船舶技術研究所報告 第11巻 第2号 研究報告 (昭和49年3月)

3 次元非定常吸込み吹出しのある平板粘性流

徳 田 仁*

Viscous Flow over a Flat Plate with Progressing Sinks and Sources

By
Shinobu TOKUDA

Abstract

The influence of two dimensional unsteady disturbances on the velocity and the temperature distributions of time mean is considered theoretically for the laminar flow over a flat plate and the flow between two flat plates. On the plates sinks and sources are uniformly distributed and the blowing and the suction rates of these sinks and sources vary in time and space sinusoidally so that the sinks and sources seem to progress two dimensionally over the plates. The velocity amplitude of these blowing and suction rates is small compared with the uniform flow velocity. The fundamental equations for these flows are obtained and solved analytically. From these solutions it is shown that the velocity and the temperature distributions are very different from the distributions without the disturbances, even when the blowing and the suction rates are very small. It is also shown that the Reynolds analogy is approximately applicable to these flows.

1. 緒 言

流体機械の摩擦抵抗や，熱交換器の伝熱特性を知る上で，これら流体機械や熱交換器の各部に発達する境界層は支配的な役割りを演じている。そこでこれらの境界層を大略評価するためには，平板に沿って発達する境界層や，平板間の発達した流れを知ることは非常に重要なことである。このため平板に沿う境界層や平板間の流れに対しては古くから様々の角度より詳しく研究され，多くの理論的あるいは実験的な成果が報告されている。特に実用上重要である圧力勾配のある平板乱流境界層の速度分布は Coles[1] によって系統的に調べられている。また壁面においては一般に流速が小さくなるため，小さな速度でも壁面に何らかの攪乱が存在する場合には，壁面上の流れ全体を大きく変える可能性がある。このため壁面に一様に分布する定常的な吸込み，あるいは吹出しがある場合については多く実験的あるいは理論的な研究が行われてきた。その際に実質的な吸込みや吸出しの無い場合でも，壁面に存在する吸込みや吹出しの量が時間的，場所的に変わるようなときには，それらの吸込みや吹出し速度が小さな場合でも，ある特殊な条件のもとでは境界層内の流れが大きく変わることが，2次元的な層流境界層に対して理論的に示されている[2]。本報告では平均的な流れは2次元的ではあるが，非定常的な小さな吸込みや吹出し量が壁面上で2次元的に変動し，しかも実質的には吹出しも吸込みもない場合を考える。この際，吸込みや吹出し量の変動の x 方向の伝播速度が主流速度とほぼ同じ程度とする。このような場合に平板に沿って発達する境界層や，平板間の充分に発達した流れの平均的な成分に対してどのような影響を変動が与えるかを層流の場合について理論的に考察する。

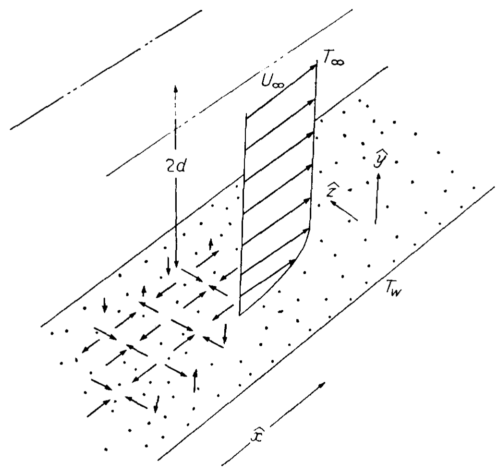
* 機関性能部 原稿受付：昭和48年6月7日

2. 主な記号

a	温度伝導率	α_c	y 方向変動流数
c_f	摩擦係数	β	z 方向変動波数
c_j	定数	γ	x 方向変動波数
$2d$	平板間距離	δ	境界層厚さ
f	平均流関数	ζ	z 方向温度
F	平均温度関数	η	距離
g	変動流関数	θ	温度
N_u	ヌセルト数	κ	y 方向変動波数
P	圧力	λ	x 方向変動波数
P_r	プラントル数	μ	粘性係数
R	実部	ν	動粘性係数
S	変動振動数	ξ	x 方向渦度
T	温度	ρ	密度
t	時間	ψ	流関数
U_∞	主流速度	ω	変動振動数
u	x 方向速度	—	時間平均
v	y 方向速度	*	共役
v_t	摩擦速度	∧	有次元
w	z 方向速度	∞	一様流
x	距離	w	壁面
y	距離	0	平均成分
z	距離	1	変動成分
α	任意定数		

