船舶技術研究所報告　第12巻　第1号　研究報告　(昭和50年1月)

厚翼の揚力面理論—I

(守屋の2論文の揚力面理論への応用)

花　岡　達　郎*

Lifting-Surface Theory of Wings of Finite Thickness

(On the Application of Moriya's Two-Papers to Lifting-Surface Theory)

By
Tatsuro HANAOKA

Abstract

This paper gives a simplified and exact method for calculating the velocity distribution on wings of finite thickness based on the conceptions of lifting-surface theory. The basis of the method is to transform the velocity distribution from thin wings to thick wings. The theory is achieved by an application of Moriya's two-papers about the theory of thick airfoils.

まえがき

ここで取り扱うのは翼厚，縦横比ともに普通の寸法の翼が小迎角で直進するときの翼表面の圧力分布を精度よく計算する方法に関することである。

3次元翼の圧力分布の計算は一般に揚力面理論によっているわけであるが，薄翼理論であるため，翼前縁に特異性をもち，それが実用上の大きな欠点となっている。これを除く方法として，F. Riegels と Wittich[1] の理論を利用した J. Weber の方法[2),3)] があり，swept wing の場合に適用してよい結果を得ている。しかし，Riegels の理論は等角写像に基づくものであるから，Weber の方法は2次元理論の枠内にあるものと理解しておく方がよい。そこで揚力面理論から厚翼の表面流速を求める方法として，一般の3次元翼にも適用できるものを考えてみた。理論の構成は殆ど守屋の二つの論文[4),5)] に依存している。

守屋の任意翼型の理論[5)] から薄翼理論が導かれることはすでに守屋が示している[6)]。その逆の場合が Riegels の変換であるが，本文はその問題を Prager[7)]—守屋[4)] の任意翼型の渦理論を利用して解いたもので，薄翼と厚翼の理論の関連が明快に示され，幸いなことに，守屋の公式が殆どそのままの形で揚力面理論から導かれる。

本文では解析を2次元流の範囲に止めたが，3次元翼理論，プロペラ理論，さらには翼の cavity flow の理論等に応用することができる。流体は非圧縮非粘性とする。

記　号

x, y	任意点の座標
x', y'	特異点分布上の点の座標
ρ	流体密度
p	圧力
γ	循環分布密度
Φ_0	一様流の速度ポテンシャル
Φ_1	攪乱流の速度ポテンシャル
$\Phi^*=\Phi_0+\Phi_1$	
V	一様流の流速
v	翼面上の流速
w	翼表面の y 軸方向攪乱流速
l_1, l_2	翼の前，後縁の x 座標
$c=(l_2-l_1)/2,\ x_0=(l_1+l_2)/2$	
$\xi=(x-x_0)/c,\ \xi'=(x'-x_0)/c$	
y_+, y_-	翼輪郭の上，下の y 座標

* 運動性能部　原稿受付：昭和49年9月5日

$\bar{y}=(y_+-y_-)/2$, $\hat{y}=(y_++y_-)/2=y_m$
$\bar{y}/2c=\eta_t$, $y_m/2c=\eta_m$
α　　迎角

1. 守屋の論文とその周辺

守屋の２次元翼理論に関する論文はおよそ４種ある。それらは，翼表面に渦を置いて，翼型表面の圧力分布を求めるもの[4]，等角写像を応用して，翼型圧力分布を近似的に計算するもの[5]，それを逐次近似により厳密解に導くもの[8]，翼表面の圧力分布を与えて，それに適合する翼型を求めるもの（逆問題）[9]，であるが，ここで利用するのは，最初の二つである。その中から，後節の解析に必要な部分を簡単に記載する。

4）の論文は W. Prager[7] の理論を応用したもので，翼表面の流速 v（一様流と攪乱流を合わせたもの）に関する積分方程式

$$v(t)-\frac{1}{\pi}\int v(s)\frac{\cos\theta_{st}}{r_{st}}ds=2v_0(t) \tag{1.1}$$

の数値解法が述べられている。ただし，t および s は輪郭線上の任意の２点を示し，r_{st} はこの２点を結ぶ直線の長さ，θ_{st} は t 点において輪郭線に立てた内向法線と r_{st} との間の角，ds は輪郭の線素，$v_0(t)$ は t 点における一様流の接線分速度，積分は輪郭を時計方向に一周するものとする（図-1 参照）。この理論では翼表面におかれた渦の循環分布密度が v に等しい。守屋の研究の重要なところは，Kutta の流出条件の導入によって，積分方程式 (1.1) から唯一の確定解を得たことである。この論文には数値計算例が記載されていないが，現在では等角写像の方法より，(1.1) を解いて速度分布を求める方法を採用することが多い。多葉翼のように多重連結領域のものでは，等角写像より，この方法の方が電子計算機による運算に適しているためであろう。

