炭素鋼の磁気ひずみ効果による残留応力測定に関する基礎的研究

岩　柳　順　二*

Fundamental Study of the Residual Stress Measurement of Carbon Steel by the Magnetostriction Effect

By
Junji IWAYANAGI

The present paper describes a basic principle of the nondestructive measurement of residual stress distribution inside carbon steel structures by the magnetostriction effect.

Linear relations of magnetic induction and reversible permeability to uniaxial stress were derived from a magnetic theory of anisotropic magnetostriction. They were confirmed experimentally for carbon steel. The effect of the plastic deformation on these relations is small in high magnetic fields. These linear equations can be used as the basic laws for the measurement of residual stress which is usually accompanied with the plastic deformation.

Using above results, the residual stresses in the surface layer of specimens were obtained from the permeabilty measurement by high frequency fields.

The principle of the measurement of the residual stress distribution under the surface is the combination of the magnetostriction effect and the skin effect of AC magnetic field. It was verified for a simple stress distribution in a composite specimen made up of a free outer tube and a loaded inner cylinder by analysing the measurement of permeability by multiple frequency magnetic fields. It was extended to more general stress distributions.

目　次

* 共通工学部　原稿受付：昭和49年10月23日

要　　旨

本研究は，磁気的方法による残留応力測定上の基本的問題を取扱い，炭素鋼の磁気ひずみ効果に及ぼす塑性の影響を求め，表面のみならず内部の応力に関する情報を得るための計測法の原理を明らかにし，一つの残留応力測定法の可能性を示すことを目的として行った。

第1章「緒論」では，機械や構造物における残留応力を，内部の応力分布まで含めて簡単に非破壊的に測定できる計測法の必要性を述べた。次に，磁気ひずみ効果を用いる応力測定法についての従来の研究を，応力測定および塑性変形の影響の二つの面より概観し，さらに渦流探傷検査法との関連を述べ，本研究との関係を明らかにした。

第2章「磁気ひずみ効果の理論」においては，この研究の基礎となる応力と磁気量との関係を理論的に導いた。測定法の原理となる磁気ひずみ効果は，簡単な法則であり，応力以外の要因，すなわち，組成，組織，加工等によってできるだけ変化しないものが望ましい。これについては，磁化現象が可逆的に進行する

高磁界中の磁気ひずみ効果を用いるとよいことを論じた。次に，Bozorth らの理論を拡張して，磁気ひずみに異方性のある鉄の磁気ひずみ効果を計算し，その効果の大きさ，磁界に対する依存性を求めた。

第3章および第4章においては，第2章の結果を実験的に確かめた。

第3章「直流磁界による応力測定」では，磁束密度と応力との関係を，純鉄および0.8%までの炭素鋼について弾性域および塑性域において実験し，きわめてよい直線性で成り立つ1次関係式を求めることができた。この1次式は，塑性ひずみの大きさには無関係に，加工硬化領域でも近似的に同じ係数で応力測定に用いることができることがわかった。また，磁気ひずみ感度の炭素量依存性，塑性に伴う転位密度の増加に対する磁束密度の不変性について実験結果に考察を加えた。

第4章「交番磁界による応力測定」においては，高バイアス磁界中の可逆透磁率と応力との関係を求めた。関係式は，近似的に1次式で，磁気ひずみ感度は第2章の磁界依存性で予想される位置に大きなピークを持ち，このバイアスで応力測定を行うのがよいことが明らかになった。1次式の係数に対する影響は小さく，特に軟鋼では小さいが，保磁力等の補助的測定によって塑性ひずみを推定し，さらに応力測定の誤差を減少させることができた。

第5章および第6章においては，第4章の結果を用いて，軸の表面の残留応力および内部の残留応力分布を求める測定法の研究を行った。

まず，第5章「表面残留応力の測定」において，1軸塑性引張および水中に急冷した試験片に実際生じている残留応力を磁気的方法で測定し，X線応力測定法より得られた表面の残留応力値と比較した。熱処理残留応力の場合には，接線方向応力の影響を考慮すれば，軸方向X線応力と磁気的応力はよく一致した。また，軸方向残留応力の深さ方向の分布が求められる見透しを得た。塑性引張による残留応力は，X線応力測定により得られた相応力と一致することを示した。

第6章「内部残留応力の測定」では，軸の内部に生じている残留応力の測定法の研究を行った。交番磁界の周波数が高いときには，表面の磁気ひずみ効果のみが検出され，低周波では，内部まで含んだ磁気ひずみ効果が検出される。そこで，第4章で求められた可逆透磁率と応力の関係式と，交番磁界の表皮効果の理論を組み合せ，残留応力測定法を組み立てた。次に，二重管試験片を用い，中心部応力検出の実験を行って，その妥当性を立証した。さらに，任意の形をした軸方向残留応力分布も多周波数の交番磁界を用いる測定より求められることを論じた。

第7章「結論」においては，本研究において得られた成果を総括し，さらにこれに関連して将来行わなければならない研究について展望した。

付録「軸方向残留応力の一解析法」においては，任意の形をした未知の残留応力分布を多周波数における見掛け透磁率の測定値より求める解析法と，計算例を示した。

記号および単位

B	磁束密度
C	炭素量（重量パーセント）
H	磁界の強さ
I	磁化の強さ
I_s	飽和磁気の強さ
K	結晶磁気異方性定数
K_u	1軸磁気異方性定数
L	インダクタンス
L_0	空心インダクタンス
P	磁気ひずみの異方性
Q	磁界エネルギの無次元量
S	試験片の断面積
S	内部の透磁率変化による実効透磁変化についての感度
f	周波数
f_g	限界周波数
f/f_g	周波数比
m	磁化の強さの無次元量
p	磁気ひずみのエネルギの無次元量
q	微小磁界のエネルギの無次元量
α_i	磁化の強さの方向余弦（i=1, 2, 3)
β_i	磁界の方向余弦（i=1, 2, 3)
γ_i	観測方向または応力の方向余弦（i=1, 2, 3)
δ	浸透深さ
ε	ひずみ
ε_p	塑性ひずみ
η	充填率（コイル中の試験片の）
λ	磁気ひずみ定数
$\lambda_{100}, \lambda_{111}$	〔100〕および〔111〕方向の飽和磁気ひずみ
μ	透磁率，可逆透磁率，比透磁率

μ_0　真空の透磁率（MKS）
μ_{eff}　実効透磁率
μ_{obs}　ある周波数で測定して得られる見掛け透磁率
μ_r　可逆透磁率
μ_{rel}　比透磁率
π_{ij}　応力テンソルの成分（$i, j=1, 2, 3$）
ρ　固有抵抗
σ　応力
σ　電気伝導度
χ　磁化率，可逆磁化率，比磁化率
ω　角周波数
Φ　磁束
Λ　磁束密度についての磁気ひずみ感度
Λ_r　可逆透磁率についての磁気ひずみ感度

単位は，理論計算においてはM.K.S.A.有理単位系を用いた。それ以外のところでは，磁気系についてはC.G.S.系，電気系についてはM.K.S.A.系を用いた。また，機械系では工学系を用いた。主な単位についての換算表を示す。

換　算　表

量	記号	M.K.S. 系	C.G.S.系	C.G.S. 系で表した数値 / M.K.S.系で表した数値
磁束	Φ	Wb	Mx	10^8
磁束密度	B	Wb/㎡	G	10^4
磁化の強さ	I	Wb/㎡	G	7.98×10^2
磁界の強さ	H	A/m	Oe	1.256×10^{-2}
磁化率	χ	H/m	無名数	6.35×10^4
比磁化率	$\bar{\chi}$	無名数	―→	C.G.S. の$4\pi\chi$
透磁率	μ	H/m	無名数	7.97×10^5
比透磁率	$\bar{\mu}$	無名数	―→	C.G.S. のμ
真空の透磁率	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$H/m	1	7.97×10^5
反磁界係数	N	無名数		4π
インダクタンス	L	H	――	10^9
異方性定数	K	J/㎥	erg/㎤	10
磁気ひずみ	λ	無名数	無名数	1
電気伝導度	σ	1/Ωm	1/Ω㎝	10^{-2}
固有抵抗	ρ	Ωm	Ω㎝	10^2

		M.K.S. 系	C.G.S. 系	工学系で表した数値 / M.K.S.系で表した数値
力	W	N	kg	1/9.8
応力	σ	N/㎡	kg/mm²	$10^{-6}/9.8$
エネルギ	F	J	kg/m	1/9.8

第1章　緒　　論

1.1　緒言

機械および構造物の強度を決定するものは，静的および動的外力だけではない。外力がないときにも各部材に生じている残留応力も強度に大きな影響を与える。

残留応力の破壊に及ぼす影響は，破壊形式によって異なる。ぜい性破壊においては，その影響は極めて大きく，引張残留応力の存在する溶接構造物では，ほとんど零に近い応力で破壊が発生する場合さえあり，き裂の進行も残留応力の場に左右される。疲れ破壊では，圧縮残留応力は疲れ強度を上昇させ，引張残留応力は疲れ強度を減少させると考えられている。また，疲れき裂の発生は応力振幅によってきまり，残留応力は，平均応力としてき裂の進展に影響するであろうという研究も行われ，残留応力の役割がかなり解明されてきた。熱処理によっても各種の残留応力が発生し，破壊の原因となることが知られており，内部の3軸的な残留応力分布との関係が研究されている。座屈破壊

においては，残留応力は，偏心度，初期たわみとともに座屈強度を決定する一つの因子であることが認められ，残留応力の分布形状により影響が異なることが指摘されている。さらに，腐食の進行，腐食疲れ，腐食割れ等にも，残留応力は著しい役割を持っている。

このように，残留応力は材料強度に大きな影響を与えるが，現実の機械や構造物の強度を考えるときには，全数検査，したがって，非破壊的な手段で残留応力を測定する必要がある。しかし，その測定は非常に困難であって，残留応力の実態が十分に把握されているとは言い難い。

残留応力の測定には通常，応力解放の方法がとられている。しかし，この方法は，破壊法であり，被測定物の強度を低下させずに残留応力を求めることはできないという欠点を持っている。非破壊的な方法としては，X線回折を用いるX線応力測定法[1]，超音波の音速の変化を利用する応力測定法[2][3]，および本論文で述べる磁気ひずみ効果を利用する応力測定法がある。

現在最も広く用いられているのは，X線応力測定法である。この方法は，材料の結晶格子間隔の変化を測定するもので，本質的に非破壊であり，多くの特徴を持っている。しかし，表面より100分の数ミリメートルの薄い層内の応力の測定に限られる。

強度に影響を与えるのは，表面の応力だけでなく，内部の残留応力も関係する。内部の応力分布をX線で求めるためには，表面層を取り去る破壊法によらねばならない。そこで，内部の残留応力も測定できる，真の意味での非破壊的な残留応力測定法が要望されている。また，表面残留応力についても，X線法より簡便な測定器が必要となる場合もある。

本論文の目的は，従来断片的に使用されてきた磁気的応力測定法を取り上げ，その問題点を検討し，応力と磁気量との簡単な関係を求め，これを用いて，軸の強度に大きな影響を持つと思われる軸方向残留応力の非破壊的測定に適用し，軸の表面の残留応力および内部の残留応力分布を測定する方法を提案し，その有用性を確かめようとするものである。

1.2 磁気的応力測定についての従来の研究

磁気ひずみ効果を応力測定に利用する試みは古くからある。応力と磁気の相互作用に関連する主な研究を次に述べる。

磁気的性質の応力による変化および磁気体の寸法の磁化による変化二つの現象は，すでに1840年代より研究の対象になっていた。これらは，Joule 効果[4][5]，Guillemin 効果[6]，Wiedemann 効果[7]，Villari 効果[8] 等，発見者の名前によって呼ばれている。20世紀初頭の P. Weiss の磁区の存在の予想[9] にはじまり，多く研究の積み重ねにより，磁区の概念による強磁性体の磁化機構に関する理論が1930年代の前半に急速に形成された。この結果は，1939年の Becker と Döring[10] の著書[10] に集大成された。この中で，磁気と応力との関係が詳しく論じられている。

強磁性体における磁化の強さと応力との関係を，二つの側面よりながめることにする。第一は，強磁性体にマクロな応力が加えられたときの磁化の強さの変化であり，第二は，磁性体の内部に存在するミクロな不均一応力場の磁気的性質への影響である。

Becker, Kersten によるニッケルの磁化曲線の応力による変化の研究[11]，Preisach によるパーマロイの磁気ヒステリシス曲線の張力による角形化の研究[12] は，この時期にあらわれた，第一の側面に関する例であり，これらの磁気ひずみ効果の大きい強磁性体において，応力が磁化曲線に極めて大きい作用を及ぼすことを示している。この現象は，磁気ひずみ変換器として，各種の機械量の計測に利用されている[13][14]。

Bozorth, Williams[15][16] は，鉄－ニッケル合金の磁気ひずみ効果について研究した。彼らは，微小な応力による磁束密度の変化の大きさをあらわす磁気ひずみ感度を磁区理論を用いて計算し，磁束密度に関する依存性および 30～100 %Ni のパーマロイ領域におけるニッケル組成に関する依存性を，磁気異方性定数，磁気ひずみ定数および飽和磁化の強さによって与える，実験値とよい一致を示す式を得た。

Bozorth らの考察は，磁気ひずみ効果の小さい鉄および鋼に対しても適用できると考えられる。しかし，磁気ひずみ効果がほぼ等方的であるニッケルに対し，鉄においては，異方性がきわめて大きいので，これを考慮していない彼らの理論を直ちに適用することはできない。さらに，超音波受波器等と異なって，応力測定においては，大きな応力を取扱わなければならない。これらの点について，理論的考察を行うこととした。

Förster[17] らは，Ferrograph と呼ぶ磁気ヒステリシス環線観測用測定器を開発し，この方法で加工を受けたニッケル線内部の応力分布の測定を行った。Förster は，その後，鋼材についても各種の測定器を開発し，材質検査法および欠陥検査法の研究を行ってい

るが，マクロな残留応力についての研究は見られないようである。

安積，岩柳[18]は，ピアノ線においても，磁気ひずみ効果は十分に大きく，応力の非破壊的な測定が磁気的方法によって可能であることを示した。安積，岩柳，吉永[19][20]は，さらに一般構造用鋼材についても，プローブによって非破壊的に残留応力を測定できる磁気的方法を研究した。この方法は，最初，単軸応力と見なしてよい鉄骨構造物に対し適用されたが，吉永[21]によって，平板における2軸残留応力に拡張された。

仙頭[22]によって発表されたマグネゲージは，プローブ型測定器の他の一例であり，川田，三沢[23]によってその性能が研究された。2軸応力に対しては，主応力差のみを与えるという特徴をもっている。

篠田，川崎[24][25]は，直流法によって磁気測定を行い，炭素鋼に張力を加えたときの磁束密度の増加は，磁界の強さと無関係にある応力 σ_C で最大となること，σ_C は表面における圧縮残留応力の尺度として使用できることを明らかにした。完全に非破壊的測定とは言い難いが，注目すべき研究であると思われる。

これらの研究の結果，ある条件のもとでは残留応力測定が可能となったと考えられる。しかし，次に述べる強磁性体と応力の相互作用の第二の側面についての考察が不十分であるように思われる。

残留応力は，塑性ひずみに伴って発生している場合が多い。そこで，塑性ひずみと磁気ひずみ効果との関係を明らかにし，変形した材料中の応力と磁気的性質との対応をつける必要がある。この対応が塑性ひずみによって変化するものであれば，測定に大きな不確定要素が入り込むことになる。清田，緒方[26][27]は，初透磁率は，引張応力およびねじり応力に対し，弾性範囲の応力に対しては連続的に変化するが，降伏点を越えるとき，非常に大きな不可逆的変化が生じることを示した。

塑性と磁性との関係は，強磁性体の理論において主要な問題の一つであった。Becker, Döring[10] の著書においては，多くのページが内部応力（internal Stress）に費されている。当時は，軟磁性材料の透磁率を有限の値しか持ち得ないのは，材料内部における不規則な応力分布が，磁壁移動を妨げるためであり，この応力を彼らは“内部応力”と呼んだ。Brown[28] は，“内部応力” の原因は，転位のまわりに生じる応力であることを指摘し，転位と磁壁の相互作用を考えることによって，磁化曲線の飽和漸近則の理論を立てた。Neél[29] は，同様の相互作用が，不純物，空隙による静磁エネルギによって生じることを明らかにした。

Seeger, Kronmüller[30][31] らは，Brown の考えを発展させ，転位と磁壁との相互作用を詳細に研究し，強磁性体単結晶の初透磁率，保磁力，飽和漸近則，可逆透磁率と転位密度およびその分布との関係を求めた。この研究は，この分野における重要な研究であるが，実験が主としてニッケル単結晶について行われている点で，多結晶体である炭素鋼を取扱う本論文では，そのまま用いることはできない。

そこで，本研究においては，残留応力測定法における重要な側面として，磁性と塑性との関係を，実験的に，できるだけ詳細に研究し，同時に簡単な考察を行うこととした。

緒言で述べたように，残留応力は，表面の値のみでなく，内部の値をも求めることが必要である。

Förster[32] によって始められた渦流探傷法におけるように，磁気的測定法においては，その使用交番磁界の周波数を変化させることによって，磁界の浸透深さを変化させ，応力分布を求めることが考えられる。しかし，実際にこのような方法で応力を測定した例はないようである。本研究においては，磁気的方法の大きな利点として，この問題についての研究をも行うこととした。

第2章　磁気ひずみ効果の理論

2.1　緒言

強磁性体の磁気的性質は，応力によって大きく変化する。パーマロイなどの磁気ひずみ材料では，1 kg/mm^2 の応力で数十パーセント，あるいはそれ以上の磁束密度の変化を生じる[16]。鋼材の磁気ひずみ効果は比較的小さいが，それでも，1 kg/mm^{2}の応力で，磁束密度が 0.1～0.2% の変化を生じる。これは，電気抵抗などの他の物理的性質の応力による変化にくらべて非常に大きな値である。磁束密度などの磁気的性質は，磁界，組成，加工，熱処理などによって定まるが，応力による変化は，これらの因子による変化と同じオーダーであって，他の因子の影響をコントロールまたは補正すれば，応力の影響だけを取出すことができる十分な大きさを持っている。このことが，磁気的方法によって鋼材の応力の“非破壊的測定”を可能とする根拠となるのである。

しかしながら，磁性を与える前述の諸因子の影響もまた非常に大きいので，応力を精度よく測定するため

には，これらの影響をできるだけ小さくおさえる必要がある。

磁性理論[33]によれば，強磁性体の磁化は，三つの過程を経て飽和磁気に近づく。すなわち，弱磁界で磁化が磁界に比例する初透磁率範囲，磁化が急激に，不可逆的に増加する不可逆磁化範囲，ゆるやかに磁化の増加する回転磁化範囲である。これを図2-1に示す。

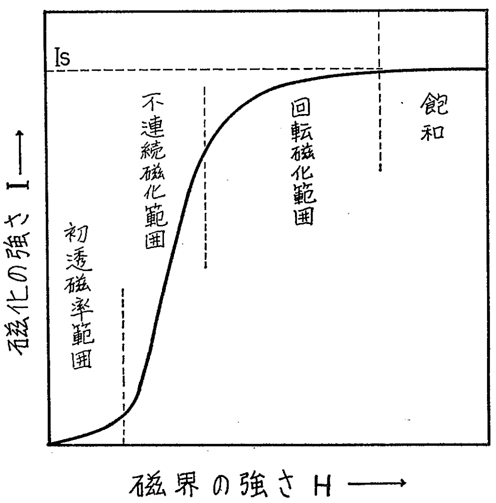


図 2-1 磁化曲線と磁化過程

第1段階の初透磁率は，材質中の内部応力 (internal stress) に逆比例することが示されている。内部応力は，Becker, Kersten の磁気の応力理論[10] において用いられた用語である。内部応力は，のちに Brown[28] Néel[29] によって，転位，不純物，空孔などによるものであることが明らかにされた。これらは，材料の処理，ばらつきで大きく変化するので，初透磁率を応力測定に利用するのは不適当であると考えられる。第2段階の不可逆磁化範囲の磁化過程も同様に材料内部の不規則性に左右される。

第3段階の回転磁化範囲の磁化過程は，可逆的であるばかりでなく，"内部応力" であらわされる不規則性によってほとんど変化しない磁気異方性によって定められる。そこで，この範囲の磁化現象を応力測定に利用すれば，化学成分の差，加工，熱処理の影響を受けずに応力が求められることが予想される。第2章では，回転磁化範囲の磁化現象を考察する。

2.2 高磁界における磁気ひずみ効果

強磁性体に磁界および応力が加えられたときの磁化の強さは，低磁界では，材料中の不均一性のために，理論的に与えることは困難である。しかし，高磁界においては，磁気異方性定数と磁気ひずみ定数によって記述することができる。

強磁性体結晶内の磁化の強さの方向は，次式で示す自由エネルギ F を極小にする条件で定まる[34]。

$$F=F_K+F_\sigma+F_H \tag{2.1}$$

この式で，F_K, F_σ, F_H は，それぞれ，結晶磁気異方性エネルギ，磁気ひずみによるエネルギ，磁界のエネルギであって，次式で与えられる[35]。

$$F_K=K(\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha_3^2+\alpha_3^2\alpha_1^2) \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}F_\sigma=&-\frac{3}{2}\lambda_{100}(\alpha_1^2\pi_{11}+\alpha_2^2\pi_{22}+\alpha_3^2\pi_{33})\\&-3\lambda_{111}(\alpha_1\alpha_2\pi_{12}+\alpha_2\alpha_3\pi_{23}+\alpha_3\alpha_1\pi_{31})\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$F_H=-HI_s(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3) \tag{2.4}$$

ここで

K：結晶磁気異方性定数
λ_{100}, λ_{111}：磁気ひずみ定数
π_{ij}：応力テンソル
H：磁界の強さ
I_s：飽和磁化の強さ
α_i：結晶軸に関する磁化の方向余弦
β_i：結晶軸に関する磁界の方向余弦

である。

低磁界で重要な役割りをはたす静磁エネルギは，高磁界では小さく，とくに多結晶では無視できる。

磁化の強さの方向 α_i が求められれば，観測方向の磁化の強さは

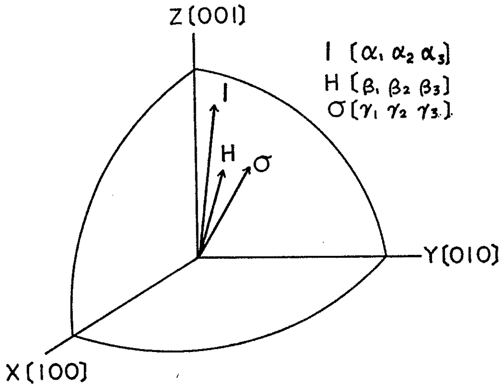


図 2-2 磁化容易軸と磁化の強さ I, 磁界の強さ H, 応力 σ の方向

$$I=I_s\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\gamma_i \tag{2.5}$$

によって，一つの結晶粒について与えられる。

ただし　γ_i：結晶軸に関する観測方向の方向余弦である。多結晶については，この結果をすべての結晶粒について平均を取ることによって求められる。

α_i を一般の形で解くのは困難であるが，つぎのような仮定が成り立つときは簡単に解ける。

1. 不連続磁化範囲は十分小さい磁界でおわり，各結晶粒の磁化の強さは，その結晶粒の磁界に最も近い容易磁化方向に向く。
2. 磁界および応力が小さく，$F_K \gg F_H, F_\sigma$ が成り立つ。
3. 応力は1軸応力で，磁界と同じ方向である。

このような考えで，Bozorth[15] らは，等方磁気ひずみ（$\lambda_{100}=\lambda_{111}$）の場合について，応力による磁束密度の変化を求めた。その結果は，鉄-ニッケル合金の測定値を説明することができた。しかし，等方磁気ひずめでない場合は計算していない。

$\lambda_{100}\neq\lambda_{111}$ の場合の近似式をまず求める。磁界 H の方向に加えられた1軸応力を σ とすると

$$\pi_{ij}=\sigma\beta_i\beta_j \qquad i,j=1,2,3 \tag{2.6}$$

で応力が与えられる。自由エネルギは，ラグランジュの未定係数 L を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned}F=&K\sum_{i\neq j}\alpha_i^2\alpha_j^2\\&-\frac{3}{2}\lambda_{100}\sigma\sum_i\alpha_i^2\beta_i^2-3\lambda_{111}\sigma\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j\\&-HI_s\sum_i\alpha_i\beta_i\\&+L(\sum_i\alpha_i^2-1)\end{aligned} \tag{2.7}$$

