船舶技術研究所報告　第11巻　第2号　研究報告（昭和49年3月）

揚力面の翼端条件と数値解法

花　岡　達　郎*

Tip Condition and Numerical Method Concerning Lifting-Surface Theory

By
Tatsuro HANAOKA

Abstract

P.F. Jordan[1] described the nature of the upwash singularity occuring at a parabolic wing tip in the linearized formulation of the lifting-surface problem. In this paper a method is developed for obtaining a numerical solution fulfilling the condition "tip-upwash finite".

ま え が き

現在の揚力面の数値解法で放物型翼端をもつ翼を計算した場合，翼端近傍で解が確定しないはずである。それにもかかわらず，このことが特に問題として取り上げられないのは，実用計算の標点数の範囲では外見上確定解と思われるものが求められ，特に不都合な事態に遭遇しないためである。しかしプロペラのキャビテーションとかダクテッド・プロペラの問題のように翼端近傍の流場をやや詳細に知りたいものに対しては，現在の計算法には難点があるといわざるを得ない。

数値解法として，確定した解を得たいという目的に対しては，二つの方法を考えることができる。その一つは翼幅方向の圧力分布関数 $B^{(N)}(\eta)$((3・1) 参照) が翼端で無限大になると仮定する。他の一つは $B^{(N)}(\eta)$ が翼端で有限でかつ吹下しも有限とする。翼端で $B^{(N)}(\eta)$ が0でなくても，有限ならば，圧力は0になる。Kinner の円形翼の解析解[2]より類推すると，前者は単に確定した解を得るための手段に過ぎず，後者が妥当な方法ということになる。

円形翼の解析的研究は Kinner 以後二，三の例はあるが[3),4]，彼の解と異なるものは見出されていない。

最近 Jordan[1] は放物型翼端近傍の解を再検討するため，Kinner の理論を研究し，翼端近傍で圧力分布と吹上げの素解に特異性の現れること，およびその処理法を示した。吹上げの特異性とその処理法については Kinner の論文の中にも記載されているが，ただ彼はそれに特別の関心をもたなかったようである。Jordan がこの問題を取り上げたのは有意義なことであるが，数値解法に対する具体的応用法は述べていない。

もともと解析的解法と数値解法の間に断層のあるのはあたりまえのことである。しかし，例えば Kutta の流出条件が2次元流の解析解を利用することで3次元流に導入されているように，両者の理論的連係はなるべく濃い方がよい。このように考えて，前記の吹上げの処理法を工夫したのが本論文に述べる数値解法である。

ここで取り扱うのは前後対称の平面形で放物型翼端をもつ定常揚力面の場合であるが，その解法は非定常翼，プロペラの場合に拡張して利用することができる。揚力面は x 軸の負の方向に一定速度 V で直進しているものとし，揚力の働く方向を z 軸の正の方向とする。

記　号

x, y, z	任意点の座標
x', y', z'	特異点の座標
ρ	流体密度
Π	揚力分布密度（圧力分布）
$\gamma=\Pi/(\rho V)$	
w	翼面上の吹上げ速度
V	翼の前進速度
b	半翼幅

* 運動性能部　原稿受付：昭和48年12月3日

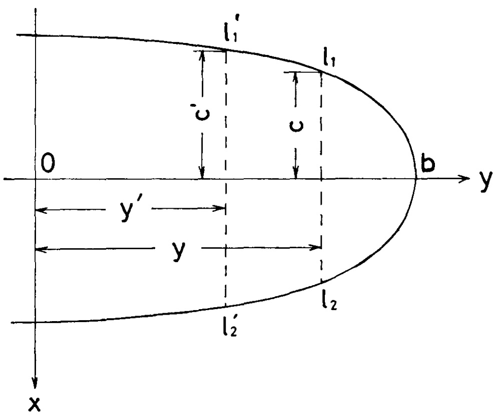

図-1

l_1, l_2　　y 位置の前後縁の x 座標
l_1', l_2'　　y' 位置の前後縁の x 座標
$c=(l_2-l_1)/2$,　$c'=(l_2'-l_1')/2$
$\xi=x/c$,　$\xi'=x'/c'$
$\beta=c/c'$,　$\lambda=b/c'$
$\eta=y/b$,　$\eta'=y'/b$
$Y=\lambda|\eta-\eta'|$

1. Jordan の問題

Jordan[1] は放物型翼端をもつ翼について数値計算を行う場合，圧力分布および吹上げに対する在来の考え方には難点があることを指摘した。それをここで"Jordan の問題"と呼ぶことにし，少し説明を加えておく。

翼の平均矢高面の座標をとし $\hat{z}$，また翼表面の吹上げを w とすると，翼面上の境界条件は

$$w(x,\ y)=V\frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \qquad (1\cdot1)$$

である。w の表示式を速度ポテンシャルから求めると

$$-w(x,\ y)=-\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma}{\lambda(\eta-\eta')^2}\times\left\{\frac{\beta\xi-\xi'}{\sqrt{(\beta\xi-\xi')^2+\lambda^2(\eta-\eta')^2}}+1\right\}d\xi' d\eta' \qquad (1\cdot2)$$

である。

翼の形状を与えて，翼表面の揚力分布密度（圧力分布ともいう）を求めたいときは，(1·2) を γ に関する積分方程式とみなしてそれを解かねばならない。これが揚力面理論の中心問題となっている。一般の平面形の翼については解析解が知られていないので，(1·2) を数値的に解く方法が行われている。精度よい解を得るために γ の解の関数形をあらかじめ仮定しておいて，(1·2) よりそれの係数を求めるようにする。その γ の関数形を試験関数という。試験関数として現在一般に用いられる形は，翼弦方向には Ackermann-Birnbaum 級数[5),注)]を，また翼幅方向には揚力線理論の Prandtl の試験関数[6)]を利用したもので

$$\frac{\gamma}{V}=a_0(\eta)\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}+a_1(\eta)\sqrt{1-\xi^2}+a_2(\eta)\xi\sqrt{1-\xi^2}+a_3(\eta)\xi^2\sqrt{1-\xi^2}+\cdots\cdots \qquad (1\cdot3)$$

$$a_n(\eta)=\sqrt{1-\eta^2}\sum_{r=0}^{\infty}s_{nr}\eta^r \qquad (1\cdot4)$$

である。この式は理論的根拠が薄弱であるため，角型翼端，補助翼端のように翼形状の不連続部分の圧力分布について研究された例がある[7),8)]。

Jordan の研究は放物型翼端について同様の問題を取り上げたものである。その中で彼はまず $a_n(\eta)$ に相当する素解として $\sqrt{1-\eta^2}\ln\sqrt{1-\eta^2}$ の形のものを導いた。数値解法の場合には，特にこの形の試験関数を取り上げる必要はなく，それらは (1·4) の中に含まれているものと理解して差し支えない。彼の解析の中で，数値解法にとって重要なものは，圧力分布の素解に対応する吹上げに特曲性の現れること，それを消し去る方法等を示した部分である。しかし，そこでは概観的に解の形を示すだけにとどまっている。

次節以下は Jordan の問題を数値解法で解決しようとすると，どうなるかということを述べたものである。

2. 連立積分方程式

揚力面の積分方程式を数値的に解く方法は多数あるが，ここでは筆者が以前提案した2次元の積分方程式を1次元の連立積分方程式に変換して計算する方法[9)]を採用する。この方法によると，連立積分方程式の核関数が完全楕円積分という性質のよく知られた関数の和で表されるので，解析的な運算に好都合なことが多い。

連立積分方程式は (1·2) の両辺を ξ について Taylor 展開したものの ξ の同次の項の係数関数を等置することで得られる。すなわち

注）これは一般に Birnbaum 級数と呼ばれているが，当時の Göttingen 学派では Ackermann の名を併記するのが慣例であった。その由来は Birnbaum の原論文に記載されている。

$$
\left.\begin{aligned}
-w^{(0)}(0,\ \eta)&=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma\lambda}{Y^2}\left\{\frac{\xi'}{\sqrt{Y^2+\xi'^2}}-1\right\}d\xi'd\eta'\\
-w^{(1)}(0,\ \eta)&=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma\lambda\beta}{(Y^2+\xi'^2)^{3/2}}d\xi'd\eta'\\
&=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\gamma\lambda\beta\frac{\partial}{\partial\xi'}\left(\frac{\xi'}{Y^2\sqrt{Y^2+\xi'^2}}\right)d\xi'd\eta'\\
-w^{(2)}(0,\ \eta)&=\frac{3}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma\lambda\beta^2\xi'}{(Y^2+\xi'^2)^{5/2}}d\xi'd\eta'\\
&=-\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\gamma\lambda\beta^2\frac{\partial^2}{\partial\xi'^2}\left(\frac{\xi'}{Y^2\sqrt{Y^2+\xi'^2}}\right)d\xi'd\eta'\\
-w^{(3)}(0,\ \eta)&=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\gamma\lambda\beta^3\left\{\frac{12}{(Y^2+\xi'^2)^{5/2}}-\frac{15Y^2}{(Y^2+\xi'^2)^{7/2}}\right\}d\xi'd\eta'\\
&=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\gamma\lambda\beta^3\frac{\partial^3}{\partial\xi'^3}\left(\frac{\xi'}{Y^2\sqrt{Y^2+\xi'^2}}\right)d\xi'd\eta'\\
-w^{(4)}(0,\ \eta)&=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\gamma\lambda\beta^4\left\{\frac{60\xi'}{(Y^2+\xi'^2)^{7/2}}-\frac{105Y^2\xi'}{(Y^2+\xi'^2)^{9/2}}\right\}d\xi'd\eta'\\
&=-\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\gamma\lambda\beta^4\frac{\partial^4}{\partial\xi'^4}\left(\frac{\xi'}{Y^2\sqrt{Y^2+\xi'^2}}\right)d\xi'd\eta'
\end{aligned}\right\}\quad(2\cdot1)
$$

