 徳田　仁：非定常吸込み吹出しのある平板境界層，機械学講演論文集 No. 710-15，61 (1971).