α_i の決定方程式は

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha_i}=0 \qquad i=1,2,3 \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2-1=0 \tag{2.9}$$

である。(2.8) より

$$\begin{aligned}&2K\alpha_i(1-\alpha_i^2)\\&-3\lambda_{100}\sigma\alpha_i\beta_i^2-3\lambda_{111}\sigma\beta_i\sum_{i\neq j}\alpha_i\beta_j\\&-HI_s\beta_i+2L\alpha_i=0\\&\qquad i=1,2,3\end{aligned}$$

が得られる。これを変形すれば

$$\begin{aligned}&2K\alpha_i^3-2(K+L)\alpha_i\\&+3(\lambda_{100}-\lambda_{111})\sigma\alpha_i\beta_i^2\end{aligned}$$

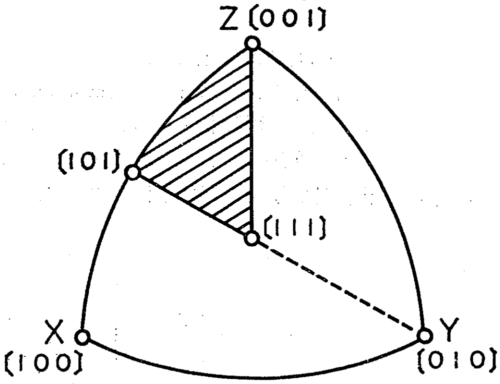


図 2-3　結晶粒方向についての平均範囲

$$\begin{aligned}&+3\lambda_{111}\sigma\beta_i\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\beta_j+HI_s\beta_i=0\\&\qquad i=1,2,3\end{aligned} \tag{2.10}$$

となる。磁界および応力が小さく，磁界の方向が図2-3の斜線の中にあるときは，磁化の強さの方向は，〔001〕に非常に近いと考えてよい。そこで，α_1，$\alpha_2\ll1$，$\alpha_3=1$ としてよい。これを (2.10) に代入し，α_1,α_2,σ の2次以上を省略すれば

$$\begin{aligned}&-2(K+L)\alpha_1+3\lambda_{111}\sigma\beta_1\beta_3+HI_s\beta_1=0\\&-2(K+L)\alpha_2+3\lambda_{111}\sigma\beta_2\beta_3+HI_s\beta_2=0\\&-2L+3\lambda_{100}\sigma\beta_3^2+HI_s\beta_3=0\end{aligned} \tag{2.11}$$

が得られる。2次以上をさらに省略すれば

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{3\lambda_{111}\sigma\beta_3+HI_s}{2K}\beta_1\\\alpha_2&=\frac{3\lambda_{111}\sigma\beta_3+HI_s}{2K}\beta_2\end{aligned} \tag{2.12}$$

が得られる。磁界の方向の磁化の強さ I は

$$\begin{aligned}I&=I_s\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\beta_i\\&=I_s\left\{\beta_3+\frac{3\lambda_{111}\sigma\beta_3+HI_s}{2K}(\beta_1^2+\beta_2^2)\right\}\\&=I_s\left\{\beta_3+\frac{HI_s}{2K}(1-\beta_3^2)+\frac{3\lambda_{111}\sigma}{2K}\beta_3(1-\beta_3^2)\right\}\end{aligned} \tag{2.13}$$

より求められる。

多結晶については，単結晶の結果を平均すればよい。その方向は，図2-3の斜線の範囲で代表させればよい。平均を，$\overline{\beta_3}$ などで表せば

$$\overline{\beta_s} = 0.835$$
$$\overline{\beta_s^2} = 0.701$$
$$\overline{\beta_s^3} = 0.599$$

であるから

$$\bar{I} = 0.835\, I_s + 0.299 \frac{I_s^2}{2K} H + 0.236 \frac{3\lambda_{111}\sigma}{2K} I_s \qquad (2.14)$$

が得られる。$\sigma = 1\,\mathrm{kg/mm^2}$ に対する磁化の強さの変化は，鉄について

$$\lambda_{111} = -21.2\times10^{-6}$$
$$K = 4.2\times10^4\,\mathrm{J/m^2}$$
$$\sigma = 9.8\times10^6\,\mathrm{N/m^2}$$
$$I_s = 2.15\,\mathrm{wb/m^2}$$

であるから

$$\Delta I = 0.236 \frac{3\lambda_{111}\sigma}{2K} I_s \qquad (2.15)$$
$$= -0.0038\,\mathrm{wb/m^2}$$
$$= -38\,\mathrm{G}$$

磁気ひずみ感度を，当位応力あたりの磁束密度の変化とすれば，感度 Λ は

$$\Lambda = -38\,\mathrm{G/kg/mm^2}$$

となる。実測値は第3章に示すように，純鉄で，-31〜-38，炭素鋼を炭素量0に外挿した値が-42であって，この簡単な理論とよく一致する。

(2.15) 式の特徴は，磁気ひずみ出力が無次元量 $3\lambda_{111}\sigma/2K$ で定まることである。そこで用いられる磁気ひずみ定数は λ_{111} であって，多結晶の飽和磁気ひずみ $\bar{\lambda}$ ではない。$\bar{\lambda}$ は

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda_{100} + 3\lambda_{111}}{5} \qquad (2.16)$$

で与えられ，等方磁気ひずみの場合には

$$\lambda_{100} = \bar{\lambda}_{111} = \lambda$$

であるが，一般には $\bar{\lambda} \neq \lambda_{111}$ である。鉄の場合には[36]

$$\lambda_{100} = 20.7\times10^{-6}$$
$$\lambda_{111} = -21.2\times10^{-6}$$
$$\bar{\lambda} = -4.6\times10^{-6}$$

となり，大きな差を生じる。鉄の磁束密度は，低磁界で増加し，高磁界で減少することはよく知られているが，これは，回転磁化範囲では，λ_{111} がきいて磁束密度が減少するからである。

2.3 1軸応力についての磁気ひずみ効果

応力，磁界，観測方向の三つの方向が一般の場合の磁気ひずみ効果を理論的に求めることは非常に複雑である。実験的にも，理論と比較できる効果を得ることは困難である。そこで，次に最も簡単な，磁界の方向に作用する1軸応力の場合について，近似を進めて計算する。

2.3.1 磁気ひずみ効果

磁化曲線上の一点で，さらに応力 σ と微小な磁界 h が加わったときの磁化の強さ I は，次式であらわされる。

$$I = I_0(H) + a_{11}h + a_{12}\sigma + a_{21}h^2 + a_{22}h\sigma + a_{23}\sigma^2 + \cdots\cdots \qquad (2.17)$$

第1項は，応力がないときの通常の磁化曲線である。a_{11} は，$\sigma=0$ のときの通常の意味の可逆磁化率 χ_{r0} である。第3項は，微小な応力に対する磁気ひずみ効果をあらわす。Bozorth[15] にならって

$$a_{12} = \Lambda \qquad (2.18)$$

とあらわす。第4項より第6項までは2次効果であるが，重要な意味を持っている。可逆透磁率 χ_r は

$$\chi_r = \left(\frac{\partial I}{\partial h}\right)_{h=0} = a_{11} + a_{22}\sigma \qquad (2.19)$$

となり，応力に比例して変化する。(2.17) で3次以上の効果を考慮すれば，(2.19) に σ の2次の項も入るが，これは省略する。

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \chi_{r0} \\ a_{22} &= \Lambda_r \end{aligned}\right\} \qquad (2.20)$$

と書けば，Λ_r は，可逆透磁率についての磁気ひずみ感度である。これらを整理すれば

$$I = I_0(H) + \chi_{r0}h + \Lambda\sigma(1 + A\sigma) + \Lambda_r h\sigma \qquad (2.21)$$

$$\chi_r = \chi_{r0} + \Lambda_r\sigma \qquad (2.22)$$

となる。ここで，χ_{r0}, Λ, Λ_r, A もまた H の関数である。

これらの係数を計算するには，(2.10)を適当な近似で解けばよい。H が0でないこと，h および σ の2次の項まで計算することが前節とちがっている。

2.3.2 単結晶

(2.10) において

$$Q = \frac{HI_s}{2K},\quad q = \frac{hI_s}{2K},\quad l = \frac{L}{K}$$
$$p = \frac{3\lambda_{111}\sigma}{2K},\quad P = \frac{\lambda_{100} - \lambda_{111}}{\lambda_{111}} \qquad (2.23)$$

とおいて無次元化すれば，基本式は

$$\alpha_i^3 - l\alpha_i + \beta_i Q + \beta_i q + \beta_i\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\beta_j + P\alpha_i\beta_i\right)p = 0 \qquad (2.24)$$

$$\sum_{j=1}^{3}\alpha_j^2 - 1 = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (2.25)$$

となる。ただし，H と h の方向は一致しており，$H \gg h$ とする。鉄の場合に

$$\sigma = 100\mathrm{kg/mm^2}$$
$$H = 500\mathrm{Oe}$$

とすれば

$$p \approx -0.7$$
$$Q \approx 1.0$$

となる。

(2.24) および (2.25) の連立4元3次方程式を次の仮定のもとに解く。

(1) $H=0$ では，磁化は容易磁化方向 <100> に向いている。微小な磁界が加えられると，磁化は，磁壁移動によって，全部〔100〕方向に向いてしまう。

(2) 磁界の強さが増加すると，磁化ベクトルは，回転によって磁界の方向に近づく。

(3) 磁界 h による磁界のエネルギおよび磁気ひずみエネルギは結晶磁気異方性エネルギにくらべ小さい。

そこで，基礎方程式を解くのに，まず H のみが作用した場合の正確な解を求め，h および σ による項は摂動項として求める。

基礎式の解は，p, q についての Taylor 展開であらわされるものと考える。

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_i = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \cdots\cdots \\ &l = l_0 + l_1 + l_2 + \cdots\cdots \\ &\quad i = 1,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right\} \qquad (2.26)$$

右辺の1，2，3項は，それぞれ，p, q についての0次，1次，2次項をあらわす。(2.26)を基礎式に入れて，同次の項を比較すると，2次の項までについてつぎの結果を得る。

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{i0}^3 - l_0\alpha_{i0} + Q\beta_i = 0 \\ &\sum_i \alpha_{i0}^2 - 1 = 0 \\ &\quad i = 1,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right\} \qquad (2.27)$$

$$\left.\begin{aligned} &(3\alpha_{i0}^2 - l_0)\alpha_{i1} - l_1\alpha_{i0} \\ &\quad = -\{q + \beta_i(\sum_j \alpha_{j0}\beta_j + P\alpha_{i0}\beta_i)p\} \\ &\sum_i \alpha_{i0}\alpha_{i1} = 0 \\ &\qquad i = 1,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right\} \qquad (2.28)$$

$$\left.\begin{aligned} &(3\alpha_{i0}^2 - l_0)\alpha_{i2} - l_2\alpha_{i0} \\ &\quad = -\{(3\alpha_{i0}\alpha_{i1} - l_1)\alpha_{i1} \\ &\qquad + \beta_i(\sum_j \alpha_{j1}\beta_j + P\alpha_{i1}\beta_i)p\} \\ &2\sum_i \alpha_{i0}\alpha_{i2} + \sum_i \alpha_{i1}^2 = 0 \\ &\qquad i = 1,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

0次の項についての (2.27) は，磁化曲線をあらわす。磁化曲線は，単結晶の主要軸，〔100〕，〔110〕，〔111〕方向については計算されている。また，飽和に非常に近い磁界に対しては，飽和漸近則として計算されている。しかし，中間の磁界に対する一般の方向もしくは多結晶については計算されていないようである。

0次の項の (2.27) は，4元3次連立方程式であり，逐次近似で解く。1次の項の (2.28)，2次の項の (2.29) は，ともに連立1次方程式であり，p と q に関する項を分離して解くことができる。

このようにして求められた方向余弦 α_i より，磁化の強さ I は，与えられた磁界の強さ Q およびその方向余弦 β_i に対し，p, q の2次の項まですべて分離して (2.17) の形で求めることができる。すなわち，ある結晶方位を持った単結晶についての磁化曲線，可逆磁化率，1次および2次の磁気ひずみ効果，可逆磁化率についての磁気ひずみ効果がすべて求められたことになる。

2.3.3 多結晶

多結晶の磁気ひずみ効果は，単結晶の磁気ひずみ効果の平均として求められる。著しい集合組織が発達しているときには，適当な重みをつけて平均する必要がある。ここでは結晶粒の方位が，一様に分布しているものとして平均を取ることにする。平均は，前節と同様に，単位球面の 1/48 にあたる図2-4の太線で示す球面三角形上で行えばよい。この領域をDとする。磁界の方向は，単位球面上の極座標で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1 = \sin\theta\cos\phi \\ &\beta_2 = \sin\theta\sin\phi \\ &\beta_3 = \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (2.30)$$

θ, ϕ の関数 f の平均値 $\bar{f}$ は

$$\bar{f} = \frac{48}{4\pi}\iint_D f\sin\theta\, d\theta d\phi \qquad (2.31)$$

で与えられる。極座標 (θ, ϕ) を，図2-4に示すように，(ψ, ϕ) に変換すれば，領域 D は，正方形の領域 D' に変換される。ただし

$$\theta = \cot^{-1}(\tan\psi\sin\phi) \qquad (2.32)$$

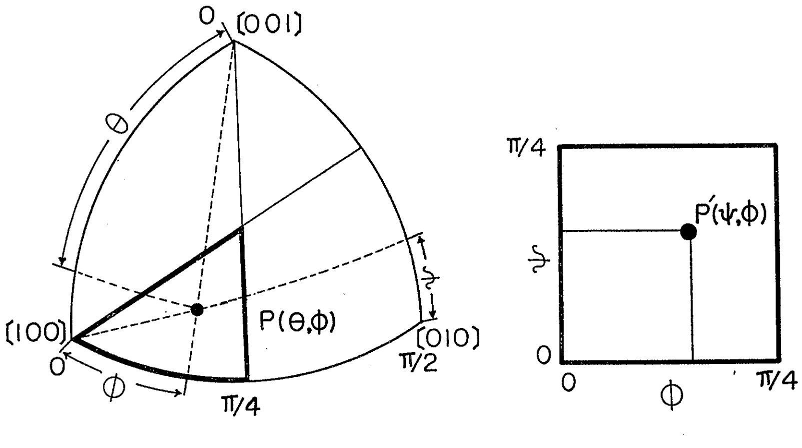
である。

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi} = \frac{\sec^2\psi\sin\phi}{1+\tan^2\psi\ \sin^2\phi} \qquad (2.33)$$

$$\sin\theta = \frac{1}{(1+\tan^2\psi\sin^2\phi)^{1/2}} \qquad (2.34)$$

であるから，平均値は

$$\bar{f} = \frac{12}{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/4}\frac{f\sec^2\psi\sin\phi}{(1+\tan^2\psi\sin^2\phi)^{3/2}}\,d\phi d\psi \qquad (2.35)$$



(a) 領 域 D　　(b) 領 域 D′

図 2-4　結晶粒方向の領域の変換

によって計算される。

前節で単結晶について得られた磁化についての5個の量，$I_0(H)$，χ_{r0}，$\varDelta$，$\varDelta_r$，A は，(2.35) を用いて，多結晶の値が計算できる。以上の計算は，かなり複雑なので，すべて計算機によって行った。そのフローチャートを図2-5に，$Q=1$ (約500 Oe) の場合の計算例を表2-1に示す。第1列，第2列は磁界の方向 ϕ，θ であって，ともに10分割 (ϕ，ψ で10等分) してある。第3列より第8列までは，磁化の強さの無次元化された式

$$\frac{I}{I_s}=A_1+A_2q+A_3p+\frac{1}{2}A_4q^2+A_5qp+\frac{1}{2}A_6p^2 \tag{2.36}$$

の中の6個の係数 $A_i(i=1,\cdots\cdots6)$ を与える。第9列は，A_1 を求めるときの逐次近似の回数である。50回以上近似を繰返したものは，第6，7，8列を0としている。このことが平均値に与える影響は無視できる。最後の列は，シンプソンの1/3則の積分公式の係数である。一つの行が，ある方向 ϕ，θ の Q の大きさのバイアス磁界に対する係数を与え，最後の行 (HEIKIN) が，多結晶に対する値を与える。

A_i はすべて無次元量であらわされているため，次の変換を行う。

$$I_0(H)=I_sA_1=21.500A_1\quad \mathrm{G}$$

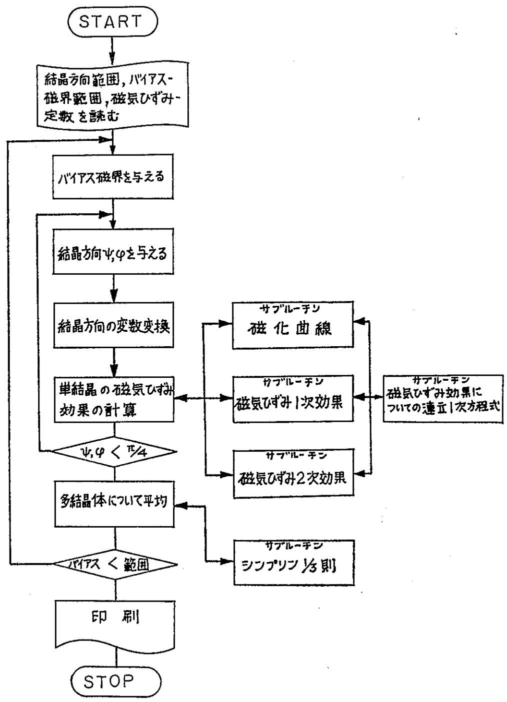


図 2-5　磁気ひずみ効果の計算フローチャート

表 2-1 計算結果の一例

FIELD= 1.00

PHI	THETA	MAG	KAI	LAMDA	KAIR	LAMDAR	LAMDAS	N
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 1.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 4.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 2.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 4.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 2.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 4.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 2.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 4.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 2.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 4.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 1.0
4.50	0.00	0.99923	0.00077	0.00229	-0.00116	-0.00192	-0.00118	2 4.0
4.50	0.35	0.99923	0.00078	0.00230	-0.00117	-0.00193	-0.00118	2 16.0
4.50	0.71	0.99921	0.00079	0.00234	-0.00119	-0.00196	-0.00121	2 8.0
4.50	1.08	0.99919	0.00082	0.00242	-0.00123	-0.00203	-0.00124	2 16.0
4.50	1.46	0.99915	0.00085	0.00253	-0.00128	-0.00212	-0.00130	2 8.0
4.50	1.86	0.99910	0.00090	0.00268	-0.00136	-0.00224	-0.00138	2 16.0
4.50	2.29	0.99903	0.00097	0.00288	-0.00146	-0.00241	-0.00148	2 8.0
4.50	2.75	0.99895	0.00106	0.00314	-0.00160	-0.00263	-0.00161	2 16.0
4.50	3.26	0.99883	0.00118	0.00348	-0.00177	-0.00292	-0.00179	2 8.0
4.50	3.83	0.99868	0.00133	0.00394	-0.00201	-0.00330	-0.00203	2 16.0
4.50	4.49	0.99847	0.00154	0.00454	-0.00232	-0.00382	-0.00234	2 4.0
9.00	0.00	0.99697	0.00311	0.00903	-0.00470	-0.00764	-0.00473	2 2.0
9.00	0.71	0.99695	0.00313	0.00908	-0.00473	-0.00768	-0.00475	2 8.0
9.00	1.42	0.99689	0.00319	0.00925	-0.00482	-0.00783	-0.00484	2 4.0
9.00	2.15	0.99680	0.00329	0.00954	-0.00497	-0.00807	-0.00499	2 8.0
9.00	2.91	0.99665	0.00344	0.00996	-0.00520	-0.00843	-0.00521	2 4.0
9.00	3.71	0.99646	0.00364	0.01054	-0.00550	-0.00893	-0.00552	2 8.0
9.00	4.56	0.99620	0.00391	0.01132	-0.00591	-0.00958	-0.00592	2 4.0
9.00	5.48	0.99586	0.00426	0.01233	-0.00645	-0.01045	-0.00646	2 8.0
9.00	6.48	0.99542	0.00473	0.01364	-0.00716	-0.01157	-0.00715	2 4.0
9.00	7.61	0.99485	0.00534	0.01536	-0.00810	-0.01305	-0.00808	2 8.0
9.00	8.89	0.99409	0.00616	0.01763	-0.00936	-0.01502	-0.00931	2 2.0
13.50	0.00	0.99332	0.00708	0.01988	-0.01082	-0.01710	-0.01073	2 4.0
13.50	1.05	0.99328	0.00713	0.02000	-0.01089	-0.01720	-0.01079	2 16.0
13.50	2.12	0.99316	0.00725	0.02036	-0.01109	-0.01752	-0.01098	2 8.0
13.50	3.21	0.99295	0.00748	0.02098	-0.01143	-0.01805	-0.01132	2 16.0
13.50	4.34	0.99265	0.00781	0.02189	-0.01194	-0.01884	-0.01180	2 8.0
13.50	5.52	0.99224	0.00826	0.02314	-0.01263	-0.01993	-0.01248	2 16.0
13.50	6.78	0.99169	0.00886	0.02478	-0.01356	-0.02136	-0.01337	2 8.0
13.50	8.14	0.99099	0.00964	0.02692	-0.01478	-0.02323	-0.01454	2 16.0
13.50	9.63	0.99008	0.01067	0.02966	-0.01639	-0.02567	-0.01607	2 8.0
13.50	11.28	0.98891	0.01203	0.03320	-0.01853	-0.02884	-0.01809	2 16.0
13.50	13.14	0.98740	0.01384	0.03780	-0.02140	-0.03303	-0.02079	2 4.0

表 2-1 計算結果の一例

18.00	0.00	0.98850	0.01281	0.03427	-0.01990	-0.03024	-0.01937	3	2.0
18.00	1.39	0.98844	0.01288	0.03447	-0.02002	-0.03042	-0.01948	3	8.0
18.00	2.80	0.98824	0.01311	0.03508	-0.02038	-0.03097	-0.01981	3	4.0
18.00	4.24	0.98790	0.01350	0.03613	-0.02099	-0.03190	-0.02039	3	8.0
18.00	5.73	0.98740	0.01408	0.03766	-0.02190	-0.03326	-0.02124	3	4.0
18.00	7.29	0.98673	0.01487	0.03974	-0.02316	-0.03513	-0.02241	3	8.0
18.00	8.95	0.98585	0.01593	0.04245	-0.02483	-0.03759	-0.02397	3	4.0
18.00	10.72	0.98472	0.01731	0.04592	-0.02705	-0.04079	-0.02601	3	8.0
18.00	12.65	0.98330	0.01911	0.05034	-0.02997	-0.04492	-0.02868	3	4.0
18.00	14.78	0.98152	0.02147	0.05592	-0.03386	-0.05027	-0.03222	3	8.0
18.00	17.17	0.97928	0.02461	0.06298	-0.03913	-0.05729	-0.03695	3	2.0
22.50	0.00	0.98286	0.02049	0.05143	-0.03264	-0.04714	-0.03105	3	4.0
22.50	1.73	0.98277	0.02061	0.05173	-0.03282	-0.04741	-0.03122	3	16.0
22.50	3.47	0.98249	0.02096	0.05263	-0.03340	-0.04824	-0.03174	3	8.0
22.50	5.25	0.98200	0.02157	0.05416	-0.03438	-0.04967	-0.03263	3	16.0
22.50	7.09	0.98130	0.02246	0.05639	-0.03584	-0.05175	-0.03394	3	8.0
22.50	9.01	0.98037	0.02368	0.05938	-0.03785	-0.05458	-0.03575	3	16.0
22.50	11.03	0.97917	0.02530	0.06325	-0.04054	-0.05831	-0.03817	3	8.0
22.50	13.20	0.97766	0.02742	0.06814	-0.04412	-0.06314	-0.04136	3	16.0
22.50	15.54	0.97580	0.03018	0.07425	-0.04887	-0.06937	-0.04556	3	8.0
22.50	18.10	0.97356	0.03380	0.08178	-0.05526	-0.07743	-0.05119	3	16.0
22.50	20.94	0.97091	0.03860	0.09102	-0.06408	-0.08803	-0.05890	3	4.0
27.00	0.00	0.97693	0.03047	0.07037	-0.05036	-0.06826	-0.04668	3	2.0
27.00	2.05	0.97681	0.03063	0.07077	-0.05064	-0.06865	-0.04693	3	8.0
27.00	4.11	0.97645	0.03114	0.07199	-0.05149	-0.06983	-0.04768	3	4.0
27.00	6.22	0.97584	0.03200	0.07405	-0.05297	-0.07187	-0.04898	3	8.0
27.00	8.39	0.97497	0.03326	0.07702	-0.05515	-0.07484	-0.05091	3	4.0
27.00	10.65	0.97382	0.03500	0.08097	-0.05818	-0.07888	-0.05358	3	8.0
27.00	13.02	0.97237	0.03729	0.08602	-0.06227	-0.08421	-0.05718	3	4.0
27.00	15.55	0.97061	0.04029	0.09230	-0.06775	-0.09112	-0.06198	3	8.0
27.00	18.25	0.96855	0.04419	0.09995	-0.07513	-0.10009	-0.06847	3	4.0
27.00	21.19	0.96622	0.04931	0.10915	-0.08528	-0.11188	-0.07742	3	8.0
27.00	24.42	0.96378	0.05610	0.12001	-0.09979	-0.12785	-0.09034	3	2.0
31.50	0.00	0.97158	0.04332	0.08991	-0.07587	-0.09522	-0.06846	3	4.0
31.50	2.35	0.97144	0.04354	0.09042	-0.07627	-0.09576	-0.06882	3	16.0
31.50	4.73	0.97103	0.04421	0.09198	-0.07751	-0.09743	-0.06992	3	8.0
31.50	7.15	0.97033	0.04537	0.09461	-0.07967	-0.10028	-0.07183	3	16.0
31.50	9.64	0.96935	0.04706	0.09836	-0.08287	-0.10446	-0.07468	3	8.0
31.50	12.21	0.96809	0.04938	0.10331	-0.08736	-0.11018	-0.07869	3	16.0
31.50	14.91	0.96655	0.05245	0.10954	-0.09349	-0.11777	-0.08419	3	8.0
31.50	17.75	0.96479	0.05645	0.11713	-0.10186	-0.12778	-0.09178	3	16.0
31.50	20.79	0.96291	0.06166	0.12617	-0.11346	-0.14111	-0.10248	3	8.0
31.50	24.05	0.96112	0.06850	0.13668	-0.13015	-0.15947	-0.11828	3	16.0
31.50	27.59	0.95996	0.07762	0.14852	-0.15587	-0.18667	-0.14370	4	4.0