等である。ただし

$$w^{(0)}(\xi,\ \eta)\equiv w(\xi,\ \eta),\quad w^{(k)}(\xi,\ \eta)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^k w(\xi,\ \eta)\qquad(2\cdot2)$$

とする。

3. 試験関数

直交座標系を用いる限り，試験関数は本質的には (1·3) と大同小異の形になる。しかし確定解が得られるように計算法を工夫していくと，試験関数に附与する条件を在来のものより多少変更する必要が生じてくる。また翼弦方向の分布形を次のように組みかえると，運算上好都合なことが多い。それで試験関数を

$$\frac{\gamma}{V}=A^{(0)}(\eta)\bar{\lambda}_0(\xi)+A^{(1)}(\eta)\bar{\lambda}_1(\xi)+A^{(2)}(\eta)\bar{\lambda}_2(\xi)+\cdots\cdots$$
$$+B^{(0)}(\eta)\hat{\lambda}_0(\xi)+B^{(1)}(\eta)\hat{\lambda}_1(\xi)+B^{(2)}(\eta)\hat{\lambda}_2(\xi)+\cdots\cdots\qquad(3\cdot1)$$

ただし

$$\bar{\lambda}_N(\xi)=(1-\xi^2)^{N-1/2},\quad \hat{\lambda}_N(\xi)=\xi(1-\xi^2)^{N-1/2},$$
$$(N=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)\qquad(3\cdot2)$$

と書く。

各断面で Kutta の流出条件を満たすように

$$A^{(0)}(\eta)=-B^{(0)}(\eta),\quad -1<\eta<1\qquad(3\cdot3)$$

とする。普通，この条件式は翼端を含めて成り立つものとしているのを本文では翼端を除外した。(3·3) は 2 次元流から類推した断面内の必要条件であるから，翼端は除外しても差し支えない。

また $A^{(N)}(\eta),\ B^{(N)}(\eta)$ の $\eta=\pm1$ における状態はここでは与えてないが，後述の解析の過程で自づから定まる。

$$\lambda_N^{(1)}=\frac{d\lambda_N}{d\xi}\qquad(3\cdot4)$$

と書くことにすると

$$
\left.\begin{aligned}
&\bar{\lambda}_1^{(1)}=-\hat{\lambda}_0, && \hat{\lambda}_1^{(1)}=2\bar{\lambda}_1-\bar{\lambda}_0,\\
&\bar{\lambda}_2^{(1)}=-3\hat{\lambda}_1, && \hat{\lambda}_2^{(1)}=4\bar{\lambda}_2-3\bar{\lambda}_1,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\bar{\lambda}_N^{(1)}=-(2N-1)\hat{\lambda}_{N-1}, && \hat{\lambda}_N^{(1)}=2N\bar{\lambda}_N\\
& && \qquad-(2N-1)\bar{\lambda}_{N-1},
\end{aligned}\right\}\qquad(3\cdot5)
$$

の性質がある。すなわち $\bar{\lambda}_N,\ \hat{\lambda}_N$ は N 回微分したとき初めて $\hat{\lambda}_0$ または $\bar{\lambda}_0$ が現れる。したがって，(3·1) を (2·1) に代入したとき，$\bar{\lambda}_N,\ \hat{\lambda}_N$ を含む項は ξ' について N 回まで部分積分を行うことができる。高次導関数で表される核関数は計算が繁雑であるから，可能な限り部分積分は多く行っておく方があとで具合いがよい。

4. 核関数

(3·1) を (2·1) に代入し，試験関数の配列にしたがって整理すると，

$$-\frac{w^{(M)}}{V}=\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\int_{-1}^{1}A^{(N)}(\eta')J^{(MN)}(\eta,\ \eta')d\eta'$$
$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\int_{-1}^{1}B^{(N)}(\eta')^{(MN)}(\eta,\ \eta')d\eta'\qquad(4\cdot1)$$

と書かれる。断面形に不連続点のない普通の翼では，$R=2$ の程度にとれば精度としては充分である。この式の核関数 $J^{(MN)}$, $K^{(MN)}$ を

$$g_s^{(n)}(Y)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^{2n}}{\sqrt{1-\xi^2}(Y^2+\xi^2)^{s/2}}d\xi \qquad (4\cdot2)$$

で定義される関数を用いて表すと

$$\left.\begin{aligned}
&J^{(00)}=-\frac{\pi}{2}\frac{\lambda}{Y^2},\quad J^{(01)}=-\frac{\pi}{4}\frac{\lambda}{Y^2},\\
&J^{(02)}=-\frac{3\pi}{16}\frac{\lambda}{Y^2}\\
&J^{(MN)}=0,\quad M=2n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)\\
&J^{(10)}=\lambda\beta g_3^{(0)},\quad J^{(11)}=\lambda\beta\{g_3^{(0)}-g_3^{(1)}\}\\
&J^{(12)}=\lambda\beta\{g_3^{(0)}-2g_3^{(1)}+g_3^{(2)}\}\\
&J^{(30)}=\lambda\beta^3\{12g_5^{(0)}-15Y^2g_7^{(0)}\}\\
&J^{(31)}=\lambda\beta^3[12\{g_5^{(0)}-g_5^{(1)}\}\\
&\qquad-15Y^2\{g_7^{(0)}-g_7^{(1)}\}]\\
&J^{(32)}=\lambda\beta^3[12\{g_5^{(0)}-2g_5^{(1)}+g_5^{(2)}\}\\
&\qquad-15Y^2\{g_7^{(0)}-2g_7^{(1)}+g_7^{(2)}\}]
\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot3)$$

$$\left.\begin{aligned}
&K^{(MN)}=0,\quad M=2n+1\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)\\
&K^{(00)}=\frac{\lambda}{Y^2}g_1^{(1)},\quad K^{(01)}\frac{\lambda}{Y^2}\{g_1^{(1)}-g_1^{(2)}\}\\
&K^{(02)}=\frac{\lambda}{Y^2}\{g_1^{(1)}-2g_1^{(2)}+g_1^{(3)}\}\\
&K^{(20)}=3\lambda\beta^2g_5^{(1)},\quad K^{(21)}=3\lambda\beta^2\{g_5^{(1)}-g_5^{(2)}\}\\
&K^{(22)}=3\lambda\beta^2\{g_5^{(1)}-2g_5^{(2)}+g_5^{(3)}\}\\
&K^{(40)}=\lambda\beta^4\{60g_7^{(1)}-105Y^2g_9^{(1)}\}\\
&K^{(41)}=\lambda\beta^4[60\{g_7^{(1)}-g_7^{(2)}\}\\
&\qquad-105Y^2\{g_9^{(1)}-g_9^{(2)}\}]\\
&K^{(42)}=\lambda\beta^4[60\{g_7^{(1)}-2g_7^{(2)}+g_7^{(3)}\}\\
&\qquad-105Y^2\{g_9^{(1)}-2g_9^{(2)}+g_9^{(3)}\}]
\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot4)$$