3. 基礎式

一様流の流れと平行に置かれた平板上，または2枚の対称な平板の間の流れについて考える。これらの平板の壁面には小さな吸込みや吹出しが均質に分布していて，それらの吹出しや吸込み量は時間的，場所的に変動しているものとする。これらの吹出しや吸込みの場所的変動が1次元的な場合についてはすでに報告してある[2)]ので，以下では2次元的に変動する場合について考察する。また平板前縁あるいは平板間流路入口からは充分に離れた場所に着目し，平板間の距離もかなり大きいとする。このような所では変動が2次元的であるから当然乱流になっているはずである。しかし簡単のために層流であるとして考察を行う。また流れは非圧縮であり物性値は一定とする。また時間および局所的な場所的に平均された定常成分に対する流れは2次元的な流れであると考える。そこで図1に示すように，平板前縁からの距離を $\hat{x}$，それに垂直な方向の距離を $\hat{y}$，それら $\hat{x}$，$\hat{y}$ に垂直な方向の適当な場所



$$\hat{u}_0=\hat{u}_{10}\exp(i(\omega\hat{t}+\kappa\hat{z}+\lambda\hat{x}))$$
$$\hat{v}_0=\hat{v}_{10}\exp(i(\omega\hat{t}+\kappa\hat{z}+\lambda\hat{x}))$$
$$\hat{w}_0=\hat{w}_{10}\exp(i(\omega\hat{t}+\kappa\hat{z}+\lambda\hat{x}))$$
$$T_0=T_w+T_{10}\exp(i(\omega\hat{t}+\kappa\hat{z}+\lambda\hat{x}))$$

図-1

からの距離を $\hat{z}$ とする。また平板間の流れの場合には，2枚の平板間距離を $2d$ とする。また流速の $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ 方向の成分をそれぞれ $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ とし，圧力を P, 温度を $\hat{T}$ とする。さらに動粘性係数を ν, 流体密度を ρ とする。また時間を $\hat{t}$ とする。また平板上の一様流速，あるいは平板間流れの場合には平板間の中心の場所における流速を U_∞ とし，そこにおける温度の時間および局所的な場所的に平均された値を T_∞ とする。また，このような平均をされたある場所の壁温を T_w とする。そしてこれらの U_∞, T_∞, T_w はほぼ一定値であるとする。また平板上に一様に分布している吸込み吹出しの量は時間的および場所的に $\exp\{i(\omega\hat{t}+\lambda\hat{x}+\kappa\hat{z})\}$ の実部で示されるような形であるとする。すなわち実質の吸込みあるいは吹出し量は零ではあるが，それらの量は時間とともに振動数 $\omega, \hat{w}$ 方向の波数 $\lambda, \hat{z}$ 方向の波数 κ で示されるような2次元的な波状の形で変動するとする。ただし以下では ω, λ, κ ともに実数の場合を考察する。そこで，これら $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, ……, $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$, ……$\omega$ 等を一様流速度 U_∞, 動粘性係数 ν, 主流温度 T_∞ と壁温 T_w との温度差 $\Delta T=T_w-T_\infty$ を用いて次のように無次元化する。

$$u=\hat{u}/U_\infty,\quad v=\hat{v}/U_\infty,\quad w=\hat{w}/U_\infty$$
$$x=\hat{x}U_\infty/\nu,\quad y=\hat{y}U_\infty/\nu,\quad z=\frac{\hat{z}U_\infty}{\nu}$$

$$t=\frac{\hat{t}U_\infty^2}{\nu},\quad P=\frac{\hat{p}}{\rho U_\infty^2},\quad \delta=\frac{dU_\infty}{\nu}$$

$$\theta=\frac{\hat{T}-T_\infty}{\Delta T},\quad S=\frac{\omega\nu}{U_\infty^2},\quad \lambda=\frac{\lambda\nu}{U_\infty}$$

$$\beta=\frac{k\nu}{U_\infty},\quad P_r=\frac{\nu}{a} \qquad (1)$$

これらの無次元量を用いると，平板上の流れ，あるいは平板間の発達した流れに対して成立する。連続，運動量および温度に対する基礎方程式は次のように書くことができる。

連続

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (2)$$

運動量

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\nabla^2 u \qquad (3\cdot a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\Delta^2 v \qquad (3\cdot b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\nabla^2 w \qquad (3\cdot c)$$

または渦度を次のように定義すると，

$$\xi=\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z},\quad \zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