表 2-1 計算結果の一例

36.00	0.00	0.96839	0.06016	0.10859	-0.11649	-0.13358	-0.10272	4	2.0
36.00	2.65	0.96824	0.06044	0.10924	-0.11709	-0.13438	-0.10329	4	8.0
36.00	5.32	0.96780	0.06130	0.11119	-0.11894	-0.13682	-0.10504	4	4.0
36.00	8.03	0.96708	0.06278	0.11446	-0.12217	-0.14102	-0.10813	4	8.0
36.00	10.81	0.96610	0.06493	0.11910	-0.12703	-0.14724	-0.11281	4	4.0
36.00	13.68	0.96489	0.06788	0.12514	-0.13395	-0.15588	-0.11957	4	8.0
36.00	16.67	0.96353	0.07178	0.13761	-0.14366	-0.16765	-0.12924	4	4.0
36.00	19.81	0.96216	0.07686	0.14151	-0.15741	-0.18381	-0.14334	4	8.0
36.00	23.12	0.96108	0.08345	0.15178	-0.17761	-0.20684	-0.16494	4	4.0
36.00	26.66	0.96086	0.09203	0.16310	-0.20957	-0.24246	-0.20119	4	8.0
36.00	30.45	0.96281	0.10319	0.17457	-0.26805	-0.30755	-0.27345	4	2.0
40.50	0.00	0.97086	0.08369	0.12452	-0.20209	-0.20991	-0.17727	4	4.0
40.50	2.93	0.97072	0.08403	0.12534	-0.20314	-0.21133	-0.17849	4	16.0
40.50	5.87	0.97031	0.08506	0.12779	-0.20638	-0.21570	-0.18226	4	8.0
40.50	8.86	0.96967	0.08681	0.13188	-0.21213	-0.22335	-0.18903	4	16.0
40.50	11.92	0.96884	0.08937	0.13759	-0.22102	-0.23499	-0.19967	4	8.0
40.50	15.06	0.96793	0.09282	0.14489	-0.23419	-0.25189	-0.21581	4	16.0
40.50	18.31	0.96713	0.09730	0.15366	-0.25373	-0.27646	-0.24059	4	8.0
40.50	21.70	0.96678	0.10294	0.16359	-0.28380	-0.31367	-0.28059	4	16.0
40.50	25.26	0.96754	0.10971	0.17387	-0.33386	-0.37535	-0.35172	4	8.0
40.50	29.02	0.97076	0.11657	0.18174	-0.43023	-0.49616	-0.50184	4	16.0
40.50	33.00	0.97964	0.11432	0.17246	-0.66727	-0.81039	-0.92653	5	4.0
45.00	0.00	0.99996	0.13658	0.13660	0.00000	0.00000	0.00000	50	1.0
45.00	3.19	0.99983	0.00284	0.00332	0.00000	0.00000	0.00000	50	4.0
45.00	6.39	0.99933	0.00107	0.00278	-0.12632	-0.12948	-0.13294	50	2.0
45.00	9.63	0.99853	0.00207	0.00596	-0.01269	-0.01691	-0.02125	50	4.0
45.00	12.94	0.99749	0.00367	0.01027	-0.00784	-0.01493	-0.02224	8	2.0
45.00	16.32	0.99633	0.00568	0.01536	-0.01262	-0.02354	-0.03504	8	4.0
45.00	19.81	0.99524	0.00802	0.02067	-0.01899	-0.03437	-0.05102	8	2.0
45.00	23.43	0.99453	0.01040	0.02512	-0.02717	-0.04731	-0.07001	7	4.0
45.00	27.19	0.99477	0.01197	0.02656	-0.03685	-0.06119	-0.09011	7	2.0
45.00	31.13	0.99678	0.01009	0.01989	-0.04247	-0.06643	-0.09687	6	4.0
45.00	35.26	1.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	7	1.0
HEIKINCHI	=	0.97880	0.04823	0.08985	-0.11155	-0.13167	-0.11063		

$$\overline{\mu_{r0}}=\frac{I_s^2}{2K\mu_0}A_2+1=43.78A_2+1$$

$$\Lambda=\frac{3\lambda_{111}I_s}{2K}A_3=-159.6A_3\ \mathrm{G/kg/mm^2}$$

$$\Lambda_r=\frac{3\lambda_{111}I_s^2}{4K}A_4=-0.3251A_5/\mathrm{kg/mm^2}$$

$$A=\frac{A_6}{2A_3}\ \frac{3\lambda_{111}}{2K}=-0.0037\frac{A_6}{A_3}/\mathrm{kg/mm^2}$$

このようにして得られた結果を図 2-6 以降に示す。

これらの図中に，第 3 章以降に得られた実験値も同時に示す。本章の理論が，定性的に非常によく高磁界における磁気ひずみ効果を説明できることがわかる。定量的にもかなりよい一致が見られた。たとえば，Λ_r においては 500Oe における感度のピークの存在を正確に与えるが，その絶対値については，材料によってはよく一致するものがあり，差の大きい場合では，実測値が60%も大きいものがある。

1 軸応力による磁気ひずみ効果の理論は，次のようにまとめられる。

(1) 高磁界の磁気ひずみ効果を，回転磁化機構を仮定して理論的に求めることができた。

(2) 可逆透磁率が求められた。実験的に観測されている 400 Oe 付近の変曲点も理論的に得られた。

(3) 磁束密度についての磁気ひずみ感度 Λ の磁界依存性が求められた。1 kg/mm² の引張応力に対し，磁界 0 において約−0.2%の変化が生じる。磁界の増加に伴って，Λ は単調に減少する。実験値との一致はよい。

(4) 可逆透磁率についての感度 Λ_r の磁界依存性が求められた。500 Oe 付近における著しいピークを理論的に求めることができた。そのピークにおいては，約 2 %/kg/mm² の感度があり，非常に大きな効果である。

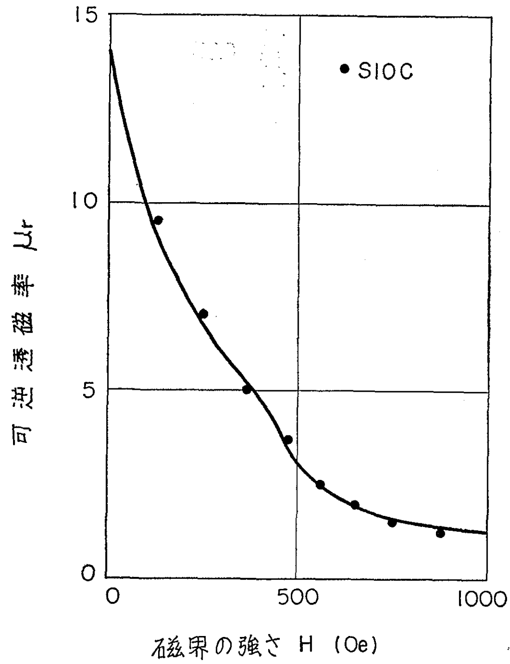


図 2-7　可逆透磁率

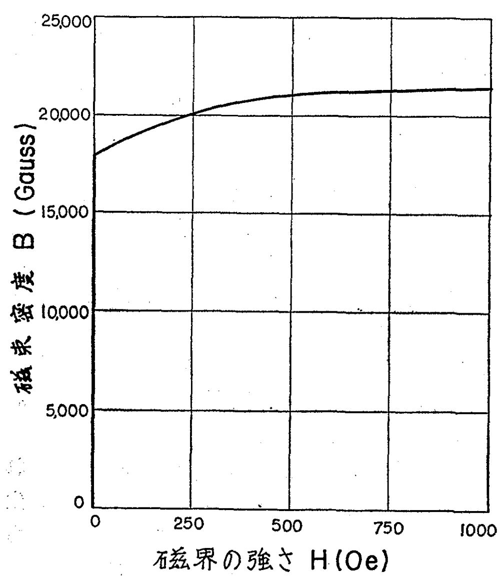


図 2-6　磁化曲線

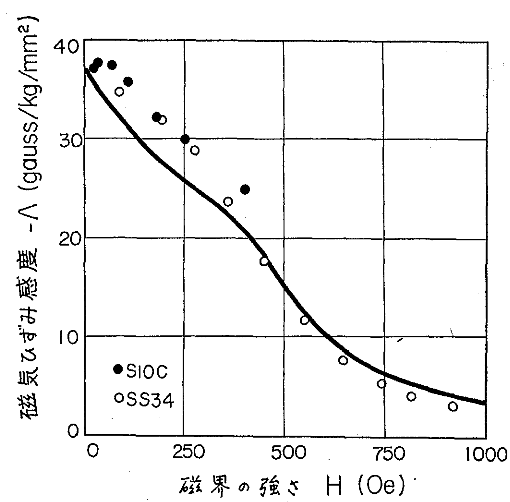


図 2-8　磁気ひずみ感度 Λ

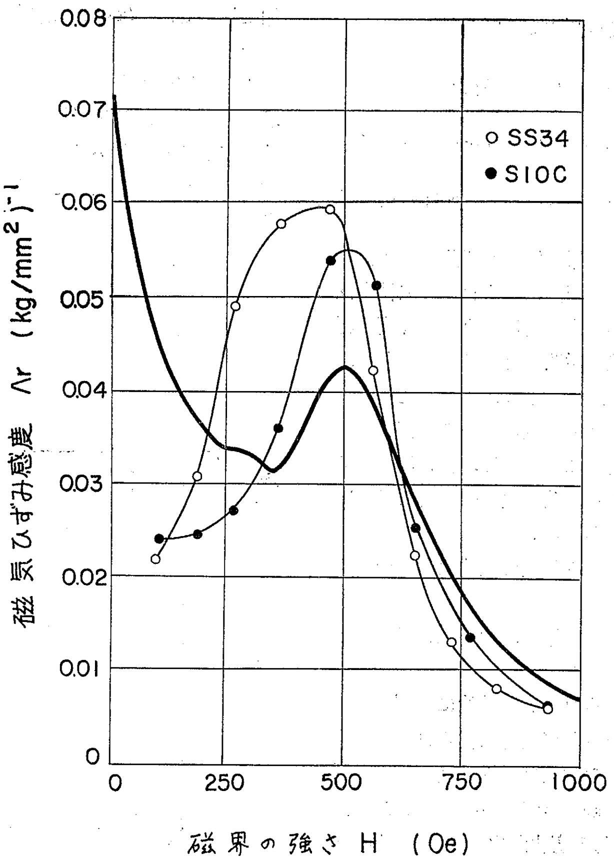


図 2-9 磁気ひずみ感度 Λ_r

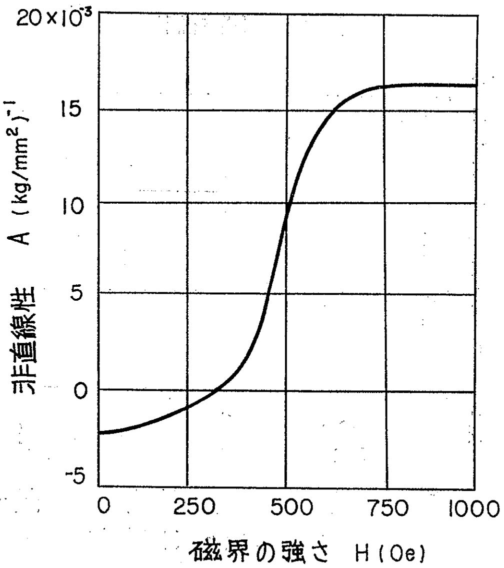


図 2-10 磁気ひずみ効果の2次項

(5) 磁束密度の応力に対する変化の非直線性も求められた。低磁界では非直線係数 A が負，高磁界では正となる。実際にもこのような傾向があることが次章以下で示される。

2.4 2軸応力についての磁気ひずみ効果

2軸応力状態での磁気ひずみ効果については，吉永[21]によって実験的研究が行われているが，理論的には不明なことが多い。1軸応力の場合には，理論と比較しやすい実験を行うことができるが，2軸応力の場合には，磁気的および応力的に両方が同時に理想的であるような実験を行うことが困難であるからである。そこで，もっとも簡単な場合として，1軸応力の場合と同様に，細長い棒の軸方向に磁界を加えられ，これと直角方向に応力が加えられる場合に，磁界方向に生じる磁化の強さの変化を考えることにする。この応力は，棒軸に直角な面内の二つの主応力があらわされる。この二つの主応力の軸方向の磁化変化に対する効

果は，対称から，同じ応力感度による寄与があるとしてよい。棒の側面に直角方向に一様な圧力を受けるときは，二つの主応力は等しい。応力が小さいときは，直線性が成り立つから，一方向だけの圧縮は，一様圧縮のときの磁化変化の 1/2 を与える。引張でも符号が反対になるだけである。図2-11によって説明する。

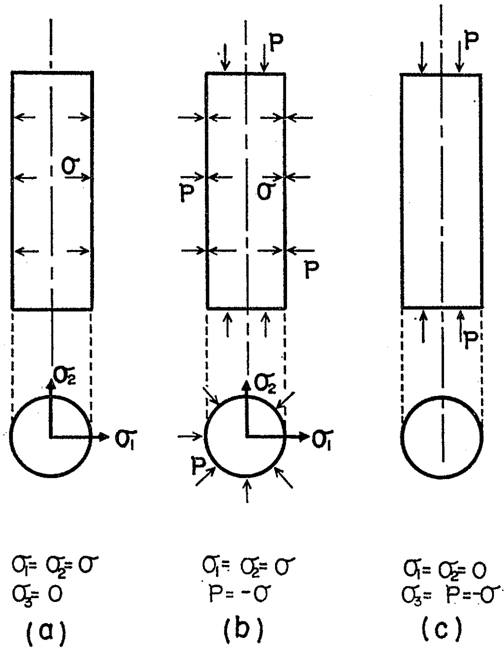


図2-11　2軸応力に対する磁気ひずみ効果

いま，二つの主応力が等しく，これを σ とする。この棒にさらに一様圧力 $-\sigma$ を加えれば，全体の応力状態は，軸方向に $-\sigma$ の 1 軸応力が発生し，これと直角方向の二つの主応力は 0 となり，前節で考えた実験条件と全く一致する。

強磁性体に静水圧を加えると磁化が変化する現象を体積磁わい効果という。（磁わいは磁気ひずみと同義語である。）これは，普通の磁気ひずみ効果にくらべ無視できることが実験的に確かめられている[37)38)]。そこで，いま考える細長い棒に一様な圧力を加えても磁化の変化は起らないのであるから，1 軸応力の磁気ひずみ効果は，これに直角に作用するこれと符号が反対の円応力の磁気ひずみ効果と等しいことになる。これよりさらに，磁界に直角な応力の作用は，磁界に平行な応力の作用と符号が反対で，大きさは 1/2 であることが結論される。

一般に，主応力 σ_1 および σ_2 であらわされる平面応力による磁束密度の磁界方向の変化 ΔB は

$$\Delta B=\Lambda_1\sigma_1+\Lambda_2\sigma_2 \tag{2.37}$$

で近似的にあらわされる[20)]。ただし，σ_1 は磁界に平行な主応力，σ_2 は直角な主応力である。Λ_1 および Λ_2 は，磁気ひずみ感度である。Λ_1 は，前に述べた Λ と一致する。Λ_1 および Λ_2 は，測定法，試験片の形状によって変化する定数であるが，本節の場合には

$$\Lambda_2=-\frac{1}{2}\Lambda_1 \tag{2.38}$$

である。磁束変化の検出法によって

$$K=\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}$$

は，$-1\sim+1$ の範囲で変化することが知られている[20)23)]。とくに $K=-1$ となる場合には

$$\Delta B=(\sigma_1-\sigma_2)$$

となり，主応力を独立に求めることはできない。

2.5　結言

第 2 章においては，鉄の磁気ひずみ効果を理論的に求め，その大きさ，磁界依存性についての見通しを得ることを試みた。

まず，測定すべき残留応力を，ミクロストレスでなく，マクロストレスに限るなら，残留応力測定に利用する磁気ひずみ効果としては，内部の不均一性に敏感に影響を受ける低磁界の磁気ひずみ効果ではなく，可逆的に磁化が行われる高磁界の磁気ひずみ効果が適当であることを述べた。

バイアス磁界を与えたときの磁気ひずみ効果について，現在確立されている磁気理論を適用し，1 軸応力の場合に対し，応力測定に必要な量について 1000 Oe までのバイアス磁界の関数として求めることができた。バイアス磁界とともに，さらに微小な磁界 h および応力 σ を与えたときの磁化の強さ I は

$$I=I_0+\chi_{r0}h$$
$$+\Lambda\sigma(1+A\sigma)+\Lambda_r h\sigma$$

であらわされる。I_0，χ_{r0}，Λ，A，Λ_r はそれぞれ，バイアス磁束密度，（バイアス）可逆磁化率，磁束密度についての磁気ひずみ感度およびその非直線性，可逆透磁率または透磁率についての磁気ひずみ感度で，すべてバイアス磁界の関数である。また，可逆磁化率 χ_r および透磁率 μ_r について

$$\chi_r=\chi_{r0}+\Lambda_r\sigma$$
$$\mu_r=\mu_{r0}+\Lambda_r\sigma$$

が成り立つ。

上記の五つの量の理論式は，次章以下で詳細に検討

する実験値と，その大きさおよびバイアス特性が，定性的にも定量的にも一致した。

2軸応力の場合の磁気ひずみ効果についても若干の考察を行った。細長い棒の軸方向に磁界を，直角の方向に応力を加えたときの磁気ひずみ効果は，同じ磁化状態で，軸方向に等しい応力を加えたときにくらべ，符号は反対で，大きさは 1/2 であるという結果を得た。2軸応力については，さらに研究すべきことが多い。

第3章　直流磁界による応力測定

3.1　緒言

本章においては，第2章で得られた磁気ひずみ効果の基本式のうち，磁束密度と応力との関係式を，炭素鋼の棒状試験片について，弾性域および塑性域にわたって実験的に検討する。弾性域の実験より，磁気ひずみ感度の磁界依存性，炭素量，加工および熱処理の影響を求める。塑性域の実験より，磁束密度と応力の関係式に対する塑性ひずみの影響を求める。

次に，炭素鋼のパーライト組織が磁気ひずみ感度をきめる重要な要因になっていることを示す。さらに，塑性変形に伴う転位によって発生する局所的なミクロストレスの磁束密度に与える影響の小さいことを論じ，実験結果を考察する。

この基本式を用いる直流磁界による応力測定は，残留応力の深さ方向の平均の測定に適用されるにすぎず，分布を持つ残留応力の測定には，次章に述べる交流法によらなければならない。

3.2　弾性域

3.2.1　実験方法

炭素鋼の棒状試験片を直流磁化し，これに引張荷重を加え，そのときの磁束変化を測定する。実験装置のブロック図を，図3-1に示す。

磁化コイルは長さ 250mm のソレノイドコイルで

$$H=360\,i\,\mathrm{Oe}$$

の磁界を与える。$i\,(A)$ は磁化電流である。この状態で引張荷重を加えると，磁束は磁気ひずみ効果によって減少する。磁束変化を $\varDelta\Phi$ とする。試験片に巻いた検出コイルには，このため電圧が誘起される。この電

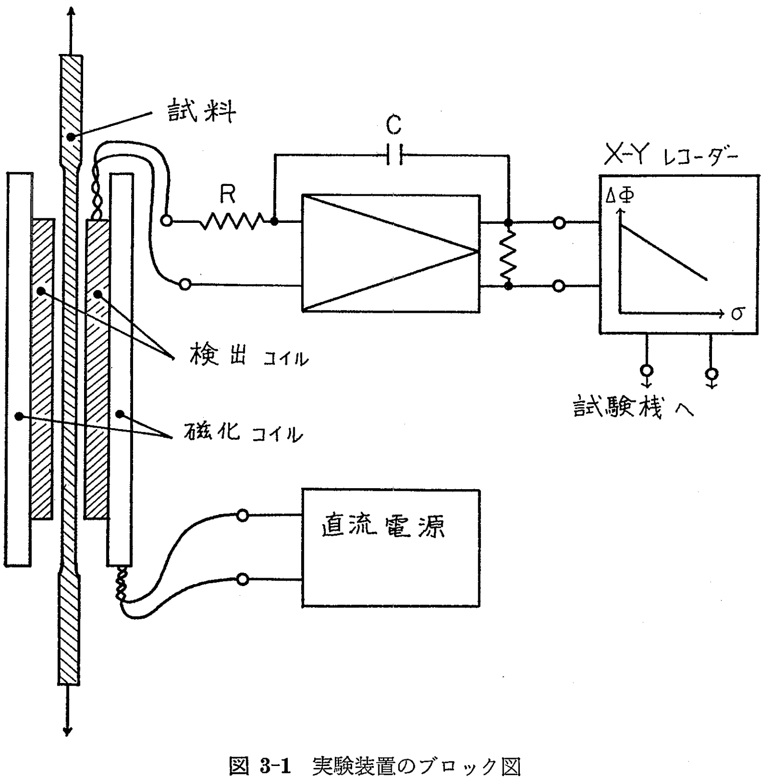


図 3-1　実験装置のブロック図

圧を積分器で積分し，XYレコーダ（理研電子製D—72型）のY軸に与える。この電圧は，次の式で与えられる。

$$E=\frac{N}{CR}\int\frac{d\Phi}{dt}dt=\frac{N\varDelta\Phi}{CR}=\frac{NS\varDelta B}{CR} \tag{3.1}$$

N：検出コイルの巻数（4,930回）
CR：積分器の定数（1.62 sec）
S：試験片の断面積（$0.50\times10^{-4}\,\mathrm{m^2}$）
E：積分器の出力電圧（V）

荷重試験機（森試験機製10トルオルセン型万能試験機）の荷重は，試験機の指示ダイヤルの軸に直結したポテンシオメータによって，XYレコーダのX軸に与えられ，図3-2のような記録が得られる。