である。

ここで部分積分の行えるものはそれを繰り返し行い，附録Iに示す $g_s^{(n)}$ の循環式を利用して整理すると

$$\left.\begin{aligned}
&J^{(11)}=\frac{\lambda\beta}{Y^2}g_1^{(1)},\quad J^{(12)}=\frac{\lambda\beta}{Y^2}\{-Y^2g_1^{(0)}\\
&\qquad+(1+2Y^2)g_1^{(1)}\}\\
&J^{(31)}=-3\lambda\beta^3g_5^{(1)},\ J^{(32)}=\lambda\beta^3\{-3g_3^{(0)}+6g_3^{(1)}\}\\
&K^{(02)}=\frac{\lambda}{15Y^2}\{-Y^2(6+4Y^2)g_1^{(0)}\\
&\qquad+(3+13Y^2+8Y^4)g_1^{(1)}\}\\
&K^{(21)}=\lambda\beta^2\{g_3^{(0)}-2g_3^{(1)}\}\\
&K^{(22)}=\frac{\lambda\beta^2}{Y^2}\{-4Y^2g_1^{(0)}+(1+8Y^2)g_1^{(1)}\}\\
&K^{(41)}=\lambda\beta^4\{12g_5^{(0)}-24g_5^{(1)}\\
&\qquad-15Y^2g_7^{(0)}+30Y^2g_7^{(1)}\}\\
&K^{(42)}=\lambda\beta^4\{9g_5^{(1)}-12g_3^{(0)}+24g_3^{(1)}\}
\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot5)$$

となる。

核関数 $J^{(MN)}$, $K^{(MN)}$ の特異性を調べたり，また数値計算を実行するには，それらを Legendre-Jacobi の第1種および第2種の完全楕円積分 $K(k)$, $E(k)$ で表しておくと好都合である。それには附録Iに示す恒等式を利用するとよい。途中の運算を省略して結果だけ記載すると

$$\left.\begin{aligned}
&J^{(10)}=\frac{\lambda\beta E(k)}{Y^2\sqrt{1+Y^2}}\\
&J^{(11)}=\frac{\lambda\beta}{Y^2\sqrt{1+Y^2}}\{(1+Y^2)E(k)-Y^2K(k)\}\\
&J^{(12)}=\frac{\lambda\beta\sqrt{1+Y^2}}{Y^2}\{(1+2Y^2)E(k)-2Y^2K(k)\}\\
&J^{(30)}=\frac{\lambda\beta^3}{Y^2(1+Y^2)^{5/2}}\{(1-7Y^2)E(k)+4Y^2K(k)\}\\
&J^{(31)}=-\frac{\lambda\beta^3}{Y^2(1+Y^2)^{3/2}}\{(1-Y^2)E(k)+Y^2K(k)\}\\
&J^{(32)}=-\frac{3\lambda\beta^3}{Y^2\sqrt{1+Y^2}}\{(1+2Y^2)E(k)\\
&\qquad-2Y^2K(k)\}
\end{aligned}\right\}\qquad(4\cdot6)$$

$$\left.\begin{aligned}
&K^{(00)}=\frac{\lambda}{Y^2\sqrt{1+Y^2}}\{(1+Y^2)E(k)-Y^2K(k)\}\\
&K^{(01)}=\frac{\lambda\sqrt{1+Y^2}}{3Y^2}\{(1+2Y^2)E(k)-2Y^2K(k)\}\\
&K^{(02)}=\frac{\lambda\sqrt{1+Y^2}}{15Y^2}\{(3+13Y^2+8Y^4)E(k)\\
&\qquad-Y^2(9+8Y^2)K(k)\}\\
&K^{(20)}=\frac{\lambda\beta^2}{Y^2(1+Y^2)^{3/2}}\{(1-Y^2)E(k)+Y^2K(k)\}\\
&K^{(21)}=\frac{\lambda\beta^2}{Y^2\sqrt{1+Y^2}}\{(1+2Y^2)E(k)-2Y^2K(k)\}\\
&K^{(22)}=\frac{\lambda\beta^2}{Y^2\sqrt{1+Y^2}}\{(1+8Y^2)(1+Y^2)E(k)\\
&\qquad-Y^2(5+8Y^2)K(k)\}\\
&K^{(40)}=\frac{3\lambda\beta^4}{Y^2(1+Y^2)^{7/2}}\{(1-14Y^2+Y^4)E(k)\\
&\qquad+Y^2(7-Y^2)K(k)\}\\
&K^{(41)}=\frac{\lambda\beta^4}{Y^2(1+Y^2)^{7/2}}\{(5+2Y^2)(1+Y^2)E(k)\\
&\qquad-2Y^2(3+Y^2)K(k)\}
\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}K^{(42)}=&-\frac{3\lambda\beta^4}{Y^2(1+Y^2)^{3/2}}\{(3+13Y^2+8Y^4)E(k)\\&-Y^2(9+8Y^2)K(k)\}\end{aligned}\right\}\tag{4·7}$$

である。ただし

$$k=1/\sqrt{1+Y^2}\tag{4·8}$$

とする。

後述する翼端条件を少しでも精度よく調べるためには，N のさらに大きな値に対する $K^{(MN)}$ の関数形を求めておく必要がある。$N=3$とすると

$$\left.\begin{aligned}K^{(03)}=&\frac{\lambda}{35Y^2\sqrt{1+Y^2}}\\&\times\{-(55+53Y^2-22Y^4-16Y^6)\\&\times(1+Y^2)E(k)\\&+Y^2(30+31Y^2-30Y^4-16Y^6)K(k)\}\\K^{(23)}=&\frac{\lambda\beta^2\sqrt{1+Y^2}}{Y^2}\{-(23+8Y^2-16Y^4)E(k)\\&+16Y^2(1-Y^2)K(k)\}\\K^{(43)}=&-\frac{120\lambda\beta^4}{Y^2\sqrt{1+Y^2}}\{(10+4Y^2+2Y^4)E(k)\\&-Y^2(3+2Y^2)K(k)\}\end{aligned}\right\}\tag{4·9}$$

である。

$$k'^2=1-k^2$$

と書いたとき，$K(k)$, $E(k)$ の $k'=0$ の近傍における展開式は

$$K(k)=\Lambda+\frac{\Lambda-1}{4}k'^2+\frac{9}{64}\left(\Lambda-\frac{7}{6}\right)k'^4+\cdots\cdots$$

$$E(k)=1+\frac{1}{2}\left(\Lambda-\frac{1}{2}\right)k'^2+\frac{3}{16}\left(\Lambda-\frac{13}{12}\right)k'^4+\cdots\cdots$$

である[10]。ただし $\Lambda=\ln 4/k'$ とする。$k'^2=Y^2/(1+Y^2)$ の関係および上式を利用すると，$Y=0$ における $K(k)$, $E(k)/Y^2$ の特異性は

$$\left.\begin{aligned}\frac{E(k)}{Y^2}&\simeq\frac{1}{Y^2}-\frac{1}{2}\ln|Y|\\K(k)&\simeq-\ln|Y|\end{aligned}\right\}\tag{4·10}$$

であることがわかる。これから核関数の $Y=0$ における特異性を導くことができる。すなわち

$$\left.\begin{aligned}&J^{(00)}=-\frac{\pi}{2}\frac{\lambda}{Y^2},\quad J^{(01)}=-\frac{\pi}{4}\frac{\lambda}{Y^2},\\&J^{(02)}=-\frac{3\pi}{16}\frac{\lambda}{Y^2}\\&J^{(10)}\simeq\lambda\beta\left\{\frac{1}{Y^2}-\frac{1}{2}\ln|Y|\right\}\\&J^{(11)}\simeq\lambda\beta\left\{\frac{1}{Y^2}+\frac{1}{2}\ln|Y|\right\}\\&J^{(12)}\simeq\lambda\beta\left\{\frac{1}{Y^2}+\frac{3}{2}\ln|Y|\right\}\\&J^{(30)}\simeq\lambda\beta^3\left\{\frac{1}{Y^2}-\frac{9}{2}\ln|Y|\right\}\\&J^{(31)}\simeq-\lambda\beta^3\left\{\frac{1}{Y^2}-\frac{3}{2}\ln|Y|\right\}\\&J^{(32)}\simeq-3\lambda\beta^3\left\{\frac{1}{Y^2}+\frac{3}{2}\ln|Y|\right\}\end{aligned}\right\}\tag{4·11}$$

$$\left.\begin{aligned}&K^{(00)}\simeq\lambda\left\{\frac{1}{Y^2}+\frac{1}{2}\ln|Y|\right\}\\&K^{(01)}\simeq\frac{\lambda}{3}\left\{\frac{1}{Y^2}+\frac{3}{2}\ln|Y|\right\}\\&K^{(02)}\simeq\frac{\lambda}{5}\left\{\frac{1}{Y^2}+\frac{5}{2}\ln|Y|\right\}\\&K^{(03)}\simeq-\frac{\lambda}{7}\left\{\frac{11}{Y^2}+\frac{1}{2}\ln|Y|\right\}\\&K^{(20)}\simeq\lambda\beta^2\left\{\frac{1}{Y^2}-\frac{3}{2}\ln|Y|\right\}\\&K^{(21)}\simeq\lambda\beta^2\left\{\frac{1}{Y^2}+\frac{3}{2}\ln|Y|\right\}\\&K^{(22)}\simeq\lambda\beta^2\left\{\frac{1}{Y^2}+\frac{9}{2}\ln|Y|\right\}\\&K^{(23)}\simeq-\lambda\beta^2\left\{\frac{23}{Y^2}+\frac{9}{2}\ln|Y|\right\}\\&K^{(40)}\simeq3\lambda\beta^4\left\{\frac{1}{Y^2}-\frac{15}{2}\ln|Y|\right\}\\&K^{(41)}\simeq\lambda\beta^4\left\{\frac{5}{Y^2}+\frac{7}{2}\ln|Y|\right\}\\&K^{(42)}\simeq-9\lambda\beta^4\left\{\frac{1}{Y^2}+\frac{5}{2}\ln|Y|\right\}\\&K^{(43)}\simeq-240\lambda\beta^4\left\{\frac{5}{Y^2}-\ln|Y|\right\}\end{aligned}\right\}\tag{4·12}$$