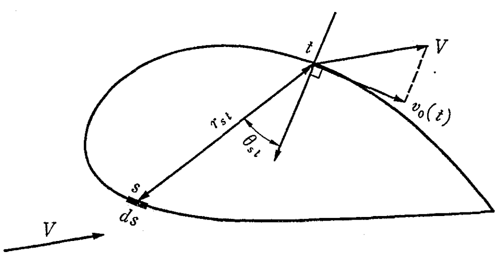

図-1

前に述べたように，5）の論文は翼表面の速度分布を求めるのに等角写像を応用したものである。この論文が公表されて間もなく，森口[10]は 5) の理論が近似解であることを指摘した。その後，守屋は逐次近似により厳密解を得る方法を示したし，また T. Theodorsen[11] その他の厳密計算が知られているが，アメリカで専ら Theodorsen の方法が用いられているのに対し，わが国では 5）が "守屋の方法" といわれ，広く利用されている。

翼表面における速度関数 v/V についての守屋の近似式を記載する。$x/c=\xi=\cos\theta$ と置き，平均矢高線および翼厚の半分を θ の関数として（図-2）

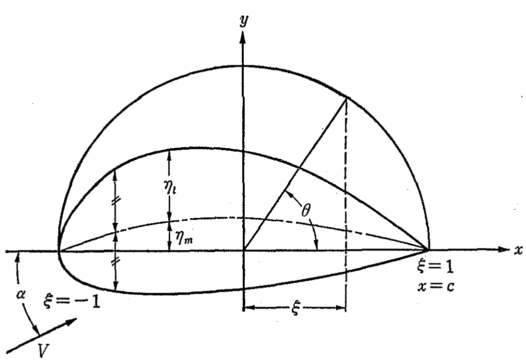

図-2

$$\left.\begin{aligned}\eta_m&=\sum_0^\infty a_n\cos n\theta\\ \eta_t&=\sum_0^\infty b_n\sin n\theta\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

のように表すと

$$\frac{v_\pm}{V}=\frac{\left[\begin{aligned}&\cos\alpha\left\{\mp\frac{1}{2}\sin\theta+\sum_1^\infty na_n(1-\cos n\theta)\mp\sum_1^\infty nb_n\sin n\theta\right\}\\ &+\sin\alpha\left\{-\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\mp\sum_1^\infty na_n\sin n\theta+\sum_1^\infty nb_n\cos n\theta-\sum_1^\infty nb_n\right\}\end{aligned}\right]}{\left[\frac{1}{4}\sin^2\theta+\left\{\mp\sum_1^\infty na_n\sin n\theta+\sum_1^\infty nb_n\cos n\theta\right\}^2\right]^{1/2}} \tag{1.3}$$

である。ただし θ の変域を０から π までとし，複号の上は翼の上面，下は下面に対応する。翼表面の圧力 p は，それを用いると

$$p/(1/2\rho V^2)=1-(v/V)^2 \tag{1.4}$$

によって計算することができる。

谷は (1.3) をもう少し簡潔な式に改めている[12]。すなわち

$$\left.\begin{aligned} A_s&=-\frac{dy_m}{dx}=\frac{2}{\sin\theta}\frac{d\eta_m}{d\theta}=-2\sum_1^\infty na_n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\\ B_c&=-\frac{d\bar{y}}{dx}=\frac{2}{\sin\theta}\frac{d\eta_t}{d\theta}=2\sum_1^\infty nb_n\frac{\cos n\theta}{\sin\theta}\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

$$\left.\begin{aligned} A_c&=-2\sum_1^\infty na_n\frac{1-\cos n\theta}{\sin\theta}\\ B_s&=2\sum_1^\infty nb_n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

と置くと，(1.3) は

$$\frac{v_\pm}{V}=\frac{\cos\alpha(1\pm A_c+B_s)+\sin\alpha\left\{\pm\sqrt{\dfrac{1-\xi}{1+\xi}}-(A_s\pm B_c)\right\}}{\sqrt{1+(A_s\pm B_c)^2}} \tag{1.7}$$