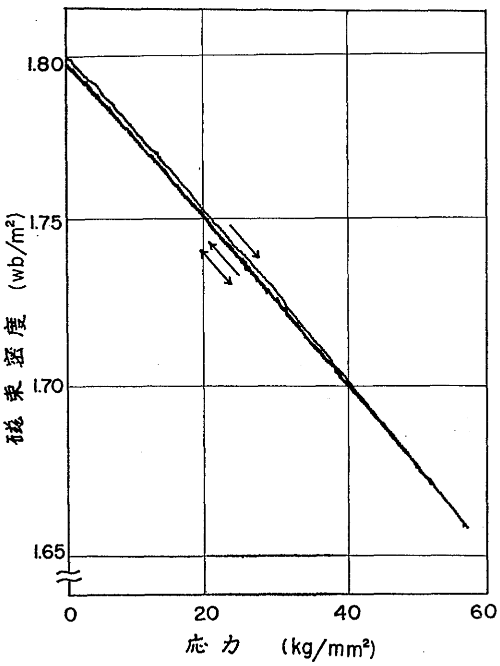


図 3-2　磁束変化—荷重曲線の記録

磁気ひずみ感度 $\varLambda$ は

$$\varLambda=\frac{dB}{d\sigma}=\frac{CR}{NS}\quad\frac{dE}{d\sigma}=\frac{CR}{N}\quad\frac{dE}{dT} \tag{3.2}$$

で与えられる。T は荷重である。$\varLambda$ は，試験片の断面積と無関係に，$E-T$ 曲線の傾斜より求められる。

試験片の磁化特性も測定した。これは，上に述べた装置を普通の自記磁束計として使用すればよい。Y軸には，便宜上，磁束密度のかわりに磁化の強さ

$$I=B-\mu_0H$$

を与えた。μ_0 は真空の透磁率である。

この測定が普通の磁化特性の磁定にくらべ難しい点は，荷重による磁束の変化が小さいことと，荷重試験に時間がかかるため積分器のドリフトが問題になることである。1回の荷重サイクルが3分程度であり，数回サイクルを繰返す間，零ドリフトが小さいことが望ましい。自作した積分器の数回の改造によって，ドリフトを十分に小さくすることができた。

3.2.2　試験片

試料は，純鉄および0.79%までの炭素鋼である。その組成を表3-1に示す。試験片の寸法形状は図3-3に示す。熱間もしくは冷間圧延の棒鋼より旋盤加工によって製作した。測定は旋盤加工のままのもの，これを600°Cおよび900°Cで焼きなましたものの3種類について行った。

3.2.3　磁気ひずみ出力

弾性域および降伏点付近までの応力による磁束変化を図3-4に示す。試験片は0.40%Cの炭素鋼で，加工材である。抵抗線ひずみゲージで応力-ひずみ曲線を同時に測定した。磁束変化は降伏点まで非常によい直

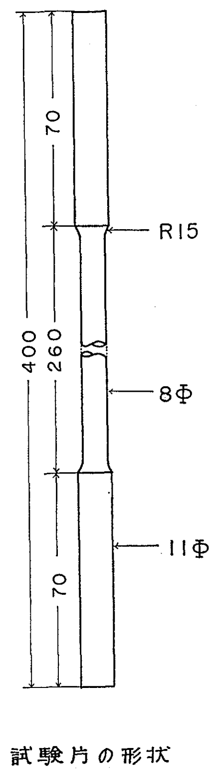


図 3.3　試験片の形状，寸法

表 3-1　試料の化学成分（%）

試料	C	Si	Mn	P	S	加工の種類
S00C	0.00	0.07	0.09	0.006	0.016	C*
S00H	0.02	0.12	0.13	0.005	0.019	H**
S10C	0.08	0.02	0.28	0.008	0.030	C
S20C	0.21	0.02	0.40	0.022	0.018	C
S40C	0.40	0.30	0.68	0.012	0.026	C
S60C	0.62	0.25	0.47	0.016	0.024	H
S70C	0.75	0.30	0.50	0.015	0.016	H
S80C	0.79	0.30	0.70	0.015	0.014	H

*：冷間加工　　**：熱間加工

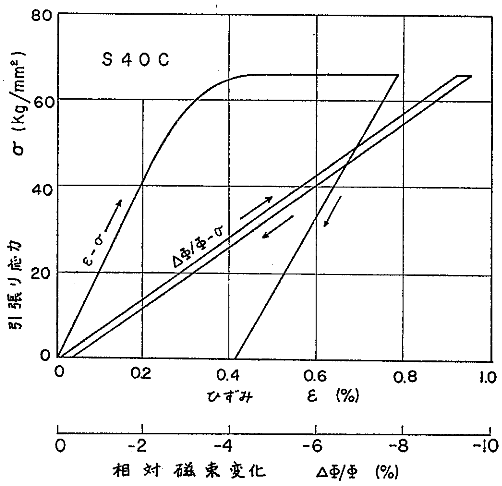


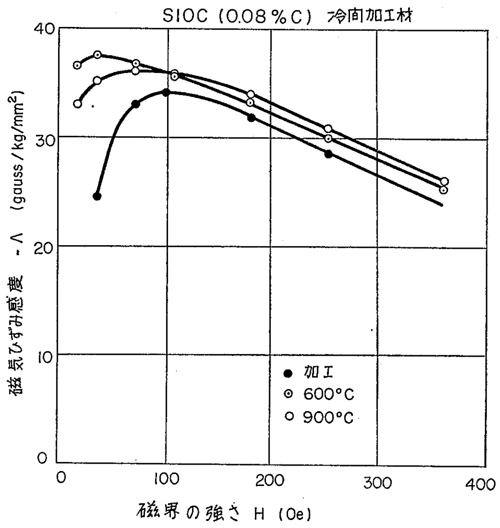
図 3-4 降伏点付近までの磁束変化―ひずみ曲線と応力―ひずみ曲線（加工材）

線性を保つ。図中の応力は，公称応力であって，3. 2. 1の議論によって，磁気ひずみ感度は，この応力範囲で一定であることがわかる。降伏点より上で塑性変形が生じても大きな磁束変化は起らない。本節では，直線性が成り立つものとして，弾性域の測定より磁気ひずみ感度に影響する因子をしらべることにする。

3. 2. 4 磁気ひずみ感度とバイアス磁界

磁気ひずみ感度 Λ は，バイアスによって変化する。使用バイアス状態としては，図 3-5 に示す磁気ヒステリシス環線の下降曲線BC上で測定を行う。この下降曲線上では，磁化現象が比較的簡単で，材料内部の不均一性の影響が小さいと考えられる。

加工材，これを600°Cおよび900°Cで焼きなました



(a)

図 3-6 磁気ひずみ感度のバイアス依存性

同一試験片の3種類の処理状態について，Λ をバイアス関数として測定した。Λ は応力 0 ～10kg/mm²の範囲の $\Delta\Phi/T$ 曲線より求めた。図 3-6 にその結果を例示する。

磁気ひずみ感度 Λ は

$$\Lambda = -30 \sim -40 \mathrm{G/kg/mm^2}$$

であって，引張応力によって磁束密度は減少する。ひずみゲージの感度をあらわすゲージ率を使用すれば，低炭素鋼の磁気ひずみ効果のゲージ率 K_M は

$$K_M = \frac{\Delta\Phi}{\Phi}\ \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\Delta B}{B}\ \frac{\Delta\sigma}{E} = -30 \sim -40 \qquad (3.3)$$

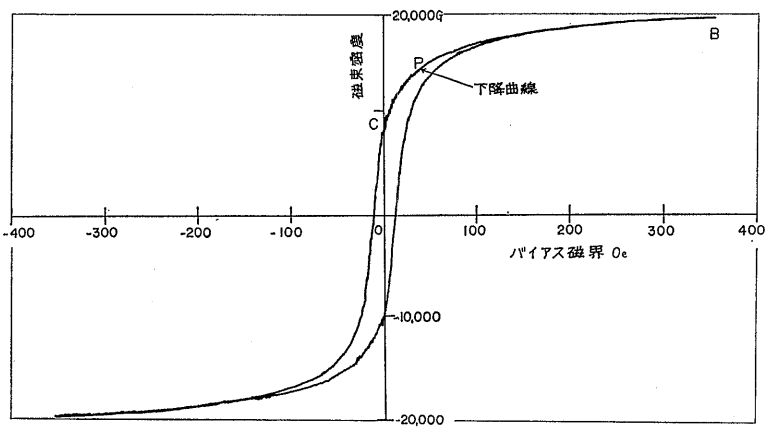


図 3-5 磁気ヒステリシス環線と使用バイアス磁界

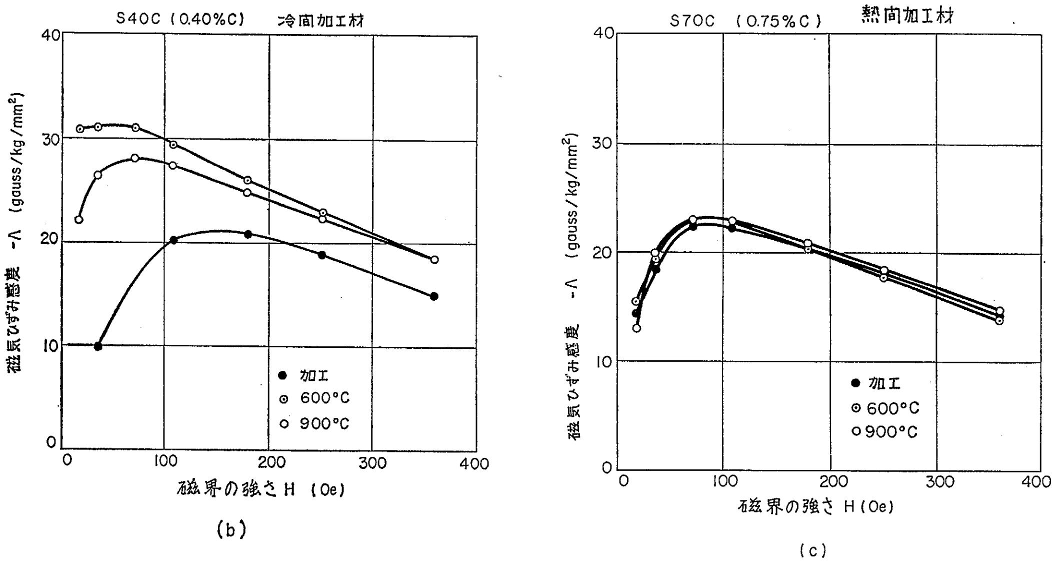


図 3-6　磁気ひずみ感度のバイアス依存性

であり，非常に大きい。

Λ の絶対値は 100 Oe 付近のバイアスで極大となり，これより低磁界側で急激に減少する。高磁界側には，バイアスの増加とともに直線的に減少する。

加工材の Λ は焼きなまし材にくらべ一般に小さい。また，Λ の極大が高磁界側に移動する。このピークより低いバイアスでは，焼きなまし材との差は非常に大きい。加工の効果は炭素量とともに増加する。

3.2.5　磁気ひずみ感度と炭素量

磁気ひずみ感度は化学成分によって変化する。炭素鋼の場合には，炭素量の影響が最も大きい。炭素量の影響を求めるのに，バイアス 0 に外挿した磁気ひずみ感度 Λ_0 を考える。

炭素鋼の磁気特性は炭素量によって異るから，等しいバイアス磁界における感度で比較するのは合理的ではない。第 2 章で述べた磁気ひずみ効果の理論においては，磁性体の磁化の強さが非常に小さい磁界で非可逆的にかなり飽和に近い状態まで増加し，各単結晶内では<100>方向のうち磁界に最も近い方向に向っており，磁界を与えると，この状態より可逆的に磁化ベクトルが磁界の方向に回転して磁化の強さが増加すると仮定した。実際には，不純物，内部応力等により，この二つの磁化状態の間にははっきりした境界がなく，この実験に見られるようにかなり大きな磁界まで中間的な状態が続く。100 Oe 以上でほほ可逆的に磁化が変化すると考えてよいであろう。そこで材料中にある不均一性の影響を取除いた磁気ひずみ感度を求めるために，Λ—バイアス曲線をバイアス 0 に外挿してこれを Λ_0 とすれば，これは炭素量の差による磁気特性の差をも取除いた定数となる。

Λ_0 を求める一例を図3-7に示す。このようにして求めた Λ_0 と炭素量の関係が図 3-8 である。

Λ_0 の絶対値は炭素量 C に対しほぼ直線的に減少し

$$\Lambda_0=-42.0+20.9C\pm1.0\,\mathrm{G/kg/mm^2} \quad (3.4)$$

C：炭素量（重量パーセント）

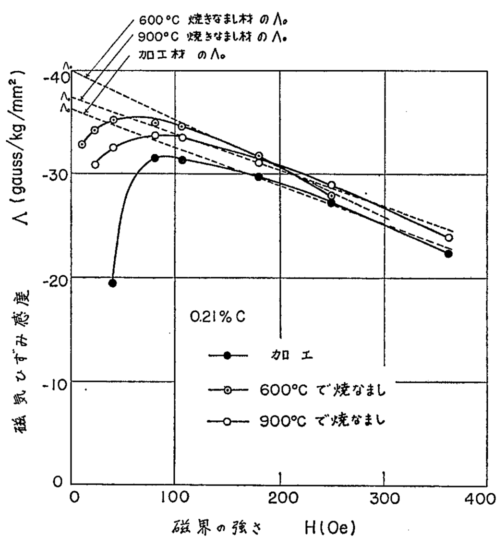


図 3-7　磁気ひずみ感度 Λ_0 の求め方

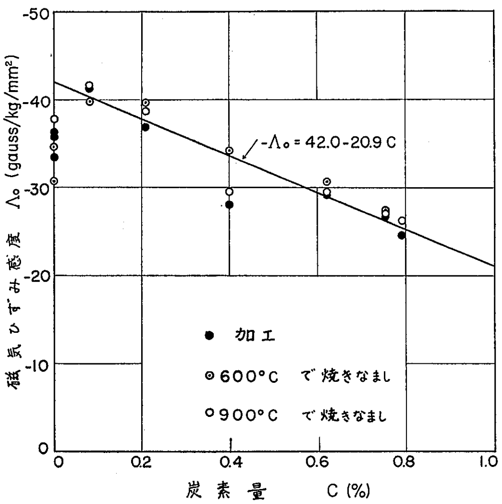


図 3-8　磁気ひずみ感度 Λ_0 の炭素量依存性

であらわされる。純鉄の Λ_0 は，この直線より大きく外れているが，その理由は不明である。製造法が他の鋼棒とかなりちがうので，結晶方位の分布が大きくちがうのかもしれない。

加工材と焼きなまし材の差は，0.4%C を除いては小さい。炭素量の増加とともに加工の影響は大きくなると思われるが，0.6% 以上ではその差が小さいのは，これらの試料が熱間圧延材より製作したものだからであろう。

磁気ひずみ効果を利用したプローブによる従来の測定法では[20]，感度は炭素量の増加に伴い感度が急激に減少する。0.2%Cの低炭素鋼を基準に取れば，0.4～0.5%Cで約1/3，共析鋼（0.8%C）では約1/10に感度が減少する。これに反し，ここで述べた感度Λ_0は，0.15%Cにくらべ0.45%Cで3/4，0.80%Cで3/5に感度が低下するにすぎない。すなわち，高磁界の磁気ひずみ効果を利用することによって，炭素量の増加による感度の低下をはるかに小さくおさえ得ることがわかった。

3.3　塑性域

弾性域における磁気ひずみ効果は前節において明らかになったが，残留応力は多くの場合，塑性変形に伴って生じるので，塑性ひずみの影響をさらに詳しく調べる必要がある。塑性加工にはいろいろの形式が考えられるが，本研究においては1軸塑性引張による塑性変形を取り上げる。

3.3.1　実験方法

実験方法は前節とほとんど同じである。ただ，塑性ひずみによる試験片の断面積の変化を考慮する必要がある。この場合の磁束変化は，次式で与えられる。

$$\delta\Phi=\delta(B\cdot S)$$
$$=\delta B\cdot S+B\cdot\delta S \qquad (3.5)$$

一定バイアスにおいては，Bは応力 σ および塑性ひずみ ε_p の関数であると考えられる。塑性ひずみと断面積の間には，塑性力学の仮定により

$$(1+\varepsilon_p)S=S_0 \qquad (3.6)$$

が成り立つものとする。S_0 は $\varepsilon_p=0$ のときの断面積である。したがって，B は σ と S との関数となり

$$\delta\Phi=S\frac{\partial B}{\partial\sigma}\delta\sigma+\left(S\frac{\partial B}{\partial S}+B\right)\delta S \qquad (3.7)$$

が得られる。第1項は応力による磁束変化であり，第2項は塑性ひずみによる磁束変化である。磁束変化を示す $\sigma-\Delta\Phi$ 曲線を図式的に図3-9に示す。σ は公称応力である。これは普通の応力ひずみ曲線に似ている。ただ，磁気ひずみ感度が大きいために，弾性変形に対する傾斜がゆるくなっている。

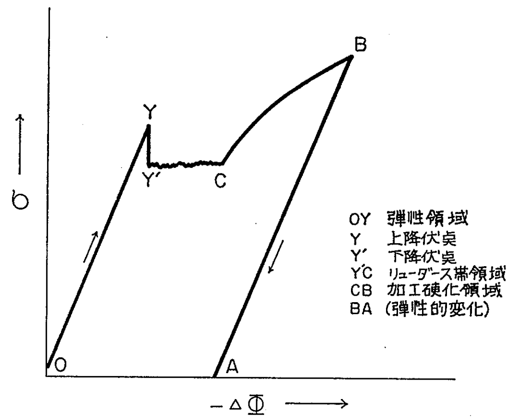


図 3-9　応力—磁束変化線図

(3.7) の第1項と第2項につぎのように実験的に分離することができる。第1項の $\partial B/\partial\sigma$ は磁気ひずみ感度であって，加工材であっても，焼きなまし材であっても，それぞれの弾性域（図3-9のOY）の測定より

$$\Lambda=\frac{\partial B}{\partial\sigma}=\frac{\partial\Phi}{\partial T} \qquad (3.8)$$

として求めることができる。ただし，弾性変形による断面積の変化の影響が1.5%程度あるが，無視する。YBの間では，塑性ひずみと加工硬化が同時に起る。

Bより荷重を減少させると，BAにそって磁束は直線的に下降する。A点では，応力は0となるから第1項は消えて，第2項の塑性ひずみの影響だけが残る。その場合の磁束変化（図3-9のOA）を $\Delta\Phi$ とし，そのときの ε_p を測定すれば，第2項と ε_p もしくは，ΔS との関係が求められる。

磁束変化は，XYレコーダに記録された電圧 E より

$$\Delta\Phi=\frac{CR}{N}\cdot E \qquad (3.9)$$

で求められる。ただし，前節の定数を変更し

N：検出コイルの巻数（800回）

CR：積分器の定数（0.04 sec）

とした。検出コイルは直径15mm，長さ28mmである。積分器の演算増幅器は，Philbrick SP 456 A を使用し，非常に安定であった。

塑性ひずみは，試験片の中央260mmの範囲に20mm間隔につけたけがき線を，読取り顕微鏡で読取り，計算した。断面積変化は (3.6) を用いて求めた。

3.3.2 試験片

試料は，0～0.62%C の炭素鋼であり，その化学成分を表3-2に示す。試験片は旋盤加工で 8ϕ×400, 8ϕ×450, 12ϕ×500 の3種類の寸法に仕上げた円柱状試験片である。

表 3-2　試料の化学成分（%）

試料No.	C	Si	Mn	P	S
1.2.3.	Trace	0.07	0.09	0.006	0.016
4.5.	0.16	Trace	0.40	0.017	0.023
6.7.	0.21	0.02	0.40	0.022	0.018
8.	0.40	0.30	0.68	0.012	0.026
9.10.	0.40	0.32	0.65	0.022	0.013
11.	0.62	0.25	0.47	0.016	0.024

650°C，2時間のひずみとりの焼きなましを行ったものを基準とし，これに引張試験によって段階的に塑性ひずみを与えながら測定を行った。

3.3.3 磁気ひずみ感度と塑性ひずみ

試験片に局部収縮が生じる直前まで塑性ひずみを段階的に与えて，これに対する磁気ひずみ感度および荷重0に対する磁束変化を測定した。実験した塑性ひずみの値を図3-10に一括して示す。

(1) 180Oe の一定バイアスで，$\sigma-\Delta\Phi$ 曲線を測定しながら，適当な塑性ひずみを与え，つぎに荷重を除く。荷重0に対する $\Delta\Phi$ が得られる。

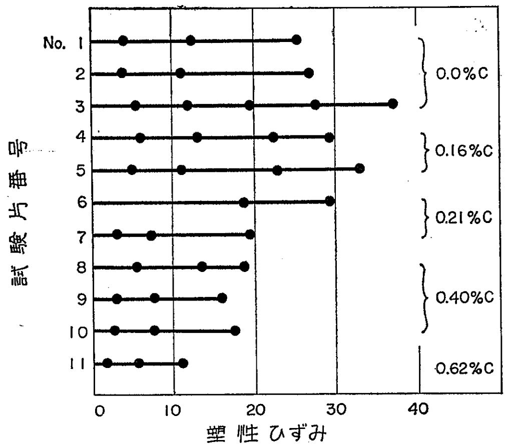


図3-10　試験片に与えた塑性ひずみ（●は測定点）

(2) この状態で，各バイアスにおける磁気ひずみ感度および磁気ヒステリシス曲線を測定する。

(3) 試験片を荷重試験機より取外し，塑性ひずみを測定する。

(4) 再び，試験片を荷重試験機にセットしたのち，上述の実験のサイクルを局部収縮が出るまで繰返す。

数回の荷重サイクルを繰返した $\sigma-\Delta\Phi$ 曲線を一つの曲線にまとめた一例が図3-11である。塑性ひずみの測定および感度の測定のために時間がかかるので，応力－ひずみ曲線の場合にもあらわれる時効現象で，曲線のつぎめに多少の段がつく以外は，全体としてなめらかな曲線になっている。

180Oe における磁気ひずみ感度の塑性ひずみ依存

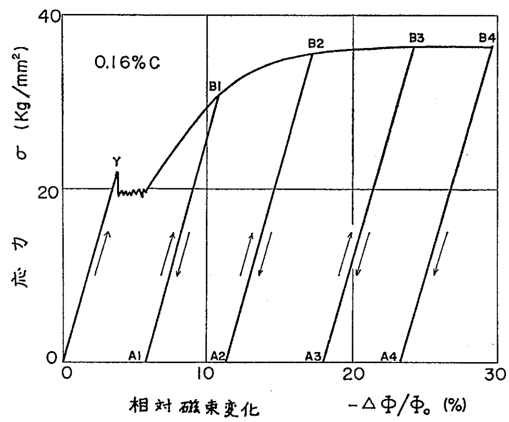


図3-11　応力―磁束変化曲線（塑性域）

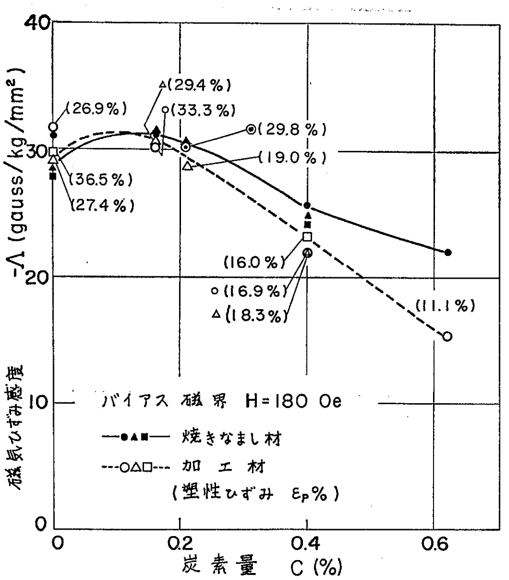


図3-12 磁気ひずみ感度の炭素量および塑性ひずみ依存性

性を図3-12に示す。焼きなまし材および局部収縮直前の加工度の大きい試験片についての値が与えられている。塑性ひずみの影響は，炭素量とともに大きくなる。0.4％C以上の材料については，はっきりと Λ の減少が認められ，0.62％Cでは30％減少した。低炭素鋼および純鉄では，その影響は小さく±5％以下である。

磁気ひずみ感度の変化の大部分は，$\varepsilon_p=3\sim4\%$の範囲で起る。それ以上の塑性ひずみに対しては，変化は飽和する傾向がある。

磁気ひずみ出力は，応力について非常によい直線性を持っている。加工硬化を起しても，この直線性が少くとも局部収縮を起すまで失われないことは注目すべきである。0.40％Cの試料で，応力75kg/mm²まで非直線性は誤差範囲内であり，0.62％Cの試料では，84 kg/mm² の範囲で±0.6％であった。