である。

次に翼端近傍における核関数の状態を調べてみる。$\lim_{\eta'\to\pm1}c'=0$ であるから，$\lim_{\eta'\to\pm1}Y=\infty$ である。(4·3), (4·4) に附録の (I-12) を適用すると，$\eta'=\pm1$ の近傍では

$$\left.\begin{aligned}J^{(MN)}(\eta,\eta')&=j_1^{(MN)}c'+j_2^{(MN)}c'^3+j_3^{(MN)}c'^5+\cdots\cdots\\K^{(MN)}(\eta,\eta')&=k_1^{(MN)}c'^2+k_2^{(MN)}c'^4+k_3^{(MN)}c'^6+\cdots\cdots\end{aligned}\right\}\tag{4·13}$$

のように $J^{(MN)}$ は c' の奇数次，$K^{(MN)}$ は c' の偶数次のべき級数で表される。$c'=0$ の近傍で

$$c'\simeq t\sin\varphi'\tag{4·14}$$

のように表し，t の値は，$t=dc'/d\varphi'|_{\varphi'=0}$ とする。放

物型翼端の平面形の近似式としては実用上これで充分である。ただし，φ' は (5·4) に示す変数である。

いま核関数 $J^{(MN)}$, $K^{(MN)}$ を

$$\left.\begin{aligned} J^{(MN)}(\eta,\eta') &= \frac{\sqrt{1-\eta'^2}}{(\eta-\eta')^2}\bar{J}^{(MN)}(\eta,\eta') \\ K^{(MN)}(\eta,\eta') &= \frac{1-\eta'^2}{(\eta-\eta')^2}\bar{K}^{(MN)}(\eta,\eta') \end{aligned}\right\} \quad (4\cdot15)$$

のように表してみる。(4·11), (4·12), (4·13) を参照すると，$\bar{J}^{(MN)}$, $\bar{K}^{(MN)}$ は η が翼端にあるときを除くと，翼面の全領域で有限，特に翼端では0でない有限確定値をとることがわかる。数値解法においては普通このように核関数の特異性を分離して数値積分を行う。

$c'=0$ のとき

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{J}^{(00)}=\frac{\pi}{2}\frac{t}{b},\quad \bar{J}^{(01)}=-\frac{\pi}{4}\frac{t}{b},\\
&\bar{J}^{(02)}=-\frac{3\pi}{16}\frac{t}{b}\\
&\bar{J}^{(10)}=\frac{\pi}{2}\frac{ct}{b^2}\frac{b_0}{|\eta-\eta'|},\quad \bar{J}^{(11)}=\frac{\pi}{2}\frac{ct}{b^2}\frac{b_0-b_2}{|\eta-\eta'|}\\
&\bar{J}^{(12)}=\frac{\pi}{2}\frac{ct}{b^2}\frac{b_0-2b_2+b_4}{|\eta-\eta'|},\\
&\bar{J}^{(30)}=-\frac{\pi}{2}\frac{c^3t}{b^4}\frac{3b_0}{|\eta-\eta'|^3}\\
&\bar{J}^{(31)}=-\frac{\pi}{2}\frac{c^3t}{b^4}\frac{3(b_0-b_2)}{|\eta-\eta'|^3},\\
&\bar{J}^{(32)}=-\frac{\pi}{2}\frac{c^3t}{b^4}\frac{3(b_0-2b_2+b_4)}{|\eta-\eta'|^3}\\
&\bar{K}^{(00)}=\frac{\pi}{2}\frac{t^2}{b^2}\frac{b_2}{|\eta-\eta'|},\quad \bar{K}^{(01)}=\frac{\pi}{2}\frac{t^2}{b^2}\frac{b_2-b_4}{|\eta-\eta'|}\\
&\bar{K}^{(02)}=\frac{\pi}{2}\frac{t^2}{b^2}\frac{b_2-2b_4+b_6}{|\eta-\eta'|},\\
&\bar{K}^{(20)}=\frac{\pi}{2}\frac{3c^2t^2}{b^4}\frac{b_2}{|\eta-\eta'|^3}\\
&\bar{K}^{(21)}=\frac{\pi}{2}\frac{3c^2t^2}{b^4}\frac{b_2-b_4}{|\eta-\eta'|^3},\\
&\bar{K}^{(22)}=\frac{\pi}{2}\frac{3c^2t^2}{b^4}\frac{b_2-2b_4+b_6}{|\eta-\eta'|^3}\\
&\bar{K}^{(40)}=-\frac{\pi}{2}\frac{c^4t^2}{b^6}\frac{45b_2}{|\eta-\eta'|^5},\\
&\bar{K}^{(41)}=-\frac{\pi}{2}\frac{c^4t^2}{b^6}\frac{45(b_2-b_4)}{|\eta-\eta'|^5}\\
&\bar{K}^{(42)}=-\frac{\pi}{2}\frac{c^4t^2}{b^6}\frac{45(b_2-2b_4+b_6)}{|\eta-\eta'|^5}
\end{aligned}\right\} \quad (4\cdot16)$$

となる。ただし $\eta'=\pm1$, また b_n は附録の (I-13) に示す常数である。

5. 圧力分布の翼端条件と吹上げの特異性

揚力面の数値解法は揚力線の解法を踏襲したもので，特に揚力面の理論解析から演繹された計算技法というほどのものはない。計算結果を見る限り，不都合があまり見当らないためか，計算理論をその根源にさかのぼって検討することはほとんどなかった。

ここでは圧力分布とそれを数値積分して得られる吹上げの，翼端における状態を調査し，数値解法としての問題点を吟味する。

(4·15) の記法を (4·1) に適用すると

$$w_A^{(M)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\int_{-1}^{1}A^{(N)}(\eta')\frac{\sqrt{1-\eta'^2}\bar{J}^{(MN)}(\eta,\eta')}{(\eta-\eta')^2}d\eta' \quad (5\cdot1)$$

$$w_B^{(M)}=\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\int_{-1}^{1}B^{(N)}(\eta')\frac{(1-\eta'^2)\bar{K}^{(MN)}(\eta,\eta')}{(\eta-\eta')^2}d\eta' \quad (5\cdot2)$$

ただし

$$-w^{(M)}/V=w_A^{(M)}+w_B^{(M)} \quad (5\cdot3)$$

と書かれる。

これの変数 η,η' を

$$\eta=\cos\varphi,\quad \eta'=\cos\varphi' \quad (5\cdot4)$$

によって，φ,φ' に変えて数値積分を行う。その場合，最小二乗法による有限 Fourier 級数

$$F(\varphi')=\frac{2}{m+1}\sum_{s=1}^{m}F(\varphi_s)\sum_{r=1}^{m}\sin r\varphi_s\sin r\varphi' \quad (5\cdot5)$$

$$F(\varphi')=\frac{2}{m+1}\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_sF(\varphi_s)\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon_r\cos r\varphi_s\cos r\varphi' \quad (5\cdot6)$$

を利用すると好都合なことが多い。ただし

$$\varphi_s=\frac{s\pi}{m+1},\quad \varepsilon_{s,r}=\begin{pmatrix}1/2, & s,r=0, & m+1\\ 1, & s,r\neq0, & m+1\end{pmatrix} \quad (5\cdot7)$$