と書かれる。ただし，翼後縁は鋭いものとして，$\sum_1^\infty nb_n=0$ とみなす。この式によると翼型輪郭と流速との関連がよくわかる。守屋の公式は平均矢高線と翼厚の影響が分離できるので，翼型設計に便利な式である。この近似式は単に翼表面の圧力分布を計算するために求められたものであったが，後に谷の層流翼設計に効果的に活用された[12]。

翼型設計のために考えられた翼型理論として，イギリスでは S. Goldstein[13]，ドイツでは F. Keune[14]，H. Gebelein[15] 等のものがあるが，いずれも守屋の公式とほぼ同等の近似式である。アメリカでは層流翼設計に H.J. Allen[16] の理論を用いた。これは Theodorsen の方法で対称翼の計算を行い，それと薄翼理論と組み合わせて任意翼型の流速を求めるもので，結果的には守屋の近似式に近い運算をしていることになる。アメリカの層流翼の数値計算と模型試験の資料[17]は広範囲

表-1　前縁における v/V

max $2\eta_t$	Theodorsen	Moriya
0.06	3.992	3.731
0.09	2.595	2.540
0.12	1.988	1.945
0.15	1.600	1.588
0.18	1.342	1.350
0.21	1.167	1.179

のもので，しかも実用向きにできているので，現在でも広く利用されている。これに対し，他国の研究は理論として優れたものはあったが，開発された翼型が実用に取り上げられることは極めて少ない。

文献 17) の表より NACA 4 字系対称翼の $C_l=1.0$ における前縁の速度関数 v/V を読みとったものと，(1.7) によって計算したものとを **表-1** に示したが，守屋の公式の精度のよさが想像できるであろう。

2.　厚翼と薄翼の表面流速の対応 (Prager–守屋の理論による)

普通の翼では厚さが翼弦長に比べて非常に小さいので，厚さを無視しても大差ないとして，翼を圧力飛躍面で表す，これが揚力面理論である。翼全体の性能の推定にはよい結果が得られるが，翼表面の速度分布は誤差が大き過ぎて実用にならない。その理由は，翼型輪郭を厚みのあるものから，それを無視した薄翼に移すときの操作が単純で，翼面上の循環分布密度の対応を考慮した変換がなされていないからである。この問題を Prager—守屋の理論を利用して考察してみる。

Prager の理論は流れ関数を用いたものであるが，ここでは3次元流への応用を考えて，速度ポテンシャルにより解析を行う。速度 V の一様流が x 軸と α の角をなす方向に流れる中に，翼弦が x 軸と一致するように翼が置かれているときの流場を考える (**図-2** 参照)。これの速度ポテンシャル Φ^* を一様流のもの Φ_0 と，翼による攪乱流のもの Φ_1 とに分け

$$\Phi^*=\Phi_0+\Phi_1 \tag{2.1}$$

と書く。

翼の外部領域に Green の公式を適用すると，a 点における攪乱流の速度ポテンシャル Φ_1 は

$$\Phi_1(a)=\frac{1}{2\pi}\int\left\{\Phi_1(s)\frac{\partial}{\partial n_s}\left(\ln\frac{1}{r_{sa}}\right)-\frac{\partial\Phi_1(s)}{\partial n_s}\ln\frac{1}{r_{sa}}\right\}ds \tag{2.2}$$

のように表される (**図-3**)。次に，翼の内部領域で調和な関数 Φ_1' に Green の公式を適用すると

$$0=\frac{1}{2\pi}\int\left\{\Phi_1'(s)\frac{\partial}{\partial n_s'}\left(\ln\frac{1}{r_{sa}}\right)-\frac{\partial\Phi_1'(s)}{\partial n_s'}\ln\frac{1}{r_{sa}}\right\}ds \tag{2.3}$$

である。ただし，$\partial/\partial n_s=-\partial/\partial n_s'$ とする。ここで $\Phi_1'=-\Phi_0$ とし，(2.2) と (2.3) を辺々加えると，境界条件により，$\partial(\Phi_0+\Phi_1)/\partial n_s=0$ であるから，

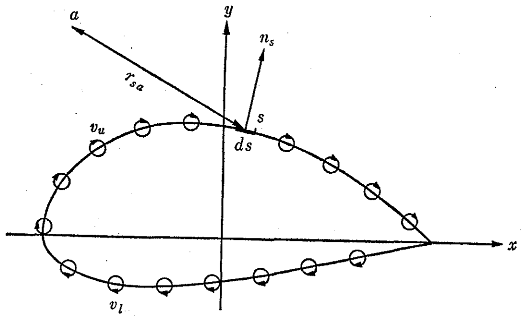

図-3

$$\Phi_1(a)=\frac{1}{2\pi}\int\{\Phi_0(s)+\Phi_1(s)\}\frac{\partial}{\partial n_s}\left(\ln\frac{1}{r_{sa}}\right)ds \tag{2.4}$$