3.3.4 バイアス磁束と塑性ひずみ

塑性ひずみのためにバイアス磁束の変化が起ると，磁束測定によって応力を求ぬる場合には零点の移動となって，測定誤差となる可能性がある。そこで，磁束変化と塑性ひずみのあいだの法則を求めた。

荷重0に対する磁束変化は（3.7）の第2項

$$\delta\Phi=\left(S\frac{\partial B}{\partial\sigma}+B\right)\delta S \tag{3.10}$$

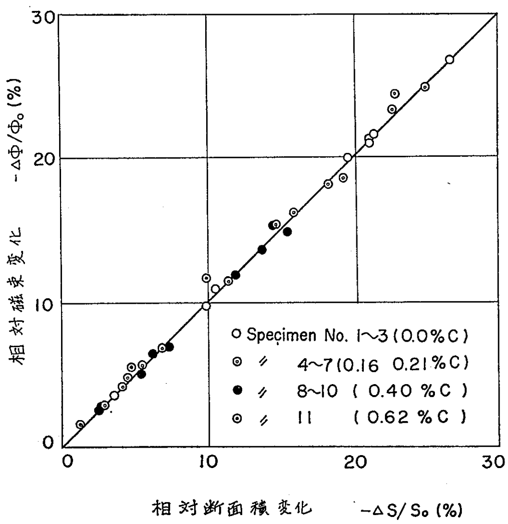


図3-13 磁束変化と断面積変化

である。これは，磁束密度が塑性ひずみによって変化する項と，塑性ひずみによる断面積変化による項より成り立っている。

磁束の相対変化 $\Delta\Phi/\Phi_0$ と断面積の相対変化 $\Delta S/S_0$ の関係を図3-13に示す。測定点は，ほとんど45°の傾斜の直線上に乗っている。そこで

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0}=\frac{\Delta S}{S_0} \tag{3.11}$$

が実験的に成り立つ。Φ_0, S_0 は $\varepsilon_p=0$ に対する磁束および断面積である。（3.11）の微分を取れば

$$\frac{\delta\Phi}{\Phi_0}=\frac{\delta S}{S_0} \tag{3.12}$$

が，塑性変形の各段階について成り立つ。

（3.12）と（3.10）より

$$S\frac{\partial B}{\partial S}+B=B_0 \tag{3.13}$$

が得られる。ただし，$B_0=\Phi_0/S_0$ である。$S=S_0$ のとき $B=B_0$ の条件で（3.13）を解けば

$$B=B_0 \tag{3.14}$$

という解が得られる。すなわち，磁束密度は，塑性変形に無関係で，バイアス磁界によって決定される。

測定点の45°の直線からの外れの誤差は ±0.4％ であった。これを応力に換算すれば±3kg/mm²が，$B=B_0$ と仮定したときの誤差となる。

炭素鋼の1軸引張塑性変形の際に残留応力が発生することはよく知られている[39]。このような場合には，荷重が0になっても応力は0とならないから，本節の議論が成り立たない。しかし，この場合でも，残留応

力を全断面積について平均すれば0となる。応力に対する直線性は非常によいので，応力 σ がある場合には

$$\Delta\Phi=\int(B+\Lambda\sigma)dS-B_0S_0$$
$$=\int BdS+\Lambda\int\sigma dS-B_0S_0$$
$$=\int BdS-B_0S_0 \qquad (3.15)$$

が得られる。B と塑性ひずみ ε_p との関係が

$$B=B_0+B_1\varepsilon_p \qquad (3.16)$$

で近似的に与えられるとすれば，(3.15) より

$$\Delta\Phi=B_0(S-S_0)+B_1\int\varepsilon_p dS$$
$$=B_0\Delta S+B_1\int\varepsilon_p dS \qquad (3.17)$$

が得られる。実験的に

$$\Delta\Phi=B_0\Delta S$$

であるから

$$B_1\int\varepsilon_p dS=0$$

となり，これより

$$B_1=0 \qquad (3.18)$$

が導かれる。そこで，残留応力が存在する場合にも

$$B=B_0=一定 \qquad (3.14)$$

が成り立ち，本節の結論には影響がない。

3.4 考察

前節までで，炭素鋼の磁気ひずみ効果を弾性域および塑性域にわたって実験的に明らかにした。本節においては，この結果について若干の考察を試みる。

炭素鋼は，通常は，フェライト結晶粒とパーライト結晶粒の混在した組織である。パーライト結晶粒は，さらにセメンタイト板とフェライトより成り立っている。炭素鋼の磁気ひずみ効果は，この組織と関係があるに違いない。

また，塑性ひずみの磁気ひずみ感度およびバイアス磁束密度に対する影響は小さかった。しかし塑性ひずみの増加に伴う転位の増加によって，非常に大きなミクロストレスが材質内に発生する。当然このミクロストレスは，磁性に影響を与えるものと考えられる。

これらの影響を計算によって見積り，実験結果との比較を行うことにする。

3.4.1 セメンタイトの静磁エネルギと磁気ひずみ感度の炭素量依存性

磁気ひずみ効果は，磁気ひずみエネルギと磁気異方性エネルギの比によって決定される。異方性エネルギは，一様な結晶では結晶磁気異方性エネルギだけであるが，炭素鋼では，セメンタイトのための異方性を考慮する必要がある。

3.2.5 で感度 Λ_0 の炭素量依存性として

$$\Lambda_0=-42.0+20.9C\pm1.0\ \mathrm{G/kg/mm^2}$$
$$C：炭素量（重量パーセント） \qquad (3.4)$$

が得られた。これはまた

$$\Lambda_0\fallingdotseq-42.0(1-0.5C)\mathrm{G/kg/mm^2} \qquad (3.19)$$

のようにあらわすことができる。セメンタイトの磁気

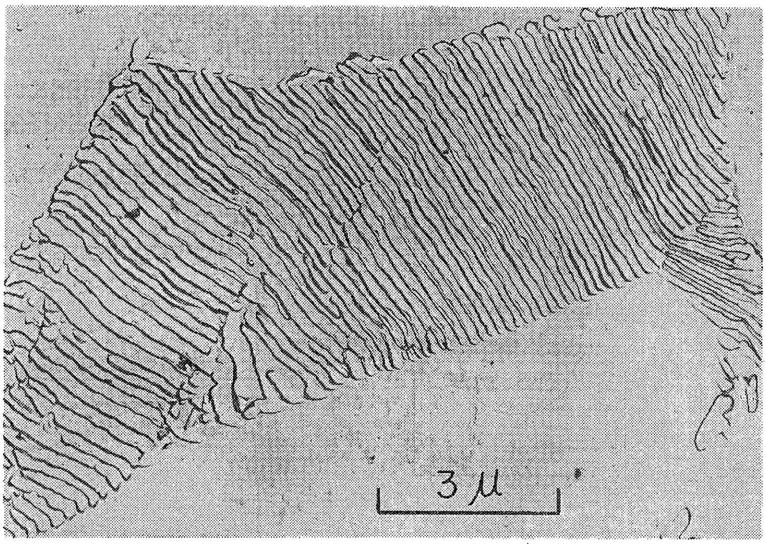


写真 3-1 パーライト結晶粒の電顕写真（試料S20C）

ひずみ効果に対する寄与がないと単純に仮定すれば

$$\Lambda_0=-42.0(1-0.15C)\mathrm{G/kg/mm^2} \quad (3.20)$$

となる。また，パーライト結晶粒の寄与がないと仮定すれば

$$\Lambda_0=-42.0(1-1.2C)\mathrm{G/kg/mm^2} \quad (3.21)$$

となるはずである。実際は，その中間にあるので，その原因を考えなければならない。

写真3-1は，試験片の電顕写真の一例で，層状パーライト結晶粒の部分である。共析鋼（0.83%C）の感度について考える。層状パーライト中のセメンタイト板は，磁気ひずみ効果に対する寄与はないものと考えてよいが，それ以外にも大きな影響を持っている。セメンタイトの飽和磁化は12,400Gで，フェライトの飽和磁化よりかなり小さい。図3-14は，パーライト結晶粒を模型的に示したものである。磁界がセメンタイト板に直角のときには，セメンタイトとフェライトの境界面に，飽和磁化の差

$$\Delta B_s=21,500-12,400$$
$$=9,100\mathrm{G}$$

のため，強い磁極が発生する。このため大きな反磁界ができ，非常に磁化しにくい。一方，磁界がセメンタイト板に平行のときは，粒界に生じる磁極は小さく，また距離が離れているので，反磁界は考えなくてよい。そのため，セメンタイトとフェライトが独立にある場合と同じになる。このようにして磁界の方向によって磁化のしやすさが変化するので，セメンタイト板に垂直な，大きな1軸磁気異方性が生じることになる。このようなエネルギを静磁エネルギ（magnetostatic energy）という。

薄い板状の磁性体内に生じる反磁界は，N極よりS極に向き，磁束密度を B とすれば，B Oe（C.G.S.）である。そこで，フェライトが，厚いセメンタイト板に囲まれて飽和まで磁化されているときには，9,100 Oe という大きな反磁界が生じている。この場合の静磁エネルギ密度は M.K.S. 単位系で

$$U=\frac{1}{2}\frac{I^2}{\mu_0} \quad (3.22)$$
$$=3.5\times10^5\ \mathrm{J/m^3}$$

となる[40]。これは結晶磁気異方性エネルギ

$$K=4.2\times10^4\ \mathrm{J/m^3}$$

のほぼ8倍である。そこで磁気ひずみ現象においても，この大きな異方性に抗して，磁化が磁気ひずみエネルギの作用で変化するのであるから，磁気ひずみ感度が大きく低下することは明らかである。

実際のパーライト結晶では，フェライト中に薄いセメンタイト板が層状に，ほぼ等間隔に入っているので，フェライト中の一点の磁界を考えるときには，となりのセメンタイトとの境界に生じる磁極ばかりでなく，パーライト結晶全体の境界面にある磁極を考えなくてはならない。図3-15のような円柱状のパーライト

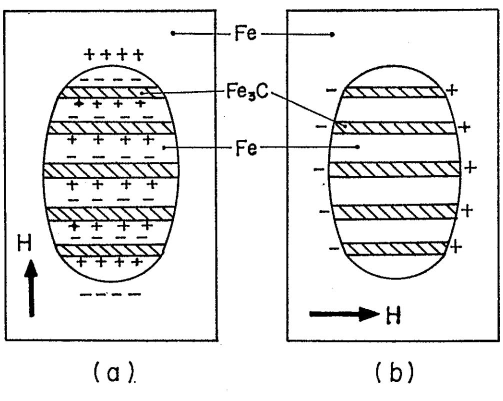


図3-14　層状パーライト結晶粒の磁化模型

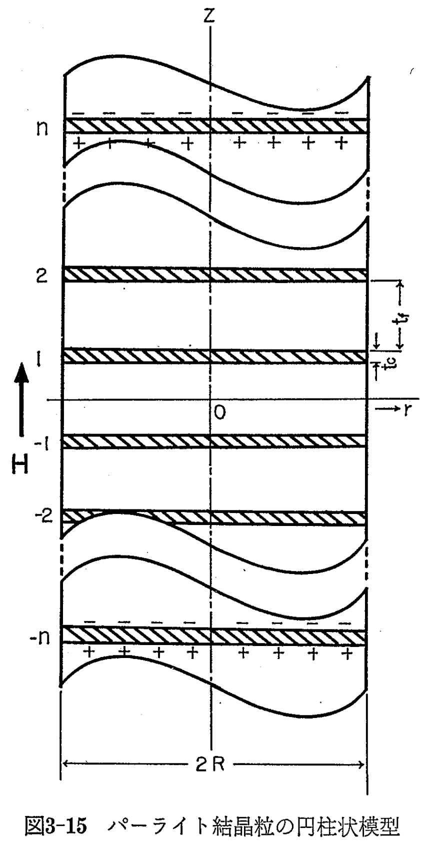


図3-15　パーライト結晶粒の円柱状模型

結晶を考える。フェライト1層の厚さを t_f セメンタイト1層の厚さを t_c, セメンタイト板の全数を N 個, 結晶の半径を R とする。この場合の結晶の中心のフェライトの0点における反磁界を計算する。

パーライト中のセメンタイトとフェライトの重量比はほぼ1：7であり，容積比でも1：7と見てよい。そこで

$$t_f=7t_c \tag{3.23}$$

とする。R は実際のパーライト結晶について見ると

$$2R=5t_f\sim40t_f \tag{3.24}$$

としてよいように思われる。これらの数値を用い反磁界 H を計算したのが図3-16である。セメンタイト板が100程度になれば，静磁エネルギ E_m は

$$E_m=4.4\times10^4\,\mathrm{J/m^3}$$

に近づき

$$E_m\approx K$$

となる。たとえば，写真3-1の結晶粒では，$N=60$, $2R=35t_f$ であるので

$$E_m=3.9\times10^4\,\mathrm{J/m^3}$$

となる。そこで，以下の計算では

$$E_m=K_u=uK \tag{3.25}$$

で，u は1に近い定数とする。

磁界に対しパーライト結晶が傾いている場合について考える。セメンタイト板はフェライトの (110) 面上に生長する[41]。たとえば図3-17に示すようにZ軸を含んで，XY平面を二等分する方向に生長しているとする。この場合の静磁エネルギは，磁化の方向とセメンタイト板の法線のなす角を θ とすれば

$$E_m=K_u\cos^2\theta$$

である[42]。磁化の方向余弦を α_1, α_2, α_3 とすれば

$$E_m=K_u\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}-\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \tag{3.26}$$

となる。そこで，K および K_u が同時にあるときの自由エネルギ F は (2.7) と (3.26) より

$$F=K\sum_{i\neq j}\alpha_i^2\alpha_j^2+K_u\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}-\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$-\frac{3}{2}\lambda_{100}\sigma\left(\sum_i\alpha_i^2\beta_i^2-\frac{1}{3}\right)+3\lambda_{111}\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j$$
$$-HI_s\sum_i\alpha_i\beta_i+L\left(\sum_i\alpha_i^2-1\right) \tag{3.27}$$

となる。

磁界が0のときの感度 Λ_0 を論じればよい。そこで2.2の近似計算のように

$$\alpha_1,\ \alpha_2\ll1,\ \alpha_3=1$$

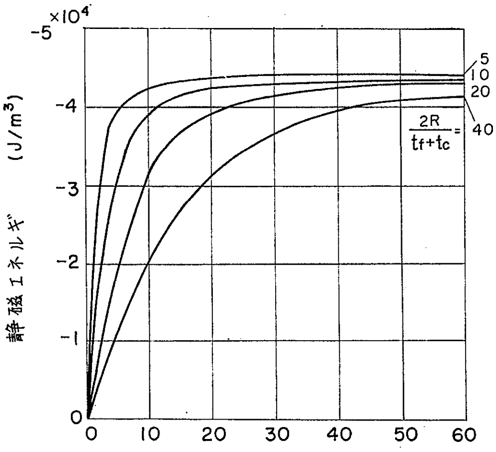


図3-16 静磁エネルギと結晶組織

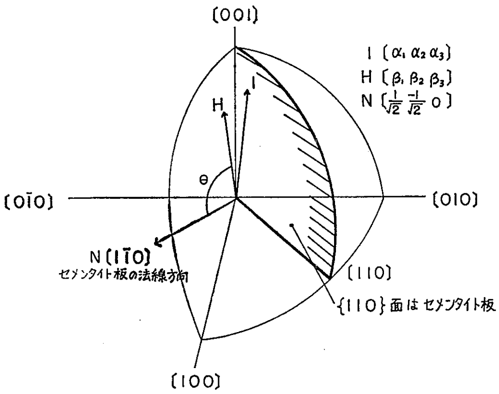


図3-17 セメンタイト板と結晶軸との関係

として計算すればよい。

α_i の決定方程式は，2.3の記号を用いれば

$$\alpha_1^3-l\alpha_1-\frac{u}{2}(\alpha_1-\alpha_2)+p\beta_1\left(\sum_j\alpha_j\beta_j+P\alpha_1\beta_1\right)=0$$

$$\alpha_2^3-l\alpha_2+\frac{u}{2}(\alpha_1-\alpha_2)+p\beta_2\left(\sum_j\alpha_j\beta_j+P\alpha_2\beta_2\right)=0$$

$$\alpha_3^3-l\alpha_3+p\beta_3\left(\sum_j\alpha_j\beta_j+P\alpha_3\beta_3\right)=0$$

$$\sum_i\alpha_i^2-1=0 \tag{3.28}$$

となる。α_1, $\alpha_2\ll1$ として第1近似を取れば

$$\left.\begin{aligned} &-l\alpha_1-\frac{u}{2}(\alpha_1-\alpha_2)+p\beta_1\beta_3=0\\ &-l\alpha_2+\frac{u}{2}(\alpha_1-\alpha_2)+p\beta_2\beta_3=0\\ &1-l=0 \end{aligned}\right\}\qquad(3.29)$$

が得られる。(3.29) を解けば

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\left(\beta_1+\beta_2+\frac{\beta_1-\beta_2}{1+u}\right)\beta_3 p$$

$$\alpha_2=\frac{1}{2}\left(\beta_1+\beta_2-\frac{\beta_1-\beta_2}{1+u}\right)\beta_3 p$$

$$\alpha_3=1$$

が得られる。無次元化された磁化の強さ $m=I/I_s$ は

$$m=\sum_i \alpha_i\beta_i$$

$$=\beta_3+\frac{1}{1+u}\left\{(\beta_3-\beta_3^3)\left(1+\frac{u}{2}\right)+u\beta_1\beta_2\beta_3\right\}p \qquad (3.30)$$

で与えられる。

多結晶については，β_3 を図 2-3 の積分範囲で平均すれば

$$\overline{m}=0.835+\frac{1}{1+u}\left\{0.236\left(1+\frac{u}{2}\right)+0.021u\right\}p$$

$$=0.835+\frac{0.236(1+0.589u)}{1+u}\,p \qquad (3.31)$$

となる。そこで，$u=1$ のときの感度 $\Lambda_0(1)$ と $u=0$ のときの感度 $\Lambda_0(0)$ の比は

$$\frac{\Lambda_0(1)}{\Lambda_0(0)}=0.79 \qquad (3.32)$$

となる。セメンタイトによるフェライト容積の13%の減少による感度低下が加わるので，全体の感度低下は

$$1-0.87\times0.79=0.31$$

となり，31%感度が低下する。

実測値では，共析鋼で41%の感度低下が起っているが，その原因としては，パーライト組織とそれにもとづく静磁エネルギが主な原因であると考えられる。実測値との不一致の原因については，磁化機構の検討，パーライト結晶粒内の内部応力等についてさらに研究を行う必要がある。

粒状パーライト組織においては，粒状セメンタイトによる反磁界は，板状セメンタイトの反磁界にくらべ 1/3 であるので，静磁エネルギにもとづく異方性は小さく，その磁気ひずみ感度は，反磁界を考えない場合と層状パーライトの場合の中間の値を持つものと思われる。

3.4.2 転位と磁束密度の加工度依存性

磁気ひずみ効果の加工度依存性は小さいという結果が実験的に得られたが，このことを転位のつくる応力場という観点から検討する。転位と磁性との関係は，最初 Brown によって研究され，後に Seeger, Kronmüller によってその理論が発展された。かれらは，磁性体についての Becker, Kersten の理論[10]における内部応力 (internal stress) は転位のまわりの応力場と磁気モーメントとの相互作用によると考えている。この研究の対象は，主としてニッケル単結晶の塑性変形に限られていて，この場合には直ちに適用できない。しかしながら，磁気ひずみ効果が加工状態で変化する現象には，このような転位によるミクロストレスが関係することは疑いない。この論文で取扱う残留応力は，このような微視的応力とは異なって， long range の巨視的応力である。微視的応力は，加工状態あるいは塑性域という用語をつかって材料の一つの状態として考えている。しかし，本節においては，このミクロストレスを考えることにする。

転位があると，その近傍には非常に大きな応力場が生じる。刃状転位が図3-18のようにあるとき，点 P (x, y) の応力場[43]は，転位のコアの外では

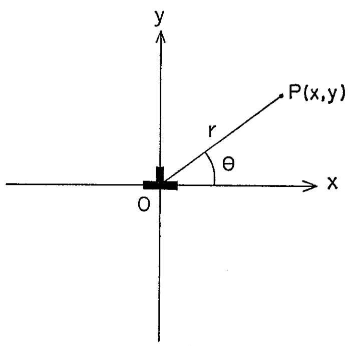


図3-18 刃状転位

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx}&=-D\frac{y(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ \sigma_{yy}&=D\frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ \sigma_{zz}&=\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\\ \tau_{xy}&=D\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ \tau_{yz}&=\tau_{zx}=0 \end{aligned}\right\}\qquad(3.33)$$

で与えられる。この式で，D は

$$D=\frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \qquad (3.34)$$

である。G は横弾性係数，b はバーガースベクトル，ν はポアソン比である。転位による応力のうち，もっとも大きいのは σ_{xx} である。σ_{xx} は，極座標で

$$\sigma_{xx}=\frac{-G}{2\pi(1-\nu)}\ \frac{b\sin\theta(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{r}$$
$$=-\sigma_0 f(r,\ \theta) \qquad (3.35)$$

となる。ただし

$$\sigma_0=\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \qquad (3.36)$$
$$\fallingdotseq 1800\mathrm{kg/mm^2}$$

である。σ_{xx} の等高線を図3-19[43]に示す。

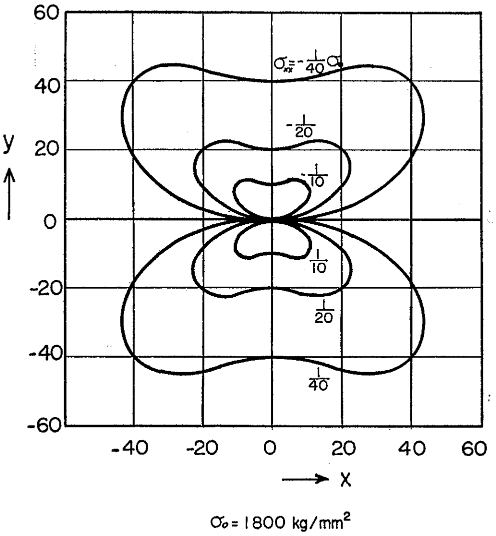


図3-19　刃状転位の応力場（σ_{xx}）

転位による σ_{xx} は，$y<0$ で引張，$y>0$ で圧縮で，絶対値は，x 軸について対称である。磁気ひずみ効果が応力に対して対称であれば，正負打消し合って転位の影響は 0 となる。しかし，磁気ひずみ効果の応力の正負についての非対称から転位の影響があらわれる。第 4 章に述べる実験より推定すれば，$\pm 10\mathrm{kg/mm^2}$ の範囲で，非直線性は 180Oe のバイアスにおいて

$$\varDelta B=-32.5(1+0.0022\sigma)\sigma$$

であらわされる。また第 2 章の理論によれば，同じバイアスで

$$\varDelta B=\varLambda_0(1+0.002\sigma)\sigma \qquad (3.37)$$

となる。ほぼ一致するので，高い応力まで，この式が成り立つものとすれば，$\sigma=100\mathrm{kg/mm^2}$ で磁気ひずみ出力の引張および圧縮の差としては $100\mathrm{kg/mm^2}$ の出力の40%の磁束密度の減少が生じることになる。

転位による $\sigma_{xx}=\mathrm{const}$ の曲線の中の面積 S は，図3-19の $y>0$ について，（3.35）より

$$S=1.96\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{xx}}\right)^2 b^2$$
$$\fallingdotseq 2F^2b^2 \qquad (3.38)$$

となる。ただし

$$F=\frac{\sigma_0}{\sigma_{xx}} \qquad (3.39)$$

とする。

磁気ひずみ効果は，各点の応力に対応する磁気ひずみ効果の和であると仮定すれば，全体の磁束密度の変化は，x 軸の上下の差だけを考えて

$$\varDelta B=\frac{2}{S_0}\int_{s0}\varLambda_0\cdot 0.002\sigma_{xx}{}^2\,dS$$

となる。積分範囲は，$y>0$ の半平面で適当な領域 S_0 を考えればよい。（3.38），（3.39）より

$$\varDelta B=\frac{0.002\times 8\varLambda_0\sigma_0{}^2b^2}{S_0}\int_{F_1}^{F_2}\frac{dF}{F}$$
$$=\frac{0.016\varLambda_0\sigma_0{}^2b^2}{S_0}\left|\log F\right|_{F_1}^{F_2} \qquad (3.40)$$