渦度に対して成立する式は圧力項の無い形で

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+u\frac{\partial\xi}{\partial x}+v\frac{\partial\xi}{\partial y}+w\frac{\partial\xi}{\partial z}-\xi\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}=\nabla^2\xi \qquad (4\cdot a)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}+w\frac{\partial\zeta}{\partial z}-\zeta\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}=\nabla^2\zeta \qquad (4\cdot b)$$

となり，エネルギ式は

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}+w\frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{1}{P_r}\nabla^2\theta \qquad (5)$$

と書くことができる。

また前述のように，平板の壁面には非定常的な吹出しおよび吸込みが一様に分布していて，それらの量は x および z 方向に波状に伝播しながら変動している。そこでこれらの吹出しおよび吸込み速度の変動振幅の x, y, z 方向の成分をそれぞれ u_{w1}, v_{w1}, w_{w1} とする。また壁面の温度も，壁温の定常成分 T_w のまわりに，吹出しや，吸込みのときと同様に x, z 方向に変動するとし，その変動振幅を θ_{w1} とする。そしてこれらの変動成分は一様流に比べて小さいとする。したがって $u_{w1}, v_{w1}, w_{w1}, \theta_{w1}<1$ とする。しかしながらこれらの u_{w1},…… は (25) 式の所および (42), (51) 式などの所で見るように，それほど小さなものではないとする。すると (2), (3), (5) 式に対する境界条件として

壁面において

$$u=u_{w0}+u_{w1}e^{i(st+\gamma x+\beta z)},\quad v=v_{w1}e^{i(st+\gamma x+\beta z)}$$
$$w=w_{w1}e^{i(st+\gamma x+\beta z)},\quad \theta=1+\theta_{w1}e^{i(st+\gamma x+\beta z)} \qquad (6\cdot a)$$

ここで，壁面における定常成分に対する速度の x 成分 u_{w0} は，壁面におけるスリップの度合を表すものであるが，ここではほぼ0であるとして以下の考察を行う。また実質の吸込みや吹出しは無いとしているので $v_{w0}=0$ である。さらに定常成分に対しては流れは2次元的であるとしているので $W_{w0}=0$ である。一方，壁面から充分離れた一様流中または2平板間の中心では，定常成分速度は一様流速度または平板間中心速度に等しく，温度はそこでの温度に等しいとする。したがって，一様流中または平板間中心では

$$u=1,\quad w=0,\quad \theta=0 \qquad (6\cdot b)$$

である。ここで一様流中あるいは特に平板間中心では温度，速度ともに変動成分が0になるようになっているが (28) 式の所で述べるように，変動成分が残っていても何ら結論には影響を与えることはない。

以上のように，壁面において非定常的な吹出しや吸込みが波状に変動するという境界条件を考慮すると，平板上の流れ，あるいは平板間の流れの各量 u, v, w, θ, ζ, ……等は

$$\begin{aligned}
u&=u_0+u_{11}e^{ist}=u_0+u_1e^{i(st+\beta z+\gamma x)}\\
v&=v_0+v_{11}e^{ist}=v_0+v_1e^{i(st+\beta z+\gamma x)}\\
w&=\quad w_{11}e^{ist}=w_1e^{i(st+\beta z+\gamma x)}\\
\theta&=\theta_0+\theta_{11}e^{ist}=\theta_0+\theta_1e^{i(st+\beta z+\gamma x)}\\
\zeta&=\zeta_0+\zeta_{11}e^{ist}=\zeta_0+\zeta_1e^{i(st+\beta z+\gamma x)}\\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad (7)$$

等と，時間と x, z 方向の局所的な場所に関して平均

された定常成分 $u_0, v_0, \cdots\zeta_0, \cdots$ と，時間的に変動する非定常成分 $u_{11}, v_{11}, w_{11}, \cdots$，あるいは時間的および場所的に波状に変化する変動成分 $u_1, v_1, w_1, \cdots$ との和の形で近似的に表されるものと考える。ここで時間平均速度は2次元的であるとしたから $w_0=0$ であると考える。また上の（7）式の表示から明らかであるように，定常成分 $u_0, v_0, \cdots$ や変動成分 $u_1, v_1, w_1, \cdots$ 等に対する t, z および x 方向の微分に対しては

$$s \gg \left\| \frac{\partial}{\partial t} \right\|, \quad \beta \gg \left\| \frac{\partial}{\partial z} \right\|, \quad \gamma \gg \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\|$$