が得られる。

s, a 2点の座標を $(x_s,\ y_s)$, $(x,\ y)$ とすると

$$r_{sa}=\sqrt{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2}$$

である。

$$\left.\begin{aligned}\cos\beta&=\frac{dy_s}{dn_s}=\frac{dx_s}{ds}=x'_s\\ \sin\beta&=-\frac{dx_s}{dn_s}=\frac{dy_s}{ds}=y'_s\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

の関係により (図-4),

$$\frac{\partial}{\partial n_s}\ln\frac{1}{r_{sa}}=\frac{(y-y_s)x'_s-(x-x_s)y'_s}{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\tan^{-1}\frac{x-x_s}{y-y_s}=\frac{-(y-y_s)x'_s+(x-x_s)y'_s}{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2} \tag{2.7}$$

であるから，両式の右辺を比較すると

$$\frac{\partial}{\partial n_s}\ln\frac{1}{r_{sa}}=-\frac{\partial}{\partial s}\tan^{-1}\frac{x-x_s}{y-y_s} \tag{2.8}$$

の関係があることがわかる。

(2.4) の核関数の代わりに (2.8) の右辺を代入し，s で部分積分を行う。積分は下面後縁から始め，翼下面より上面をめぐって再び後縁にもどるようにする。

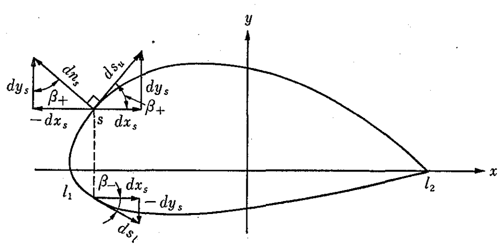

図-4

積分端から出る項は，翼に循環があるときは0とならないが，翼の動きはじめから考えると，その項は出立渦に該当するもので，ここでは無限後方においてもよく，したがって省略しても支障はない。よって，$\partial\Phi^*/\partial s=v$ と書くと

$$\Phi_1(a)=\frac{1}{2\pi}\int v(s)\tan^{-1}\frac{x-x_s}{y-y_s}ds \tag{2.9}$$

となる。すでに前節で述べたことであるが，この式から，$v(s)$ は翼表面の流速で，また翼表面上に分布する渦の循環分布密度となっていることがわかる。(2.9) を翼輪郭の接線方向に微分し，点 a を翼表面に近づけ，極限値を計算すると，(1.1) と同じ式が得られる。

(2.9)を x, y を通して翼輪郭の法線方向に微分し，点 a を輪郭上の点 t に移すと (図-1)

$$\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial n_t}\right|_{a=t}=w(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_t}\left.\int v(s)\tan^{-1}\frac{x-x_s}{y-y_s}ds\right|_{a=t} \tag{2.10}$$

である。$\partial\Phi^*/\partial n_t|_{a=t}=0$ であるから，翼輪郭と一様流の速度および方向が定まっていれば，$w(t)$ は

$$w(t)=-\partial\Phi_0/\partial n_t \tag{2.11}$$

によって与えられる既知関数である。

いま(2.10)の積分を翼上面と下面に関するものに分け，また積分変数を s より x_s に変えると

$$\begin{aligned}w(t)=&\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_t}\left.\int_{l_1}^{l_2}v_u(x_s)\frac{ds_u}{dx_s}\tan^{-1}\frac{x-x_s}{y-y_u}dx_s\right|_{a=t}\\&+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_t}\left.\int_{l_1}^{l_2}v_l(x_s)\frac{ds_l}{dx_s}\tan^{-1}\frac{x-x_s}{y-y_l}dx_s\right|_{a=t}\end{aligned} \tag{2.12}$$

と書かれる。v_u, v_l 等の脚符はそれらの量が u は翼の上面，l は下面の値であることを示す記号である。また $s_l=-s$ とする。(2.12) とは別に

$$\begin{aligned}\bar{w}(t_u)=&\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_t}\left.\int_{l_1}^{l_2}\bar{v}_u(x_s)\tan^{-1}\frac{x-x_s}{y-\varepsilon_u}dx_s\right|_{y\to\varepsilon_u}\\&+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_t}\left.\int_{l_1}^{l_2}\bar{v}_l(x_s)\tan^{-1}\frac{x-x_s}{y-\varepsilon_l}dx_s\right|_{y\to\varepsilon_u}\end{aligned} \tag{2.13}$$