となる。

転位密度を N とすれば，一つの転位の効果としてとなりの転位までの距離の半分までの面積を考えればよいであろう。そこで，$S_0=1/N$ ととる。さらに転位は，正方形の格子状に規則正しく分布しているとすれば，$F_2=1/2\sqrt{N}b$ となる。F_1 は転位のコアによって定められるが，便宜上 $\log F_1=1$ ととる。$F_1=e$ であって，コアの半径を 2.7 と取ることに相当する。これらの値を（3.40）に入れれば

$$\varDelta B=0.016\varLambda_0 N b^2\sigma_0{}^2\left(\log\frac{1}{2\sqrt{N}b}-1\right) \qquad (3.41)$$

を得る。

$$\varDelta B=\varLambda_0\sigma_{\mathrm{eq}} \qquad (3.42)$$

とすれば

$$\sigma_{\mathrm{eq}}=0.016\sigma_0{}^2(b\sqrt{N})^2\left(\log\frac{1}{b\sqrt{N}}-1.70\right) \qquad (3.43)$$

となる。これは，転位密度による応力のための磁束密度の減少を応力換算したものである。転位密度Nに対し σ_{eq} を計算した結果を図3-20に示す。

転位密度は，加工材でも $10^{11}/\mathrm{cm^2}$ より小さいと思われる。Keh[44]によれば，純鉄に30%の塑性ひずみを与えたときの平均転位密度は 1.54×10^{10}，また加工硬化過程で生じるセル境界中の転位密度は 6×10^{10} 程度であるという。この場合には，図3-20 によって，$\sigma_{\mathrm{eq}}=2.0\sim 2.5\mathrm{kg/mm^2}$ となる。前節で述べた磁気的な静磁エネルギの作用によって，以上の考察に用いた単純な仮定は正確には成り立たず，さらにこの効果が制限される。そこで実験的に塑性ひずみによる磁束密度の変化が非常に小さいことは，このような微視的な考

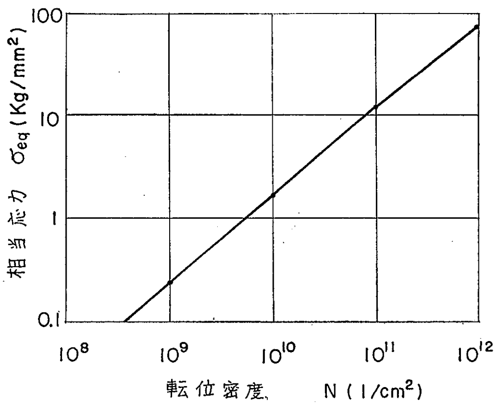


図3-20 磁束密度の変化と転位密度
(応力に換算してあらわす)

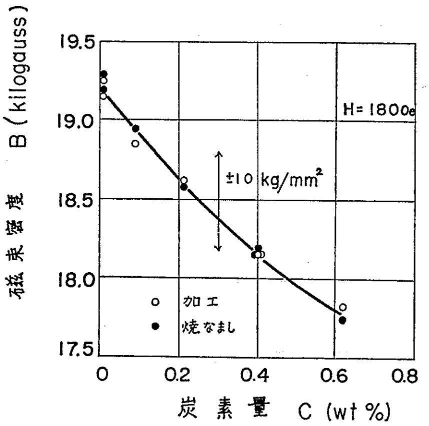


図3-21 バイアス磁束密度と炭素量

察によっても妥当な結果であったと言うことができよう。

3.5 残留応力測定への応用

以上で磁束密度が塑性ひずみに関係なく，応力によって一義的に定まることを明らかにし，炭素鋼の磁気ひずみ効果が，フェライトの磁気ひずみ効果として理解できることを考察した。本節では，この結果を用いる残留応力測定の可能性について考える。

まず，この方法で求められるのは，断面についての平均的応力であることに注意しなければならない。断面上で変化する応力の分布状態は求めることができない。本章の原理によって求められる断面上で一様な応力および変化する場合には平均的応力の測定法は，次のようになる。

磁束密度はある一定バイアス中では

$$B=B_0+\Lambda\sigma$$

で与えられる。σ を測定するためには，B および B_0 を測定する必要がある。そのためには，磁気ひずみ感度および磁気ヒステリシス環線を求めるための図 3-1 に示された装置を用いればよい。応力がまったくないと思われる標準試験片について B-H 曲線および感度 Λ を求め，つぎ応力を求めようとする試験片について B-H 曲線を求める。実際の測定では $\Lambda\sigma \ll B_0$ であるので，測定誤差が大きく入って来ることが予想され，適当な差動測定方式を考える必要がある。この問題については本論文は立入らないが，標準試験片のバイアス磁束密度 B_0 について簡単に述べておく。

一定バイアスでの磁束密度は，組成，組織，加工等によって変化する。同じロットに属している試験片であっても，被測定材が標準試験片とまったく同じ磁気特性を持っていることはあり得ない。図 3-21 は，0.6 %C までの炭素鋼の下降曲線上の 180 Oe における磁束密度の測定結果である。図中に ±10kg/mm² の応力による磁気ひずみ出力の幅を記入してある。たとえば，機械構造用鋼 S 20 C では，規格によって炭素量が $0.15\% < C < 0.25\%$ があることが規定されている。これは，応力換算で ±4 kg/mm² の範囲に相当する。すなわち，炭素量が正確に知られていない場合でも誤差は 4 kg/mm² 以下である。同じロットの標準試験片を用いれば，誤差は ±1 kg/mm² 程度におさえられることが同図より推定できる。

このようにして，断面について一様な残留応力はかなり精度よく測定できるが，一般の残留応力は平均応力が 0 となるものが多い。また，測定したい残留応力が，平均応力ではなく，強度に密接な関係のある表面近くの応力分布状態であることが多い。このような目的には，本章の方法はまったく無力であって，次章以上で述べる交番磁界の表皮効果を利用する方法によらなければならない。

3.6 結言

炭素量0〜0.8%の範囲の炭素鋼のバイアス磁界中での磁気ひずみ効果の実験よりつぎの結果を得た。

炭素鋼の磁気ひずみ効果も最も基本的なものとして，バイアス中の磁束密度の応力による変化について次の基本式を得た。

$$B=B_0+\Lambda\sigma$$

ここで，B_0, Λ はバイアス磁界の関数であり，材料によって変化する。70kg/mm² の範囲では，Λ は一定であり，この関係式は σ についての1次式となる。Λ は負であり，B は引張応力により減少する。

磁気ひずみ感度 Λ は，主として炭素量によって定められる。Λ をバイアス=0 に外挿した感度 Λ_0 については，炭素量 C についての1次式

$$\Lambda_0 = -42.0 + 20.9C \pm 1.0 \quad \mathrm{kg/mm^2}$$

が得られた。共析鋼で40%の感度低下となる。

塑性域における実験より，B_0 および Λ に対する塑性ひずみの影響は比較的小さいことを示した。0.62%の高炭素鋼では，Λ は加工によって30%減少したが，0.2%以下の低炭素鋼では±5%以下の変化であった。これに反し，B_0 は，30%の塑性ひずみによってもほとんど影響を受けなかった。B_0 が一定であると見なしたことによる残留応力測定の誤差は±3kg/mm²である。

次に，実験結果について考察を行った。まず，炭素量による感度の減少を，パーライト結晶粒のセメンタイト板とフェライトの層状組織による静磁エネルギによって定性的に説明した。

塑性変形が進んだ領域でも，バイアス磁束密度が塑性ひずみの影響を受けないという実験事実を，転位によるミクロストレスによって説明した。

本章の方法は，被測定物の残留応力が断面上で一様なときにのみ適用できる。深さ方向に大きさの変化する一般の残留応力の測定には，次章以下で述べる交番磁界の方法によらなければならない。

第4章　交番磁界による応力測定

4.1　緒言

前章では，直流バイアス磁界中の磁気ひずみ効果を測定し，炭素鋼の磁束密度は，塑性ひずみに無関係で，応力のみの関数であることを示した。この結果を用い一様な残留応力を測定することができる。しかしながら，工学的に問題になる残留応力は，深さ方向に分布を持っていることが多いので，この方法では原理的に測定できない。本章では，表面近くの残留応力分布を求めるため，交番磁界の表皮効果を利用する方法についての基礎実験を述べる。

この方法は，導体中のきずによる渦流の乱れによって，きずの検出を行う電磁誘導検査法または渦流検査法[45]と呼ばれている方法に似ている。丸棒に巻いたコイルのインダクタンスを測定するとき，使用周波数が非常に低いときには，交番磁界は丸棒の中心まで及ぶので，断面全体の透磁率の平均によってインダクタンスがきまる。非常に高い周波数では，磁界は表面だけに浸透するので，表面の透磁率だけでインダクタンスがきまる。中間の周波数では，断面上の各点のある重み付き平均によってインダクタンスが与えられる。このようにしていくつかの周波数において測定を行えば，透磁率の分布に関する情報が得られる。表皮効果についての詳細は次章以下にゆずり，本章では，その基礎となる透磁率と応力の関係を求めることにする。

透磁率と応力との関係は，第2章で見た通り，磁束密度と応力との関係に似た1次式であることが予想される。また，高磁界では，透磁率および透磁率に関する磁気ひずみ感度に対する塑性ひずみの影響は小さいものと予想される。本章では，炭素鋼の高磁界における可逆透磁率と応力の関係を求め，交番磁界による残留応力測定法の基礎とする。

4.2　実験方法

4.2.1　測定原理

一定直流バイアス磁界 H 中にある炭素鋼に応力 σ を与えると，その磁束密度 B は

$$B = B_0 + \Lambda\sigma \tag{4.1}$$

で与えられる。この状態で小振幅の磁界 h を加えると，(4.1) に対応して，可逆透磁率 μ_r について

$$\mu_r = \mu_{r0} + \Lambda_r\sigma \tag{4.2}$$

が得られる。(4.1) と (4.2) の定数の間には

$$\mu_r = \frac{\partial B}{\partial h} \tag{4.3}$$

$$\mu_{r0} = \frac{\partial B}{\partial h} \tag{4.4}$$

$$\Lambda_r = \frac{\partial \Lambda}{\partial h} \tag{4.5}$$

の関係がある。μ_{r0} が普通の意味の可逆透磁率である。μ_r は，h として小振幅の交番磁界を用い，交流ブリッジによって求めることができる。その方法は，渦流検査法の原理とほとんど同じである。

無限長ソレノイドと見なしてよいコイルの中に磁性体を入れたときのインダクタンス L は，空心のときのインダクタンス L_0 を用い

$$L = L_0(1 - \eta + \eta\mu_{obs}) \tag{4.6}$$

であらわされる。η は充塡率であって，磁性体の断面積 S とコイルの断面積 S_0 との比

$$\eta = \frac{S}{S_0} \tag{4.7}$$

である。μ_{eff} は Förster[45]によって定義された，測定周波数の関数であって，ある周波数で測定した透磁率 μ_{obs} は，μ_{eff} とその材料の透磁率 μ_{rel} とを用いて

$$\mu_{obs}=\mu_{eff}\mu_{rel} \tag{4.8}$$

であらわされる。(4.6)，(4.8) より

$$\mu_{rel}=\frac{\mu_{obs}}{\mu_{eff}}=\frac{\dfrac{L-L_0}{L_0}+\eta}{\eta}\;\frac{1}{\mu_{eff}} \tag{4.9}$$

が得られ，μ_{rel} を求めることができる。

μ_{eff} は，試験片が長い丸棒であって，コイルが無限長ソレノイドである場合には

$$\frac{f}{f_g}=2\pi f\mu_{rel}\sigma R^2 \tag{4.10}$$

であらわされる f/f_g だけの関数として計算されている。f_g は限界周波数 (limit frequency) と呼ばれている。ここで

σ：電気伝導度

R：磁性体丸棒の半径

f：測定周波数

である。μ_{obs} は本来複素数であり，複素数として測定することができるが，L を通常の意味のインダクタンスとすれば実数となる。これに対応して μ_{eff} も実数部分を取ればよい。その場合には

$$\mu_{rel}=\frac{\mu_{obs}}{\mu_{eff\,(real)}} \tag{4.11}$$

となる。

実際に μ_{obs} より μ_{rel} を求めるには，次のようにした[46]。μ_{rel} を比透磁率，σ を $(\mu\Omega\mathrm{cm})^{-1}$，直径 D を mmであらわせば，限界周波数 f_g は

$$f_g=\frac{5066}{\mu_{rel}\sigma D^2} \tag{4.12}$$

となる[45]。そこで，(4.11) と (4.12) より

$$\mu_{obs}=\mu_{rel}\mu_{eff\,(real)}=\frac{5066}{f\sigma D^2}\;\frac{f}{f_g}\;\mu_{eff\,(real)} \tag{4.13}$$

が得られる。(4.13) の右辺は，f/f_g のみの関数となるので，μ_{obs} の測定値より f/f_g が求まり，さらに (4.12) より μ_{rel} が計算できる。

本章の実験は，表皮効果 μ_{eff} による補正が小さくてすむように，測定周波数は 1000Hz とした。この場合の補正は 8 mmの試験片で10%程度である。

このようにして求められた μ_{rel} は (4.2)，(4.3) における可逆透磁率 μ_r，厳密には，比可逆透磁率 $\overline{\mu_r}$ と同じものである。磁束密度の測定の場合と異なり，磁気ひずみ効果は，段階的に試験片に荷重を加えて，そのときの透磁率を静的に測定することができ，実験が容易である。

4.2.2 測定装置

インダクタンスの測定には，マクスウエルブリッジ（安藤電気製ＡＥ—7ＡＥ型）を用いた。ブロック図を図 4-1 に示す。直流コイルは，第 3 章のものより高磁界が得られる長さ 240mm のソレノイドコイルを用いた。コイルの中央における磁界は

$$H=460i\ \mathrm{Oe}\quad (i：磁化電流(\mathrm{A})) \tag{4.14}$$

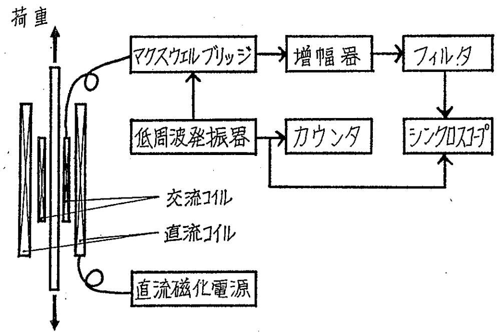


図 4-1 実験装置のブロック図

であって，最大 920Oe の磁界が得られる。

磁界の一様な部分は，中央約 100mm である。交流コイルの長さは 100mm，巻数 933 回，空心インダクタンスは 0.871mH であった。

交流コイルには，低周波発振器より 1000Hz，1mA の電流を流した。交番磁界の大きさは 0.15 Oe（波高値）である。ブリッジ出力は，増幅器，フィルタを通し，不平衡電圧をシンクロスコープで観察しながら平衡を取る。測定精度は $\pm 2\,\mu$H であった。マクスウエルブリッジは，抵抗分も測定できるが，測定精度がインダクタンス分にくらべ悪く，また，直流コイルの発熱，室温の変化が交流コイルの巻線抵抗に影響を与えるので利用しなかった。

荷重試験機と直流コイルを写真 4-1 に，測定器を写真 4-2 に示す。電気伝導度は実測値を用いた。塑性ひずみは，第 3 章と同様，読取り顕微鏡で測定した。

4.2.3 試験片

試料は，0.10%Ｃおよび0.40%Ｃの磨棒鋼よりストレートの試験片を旋盤加工によって製作した。その化学成分を表 4-1 に示す。寸法は，図 4-2 に，交流コイ

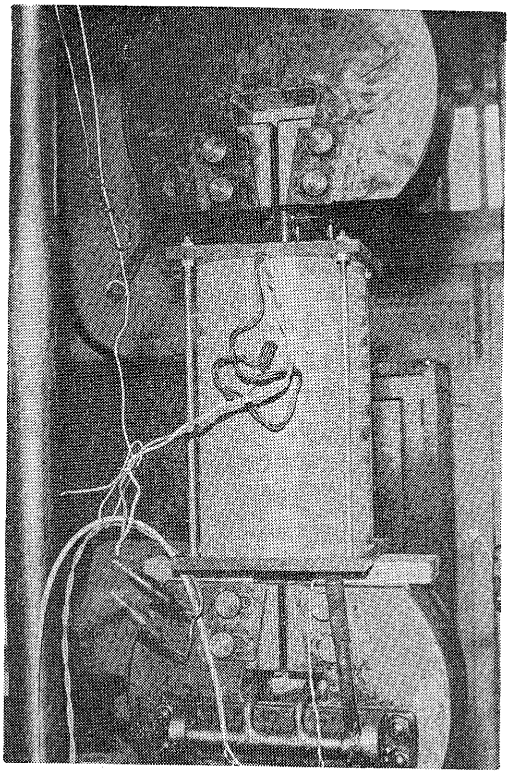


写真 4-1　荷重試験機と直流コイル

ルをはめた状態を写真 4-3 に示す。各試験片は650°C で2時間焼きなましを基準とし，つぎにこれに塑性ひずみを段階的に局部収縮が生じるまで与え，そのたびに測定を繰返した。

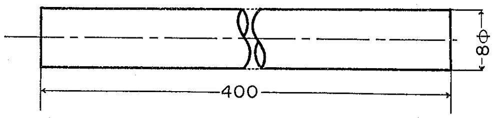


図 4-2　試験片の形状，寸法

表 4-1　試料の化学成分（%）

試料	C	Si	Mn	P	S
S 10 C	0.10	trace	0.41	0.007	0.028
S 40 C	0.40	0.25	0.48	0.009	0.022

4.3　実験結果

炭素鋼の可逆透磁率に対する磁気ひずみ効果を，弾性域および塑性域で測定した。測定項目は，磁気ひずみ効果の直線性，バイアス可逆透磁率 μ_{r0}，磁気ひずみ感度 Λ_r，これらの量のバイアス依存性および加工度依存性等である。また参考のために，磁気ヒステリシス環線より保磁力を求め，塑性ひずみとの関係を求めた。

4.3.1　透磁率と応力の関係式

可逆透磁率と応力の関係式，　(4.2)

$$\mu_r = \mu_{r0} + \Lambda_r \sigma$$

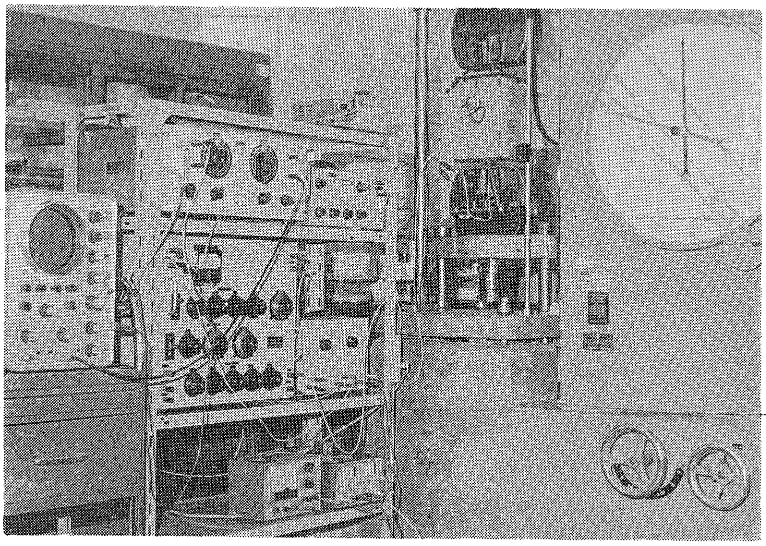


写真 4-2　測定装置

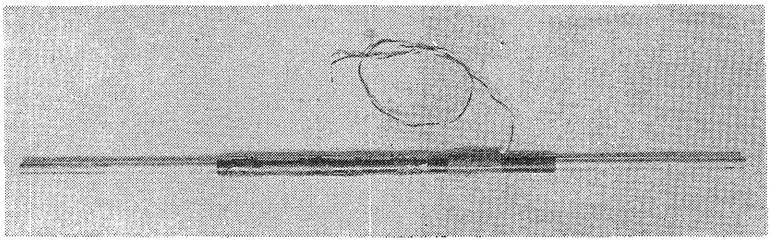


写真 4-3 試験片と交流コイル

を確かめるために，試験片を焼きなましの状態より局部収縮が起るまでの塑性ひずみを与えて，各段階ごとに $\mu_r-\sigma$ の関係を求めた。応力は，各試験片の降伏点まで与えた。結果の一部を図 4-3 に示す。この結果より (4.2) が近似的に成立していることがわかった。直線性は，磁束密度に関する

$$B=B_0+\Lambda\sigma$$

の場合よりやや悪い。B_0 が塑性ひずみによってほとんど影響されないのに反し，μ_{r0} については，かなりはっきりと塑性ひずみの影響が観測された。これを図 4-4 に示す。また，非直線性を図 4-5 に示す。

磁気ひずみ感度は非常に大きく，0.05kg/mm² の応力変化を容易に検出することができた。実験中の測定値の再現性も同程度であり，測定精度の点からも磁束の測定による方法よりすぐれている。

4.3.2 バイアス可逆透磁率 μ_{r0}

バイアス可逆透磁率 μ_{r0} のバイアス依存性を図 4-6 に示す。また，μ_{r0} を炭素量についてあらわしたものが図 4-7 である。10kg/mm² に対する μ_r の変化を図中に記入した。塑性ひずみの影響は，B_0 に対する

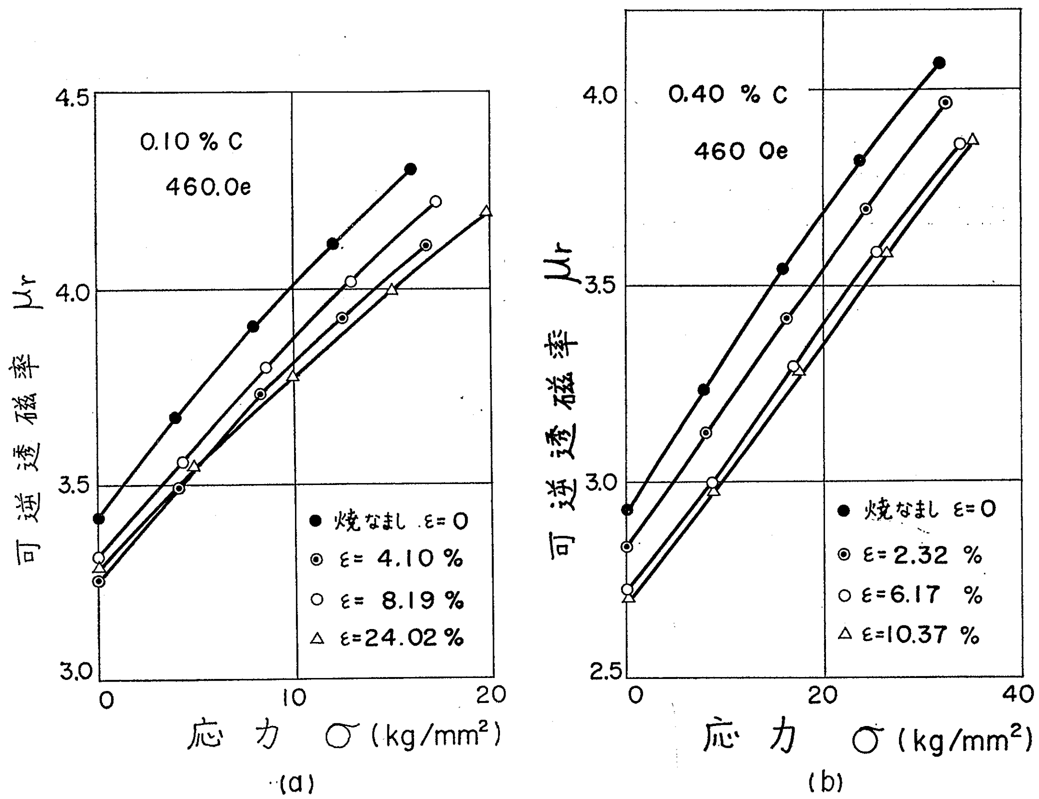


図 4-3 透磁率と応力の関係

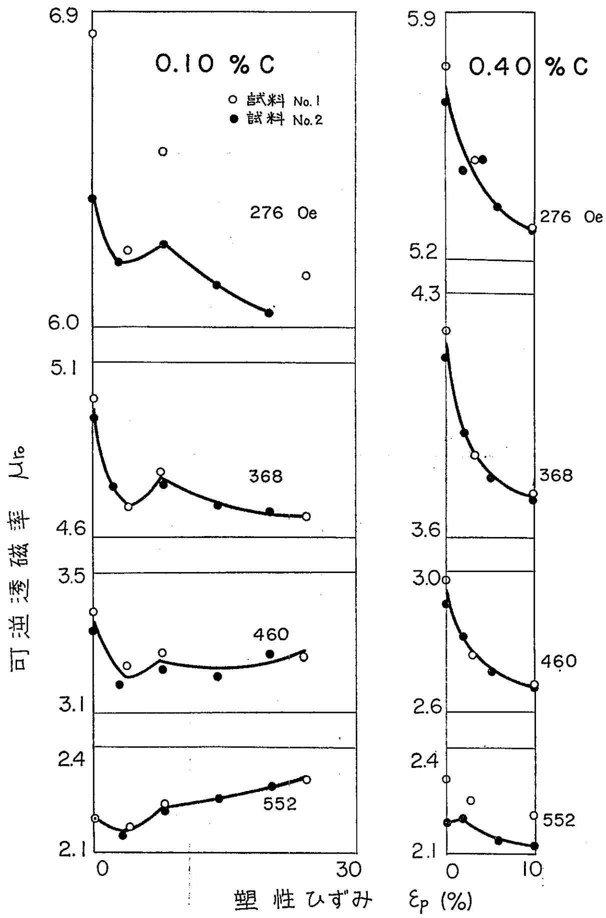


図 4-4 可逆透磁率 μ_{r0} と塑性ひずみ

ものより大きく，バイアス磁界に対して複雑な変化をする。低磁界では，塑性ひずみは μ_{r0} を減少させ，高磁界では増加させる傾向があり，500Oe付近で逆転する。したがって，応力測定をこのバイアス範囲で行えば，塑性ひずみの影響が比較的小さくてすむ。