として以下の考察を行う。そこで（7）式を (2), (3), (4), (5) 式に代入し，これらの式を時間的に平均すると，$u_0, v_0, p_0 \cdots\cdots$ 等は，非定常成分 $u_{11}, v_{11}, w_{11}, \cdots$ 等を含んだ形で

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0 \tag{8}$$

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -\frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \boldsymbol{R}\left(u_{11}^* \frac{\partial u_{11}}{\partial x} + v_{11}^* \frac{\partial u_{11}}{\partial y} + w_{11}^* \frac{\partial u_{11}}{\partial z} \right) \tag{9}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial y} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{R}\left\{ u_{11}^* \frac{\partial v_{11}}{\partial x} + v_{11}^* \frac{\partial v_{11}}{\partial y} + w_{11}^* \frac{\partial v_{11}}{\partial z} \right\} \tag{10}$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{R}\left\{ u_{11}^* \frac{\partial w_{11}}{\partial y} + v_{11}^* \frac{\partial w_{11}}{\partial y} + w_{11}^* \frac{\partial w_{11}}{\partial z} \right\} \tag{11}$$

$$0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{R}\left\{ u_{11}^* \frac{\partial \xi_{11}}{\partial x} + v_{11}^* \frac{\partial \xi_{11}}{\partial y} + w_{11}^* \frac{\partial \xi_{11}}{\partial z} + \xi_{11}^* \frac{\partial u_{11}}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial y} \right)^* \frac{\partial w_{11}}{\partial x} - \left(\frac{\partial u_{11}}{\partial z} \right)^* \frac{\partial v_{11}}{\partial x} \right\} \tag{12}$$

$$u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} = \frac{1}{P_r} \nabla^2 \theta_0 - \frac{1}{2} \boldsymbol{R}\left\{ u_{11}^* \frac{\partial \theta_{11}}{\partial t} + v_{11}^* \frac{\partial \theta_{11}}{\partial y} + w_{11}^* \frac{\partial \theta_{11}}{\partial z} \right\} \tag{13}$$

と書き表すことができる。ここで $\boldsymbol{R}$ は実部を * は共役を表すものとする。また平板上あるいは平板間の流れであり，定常成分に対しては2次元的な流れであるから

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, \quad u_0 \gg v_0, \quad \left\| \frac{\partial}{\partial y} \right\| > \left\| \frac{\partial}{\partial x} \right\|$$

であると考えた。

次に変動成分に対する方程式は，文献 2) においてすでに報告してあるような方法を用いて得ることができる。すなわち（7）式を（4），（5）式に代入し，それらの式に

$$[\exp\{i(st+\gamma x+\beta z)\} + 2\alpha \exp\{i(st+\gamma x+\beta z)\}]^*$$

を掛けて時間的に平均を行う。ここに α は任意の定数であるが，以下の考察においては $\alpha \approx 0(1)$ の大きさのものであると考える。すると，$u_1, v_1, w_1 \cdots\cdots$ の変動成分に対する式は定常成分 $u_0, v_0, w_0 \cdots\cdots$ を含んだ形で

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} + i\beta\left(\frac{\gamma}{\beta} u_1 + w_1 \right) = 0 \tag{14}$$

$$is\xi_1 + i\gamma(u_0 + \alpha u_1)\xi_1 + (v_0 + \alpha v_1)\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \alpha i\beta w_1 \xi_1 - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \alpha i\gamma u_1 \right)\xi_1 + i\gamma\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \alpha \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) w_1 - \alpha(\beta\gamma) u_1 v_1 = \nabla^2 \xi_1 \tag{15}$$

$$is\zeta_1 + i\gamma(u_0 + \alpha u_1)\zeta_1 + u_1 \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \zeta_0}{\partial y} - i\beta w_1 \zeta_0 + v_0 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + \alpha\left\{ -i\beta \zeta_1 w_1 - i\beta u_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + i\beta w_1 \zeta_1 - \gamma\beta w_1 v_1 \right\} = \nabla^2 \zeta_1 \tag{16}$$

$$is\theta_1 + i\gamma(u_0 + \alpha u_1)\theta_1 + u_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + v_1 \frac{\partial \theta_0}{\partial y} + \alpha\left\{ v_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + i\beta w_1 \theta_1 \right\} = \frac{1}{P_r} \nabla^2 \theta_1 \tag{17}$$