の式を考える。右辺で $y\to\varepsilon_l$ としたとき，左辺は $\bar{w}(t_l)$ で表す。この式は薄翼，すなわち翼輪郭が平板に近く，ε_u, ε_l は翼の全区間にわたり $ds/dx_s\fallingdotseq 1$ としてよいほど小さい場合のもので，循環分布密度が $\bar{v}_u+\bar{v}_l$ の単一渦層と強さが $\varepsilon'(\bar{v}_u-\bar{v}_l)$ の渦対が x 軸上に分布するときの流場に対応する。ただし，ε_u, $\varepsilon_l\to 0$ のとき $\varepsilon'\to 0$ で，$\varepsilon'(\bar{v}_u-\bar{v}_l)$ は有限になるものとする。このように厚さのある翼を薄翼に移すとき，単

純な（渦層だけの）薄翼でなく，厚さを考えに入れた(渦対を重ねた)流場として取り扱うならば，単に $\tan^{-1}(x-x_s)/(y-y_u)$ を $\tan^{-1}(x-x_s)/(y-\varepsilon_u)$ に移すことから生じる誤差は，後述のように ε^2 と同程度である。ただし，$\varepsilon=\max\eta_t$ とする。これを厚翼に相当する薄翼とみなし，$w(t)=\bar{w}(t)$ とするならば，ε^2 の誤差の範囲内で

$$\left.\begin{aligned} v_u(x_s)\frac{ds_u}{dx_s}&=\bar{v}_u(x_s) \\ v_l(x_s)\frac{ds_l}{dx_s}&=\bar{v}_l(x_s) \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

の関係が成り立つと考えてよい。これは Riegels-Wittich の変換に相当する式である。

$\tan^{-1}(x-x_s)/(y-y_u)$ を y_u について Taylor 展開すると，y_u の1次の項として，x 方向に軸をもつ複原分布が現れる。これが上述の渦対に対応するものである。したがって，揚力面理論でも x 軸上に渦層を分布させると同時に，複源または吹き出し分布を置き，境界条件を厚翼のものと同じにすれば，厚さの1次の項まで取り上げたことになり，そこで得られた $\bar{v}_u$, $\bar{v}_l$ に (2.14) の運算を行えば，厚翼表面の速度関数を ε^2 の誤差範囲で求めることができるはずである。$\bar{v}_u$, $\bar{v}_l$ の計算法は次節で述べる。

3. 相当薄翼の表面流速

本文で相当薄翼というのは(2.13)のように，輪郭は薄翼と同じであるが，流場として厚さの影響の含まれたものを意味する。相当薄翼の流場を，揚力面理論にならって，渦層に吹き出し分布を重ねたもので表すと

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y)=&\frac{1}{2\pi}\int_{l_1}^{l_2}\gamma(x')\tan^{-1}\frac{x-x'}{y}dx' \\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{l_1}^{l_2}\sigma(x')\ln\{(x-x')^2+y^2\}dx' \end{aligned} \tag{3.1}$$

である。このときの一様流は x 軸に平行とする。

以下，しばらく揚力面理論の方法そのままの記述で進む。揚力面理論は翼近傍の流場を簡略化して表すもので，翼弦迎角 α が有限のときでも，翼を表す特異点分布の位置と境界条件を満たす場所をともに x 軸上にとる。このため，流場を局所的に見たとき，やや不正確になるが，その修正はあとで行う。

(3.1) より $y=0$ の面上における y 方向の流速を求めると

$$\left.\begin{aligned} w_+=\lim_{y\to+0}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=-\frac{1}{2\pi}P\int_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{x-x'}dx'+\sigma(x) \\ w_-=\lim_{y\to-0}\frac{\partial\Phi_1}{\partial y}=-\frac{1}{2\pi}P\int_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{x-x'}dx'-\sigma(x) \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

である。翼表面の境界条件は

$$w_+=V\frac{dy_+}{dx},\quad w_-=V\frac{dy_-}{dx} \tag{3.3}$$

である。この式の y_+, y_- の意味は他の個所のものと異なり，迎角による翼の変位分も加えた翼上下面の y 座標とする。

$$\hat{w}=(w_++w_-)/2,\quad \bar{w}=(w_+-w_-)/2 \tag{3.4}$$

と書くと，

$$\left.\begin{aligned} V\left(\frac{dy_m}{dx}-\tan\alpha\right)&=\hat{w}=-\frac{1}{2\pi}P\int_{l_1}^{l_2}\frac{\gamma}{x-x'}dx' \\ V\frac{d\bar{y}}{dx}&=\bar{w}=\sigma \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