とする。

揚力面理論ではこれまで

$$A^{(N)}(\eta=\pm1)=0 \quad (5\cdot8)$$

$$B^{(N)}(\eta=\pm1)=0 \quad (5\cdot9)$$

と仮定しているので，圧力分布の積分に Fourier 級数を利用する場合，例外なく (5·5) が用いられてきた。これによると計算は非常に簡単になる。具体的には (5·1), (5·2) の中の $A^{(N)}(\eta')\sqrt{1-\eta'^2}\bar{J}^{(MN)}(\eta,\eta')$, $B^{(N)}(\eta')(1-\eta'^2)\bar{K}^{(MN)}(\eta,\eta')$ を (5·5)で置きかえ，η' の積分を行うという方法をとる。その結果は

$$-\frac{w^{(M)}(\varphi)}{V}=\sum_{N=0}^{R}\frac{1}{m+1}\sum_{s=1}^{m}\{A^{(N)}(\varphi_s)\sin\varphi_s J^{(MN)}(\varphi,\varphi_s)$$
$$+B^{(N)}(\varphi_s)\sin^2\varphi_s\bar{K}^{(MN)}(\varphi,\varphi_s)\}\sum_{r=1}^{m}\sin r\varphi_s\frac{r\sin r\varphi}{\sin\varphi} \qquad (5\cdot10)$$

である。

$$\varphi=\varphi_\nu=\nu\pi/(m+1) \qquad (5\cdot11)$$

として，r の総和をまとめると

$$-\frac{w^{(M)}(\varphi_\nu)}{V}=\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=1}^{m}\{A^{(N)}(\varphi_s)\sin\varphi_s\bar{J}^{(MN)}(\varphi_\nu,\varphi_s)+B^{(N)}(\varphi_s)\sin^2\varphi_s\bar{K}^{(MN)}(\varphi_\nu,\varphi_s)\}b_{\nu s} \qquad (5\cdot12)$$

と書かれる。ただし

$$\left.\begin{aligned}b_{\nu s}&=\frac{1-(-1)^{s-\nu}}{2(m+1)}\frac{\sin\varphi_s}{(\cos\varphi_\nu-\cos\varphi_s)^2},\quad \nu\neq s\\ b_{\nu\nu}&=-\frac{m+1}{4\sin\varphi_\nu}\end{aligned}\right\} \qquad (5\cdot13)$$

である。

圧力分布 γ を得るためには，(5·12) の連立方程式を $A^{(N)}(\varphi_s)$, $B^{(N)}(\varphi_s)$ について解けばよい。これが従来の解法のあらすじで，(5·8), (5·9) を理論の支柱としていることは容易に理解できるであろう。

次に圧力分布の翼端条件をこれまでより緩和し，仮に

$$A^{(N)}(\eta=\pm1)\neq0 \qquad (5\cdot14)$$
$$B^{(N)}(\eta=\pm1)\neq0 \qquad (5\cdot15)$$

とする。すなわち $A^{(N)}(\eta)$, $B^{(N)}(\eta)$ にはほとんど束縛を与えず，ただ有界と仮定するだけで，数値解法の構成を考えてみる。

まず $w_A{}^{(M)}$ の場合を取り上げる。計算を簡単にするため $A^{(N)}(\varphi')\bar{J}^{(MN)}(\varphi,\varphi')$ を Fourier 級数で置きかえる。(5·6) を用いれば，(5·15) の条件は損われることなく導入される。その結果は

$$\begin{aligned}w_A{}^{(M)}(\varphi)&=\sum_{N=0}^{R}\frac{1}{m+1}\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_s A^{(N)}(\varphi_s)\bar{J}^{(MN)}(\varphi,\varphi_s)\\&\quad\times\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon_r\cos r\varphi_s\frac{1}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{\cos r\varphi'\sin\varphi'}{(\eta-\eta')^2}d\eta'\\&=\sum_{N=0}^{R}\frac{1}{m+1}\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_s A^{(N)}(\varphi_s)\bar{J}^{(MN)}(\varphi,\varphi_s)\\&\quad\times\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{\sin\varphi}\sum_{s=1}^{m+1}\varepsilon_r\cos r\varphi_s\right.\\&\quad\left.\times(r\cos r\varphi\sin\varphi+\sin r\varphi\cos\varphi)\right\}\end{aligned} \qquad (5\cdot16)$$

である。この式の右辺は $0\leq\varphi\leq\pi$ の区間で有限確定値をとるので，(5·10) と本質的な相違はない。すなわち $w_A{}^{(M)}$ に関する限り，(5·10), (5·16) のいずれを用いても結果に大差はないはずである。ただ翼端条件を (5·14) とし，$A^{(N)}(\eta=\pm1)$ の値を求めたいときは，翼端における流れの方向，曲り等を詳細に指定する必要が生じてくる。境界条件の実際として，これには無理があるので，$A^{(N)}(\eta)$ については，(5·8)の条件を採用し，(5·10) によって吹上げを計算するのが合理的であることは疑いない。

次は $w_B{}^{(M)}$ の場合である。$B^{(N)}(\varphi')\bar{K}^{(MN)}(\varphi,\varphi')$ を (5·6) で置きかえる。φ' で積分した結果は

$$\begin{aligned}w_B{}^{(M)}(\varphi)&=\sum_{N=0}^{R}\frac{1}{\pi(m+1)}\\&\quad\times\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_s B^{(N)}(\varphi_s)\bar{K}^{(MN)}(\varphi,\varphi_s)\\&\quad\times\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon_r\cos r\varphi_s T_r\end{aligned} \qquad (5\cdot17)$$

である。附録II に示すように T_r には $\ln(1+\eta)/(1-\eta)$ が含まれるので，吹上げの素解 $w_B{}^{(M)}$ が $\eta=\pm1$ に対数特異点をもつ関数で表されることになる。すなわち $B^{(N)}(\eta)$ が翼端で 0 でないとすると，それに対応する吹上げの素解に特異性が現れる。したがって，(5·10)によって解いた場合，$B^{(N)}(\eta)$ が $\eta=\pm1$ の近傍まで 0 でないときは，精度を上げるため，標点の数を増すにしたがって解が発散の方向に向かうことがあるはずである。小山の計算結果[11]はこの一例と考えられる。

(5·17) による吹上げの表示式は翼端に特異性をもち，しかもそれが $\ln(1+\eta)/(1-\eta)$ であるという点では Kinner の解析解と相似であるから，$w_B{}^{(M)}$ の計算には，(5·10) を廃して (5·17) を採用し，その特異性を消去するのに Kinner-Jordan 理論の方法を踏襲するという手段をとるのが妥当と思われる。

結局，計算理論として確定解を得るための $A^{(N)}(\eta)$,

$B^{(N)}(\eta)$ の翼端条件は (5·8), (5·15) が適当ということになる。(5·15) のように $B^{(N)}$ が 0 でなくても，これに $\hat{\lambda}_N$ を乗じた圧力は翼端で 0 になるから，この理論の場合も Kinner の解と同様に $\gamma(\eta=\pm 1)=0$ を条件としていることになる。従来の計算法における翼端条件 (1·4) は束縛が強よ過ぎたといえる。

(5·8), (5·15) を採用すると，翼端では Kutta の流出条件 (3·3) が満たされない。しかし，もともとそれは 2 次元流に関するものであるから，流場を幾何学的に見ると，翼端では Kutta の条件の代わりに次節に述べる吹上げ有限の条件をとる方がむしろ自然である。(3·3) で翼端をその適用範囲から除外したのはこのためである。

6. 吹上げの翼端条件

これまでの計算結果を利用すれば，積分方程式を連立 1 次方程式で表すことができる。$A^{(N)}(\varphi_s)$ については (5·12) を採り，$B^{(N)}(\varphi_s)$ については (5·17) を用いることにすると

$$-\frac{w^{(M)}(\varphi_\nu)}{V}=\sum_{N=0}^{R}\times\sum_{s=1}^{m}A^{(N)}(\varphi_s)\sin\varphi_\nu\bar{J}^{(MN)}(\varphi_\nu,\varphi_s)b_{\nu s}+\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=0}^{m+1}B^{(N)}(\varphi_s)\bar{K}^{(MN)}(\varphi_\nu,\varphi_s)D_{\nu s},\quad 1\leq\nu\leq m \tag{6·1}$$

$$A^{(0)}(\varphi_s)=-B^{(0)}(\varphi_s),\quad s\neq 0,\ m+1 \tag{6·2}$$

である。ただし

$$D_{\nu s}=\frac{\varepsilon_s}{\pi(m+1)}\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon_r\cos r\varphi_s T_r(\varphi_\nu) \tag{6·3}$$

とする。

$D_{\nu s}$ は，$\varphi_\nu=0,\pi$ に特異点をもつ関数 $T_r(\varphi_\nu)$ を係数にもつので，$\nu=0,m+1$ で ∞ になる。しかし $\nu=0$, $m+1$ のときでも，(6·1) の方程式の中の特異性が互いに消し合うように計算を工夫すれば，吹上げとして有限な値を導くことができる。これを翼端における吹上げ有限の条件と呼ぶことにする。