と得ることができる。以上の定常および非定常成分に対する基礎式（8）～(17) 式を，（6）式の境界条件のもとで解けばよい。

4. 近　似　解

前節で得られた基礎式および境界条件をそのまま電算機等を用いて解くことは非常に困難であるため，ある特定な条件を付けて近似的に解くことを考える。そこで流関数として，定常成分に対しては2次元流れであることを考慮すると（8）式より

$$u_0 = \frac{\partial \psi_0}{\partial y}, \quad v_0 = -\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \tag{18}$$

と流関数の定常成分 ψ_0 を定めることができる。また非定常成分に対しては，吸込み吹出しの変動の伝播速

度の x 方向成分は一様流速とほぼ同じ $-s/\gamma\approx 1$ とする。また z 方向の伝播速度 $-s/\beta$ は x 方向の速度に比して充分に小さい $\beta/\gamma\gg 0(1)$ とする。すると流関数の非定常成分 ψ_{11} は (14) 式より

$$w_{11}=\frac{\partial\psi_{11}}{\partial y},\quad v_{11}=-\frac{\partial\psi_{11}}{\partial z} \tag{19}$$

と定める。また y の代わりに新たに η を

$$\eta=y/\delta(x) \tag{20}$$

と定める。ここに δ は2平板間の流れの場合に対しては（1）式に定めてある。また平板上の流れに対しては，$y=\delta(x)$ の場所において，一様流に対する (6·b) 式の定常成分に対する境界条件を満たす場所であるとする。さらに δ は $\delta\gg 1$ とし，一般に x の関数であって $\delta=\delta_0+\delta'(x-x_0)$ と書くことができる。ここではある場所 $x=x_0$ のまわりの $\delta_0\gg\delta'(x-x_0)$ が成立する x の所に注目するため，δ はほぼ定数であると考える。また以下では δ' は小さいとするため x のかなり広い範囲で δ は定数と考えてよい。δ' についても，δ と同様ほぼ定数と考えて以下取扱うことにする。そこで (18), (19) 式で定めた定常および変動成分に対する流関数 ψ_0, ψ_1 および定常成分に対する温度関数 θ_0 を η, δ を用いて

$$\begin{aligned}\psi_0&=\delta f(\eta,\delta,\beta,\cdots\cdots)\\ \psi_1&=\delta g(\eta,\delta,\beta,\cdots\cdots)\\ \theta_0&=F(\eta,\delta,\beta,p_r,\cdots\cdots)\end{aligned} \tag{21}$$

と f, g, F を用いて書き換える。また，すでに述べたように，$u_0, \theta_0\gg u_{11}, v_{11}, w_{11}, \theta_{11}, \cdots\cdots$ であり，(42) 式で定義した ε を用いて $\beta\gg\gamma\gg\delta'/\varepsilon\delta$, $\delta\gg 1$ であるとする。すると変動成分に対する方程式 (15) 式は

$$\begin{aligned}&i\delta^2\{s+\gamma(u_0+\alpha u_1)\}(g''-(\beta\delta)^2g)\\ &\quad+i\alpha\beta\delta^2(g'g''-gg''')=g''''-2(\beta\delta)^2g''+(\beta\delta)^4g\end{aligned} \tag{22}$$

のように書き換えることができる。また壁面から少し離れた所より上では (22) 式は大略

$$g'g''-gg'''=0 \tag{23}$$

となる，この解は文献 2) においてすでに述べたように

$$g=\sum_k p_k(\eta)\exp\left(\sum_i r_i(\eta)\right) \tag{24}$$

なる形で表すことができると考える。そこで (24) 式を (23) 式に代入すると，第1近似として

$$g=p(\eta)\exp(\alpha_e\eta+\cdots\cdots) \tag{25}$$

なる解を得ることができる。ここに後の (49) 式の所で見るように α_e はほとんど虚数であって，その大きさは $0(\varepsilon\beta\delta^2)\gg 0(\alpha_e)\gg 0(\beta\delta)$ の程度とし，かつ p の大きさに対しては $0(\boldsymbol{R}(\alpha_e))\ll 0(p'(\eta))\ll 0(\alpha_e)$ であるとする。つぎに z 方向の定常成分に対する方程式 (12) 式は近似的に