である。したがって，翼厚分布が与えられれば，第2式により吹き出しの強さ σ は直ちに求められる。

(3.5) の第1式は薄翼の積分方程式である。 Kutta の流出条件を満たすこの方程式の解析解は，変数を ξ に変えて表すと

$$\begin{aligned} \gamma=&\frac{2V}{\pi}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}P\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\frac{dy_m/dx'}{\xi-\xi'}d\xi' \\ &+2V\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\tan\alpha \end{aligned} \tag{3.6}$$

である。これによって，翼の平均矢高曲線と迎角が与えられれば，渦分布 γ が求められる。これで薄翼の流場は解かれたわけである。

(3.1) より $y=0$ の面上における x 方向の流速を求めると

$$u_\pm=\lim_{y\to\pm0}\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}=\pm\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{\pi}P\int_{l_1}^{l_2}\frac{\sigma}{x-x'}dx' \tag{3.7}$$

である。この式の積分変数 x を ξ に変え，σ に (3.5) の第2式を，また γ に (3.6) の右辺を代入すると

$$\begin{aligned} u_\pm=&\pm\frac{V}{\pi}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}P\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1+\xi'}{1-\xi'}}\frac{dy_m/dx'}{\xi-\xi'}d\xi' \\ &\pm V\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\tan\alpha+\frac{V}{\pi}P\int_{-1}^{1}\frac{d\bar{y}/dx'}{\xi-\xi'}d\xi' \end{aligned} \tag{3.8}$$

となる。

前述のように，揚力面理論の特異点分布の置き方は迎角に対して稍々粗雑であるから，(3.8) にさらに次に求める補正項を加える必要がある。

一様流が x 軸と α の角をなすものとして

$$\Phi_0=Vx\cos\alpha+Vy\sin\alpha \tag{3.9}$$

と置き，これを (2.4) に代入する。

$$\Phi_c(a)=\frac{1}{2\pi}\int\{Vx_s\cos\alpha+\Phi_1(s)\}\frac{\partial}{\partial n_s}\left(\ln\frac{1}{r_{sa}}\right)ds \tag{3.10}$$

$$\Phi_s(a)=\frac{V\sin\alpha}{2\pi}\int y_s\frac{\partial}{\partial n_s}\left(\ln\frac{1}{r_{sa}}\right)ds \tag{3.11}$$

と書くと

$$\Phi_1(a)=\Phi_c(a)+\Phi_s(a) \tag{3.12}$$

である。

Φ_c による流場は，(3.1) より (3.8) までの式の V を $V\cos\alpha$ と置いたもので表すことができる。よって，相当薄翼表面流速のうち，$\Phi_0+\Phi_c$ による成分は

$$\lim_{y\to\pm0}\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_0+\Phi_c)=\left(1+\frac{u_\pm}{V}\right)\cos\alpha \tag{3.13}$$

としてよい。ただし，この式の $u_\pm$ は (3.8) に示すものである。

次に Φ_s による表面流速を求める。(2.4) を (2.9) に変換した運算と同じものを (3.11) に対して行うと

$$\Phi_s(a)=\frac{V\sin\alpha}{2\pi}\int\frac{dy_s}{ds}\tan^{-1}\frac{x-x_s}{y-y_s}ds \tag{3.14}$$

となる。これは

$$\begin{aligned}\Phi_s(a)=&\frac{V\sin\alpha}{2\pi}\int_{l_1}^{l_2}\frac{dy_u}{dx_s}\tan^{-1}\frac{x-x_s}{y-y_u}dx_s\\&-\frac{V\sin\alpha}{2\pi}\int_{l_1}^{l_2}\frac{dy_l}{dx_s}\tan^{-1}\frac{x-x_s}{y-y_l}dx_s\end{aligned} \tag{3.15}$$

と書かれる。前記の (3.8) までの解析を参照すると，(3.15) から

$$\lim_{y\to\pm0}\frac{1}{V}\frac{\partial\Phi_s}{\partial x}=\left(f\cdot\frac{dy_m}{dx}\pm\frac{d\bar{y}}{dx}\right)\sin\alpha+0(\varepsilon^2) \tag{3.16}$$