翼端近傍の吹上げは，(5·17) より

$$\lim_{\varphi\to 0}w_B^{(M)}(\varphi)=\sum_{N=0}^{R}\frac{1}{\pi(m+1)}\times\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_s B^{(N)}(\varphi_s)\bar{K}^{(MN)}(\varphi,\varphi_s)\times\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon_r\cos r\varphi_s\lim_{\eta\to 1}T_r \tag{6·4}$$

である。$w_B^{(M)}$ の中の $\ln(1+\eta)/(1-\eta)$ を係数にもつ項を $w_B^{*(M)}$ で表すことにする。

附録 III を参照すると，$\eta=1$ の近傍では

$$\left.\begin{aligned}&T_r\simeq 2\ln(1+\eta)/(1-\eta)+U_r\\&U_r=-8\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2(r-1)}\{1-(-1)^{r-1}\}\right]\\&\qquad-\frac{r+2}{r}\{1-(-1)^r\}-\frac{r^2-2}{r^2-1}\{1-(-1)^{r-1}\},\\&r\geq 2\\&U_0=-4,\quad U_1=-6\end{aligned}\right\} \tag{6·5}$$

であるから，翼端近傍では

$$\lim_{\varphi\to 0}w_B^{*(M)}(\varphi)=\lim_{\varphi\to 0}\sum_{N=0}^{R}\frac{1}{\pi(m+1)}\times\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_s B^{(N)}(\varphi_s)\bar{K}^{(MN)}(\varphi,\varphi_s)\times\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon_r\cos r\varphi_s\cdot 2\ln\frac{1+\eta}{1-\eta} \tag{6·6}$$

と書かれる。この式の Fourier 級数の部分は (5·6) で $\varphi'=0$ としたものに等しいから

$$\lim_{\varphi\to 0}w_B^{*(M)}(\varphi)=\lim_{\varphi\to 0}\frac{1}{\pi}\times\sum_{N=0}^{R}B^{(N)}(0)\bar{K}^{(MN)}(\varphi,0)\ln\frac{1+\eta}{1-\eta} \tag{6·7}$$

となる。

$$\lim_{\varphi'\to 0}\frac{1-\eta'}{c'}=\lim_{\varphi'\to 0}\frac{1-\cos\varphi'}{t\sin\varphi'}=0$$

であるから，(6·7) の $\bar{K}^{(MN)}$ は $Y=0$ のときの値をとるのが妥当である。

$$C_{MN}=\left[\frac{Y^2}{\lambda}K^{(MN)}(\eta,\eta')\right]_{Y=0} \tag{6·8}$$

と書くと，(6·7) は

$$\lim_{\varphi\to 0}w_B^{*(M)}(\varphi)=\lim_{\varphi\to 0}\sum_{N=0}^{R}B^{(N)}(0)C_{MN}\times\frac{t}{b\sin\varphi}\ln\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} \tag{6·9}$$

となる。C_{MN} は (4·12) より求めることができる。

(6·4) の右辺が有限であるためには，(6·9) の右辺が 0，すなわち

$$\left.\begin{array}{l} C_{00}B^{(0)}+C_{01}B^{(1)}+C_{02}B^{(2)}+\cdots\cdots=0 \\ C_{20}B^{(0)}+C_{21}B^{(1)}+C_{22}B^{(2)}+\cdots\cdots=0 \\ C_{40}B^{(0)}+C_{41}B^{(1)}+C_{42}B^{(2)}+\cdots\cdots=0 \end{array}\right\} \quad (6\cdot10)$$

ならばよい。これが吹上げ有限の条件式である。ただし上式の $B^{(N)}$ は $B^{(N)}(0)$ を意味する。

再び (6・4) にもどって，翼端近傍の吹上げを考える。(6・10) が満足されるならば，T_r の中の $\ln(1+\eta)/(1-\eta)$ を係数にもつ吹上げは消えるので

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi\to0} w_B{}^{(N)}(\varphi)=&\sum_{N=0}^{R}\frac{1}{\pi(m+1)} \\ &\times\sum_{s=1}^{m+1}\varepsilon_s B^{(N)}(\varphi_s)\bar{K}^{(MN)}(0,\varphi_s) \\ &\times\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon_r\cos r\varphi_s\cdot U_r \\ &+\lim_{\varphi\to0}\frac{1}{2\pi(m+1)}\sum_{N=0}^{R}B^{(N)}(0)C_{MN} \\ &\times\frac{t}{b\sin\varphi}\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon_r U_r \end{aligned}$$

である。右辺第2項は (6・10) によって0であるから，翼端の吹上げは

$$\begin{aligned} w_B{}^{(M)}(0)=&\sum_{N=0}^{R}\frac{1}{\pi(m+1)} \\ &\times\sum_{s=1}^{m+1}\varepsilon_s B^{(N)}(\varphi_s)\bar{K}^{(MN)}(0,\varphi_s) \\ &\times\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon_r\cos r\varphi_s\cdot U_r \end{aligned} \quad (6\cdot11)$$

となる。

$B^{(N)}(0)$ の中の一つが定まれば，(6・10) によって他のすべての $B^{(N)}(0)$ が定まるから，(6・11) の連立方程式のうち一つの M に対するものだけを残し，他は省略することができる。$M=0$ の場合だけを残すことにすると，翼端の境界条件としては流れの方向だけを与えればよいことになる。

$$x_N=B^{(N)}(0)/B^{(0)}(0) \quad (6\cdot12)$$

と置くと，(6・10) は

$$\left.\begin{array}{l} C_{00}+C_{01}x_1+C_{02}x_2+\cdots\cdots=0 \\ C_{20}+C_{21}x_1+C_{22}x_2+\cdots\cdots=0 \\ C_{40}+C_{41}x_1+C_{42}x_2+\cdots\cdots=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \quad (6\cdot13)$$

と書かれる。(4・12) によると

$$\begin{array}{llll} C_{00}=1, & C_{01}=1/3, & C_{02}=1/5, & C_{03}=-11/7 \\ C_{20}=1, & C_{21}=1, & C_{22}=1, & C_{23}=-23 \\ C_{40}=3, & C_{41}=5, & C_{42}=-9, & C_{43}=-1200 \end{array}$$

であるから，$N=3$ までとって x_N を計算すると，

$$x_1=-5.05,\quad x_2=3.09,\quad x_3=-0.04 \quad (6\cdot14)$$

となる。圧力分布の計算には $N=2$ までとれば精度は充分と思われるが，x_N に関しては (6・12) で $N=2$ までに止めて計算すると $x_1=-6$, $x_2=5$, というように，(6・14) とはかなり異なる結果になるので，x_N の計算には $N\geq3$ とする必要がある。

また試験関数として，x_1, x_2 が 1 に近いものを選んだ方が翼端附近で精度よい計算結果が得られるはずである。試験関数を (3・1) ではなくて，(1・3) の形にすると，x_1, x_2, x_3 に相当する係数の値は 2.002, -3.008, -0.042 となる。さらに試験関数が

$$\begin{aligned} \frac{r}{V}=&\frac{\alpha_0}{\sin\theta}+\alpha_1\sin\theta+\alpha_2\sin3\theta+\alpha_3\sin5\theta+\cdots\cdots \\ &+\beta_0\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+\beta_1\sin2\theta+\beta_2\sin4\theta \\ &+\beta_3\sin6\theta+\cdots\cdots \end{aligned} \quad (6\cdot15)$$

のとき，$\beta_n/\beta_0=x_n$ の値は $x_1=-1.26$, $x_2=-1.13$, $x_3=-0.01$ となるので，(6・15) が翼端附近の計算に適しているように思われる。ただし $\cos\theta=\xi$ である。

x_N の値には翼の縦横比その他翼平面形を表すパラメターは関数として含まれていない。

7. 圧力分布を与える連立1次方程式

(6・1), (6・11) の方程式に (3・3), (6・14) の条件式を添えると，圧力分布を求めるための連立1次方程式が得られる。理論の構成をわかりやすくするため，記号を整理して

$$\left.\begin{array}{l} w^{(M)}(\varphi_\nu)=w_\nu{}^{(M)},\quad A^{(N)}(\varphi_s)=A_{Ns}, \\ B^{(N)}(\varphi_s)=B_{Ns} \\ \sin\varphi_s\bar{J}^{(MN)}(\varphi_\nu,\varphi_s)b_{\nu s}=J_{N\nu s}^{(M)} \\ \bar{K}^{(MN)}(\varphi_\nu,\varphi_s)D_{\nu s}=K_{N\nu s}^{(M)} \\ \dfrac{\varepsilon_s}{\pi(m+1)}\bar{K}^{(0N)}(0,\varphi_s) \\ \quad\times\displaystyle\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon_r\cos r\varphi_s\cdot U_r=K_{N0s}^{(0)} \end{array}\right\} \quad (7\cdot1)$$