4.3.3 磁気ひずみ感度 Λ_r

磁気ひずみ感度 Λ_r のバイアス依存性を図 4-8 に示す。Λ_r は正であり，可逆透磁率は引張によって増加する。その最大は 500 Oe 付近にあり，0.05/kg/mm^2 程度である。これらは第2章に述べた理論とよく一致する。相対磁気ひずみ感度 $P_r=\Lambda_r/\mu_{r0}$ は，やはり 500 Oe 付近に最大があり，2 %/kg/mm^2 程度であって，磁束密度についての相対感度 Λ/B_0 にくらべほぼ1桁大きい。この実験で観測されたもっとも大きい変化は，0.4%Cの試験片で 34.5kg/mm^2 の引張応力に対し，460 Oe において43%，522 Oe において41%であった。前者では非直線性は±1%以下，後者ではわずか上にそっていて約±3%であった。

塑性ひずみの影響は，μ_{r0} に対するものと同様に複雑である。感度が最大となるバイアスではかなり大きな感度低下が起る。たとえば，0.10%Cの試験片では 460 Oe で感度低下が起る。それより低いバイアスおよび高いバイアスでは，逆に塑性ひずみによって感度が増加する。0.40%Cの試験片では，加工材の感度最大のバイアスが，焼きなまし材の最大のバイアスと一致せず，ピークが低バイアス側にずれる。そのため，高バイアス領域まで感度が低下する。このように μ_{r0} と Λ_r では，塑性ひずみの影響が小さいバイアス領域が一致しないので，応力測定の誤差を小さくするためには，総合的に考えなくてはならない。

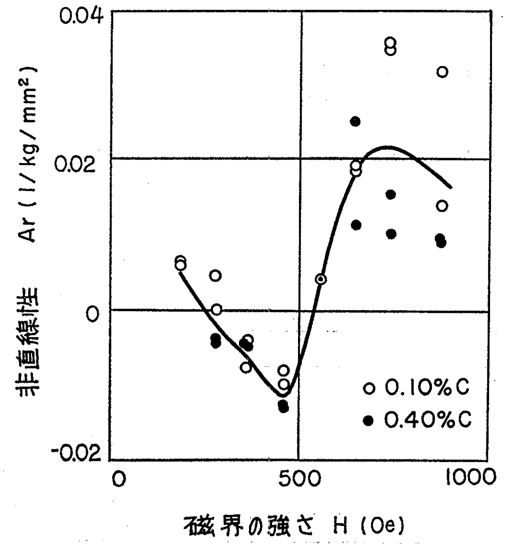


図 4-5　磁気ひずみ効果の非直線性

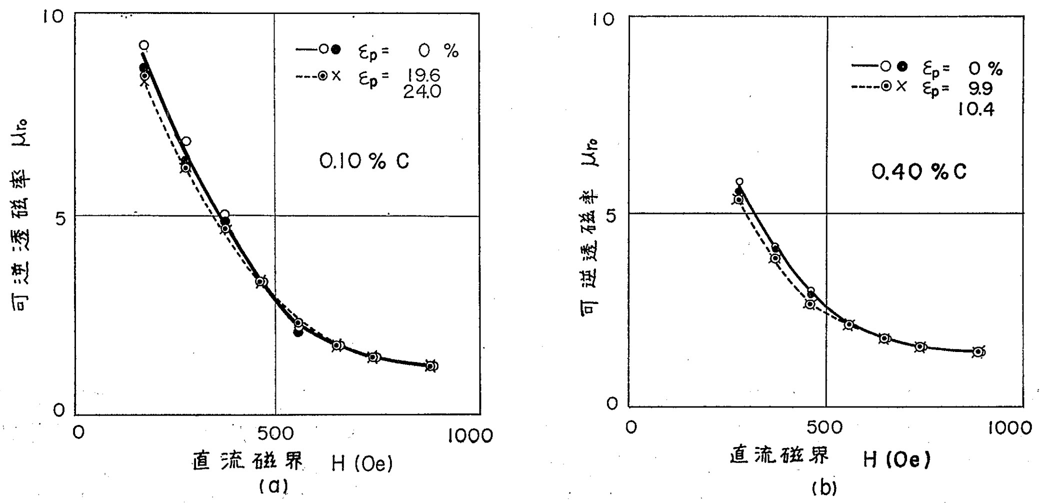


図 4-6　可逆透磁率 μ_{r0} とバイアス

4.3.4　圧縮に対する磁気ひずみ効果

圧縮応力に対する磁気ひずみ効果の実験は，棒状試験片が低応力で座屈するために困難である。しかし，大体のことをつかんでおく必要があるので，図4-9に示す方法で圧縮試験を行った。試験片の中央部にひずみゲージをはり，曲げが入らないように監視しながら約 18kg/mm² の圧縮応力を加えることができた。試験片は，SS34で，化学成分を表4-2に示す。加工材およびこれを650°Cで2時間焼きなましたものについて実験した。引張応力についても実験した。

表 4-2　試料の化学成分（%）

試料	C	Si	Mn	P	S
SS34	0.13	<0.01	0.62	0.014	0.02

結果を図4-10に示す。±20kg/mm² の範囲で，正負両方とも比較的よいのは 460 Oe 付近である。±10 kg/mm² の範囲で感度を求めたものが図4-11である。引張および圧縮についての感度は，傾向は一致しているが 460Oe のピーク以外ではかなり違うので，この

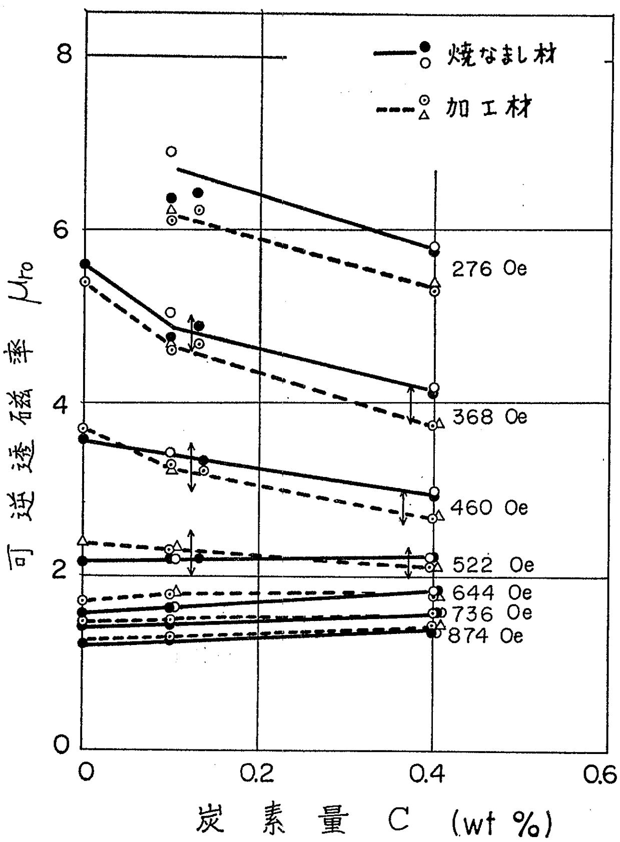


図 4-7　可逆透磁率 μ_{r0} と炭素量

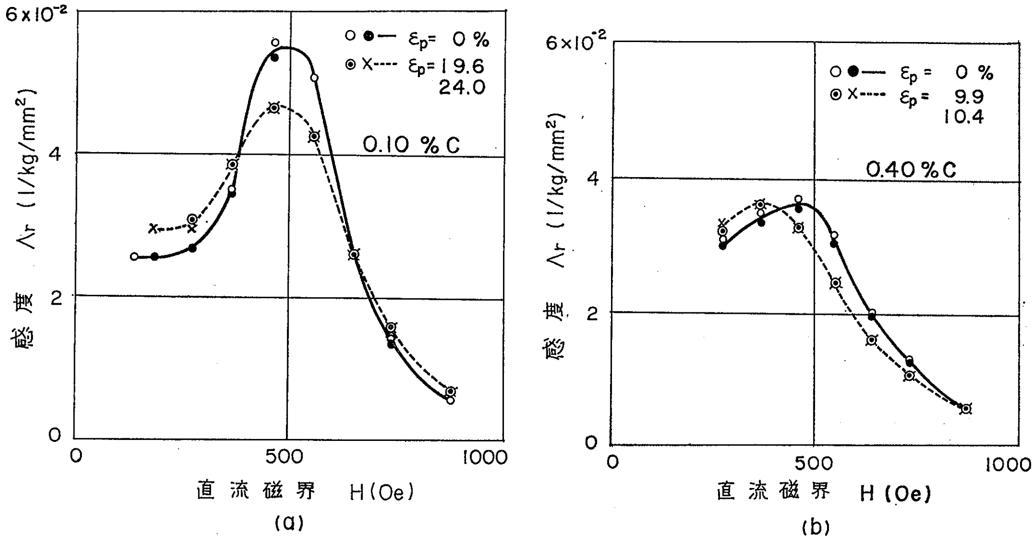


図 4-8　磁気ひずみ感度とバイアス

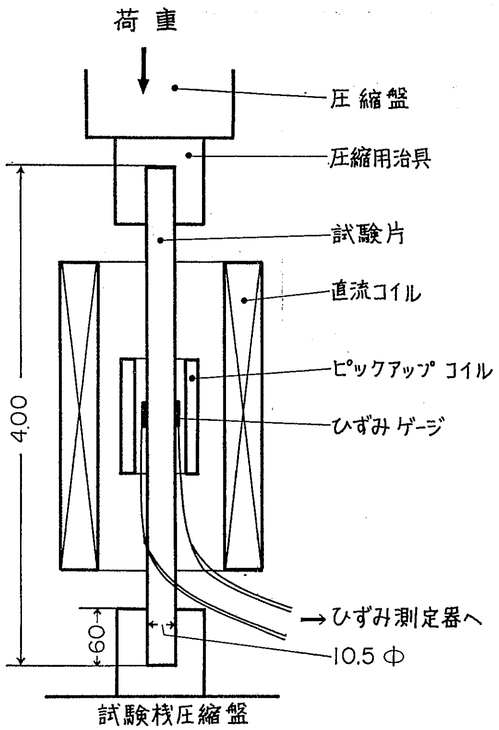


図 4-9　圧縮試験の方法

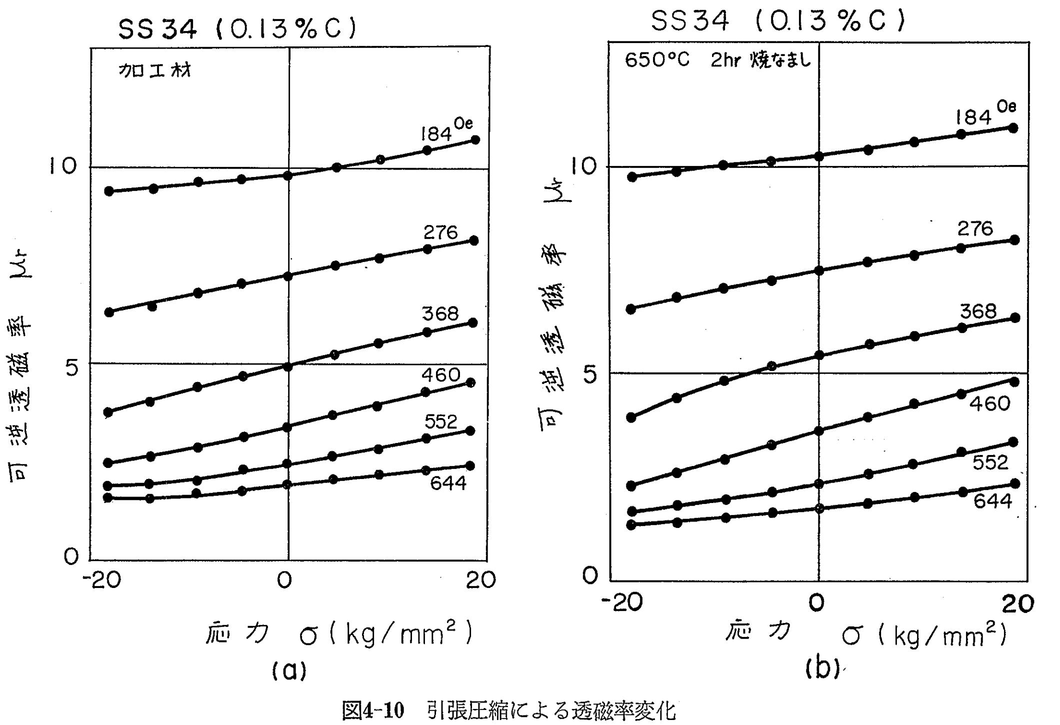


図4-10　引張圧縮による透磁率変化

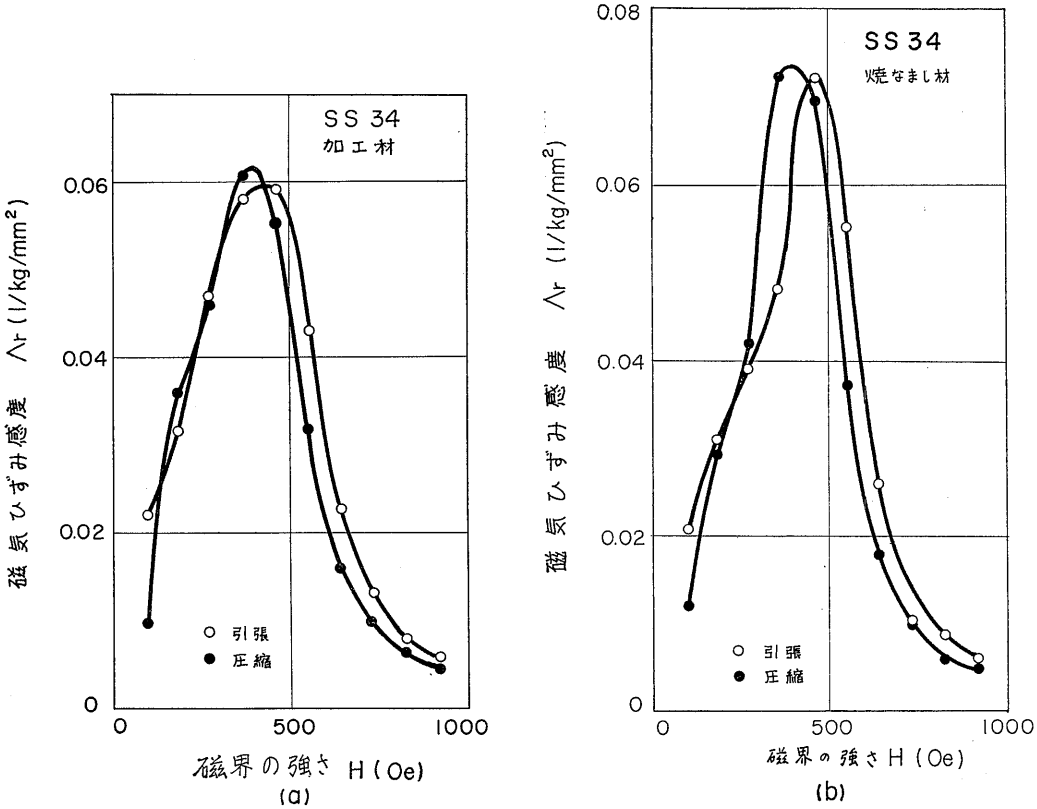


図4-11 引張圧縮に対する磁気ひずみ感度

点からもこのピークを利用するのが有利である。

焼きなまし材について，磁束密度の変化および感度 Λ を引張圧縮について求めたものが図4-12および図4-13である。直線性は，B の方が μ_r よりよく，Λ の正負の応力での値の差は Λ_r より小さい。

4.4 考察

前節の実験によって、バイアス可逆透磁率と磁気ひずみ感度およびこれらに対する塑性ひずみの影響をつかむことができた。残留応力測定法の基礎法則として

$$\mu_r=\mu_{r0}+\Lambda_r\sigma$$

を使うことができる。そこで問題になるのは，塑性ひずみの影響がかなり大きいことである。この点についてさらに詳しい検討を加える。

4.4.1 塑性ひずみの影響

可逆透磁率と磁気ひずみ感度に対する塑性ひずみの影響は，磁束密度の場合より大きい。また透磁率の測定精度が磁束密度の場合よりよいため，塑性ひずみ ε_p の影響を詳しくしらべることができる。

μ_{r0} に対する影響を見るために，磁化率 χ_0

$$\chi_0=\mu_{r0}-1 \tag{4.15}$$

用いる。磁化率の変化の割合 $\Delta\chi_0/\chi_0$

$$\frac{\Delta\chi_0}{\chi_0}=\frac{\chi_0(\varepsilon_p)-\chi_0}{\chi_0}=\frac{\mu_{r0}(\varepsilon_p)-\mu_{r0}}{\chi_0} \tag{4.16}$$

を計算し，ε_p に対して示したものが図4-14である。$\chi_0(\varepsilon_p)$ および $\mu_{r0}(\varepsilon_p)$ は，ε_p を与えたときの磁化率および透磁率である。

磁気ひずみ感度についても相対変化を

$$\frac{\Delta\Lambda_r}{\Lambda_r}=\frac{\Lambda(\varepsilon_p)-\Lambda_r(0)}{\Lambda_r} \tag{4.17}$$

で求めたものが図4-15である。

$\Delta\chi_0/\chi_0$ および $\Delta\Lambda_r/\Lambda_r$ は，ほぼ ±20% の範囲に入っている。さらに注目すべきことは，これらの変化が約 $\varepsilon_p=5\%$ までに大部分が起り，それ以上の塑性ひずみに対しては飽和の傾向を示すことである。

Keh[44] の電顕観察による測定によれば，純鉄の転位

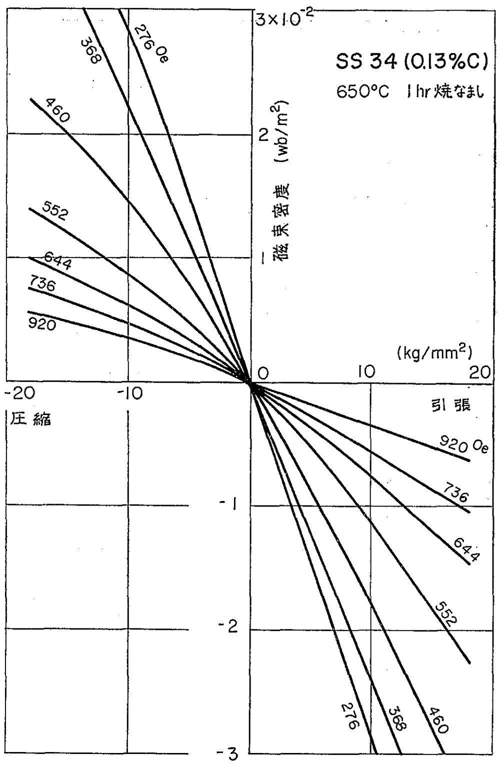


図4-12　引張圧縮による磁束密度変化

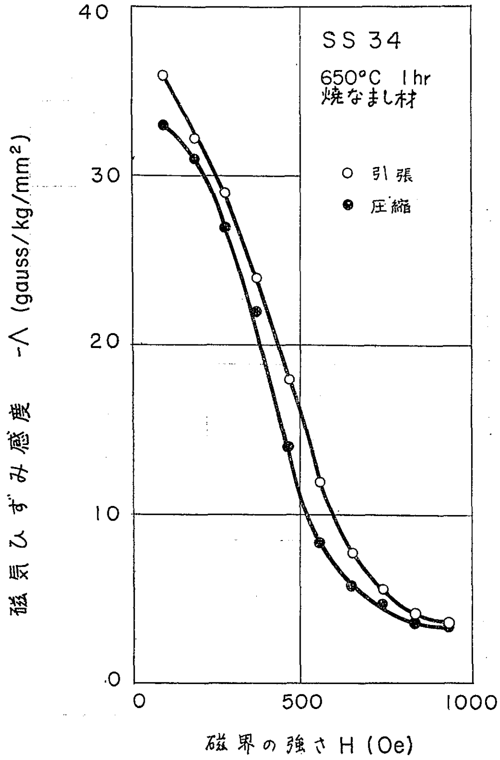
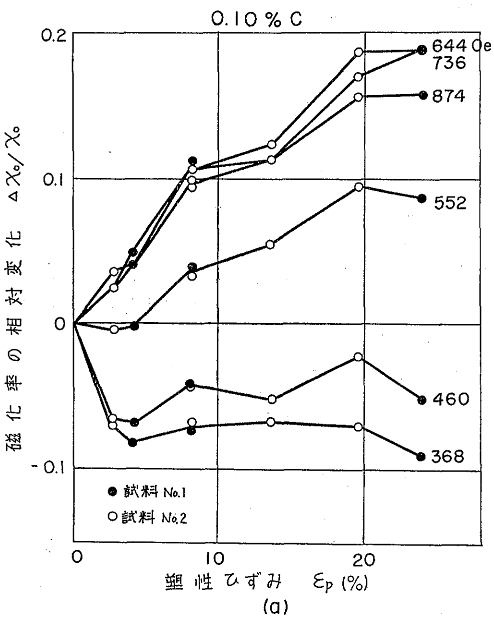