の結果が得られることは容易に理解できるであろう。f の値は高々1の order である。dy_m/dx の影響は小さいので，この項は省略してもよいが，形を整える意味で残し，$f=1$ と仮定しておく。

(3.13) と (3.16) を加えたものが相当薄翼の表面流速に該当するもので，それは

$$\begin{aligned}\frac{\bar{v}_\pm}{V}&=\lim_{y\to\pm0}\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_0+\Phi_c+\Phi_s)\\&=\left(1+\frac{u_\pm}{V}\right)\cos\alpha+\left(\frac{dy_m}{dx}\pm\frac{d\bar{y}}{dx}\right)\sin\alpha\end{aligned} \tag{3.17}$$

のように表される。

これを (2.14) に適用すると，厚翼の表面流は

$$\frac{v_\pm}{V}=\left\{\left(1+\frac{u_\pm}{V}\right)\cos\alpha+\left(\frac{dy_m}{dx}\pm\frac{d\bar{y}}{dx}\right)\sin\alpha\right\}\cos\beta_\pm \tag{3.18}$$

で与えられることになる。

4. 厚翼の速度関数と守屋の近似式

前節までに導いた厚翼の速度関数の表示式を守屋の近似式と比較してみる。

変数 ξ,ξ' を $\xi=\cos\theta$, $\xi'=\cos\theta'$ によって θ, θ' に変え，dy_m/dx, $d\bar{y}/dx$ の代わりに (1.5) の右辺を用いる。それらを (3.8) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{u_\pm}{V}=&\pm\frac{2}{\pi}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\sum_1^\infty na_n\\&\times P\int_0^\pi\frac{\sin\theta'\sin n\theta'}{(1-\cos\theta')(\cos\theta-\cos\theta')}d\theta'\\&\pm\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\tan\alpha-\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty nb_n\\&\times P\int_0^\pi\frac{\cos n\theta'}{\cos\theta-\cos\theta'}d\theta'\end{aligned} \tag{4.1}$$

と書かれる。

$$\frac{1}{\pi}P\int_0^\pi\frac{\cos n\theta'}{\cos\theta'-\cos\theta}d\theta'=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} \tag{4.2}$$

の公式があるから

$$\begin{aligned}&\frac{2}{\pi}(1-\cos\theta)P\int_0^\pi\frac{\sin\theta'\sin n\theta'}{(1-\cos\theta')(\cos\theta-\cos\theta')}d\theta'\\&=\frac{1}{\pi}P\int_0^\pi\frac{\cos(n-1)\theta'-\cos(n+1)\theta'}{\cos\theta-\cos\theta'}d\theta'\\&\quad-\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\pi}P\int_0^\pi\frac{\cos(n-1)\theta'-\cos(n+1)\theta'}{\cos\theta-\cos\theta'}d\theta'\\&=-2(1-\cos n\theta)\end{aligned} \tag{4.3}$$

である。これらを (4.1) に適用すると

$$\begin{aligned}\frac{u_\pm}{V}=&\mp2\sum_1^\infty na_n\frac{1-\cos n\theta}{\sin\theta}\pm\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\tan\alpha\\&+2\sum_1^\infty nb_n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\end{aligned} \tag{4.4}$$

が得られる。(1.6) の記号を用いると

$$\frac{u_\pm}{V}=\pm A_c+B_s\pm\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\tan\alpha \tag{4.5}$$

のように表される。また $\cos\beta$ は

$$\cos\beta_\pm=\frac{1}{\sqrt{1+(dy_\pm/dx)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+(A_s\pm B_c)^2}} \tag{4.6}$$

と書かれる。

(3.18) に (4.5)，(4.6) を代入すると，$v_\pm/V$ の表示式は (1.7) と全く同じ式になる。すなわち，圧力分布

に関する守屋の近似式は揚力面理論によっても導くことができる。

5. あとがき

Weber の厚翼理論[2),3)] は有名で，Thwaites の参考書[18)]にも記載されているが，3次元翼に利用されることは少ない。おそらく，理論の核心である Riegels-Wittich 変換が等角写像であるため，3次元翼への利用を躊躇させるのではなかろうか。プロペラのように複雑な3次元流ではなおさらである。本文はこの課題に対する一つの答えを得ようとして行った解析の結果を示したものである。

ここに引用した守屋の研究の多くはその著書[19)]の中に記載されているが，文献 4) に関するものは見当たらない。これと文献 7) の概略は文献 20) によって知ることができる。Weber の近似式を Fourier 級数の形で表したものが Riegels の著書[21)]に載っている。それと守屋の公式を比較すると，(3.16) に相当する項が異っている。Weber が渦と吹き出しの干渉を考えたのに対し，筆者は有限厚さの翼に対する迎角の影響を取り上げたわけで，それは守屋の公式に近いものを得たいとの考えによっている。