と書くと，左右対称の翼に関する連立1次方程式は

$$-\frac{w_0{}^{(0)}}{V}=\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=1}^{m+1}B_{Ns}K_{N0s}^{(0)}+\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=1}^{m}A_{Ns}J_{N0s}^{(0)}$$

$$-\frac{w_\nu{}^{(0)}}{V}=\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=1}^{m}A_{Ns}J_{N\nu s}^{(0)}+\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=0}^{m+1}B_{Ns}K_{N\nu s}^{(0)}$$

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{w_\nu^{(1)}}{V}=\sum\limits_{N=0}^{R}\sum\limits_{s=1}^{m}A_{Ns}J_{N\nu s}^{(1)}\\ -\dfrac{w_\nu^{(2)}}{V}=\sum\limits_{N=0}^{R}\sum\limits_{s=0}^{m+1}B_{Ns}K_{N\nu s}^{(2)}\\ -\dfrac{w_\nu^{(3)}}{V}=\sum\limits_{N=0}^{R}\sum\limits_{s=1}^{m}A_{Ns}J_{N\nu s}^{(3)}\\ -\dfrac{w_\nu^{(4)}}{V}=\sum\limits_{N=0}^{R}\sum\limits_{s=0}^{m+1}B_{Ns}K_{N\nu s}^{(4)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right\}\nu=1,2,\cdots\cdots,m$$

$$A_{0s}=-B_{0s},\quad B_{10}=-5.05B_{00},\quad B_{20}=3.09B_{00} \tag{7·2}$$

である。これを A_{Ns}, B_{Ns} について解けば，圧力分布が得られる。左右非対称の翼の場合は (7·2) の第1式の次に $\nu=m+1$ における方程式を加え，

$$B_{1,m+1}=-5.05B_{0,m+1},\quad B_{2,m+1}=3.09,B_{0,m+1}$$

の条件を添えて，(7·2)を解くことになる。

8. む す び

本報告は計算法理論の骨組みだけを述べたものである。数計値算を行う場合には対数特異点の処理法[12]などを挿入する必要があるし，また実際問題への応用を考えるとき，最適標点法に対する翼端条件の導入法の工夫が必要になってくる。

プロペラの場合はボス側のような矩形翼端と外側の放物型翼端とを組み合わせたものの計算法を考えねばならない。

これらは次の研究課題であるが，いずれも数値計算の積み重ねによって解決への道が開かれる。

参 考 文 献

1) Jordan, P.F., "The Parabolic Wing Tip in Subsonic Flow", AIAA Paper No. 71-10, 1971
2) Kinner, W., "Die kreisförmige Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage", Ing-Arch. Bd. 8, 1937
3) van Spiegel, E. and Timman, R., "Linearized Aerodynamic Theory for Wings of Circular Planform in Steady and Unsteady Incompressible Flow", 9th Int. Cong. of Applied Mechanics, 1956
4) Nishiyama, T. and Miyamoto, M., "Acceleration Potential Analysis for the Submerged Lifting-Surface of Circular Plan Form", Tech. Rept., Tohoku Univ., Vol. 31, No. 2, 1966
5) Birnbaum, W., "Die Tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie", ZAMM, Bd. 3, 1923
6) Prandtl, L., "Tragflügeltheorie", I, II, Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik, Göttingen, 1927
7) Landahl, M., "Pressure-Loading Functions for Oscillating Wings with Control Surfaces", AIAA Journal, Vol. 6, No. 2, 1968
8) Freese, H., "Zur Berechnung der Ruderluftkräfte im Unterschallbereich", ZAMM, Bd. 50, 1970
9) 花岡達郎，"揚力面の積分方程式の新しい数値解法"，船研報告，第6巻，第1号，1969
10) Jahnke u. Emde, "Funktionentafeln", p. 145
11) 小山鴻一，"新しい方法によるプロペラ揚力面の数値的解析"，造船学会論文集，第132号，1972
12) Mangler, K.W. and Spencer, B.F.R., "Some Remarks on Multhopp's Lifting-Suface Theory", R & M, No. 2926, 1952

附録 I $g_s^{(n)}(Y)$ の循環式

$g_s^{(n)}(Y)$ は

$$g_s^{(n)}(Y)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^{2n}}{\sqrt{1-\xi^2}(Y^2+\xi^2)^{s/2}}d\xi \tag{I-1}$$

で定義される関数とする。

核関数の値を計算する場合，個々のものを直接数値積分その他の方法で求めるより，$g_s^{(n)}$ の循環式を利用する方が計算が容易である。

(I-1) より直ちに

$$Y^2g_{s+2}^{(n)}=g_s^{(n)}-g_{s+2}^{(n+1)} \tag{I-2}$$

の関係を導くことができる。

$$\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\xi^h\sqrt{1-\xi^2}}{(Y^2+\xi^2)^{s/2}}\right]=\frac{h\xi^{h-1}(1-\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}(Y^2+\xi^2)^{s/2}}-\frac{\xi^{h+1}}{\sqrt{1-\xi^2}(Y^2+\xi^2)^{s/2}}-\frac{s\xi^{h+1}(1-\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}(Y^2+\xi^2)^{(s+2)/2}}$$

であるから，これの両辺を ξ について -1 より 1 まで積分すると，左辺は0となる。その式で $h-1=2n$ と書くと

$$(2n+1)g_s^{(n)}-2(n+1)g_s^{(n+1)}-s\{g_{s+2}^{(n+1)}-g_{s+2}^{(n+2)}\}=0 \tag{I-3}$$

が得られる。

(I-2) の n を $n+1$ で置きかえると

$$g_{s+2}^{(n+2)}=g_s^{(n+1)}-Y^2g_{s+2}^{(n+1)}$$

である。これと (I-3) とより，$g_{s+2}^{(n+2)}$ を消去すると

$$(2n+1)g_s^{(n)}+\{s-2(n+1)\}g_s^{(n+1)}$$
$$-s(1+Y^2)g_{s+2}^{(n+1)}=0 \qquad \text{(I-4)}$$

が得られる。(I-2), (I-4) より $g_{s+2}^{(n+1)}$ を消去すると

$$(2n+1)g_s^{(n)}+\{s-2(n+1)\}g_s^{(n+1)}$$
$$-s(1+Y^2)\{g_s^{(n)}-Y^2g_{s+2}^{(n)}\}=0$$

となる。$Y^2g_{s+2}^{(n)}$ の代わりに (I-2) の右辺を用いると

$$(2n+1)g_s^{(n)}+\{s-2(n+1)\}g_s^{(n+1)}$$
$$-s(1+Y^2)g_{s+2}^{(n+1)}=0 \qquad \text{(I-5)}$$

が得られる。この式を用いると，$g_s^{(n)}$ の n の2つの値に対する $g_s^{(n)}$ の値が知られていれば，それから $g_{s+2}^{(n)}$ の値を計算することができる。

次に (I-2) を用いて (I-3) の $g_s^{(n)}, g_s^{(n+1)}$ の s を $s+2$ に移すと

$$(2n+1)Y^2g_{s+2}^{(n)}+\{2n+1-2(n+1)Y^2-s\}g_{s+2}^{(n+1)}$$
$$+\{s-2(n+1)\}g_{s+2}^{(n+2)}=0$$

が得られる。この式の $s+2$ を s で置きかえると

$$\left.\begin{aligned}&(2n+1)Y^2g_s^{(n)}+\{2n+3-s-2(n+1)Y^2\}g_s^{(n+1)}\\&\quad-(2n+4-s)g_s^{(n+2)}=0\\&\text{または}\\&(2n+4-s)\{g_s^{(n+1)}-g_s^{(n+2)}\}=-\{1+2(n+1)Y^2\}\\&\quad\times\{g_s^{(n)}-g_s^{(n+1)}\}+(1+Y^2)g_s^{(n)}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(I-6)}$$

が得られる。

$g_1^{(0)}$, $g_1^{(1)}$ の値が知られていれば，(I-5), (I-6) を利用することによって，n, s のすべての正整数に対する $g_s^{(n)}$ の値を計算することができる。

Legendre-Jacobi の第1種および第2種の完全楕円積分の表示式は

$$\left.\begin{aligned}K(k)&=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\\E(k)&=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta\end{aligned}\right\} \qquad \text{(I-7)}$$

である。

$$k=1/\sqrt{1+Y^2} \qquad \text{(I-8)}$$

と置くと

$$g_1^{(0)}(Y)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{Y^2+\cos^2\theta}}=\frac{K(k)}{\sqrt{1+Y^2}} \qquad \text{(I-9)}$$

$$g_1^{(1)}(Y)=\frac{1}{\sqrt{1+Y^2}}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\sin^2\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}d\theta$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1+Y^2}}\{(1+Y^2)E(k)-Y^2K(k)\} \qquad \text{(I-10)}$$