$$0=\boldsymbol{R}\{i\beta(g^*\xi_1'+g'^*\xi_1)\} \tag{26}$$

と書き換えられる。そこで (26) 式に (25) 式を代入し，前述の α_e に対する条件等を考慮すれば (26) 式は p だけを含んだ形で

$$(p^*p)''=0 \tag{27}$$

と書き換えられる。そこで p に対する境界条件として，$\eta=0$ で $p=0$ であるとする。すると (27) 式より

$$p^*p=c_1\eta \tag{28}$$

と p を得ることができる。ここに c_1 は積分定数であり，後で α_e とともに（6）式の境界条件等から定まるものである。また一様流あるいは平板間の中心での変動成分に対する境界条件 (6·b) 式は，$\boldsymbol{R}(\alpha_e)$ と (28) 式の c_1 とによって定まるものである。しかしながら $\boldsymbol{R}(\alpha_e)$ は前述の条件さえ満たしていれば，いかなる値を取っても $\eta=1$ の非常に近くの他はあまり差がないため，$\eta=1$ での変動成分に対する境界条件，すなわち $\boldsymbol{R}(\alpha_e)$ に対する議論にはこれ以上立ち入らないことにし，$\boldsymbol{R}(\alpha_e)\approx 0$ であるとして以下の考察を進める。以上 (25) および (28) 式で得られた g に対する結果，$u_1<1$ および δ' が小であるという条件を考慮すると y 方向の変動成分に対する方程式 (16) 式は近似的に

$$\{is+i\gamma(u_0+\alpha u_1)\}\zeta_1+\frac{\partial\zeta_0 v_1}{\partial y}=\nabla^2\zeta_1 \tag{29}$$

と書き換えられる。そこで壁面から少し離れた上を考えて，$s\approx-\gamma$ を考え合わせると上式は大略

$$v_1\frac{\partial u_0}{\partial y}=\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \tag{30}$$

となる，そこで上の u_1 を g の場合と同様に

$$u_1=\sum_k h_k(\eta)\exp\left(\sum_i r_i\right) \tag{31}$$

なる形で書き表せると考えて，(30)式に代入する。すると第1近似として u_1 は

$$u_1=h(\eta)\exp(\alpha_e\eta+\cdots\cdots)$$

ただし (32)

$$h=-i\frac{\beta\delta^2}{\alpha_e^2}pf''$$

と得られる。

以上，速度変動に対する解は (25) 式および (32) 式のように速度の定常成分に対する分布形fを含んだ形で得られる。そこでこれらの変動成分に対する解を用いると定常成分に対する x 方向の運動方程式 (9) 式は (21) 式を用いて近似的に

$$f'''+\delta\delta' ff''=\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial x}+\frac{\delta^2}{2}\boldsymbol{R}[i\beta\{p^*(\alpha_e h+h')+h(\alpha_e^* p^*+p'^*)\}] \tag{33}$$

と書き表せる。さらに (32) 式を用いると上式は

$$f'''+\delta\delta' ff''=\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial x}+\frac{1}{2}\boldsymbol{R}\left(\frac{\beta\delta^2}{\alpha_e}\right)^2\left\{\frac{d}{d\eta}(pp^*f'')\right\} \tag{34}$$

となる。そこで新たに c_2, c_3 の定数などを

$$c_1\eta+c_2=pp^*-2\boldsymbol{R}\left(\frac{\alpha_e}{\beta\delta^2}\right)^2 \tag{35}$$

$$c_3\{1+\Gamma\}=-2\boldsymbol{R}\left(\frac{\alpha_e}{\beta\delta^2}\right)^2\left\{\delta\delta' ff''-\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial x}\right\} \tag{36}$$

と定める。ここに Γ は η 等の変数に対する偏差が最小になるように選んだη等の関数である。したがって $\Gamma(\eta)$ の大きさは 0(1) である。また α_e に対する (25) 式の所で述べた条件より $c_1\gg c_2$ となる。そこでこれらの (35), (36) 式を用いると (34) 式は

$$f''=\frac{c_4-c_3\eta b}{c_1\eta+c_2} \tag{37}$$

と書きなおすことができる。ここに f は η 等の関数で

$$b=1+\frac{1}{\eta}\int_1^\eta \Gamma d\eta \tag{38}$$

なるものである。また c_4 は積分定数であり，境界条件 $\eta=1$ で定常成分に対する速度勾配 $du_0/dy=0$ を考慮すると $c_4=c_3$ と定めることができる。したがって (37) 式より定常成分に対する速度分布は

$$f'=\frac{c_3}{c_1}\left\{l_n\left(\frac{c_1}{c_2}\eta+1\right)-\int_0^\eta fd\eta\right\}+c_5 \tag{39}$$