大戦中の層流翼の開発は各国が独自に行ったものであったが，翼型研究に一つの飛躍的発展をもたらした。守屋の近似理論をその一環として見るとき，この理論の価値が一層鮮明に浮かび上ってくる。イギリスの層流翼研究の様子は文献 22) に記載されているし，Goldstein その他イギリスの翼型理論の概略は文献 18) で一括して見ることができる。また，アメリカの研究は文献 23) のような参考書になって出版されている。一方，日本およびドイツの層流翼の研究はもとの報告[12),24)] 以外に適当な解説書は見当たらない。しかし，ドイツの翼型研究の全般的なことは文献 21) によって知ることができる。

参考文献

1) Riegels, F. and Wittich, H.; "Zur Berechnung der Druckverteilung von Profilen", Jb. d. dt. Luftfahrtforschung, I, 120-132, 1942
2) Weber, J.; "The Calculation of the Pressure Distribution over the Surface of Two-dimensional and Swept Wings with Symmetrical Aerofoil Sections", R. & M. No. 2918, 1953
3) Weber, J.; "The Calculation of the Pressure Distribution on the Surface of Thick Cambered Wings and the Design of Wings with Given Pressure Distribution," R. & M. No. 3026, 1955
4) 守屋富次郎；"任意の翼型の圧力分布を求める方法"，日本航空学会誌，第4巻，第23号，昭和12年3月
5) 守屋富次郎；"任意の翼型の特性を求める一つの方法"，日本航空学会誌，第5巻，第33号，昭和13年1月
6) 守屋富次郎；"薄翼理論に就て"，日本航空学会誌，第9巻，第84号，昭和17年4月
7) Prager, W.; "Die Druckverteilung an Körpern in ebener Potentialströmung", Physikalische Zeitschrift, 29, 1928
8) 守屋富次郎；"任意翼型の一理論"，日本航空学会誌，第8巻，第78号，昭和16年10月
守屋富次郎；"任意翼型理論の補遺"，日本航空学会誌，第9巻，第84号，昭和17年4月
9) 守屋富次郎，石田田人；"与えられた圧力分布を持つ翼型を求める一方法"，日本航空学会誌，第9巻，第81号，昭和17年1月
10) 森口繁一；"二次元ポテンシャル論に関する事"，日本航空学会誌，第5巻，第35号，昭和13年3月
11) Theodorsen, T.; "Theory of Wing Sections of Arbitrary Shape," NACA, T.R. No. 411, 1932
12) 谷　一郎；"境界層の遷移を後らせる翼型に就いて"，東大航研報告，Vol. 19, No. 250, 昭和18年
13) Goldstein, S.; "Approximate Two-Dimensional Aerofoil Theory", Part I-VI, Aero. Res. Coun., Current Papers 68-73, 1952
14) Keune, F.; "Die ebene Potentialströmung um allgemeine dicke Tragflügelprofile", Jb. d. dt. Luftfahrtforschung, I, 3-26, 1938
15) Gebelein, H.; "Verallgemeinerung der Birnbaumschen Theorie für die Potentialströmung um mäßig dicke Profile", Jb. d. dt. Luftfahrtforschung, I, 27-34, 1938
16) Allen, H.J.; "A Simplified Method for the Calculation of Airfoil Pressure Distribution", NACA, T.N. No. 708, 1939
17) Abbott, I.H., von Doenhoff, A.E., und Stivers, L.S.; "Summary of Airfoil Data", NACA, T.R. No. 824, 1945
18) Thwaites, B.; "Incompressible Aerodynamics", Oxford, 1960
19) 守屋富次郎；"空気力学序論"，培風館，昭和34年
20) 近藤次郎；"積分方程式" 培風館，昭和29年，pp. 164
21) Riegels, F.; "Aerofoil Sections", Butterworth, London, 1961
22) Relf, E. F.; "Recent Aerodynamic Developments", J. Roy. Aero. Soc. Vol. 50, 1946
23) Abbott, I.H. and von Doenhoff, A.E.; "Theory of Wing Sections", Dover Publications, New York, 1959
24) Doetsch, H.; "Untersuchungen an einigen Profilen mit geringem Widerstand im Bereich kleiner Ca-Werte", Jb. d. dt. Luftfahrtforschung, I, 54-57, 1940