である。

したがって (I-5), (I-6) の循環式を利用すると，次数 s がさらに大きいときの $g_s^{(n)}$ を完全楕円積分で表すことができる。結果のみ記すと

$$\left.\begin{aligned}&g_3^{(0)}=\frac{E(k)}{Y^2(1+Y^2)^{1/2}},\quad g_3^{(1)}=\frac{K(k)-E(k)}{(1+Y^2)^{1/2}}\\&g_5^{(0)}=\frac{1}{3Y^2(1+Y^2)^{3/2}}\left\{\left(\frac{2}{Y^2}+4\right)E(k)-K(k)\right\}\\&g_5^{(1)}=\frac{1}{3Y^2(1+Y^2)^{3/2}}\{(1-Y^2)E(k)+Y^2K(k)\}\\&g_7^{(0)}=\frac{1}{15Y^4(1+Y^2)^{5/2}}\left\{\left(\frac{8}{Y^2}+23+23Y^2\right)E(k)\right.\\&\qquad\left.-4(1+2Y^2)K(k)\right\}\\&g_7^{(1)}=\frac{1}{15Y^4(1+Y^2)^{5/2}}\{(2+7Y^2-3Y^4)E(k)\\&\qquad-Y^2(1-3Y^2)K(k)\}\\&g_9^{(1)}=\frac{1}{105Y^6(1+Y^2)^{7/2}}\{(8+33Y^2+58Y^4\\&\qquad-15Y^6)E(k)-Y^2(4+13Y^2-15Y^4)K(k)\}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(I-11)}$$

である。完全楕円積分の計算プログラムを利用すれば $g_s^{(n)}(Y)$ の値は容易に求められる。

$1/|Y|=0$ の近傍における $g_s^{(n)}(Y)$ の展開式は

$$g_s^{(n)}(Y)=\frac{1}{|Y|^s}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^{2n}\theta}{(1+1/Y^2\cdot\cos^2\theta)}d\theta$$
$$=\frac{\pi}{2}\frac{1}{|Y|^s}\left\{b_{2n}-\frac{s}{2}\frac{b_{2n+2}}{Y^2}+\frac{1}{2!}\frac{s}{2}\right.$$
$$\times\left(\frac{s}{2}+1\right)\frac{b_{2n+4}}{Y^4}$$
$$\left.-\frac{1}{3!}\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{2}+2\right)\frac{b_{2n+6}}{Y^6}+\cdots\cdots\right\} \qquad \text{(I-12)}$$

と書かれる。この式は翼端近傍の核関数の性質を調べるとき必要になる。ただし

$$b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}\theta d\theta=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)} \qquad \text{(I-13)}$$

とする。

附録 II T_n の漸化式

T_n は

$$T_n=⨍_0^{\pi}\frac{\sin^2\varphi'\cos n\varphi'\sin\varphi'}{(\cos\varphi-\cos\varphi')^2}d\varphi'$$

で定義される関数である。これを計算するには

$$S_n=\oint_0^{\pi}\frac{\sin n\varphi'}{\cos\varphi-\cos\varphi'}d\varphi'$$

で定義される関数の性質を利用すると好都合なので，まず S_n の計算式を求める。

$$S_1=\oint_0^{\pi}\frac{\sin\varphi'}{\cos\varphi-\cos\varphi'}d\varphi'$$
$$=\oint_{-1}^{1}\frac{d\eta'}{\eta'-\eta}=\ln\frac{1+\eta}{1-\eta} \qquad \text{(II-1)}$$

である。

$$S_{n+1}+S_{n-1}=-2\int_0^{\pi}\sin n\varphi' d\varphi'+2\cos\varphi S_n$$

であるから，S_n の漸化式

$$S_{n+1}-2\cos\varphi S_n+S_{n-1}=\frac{2}{n}\{(-1)^n-1\} \qquad \text{(II-2)}$$

が得られる。S_2 に対しては

$$S_2=2\oint_0^{\pi}\frac{\sin\varphi'\cos\varphi'}{\cos\varphi-\cos\varphi'}d\varphi'$$
$$=2\{(-1)-1\}+2\cos\varphi S_1 \qquad \text{(II-3)}$$

である。$S_0=0$ とみなしても不都合はないから，(II-2) は $n=1$ の場合にも適用できると考えてよい。

(II-1) と (II-2) を利用すると，任意の正整数 n に対する S_n の値を計算することができる。

以上の結果を用いて T_n の計算式を求める。T_n の式で部分積分を行うと

$$T_n=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{(n+2)\sin(n+2)\varphi'+(n-2)\sin(n-2)\varphi'}{\cos\varphi-\cos\varphi'}d\varphi'$$
$$-\frac{n}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin n\varphi'}{\cos\varphi-\cos\varphi'}d\varphi'$$

であるから

$$T_n=\frac{n+2}{4}S_{n+2}+\frac{n-2}{4}S_{n-2}-\frac{n}{2}S_n \qquad \text{(II-4)}$$

が得られる。この式は $n\geq 2$ のときに適用することができる。$n=0,\ 1$ に対しては

$$T_0=S_2,\quad T_1=\frac{1}{4}(3S_3-S_1) \qquad \text{(II-5)}$$

である。

(II-4) はまた

$$T_n=\frac{1}{4}\{(n+2)(S_{n+2}+S_n)+(n-2)(S_n$$
$$+S_{n-2})-4nS_n\}$$

と書かれるから，(II-2) を用いると

$$T_n=\frac{1}{4}\Big[2\eta(n+2)(S_{n+1}+S_{n-1})-8\eta S_{n-1}-4nS_n$$
$$+2\left(\frac{n+2}{n+1}+\frac{n-2}{n-1}\right)\{(-1)^{n-1}-1\}\Big]$$

となる。さらに (II-2) を用いると

$$T_n=\eta(n+2)\left[\eta S_n+\frac{1}{n}\{(-1)^n-1\}\right]-2\eta S_{n-1}-nS_n$$
$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{n+2}{n+1}+\frac{n-2}{n-1}\right\}\{(-1)^{n-1}-1\}$$

であるから，整理すると

$$T_n=\{(n+2)\eta^2-n\}S_n-2\eta S_{n-1}$$
$$+\frac{\eta(n+2)}{n}\{(-1)^n-1\}$$
$$+\frac{n^2-2}{n^2-1}\{(-1)^{n-1}-1\} \qquad \text{(II-6)}$$

が得られる。この式は $n\geq 2$ に対して適用することができる。

附録 III. $\eta=1$ の近傍における T_n

(II-2) より

$$S_{n+1}-\eta S_n=\eta S_n-S_{n-1}+\frac{2}{n}\{(-1)^n-1\} \qquad \text{(III-1)}$$

である。この式で $n=1$ と置くと

$$S_2-\eta S_1=\eta S_1-4=\eta\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}-4 \qquad \text{(III-2)}$$

である。$\eta=1$ の近傍では (III-1) は

$$S_{n+1}-S_n\fallingdotseq S_n-S_{n-1}+\frac{2}{n}\{(-1)^n-1\} \qquad \text{(III-3)}$$

となるから，(III-2) を参照すると，$\eta=1$ の近傍では

$$S_{n+1}-S_n\fallingdotseq\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}+2\{(-1)-1\}+\frac{2}{2}\{(-1)^2-1\}$$
$$+\frac{2}{3}\{(-1)^3-1\}+\cdots\cdots+\frac{2}{n}\{(-1)^n-1\}$$
$$=\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}-4\Big[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots\frac{1}{n}$$
$$\times\frac{1}{2}\{1-(-1)^n\}\Big] \qquad \text{(III-4)}$$

である。

(II-6) より，$\eta=1$ の近傍では T_n は

$$T_n\fallingdotseq 2(S_n-S_{n-1})+\frac{n+2}{n}\{(-1)^n-1\}$$
$$+\frac{n^2-2}{n^2-1}\{(-1)^{n-1}-1\}$$

であるから，(III-4) を利用すると

$$T_n \fallingdotseq 2\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}-8\Bigl[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{2}\{1-(-1)^{n-1}\}\Bigr]-\frac{n+2}{n}\{1-(-1)^n\}-\frac{n^2-2}{n^2-1}\{1-(-1)^{n-1}\} \qquad \text{(III-5)}$$

と書かれる。

$n=0, 1$ のときは (II-5) を利用する。$\eta=1$ の近傍では

$$T_0=S_2\fallingdotseq 2\eta S_1-4\fallingdotseq 2\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}-4 \qquad \text{(III-6)}$$

である。また

$$T_1=\frac{1}{4}\{3(S_3-S_2)+3(S_2-S_1)+2S_1\}$$

であるから，(III-4) により

$$T_1\fallingdotseq 2\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}-6 \qquad \text{(III-7)}$$

が得られる。