と解くことができる。ここに c_5 は積分定数であり壁面における速度のスリップ u_{w0} を用いて定めることができる。ここでは u_{w0} が小なので c_5 も小とする。また $c_1\gg c_2$ であり $f\approx 0(1)$ であるから上式は近似的に

$$f'\approx\frac{c_3}{c_1}l_n\frac{c_1}{c_2}\eta+c_5\approx\frac{c_3}{c_1}l_n\frac{c_1}{c_2}\eta \tag{40}$$

と書ける。これは $\eta\approx 1$ の近くではそれほどよい近似ではないが，一様流または平板間中心での境界条件，$\eta=1$ で $u_0=1$ を上式に適用すれば，c_1, c_2, c_3 の間には

$$\frac{c_1}{c_3}\approx l_n\frac{c_1}{c_2} \tag{41}$$

なる関係が成立する。次に境界条件 (6･a)の u_{w1}, v_{w1}, w_{w1} はそれぞれ変動成分に対する (25) および (32) 式に適合するものとし，かつ壁面 $\eta=\eta_0$ での変動振幅をそれぞれ

$$|w_{w1}|=\varepsilon_w,\quad \frac{w_{w1}}{u_{w1}}=-\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_u}i,\quad \frac{v_{w1}}{u_{w1}}=-\frac{\beta\delta\varepsilon}{\varepsilon_u} \tag{42}$$

と書きなおす。さらに p_x として

$$p_x=\frac{1}{2}\boldsymbol{R}\{\varepsilon\beta\varepsilon_u\}$$

とすれば，定常成分に対する速度分布を与える (39) 式に現れる c_1, c_2, c_3 および変動成分に対する速度分布を与える (25), (32) 式に現れる α_e と境界条件 (6･a) 式とは，(42) 式の $\varepsilon, \varepsilon_u$…… を用いると次のように関係づけられる。

$$\alpha_e=\frac{\varepsilon_w}{\varepsilon},\quad c_2=-2\boldsymbol{R}\left(\frac{\alpha_e}{\beta\delta^2}\right)^2,\quad \frac{c_3}{c_2}=-\delta^2 p_x$$
$$c_1\approx c_3\, l_n(-\delta^2 p_x) \tag{43}$$

また壁面の位置 η_0 は

$$\eta_0=|\varepsilon|^2/c_1 \tag{44}$$

で与えられる。一般の場合には $\eta_0\ll 1$ であるので，以下では $\eta_0\approx 0$ とする。さらに $\eta=0\sim\eta_0$ の壁面以下でも，これまでに述べた定常や変動成分に対する関係がそのまま延長できると仮定する。そこで x 方向運動方程式の定常成分に対する基礎式 (9) を書き換えると

$$\delta\delta' ff''-\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial x}=f'''-\delta^2\frac{\partial\overline{uv}}{\partial y} \tag{45}$$

となるこれを $\eta=0\sim\eta_0$ について積分すれば

$$c_{10}+\int_0^\eta\left(\delta\delta' ff''-\delta^2\frac{\partial p_0}{\partial x}\right)d\eta=(f''-\overline{uv}) \quad (46)$$

となる。ここで c_{10} は積分定数であり，$\eta_0\approx 0$ であるから，上式より $\eta=0\sim\eta_0$ では $f''-\overline{uv}=c_{10}$ となり，ほぼ一定値となる。そこで摩擦係数 c_f を

$$c_f=\frac{1}{\rho U_\infty^2}\left\{\mu\left(\frac{d\hat{u}_0}{d\hat{y}}-\rho\,\overline{\hat{u}\hat{v}}\right)\right\}_{\text{壁面}} \quad (47)$$

とすれば，

$$\delta c_f=(f''-\overline{uv})_{\eta=\eta_0}=(f''-\overline{uv})_{\eta=0}=f''(0) \quad (48)$$

となる。したがって摩擦係数は大略

$$c_f=\frac{c_3}{c_2}=-\delta p_x=-\frac{1}{2}\boldsymbol{R}\{\varepsilon_u\varepsilon\beta\delta\} \quad (49)$$

となる。次に定常成分に対する速度分布が単純な形をした一般的な場合を考える。このような場合には通常 $c_f>0$ ならば速度分布も $f'>0$ と考えられる。すなわち (49), (39) 式より $c_3/c_2>0$, $c_3/c_1>0$. 一方，変動振幅は正であるから (28) 式より $c_1>0$. したがって $c_3>0$, $c_2>0$ となる。また β や δ は実数であるから (43) 式より α_e は (25) 式の所で仮定したようにほとんど虚数であるのが一般的である。

以上，得られた定常および変動成分の速度に対する近似解を用いると温度分布を得ることができる。まず温度の変動成分に対する (17) 式は，速度分布を得るときに用いた条件や $\theta_1<1$ を考慮すると壁面より少し上では

$$v_1\frac{\partial\theta_0}{\partial y}=\frac{1}{P_r}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2} \quad (50)$$

となる。上式を (30) 式の u_1 の場合と同様な方法を用いて解くと，第1近似として温度変動は

$$\theta_1=H(\eta)\exp(\alpha_e\eta+\cdots\cdots)+\cdots\cdots$$

ただし (51)

$$H=-iP_r\frac{\beta\delta^2}{\alpha_e^2}pF'$$

と温度の定常成分を含んだ形で得られる。以上，得られた速度および温度変動に対する解を用いると，温度の定常成分に対する方程式 (13) 式は (21) 式を用いて

$$\frac{1}{P_r}F''+\delta\delta' fF'=$$
$$\frac{\delta^2}{2}\boldsymbol{R}\left\{-i\beta\left[(\alpha_e+\alpha_e^*)pH^*+\frac{d}{d\eta}(pH^*)\right]\right\} \quad (52)$$

と書き換えられる。この式は (51) 式および α_e に対する条件を用いると

$$\frac{1}{P_r}F''+\delta\delta' fF'=\frac{P_r}{2}\boldsymbol{R}\left(\frac{\beta\delta^2}{\alpha_e}\right)^2\left\{\frac{d}{d\eta}(pp^*F')\right\} \quad (53)$$

となる。そこで速度の場合と同様に，定数 c_{3T} を次のように定める。

$$c_{3T}\{1+\Gamma_T\}=-2\boldsymbol{R}\left[\frac{1}{P_r}\left(\frac{\alpha_e}{\beta\delta^2}\right)^2\delta\delta' fF'\right] \quad (54)$$

ただし (36) 式の場合と同様に Γ_T は η 等の関数であり η 等の変数に対する偏差が最小になるようにしたものとする。すると (53) 式は

$$F'=\frac{c_{4T}-c_{3T}\eta b_T}{c_1\eta+c_2/P_r^2} \quad (55)$$

ただし

$$b_T=1+\frac{1}{\eta}\int_1^\eta\Gamma_T d\eta$$

となる。ここで c_{4T} は積分定数であって速度のときと同様に，一様流中または平板間の中心で定常成分に対する温度勾配 $(d\theta_0/d\eta)_{\eta=1}=0$ という条件を用いると $c_{4T}=c_{3T}$ と定めることができる。また壁面より少し離れた所より上では $c_1\eta\gg c_2, c_2/P_r^2$ となるので，(37), (55) 式より

$$\frac{F'}{f''}=\frac{c_{3T}}{c_3}\frac{1-\eta b_T}{1-\eta b}\approx\frac{c_{3T}}{c_3} \quad (56)$$

となる。ここで定常成分に対する速度や温度分布として (40) 式の形を取るとすれば，平板上の流れに対する方が，平行平板間の流れに対するよりも F'/f'' の値は η にほぼ関係なく一定値となる。いずれにしても本報告で考えている流れに対しては，$\eta\approx\eta_0\sim 1$ の所では F'/f'' の値はほぼ一定となり，レイノルズの相似則がほぼ成立している。また以上の相似則は温度のみならず，基礎方程式が同様の形をしている物質伝達の場合にもそのまま成立することは明らかである。さらに (34) 式や (53) 式で明らかであるように，このように小さな往復運動が幾重にも積み重なった場においては，全体的に見れば，熱伝導方程式と類似の方程式が導かれることは非常に興味あることである。

5. 結　論

非圧縮な一様流中に，流れと平行に置かれた平板，または流れに対して対称に置かれた2枚の平板の間の充分に発達した流れに対して考察を行った。その際，

平板の壁面には非定常的な微小な吸込みと吹出しが均質に分布し，それらの量は壁面を2次元的に波状に変動し，かつ実質的な吸込みや吹出し量は零である。このような場合の層流に対して成立する基礎式を導き，変動の流れ方向の伝播速度が一様流速に近い場合に対してこの基礎式の近似解を求めた。その結果，変動の大きさが小さなものであっても，時間および局所的な場所に関して平均された定常成分に与える変動の影響はある条件のときには大きなものであり，その速度分布は変動の無い場合と大きく異なることが明らかになった。また熱輸送に関しては，レイノルズの相似則がだいたい成立していることが示された。

参考文献

1) Coles D.: J. Fluid Mech. 1, 191

2) 徳田 仁: 機械学会論文集投稿中