図4-13　引張圧縮に対する感度 Λ



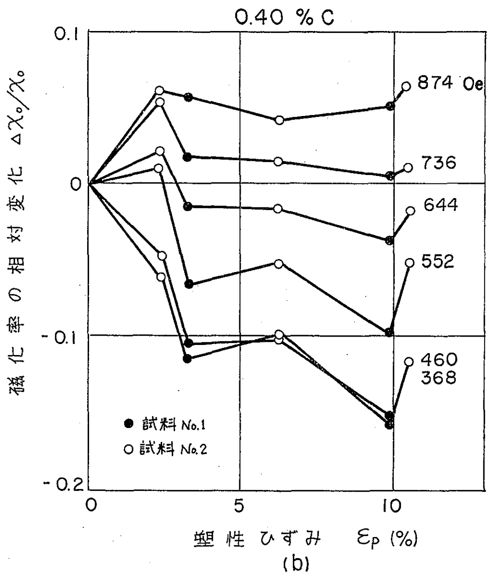


図4-14　塑性ひずみによる磁化率 χ_0 の相対変化

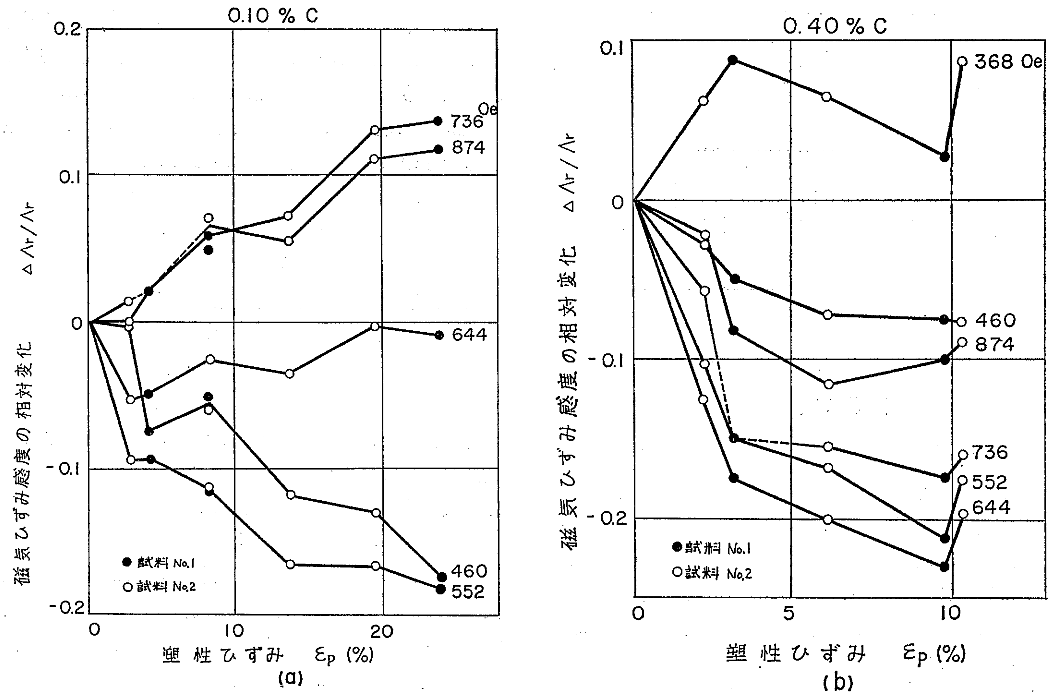


図4-15　塑性ひずみによる磁気ひずみ感度の相対変化

密度は加工度とともに増加するが，$\varepsilon_p=10\%$ 程度で飽和の傾向を示す。また，降伏応力 σ_y もまた同様の傾向を示し，転位密度 N との間には

$$\sigma_y=7.2+1.99\times10^{-3}\sqrt{N}\quad \mathrm{kg/mm^2}$$

の関係が成立する。 σ_y および N と ε_p との関係についての Keh の結果を図4-16，図4-17 に示す。μ_{r0} および Λ_r の変化が塑性ひずみに伴う転位密度の増加によって引き起されると考えるならば，図4-14および図4-15の結果が説明される。

いままで，磁気ひずみ効果を炭素鋼の応力測定に利用するために，高バイアス磁界での磁気ひずみ効果は構造敏感性を持たないという立場を取って来たが，細かく見れば，このような効果が現れる。塑性ひずみの影響は，感度で約16%の減少，零点をきめる μ_{r0} で応力換算 $\pm3\,\mathrm{kg/mm^2}$ 程度の誤差を生じ，応力測定の場合には無視できない。

これらの影響は ε_p とかなり強い相関を持っているので，何等かの方法で ε_p の推定ができれば，これら

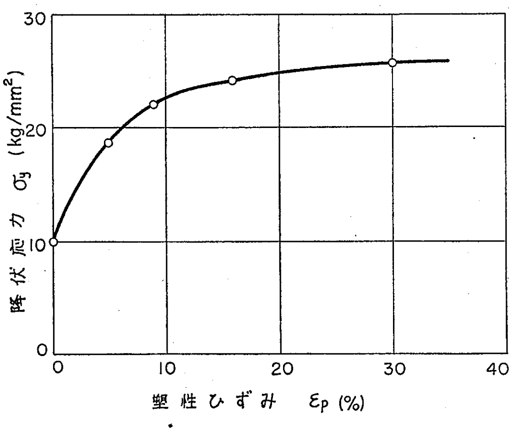


図4-16　降伏応力と塑性ひずみの関係 (A. S. Keh)

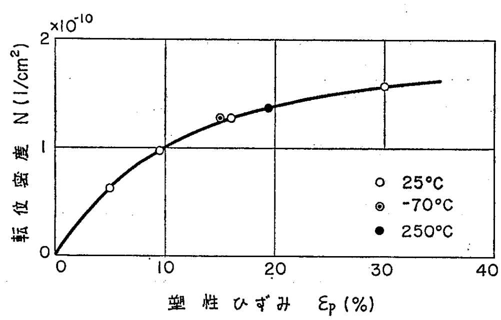


図4-17　転位密度と塑性ひずみの関係 (A. S. Keh)

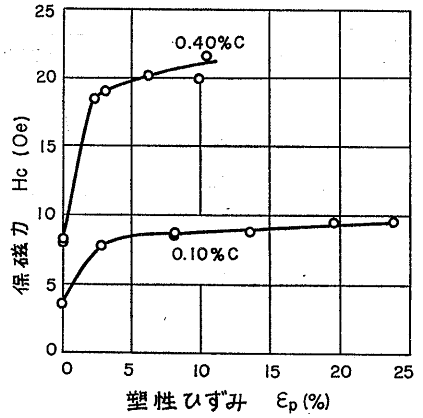


図4-18　保磁力と塑性ひずみの関係

の誤差を大きく減少させることができる。非破壊的に測定可能な物理量として，やはり磁気測定より得られる保磁力が考えられる。Precht[47]は，引張，圧縮，ねじり，圧延による塑性加工による磁気的性質の変化を詳しく研究し，純鉄の保磁力は転位密度の平方根に比例するとしている。

ヒステリシス環線より求めた0.10%Cおよび0.40%Cの試験片の保磁力 H_c と ε_p の関係を図4-18に示す。H_c は，どちらの試料でも $\varepsilon_p=3\%$ まで急激に増加し，それ以上の ε_p に対しては徐々に増加する。$\varepsilon_p>5\%$でも，H_c より ε_p が推定できるが，多くの試験片についてばらつきを測定していないので，確実なことは言えない。しかし，5%以上の加工を受けているかどうかの判定は可能であり，このことを考慮すれば誤差を大幅に減少させることができる。

4.4.2　誤差

応力測定における誤差としては，つぎの三つのものが考えられる。

1. 測定器による誤差
2. 材料のばらつきによる誤差
3. 磁気ひずみ効果自身に含まれる誤差

測定器の精度，再現性は 0.05kg/mm² 程度であって，第1の誤差は，他の二つの誤差にくらべ無視できる。2番目の誤差は，組成，加工，寸法等のばらつきによるもので，補正できるものとそうでないものとがある。一般には，その材料の大体の性質を知るだけで誤差なく測定できるのが理想であろう。3番目の誤差は，磁気ひずみ効果の法則自身に含まれている誤差で，非直線性，ヒステリシス等をさす。すべての因子は μ_{r0} および Λ_r の両方に影響する。

(1)　炭素量による誤差

炭素鋼中の化学成分で最も磁気ひずみ効果に影響を与えるのは炭素である。μ_{r0} に対する影響は，図4-7より求められる。応力測定に適当なバイアスは，368～522Oe の範囲である。炭素量の変化 ΔC により生じる μ_{r0} の誤差は応力換算であらわせば

$$\Delta\mu_{r0}=-81\Delta C\,\mathrm{kg/mm^2}\ (368\mathrm{Oe})$$
$$=-46\Delta C\,\mathrm{kg/mm^2}\ (460\mathrm{Oe})$$
$$=-14\Delta C\,\mathrm{kg/mm^2}\ (522\mathrm{Oe})$$

となる。感度の誤差を相対誤差であらわせば

$$\Delta\Lambda_r/\Lambda_r=-25\Delta C\%\quad(368\mathrm{Oe})$$
$$=-110\Delta C\%\quad(460\mathrm{Oe})$$
$$=-173\Delta C\%\quad(522\mathrm{Oe})$$

である。たとえば，460Oe において標準試験片より炭素量が0.05%多かったとすれば，見掛けの応力 σ_{obs} は，真の応力 σ とつぎの関係にある。

$$\sigma_{obs}=\sigma-0.06\sigma-2.3\,\mathrm{kg/mm^2}$$

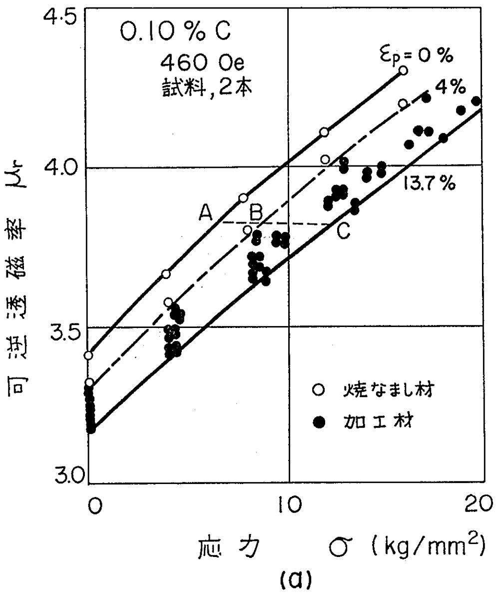
この式より 20kg/mm² の引張応力に対する誤差は，−3.5kg/mm² となる。炭素量が ±0.01% 程度でわかっていれば，誤差は±1kg/mm²以下となる。

(2)　塑性ひずみによる誤差

塑性ひずみによる誤差は，前節に述べたように，保磁力の測定等で加工状態を推定することによりかなり減少させることができる。本章の実験に用いた0.10%Cおよび0.40%Cの試験片それぞれ2本は，それぞれが同じロットに属しており，組成はほぼ等しいと思われる。この試験片についての測定結果を $\varepsilon_p<4\%$ および $\varepsilon_p>4\%$ に分けてプロットしたのが図4-19である。ACは加工度がまったく不明としたときの誤差，ABおよびBCは塑性ひずみがそれぞれ $\varepsilon_p<4\%$ または $\varepsilon_p>4\%$ であると判定されたときの誤差である。誤差ACにくらべ，ABおよびBCは，ほとんど半分である。この誤差には，2本の試験片のばらつきによる誤差を含んでいる。各バイアスごとに，このようにして求めた誤差ACおよびBCを図4-20に示す。0.10%Cでも0.40%Cでも，誤差は 500Oe 付近で小さくなり，加工材ではBCは0.10%Cで1.8kg/mm²，0.40%C で3.0kg/mm²となる。また試験片間の差を取除いた1本ごとの塑性ひずみによる誤差を図4-21に示す。ε_p が不明でも 2～3kg/mm²以下，加工材であることが判明したときにはその半分となる。しかし，試験片ごとのばらつきは当然あるので図4-20で示す誤差は避けられないであろう。

(3)　寸法による誤差

寸法による誤差は，半径が正確に測定できるので，計算によって取除くことができる。8 mmϕ の試験片とこの2倍の断面積を持つ11.3mmϕ の試験片で，表皮効果の補正をして得られた μ_{r0} の値には，試験片間のばらつき以上の差はなかった。非常に寸法のちがう試験片については，別に校正を行う方がよい。



AC：ε_p がまったく未知
BC：$\varepsilon_p > 4\%$

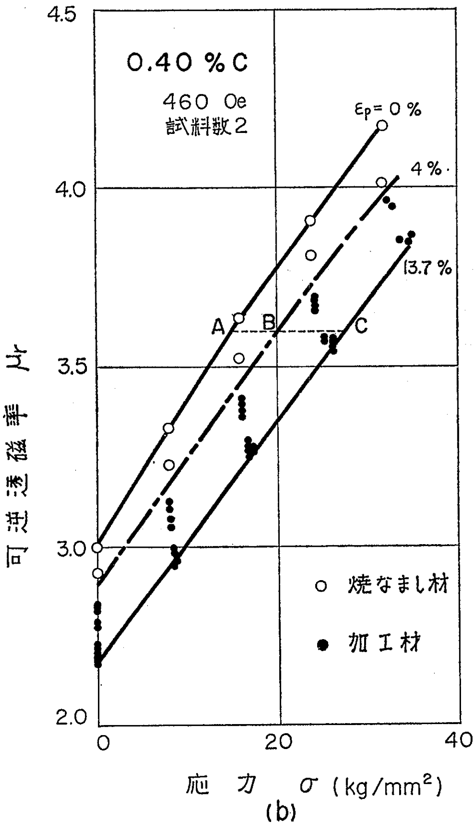


図4-19 透磁率—応力曲線の塑性ひずみによる変化

(4) 非直線性による誤差

非直線性による誤差は，本質的なものである。一様な応力を測定する場合には，$\mu_r-\sigma$ 曲線をそのまま校正曲線として用いればよいが，深さ方向に応力こう配がある場合は補正はほとんど不可能である。この誤差をへらすためには，できるだけ直線性のよいバイアス磁界を使用する必要がある。±20kg/mm³ の範囲では，図4-10より 460Oe がよいようであり，非直線性は±2％以下である。

(5) ヒステリシスによる誤差

$\mu_r-\sigma$ 曲線をくわしくしらべると，第1回の荷重上昇の曲線だけが，それ以後の上昇下降曲線からわずかに外れることが観測される。この現象は，磁気ひずみ材料の磁気ひずみ出力—応力曲線に一般的に見られるものである[48]。その一例を図4-22に示す。このヒステリシスは，460Oe では小さくなり，±1％になる。加工状態では，少くとも荷重が1回加えられた後に取除かれた状態と考えられるので，ヒステリシス誤差として，最大 ±0.3kg/mm² を見こまなければならない。

(6) その他の原因による誤差

以上列挙したほかに誤差の原因として，製造法の差による組織の違いが考えられる。すなわち，結晶粒度，集合組織，フェライトおよびパーライト以外の相の影響等である。これらについては測定値がないので，本論文では立入らない。

結局，誤差として大きいのは，炭素量のばらつきによるものと塑性ひずみによるものである。総合的に見れば，低炭素鋼においては約 ±3kg/mm² の誤差で測定が可能であると思われる。

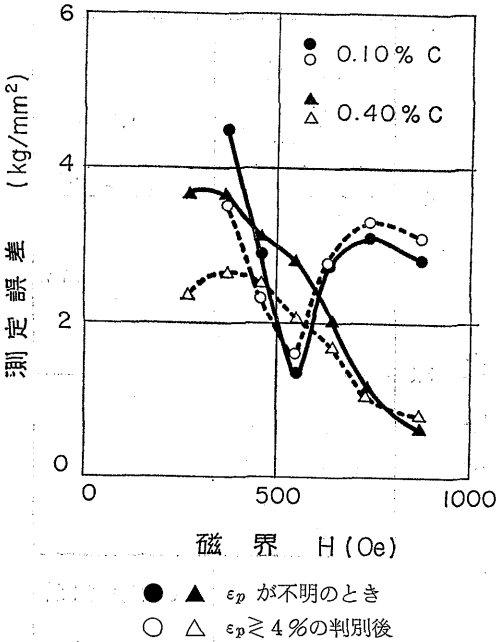


図4-20 塑性ひずみによる誤差（2本の試験片のばらつきを含む）

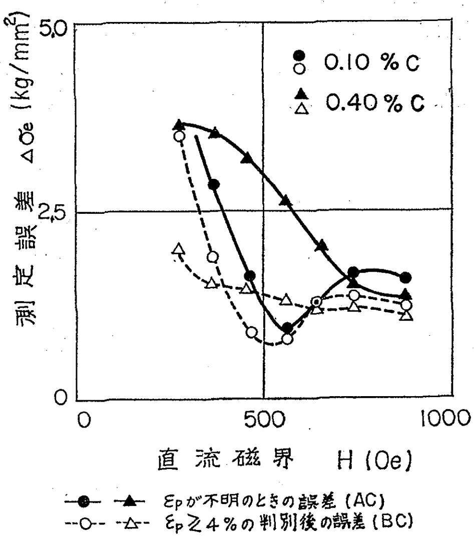


図4-21 塑性ひずみによる誤差（塑性ひずみ未知の1本の試験片）

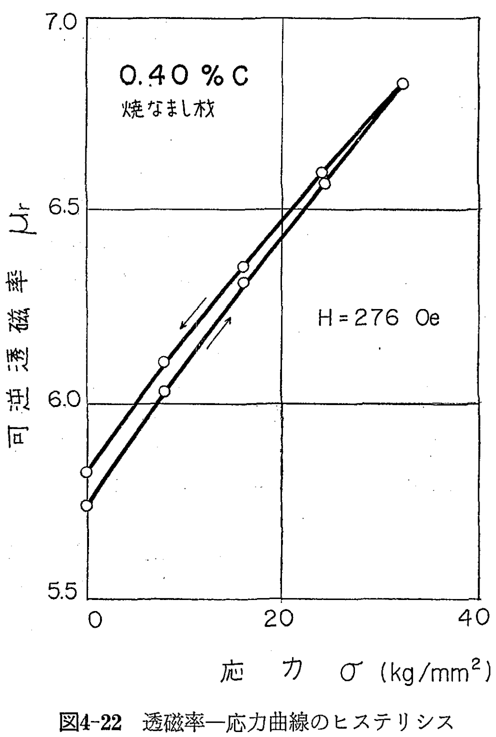


図4-22 透磁率—応力曲線のヒステリシス

4.5 結言

深さ方向に大きさの変化する応力の測定は，第3章に述べた直流磁界による方法では不可能である。第4章では，このような測定が，電磁誘導検査法に似た交番磁界法によって可能であることを述べた。次に，この測定法の基礎となる，一定バイアス磁界中の可逆透磁率についての磁気ひずみ効果の実験を行った。第3章で求められた磁束密度と応力との関係と同様の関係が，可逆透磁率と応力との間に成り立つことを実験的に確かめた。すなわち

$$\mu_r=\mu_{r0}+\Lambda_r\sigma$$

の直線関係が，0.10%Cおよび0.40%Cの試料について，少くともそれぞれの降伏点まで近似的に成り立つ。さらに，可逆透磁率 μ_{r0} および磁気ひずみ感度 Λ_r について，炭素量依存性，バイアス依存性および塑性ひずみ依存性を求めた。Λ_r は，第2章の理論の示すように，500Oe 付近に著しいピークを持ち，2%/kg/mm² に達する非常に大きな効果である。

μ_{r0} および Λ_r に対する塑性ひずみの影響は，$\varepsilon_p<4$%で約半分が起り，$\varepsilon_p>4$%では変化が飽和する傾向がある。この現象は，炭素鋼のフェライト中の転位密度の増加と密接な関係がある。また，加工度は，保磁力等の補助的な測定によってかなりはっきりと $\varepsilon_p<4$%か $\varepsilon_p>4$%かの判定ができることを示し，正

確な加工度が不明の場合にも，このことを利用して加工による誤差を約半分に減少させることができた。

測定誤差の原因を列挙し，総合的に 460Oe のバイアスが最もよいことを示した。このバイアスで，被測定材の炭素量に0.05%の幅があるとすれば，低炭素鋼では，σ を真の応力とすれば

$$\pm(2.3+0.06\sigma)\mathrm{kg/mm^2}$$

の誤差が生じる。また，ε_p が4%より大きいか小さいかの判別だけができたとすれば

$\pm 1.8\mathrm{kg/mm^2}$　0.10%C

$\pm 3.0\mathrm{kg/mm^2}$　0.40%C

の誤差におさまることがわかった。総合的に見れば，低炭素鋼においては ±3kg/mm² の誤差で測定が可能であると考えられる。

第5章　表面残留応力の測定

5.1　緒言

第3章において，炭素鋼の応力を一定高バイアス中の交番磁界法によって，±3kg/mm² の誤差で測定できることを確かめた。本章においては，この方法を実際に残留応力が発生していると思われる炭素鋼棒状試験片に適用し，表面残留応力に対する出力情報を得ることを試みる。

表面における応力を求めるためには，表皮効果による磁界の浸透深さの周波数による変化を利用する必要がある。まず，磁気ひずみ効果の基本式

$$\mu_r=\mu_{r0}+\Lambda_r\sigma \qquad (5.1)$$

が成立し，さらに測定される見掛けの μ_r は，使用する磁界の周波数に対する浸透深さ δ の範囲の応力値によって定められると考える。

磁気ひずみ法によって得られた残留応力の値は，X線応力測定法によって求めた残留応力値と比較する。本論文においては，応力を棒軸方向の1軸応力に限っている。しかし，実際の残留応力は，一般に3軸応力であり，本章において用いる試験片の残留応力もまた1軸ではないため，二つの方法で求めた応力値は一致しない。すなわち，ここで述べている磁気ひずみ法は，いわば Sacks[49]法に対する Heyn-Bauer[50] 法の段階にあると考えられる。この二つの測定値の不一致について簡単な考察を行う。

5.2　実験方法

5.2.1　測定法

炭素鋼の棒状試験片に1軸引張および700°Cより水中急冷の2種類の処理を行った後，高周波交番磁界によりその可逆透磁率を測定し，表面の軸方向残留応力を求めた。また，磁界周波数を変化させ，浸透深さを変化させたときの見掛け応力を求めた。次に，X線応力測定装置により，軸方向および接線方向の残留応力を測定し，磁気ひずみ法と比較した。

磁気ひずみ法は，第4章と同様な交流ブリッジ法で，断面について可逆透磁率が一様である場合の表皮効果の式を用いて，見掛けの可逆透磁率を計算した。測定周波数は，0.2～100kHz の範囲の9点である。バイアス磁界は，最適磁界 460Oe を用い，周波数比 f/f_g は，0.5～300 の範囲で変化する。浸透深さ δ は

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{f/f_g}}\,a \qquad (5.2)$$

で与えられる。試験片の半径 a は約 5mm であるから，δ は0.4～10mm の範囲で変化し，最高周波数での測定値は，深さ 0.4mm までの応力の平均値を示すものと思われる。

X線応力測定装置は，理学電機製ストレンフレックスで，測定面は，$\alpha-F_e(211)$，$C_r-K\alpha$ を用いた。カウンター法で，ピーク位置を半価幅中点法で求め，$\sin^2\psi$ 法（4点）を用い応力を計算した。X線応力定数として

$$K=-30.33\mathrm{kg/mm^2/deg}$$

を用いた。照射面積は，4×2mm とした。

5.2.2　試験片

試験片は，0.4%C の炭素棒鋼より旋盤加工で製作した長さ400mm，直径10.5mmφ の棒状試験片である。化学成分を表5-1に，寸法，形状を図5-1に示す。表5-2に示す600°C，2時間焼きなまし(No.1)，これを1軸塑性引張によって5.8%の塑性ひずみを与えたもの (No.2) および700°Cより水中に急冷したも

表5-1　試料の化学成分（%）

試料	C	Si	Mn	P	S
C40S	0.40	0.25	0.48	0.009	0.022

表 5-2　試験片の種類

試験片	処　理　方　法
No. 1	600°C　2時間　焼きなまし
No. 2	1軸塑性引張　$\varepsilon_p=5.8\%$
No. 3	700°Cより水中に急冷

の（No.3）の3種類について実験を行った。

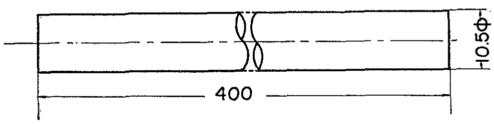


図 5-1　試験片の形状，寸法

5.3　実験結果

5.3.1　X線による測定結果

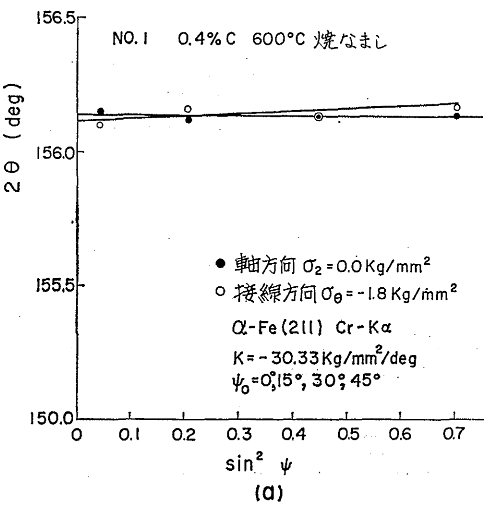
X線で，軸方向および接線方向の応力を，No. 1 試験片では中心で1点，No. 2 および No. 3 では中心部で30mm おきに3点測定し，平均した。結果を表5-3 に示す。$2\theta-\sin^2\psi$ 線図を図5-2に示す。塑性変形を与えた No. 2 では，残留応力は1軸に近いが，700°C 急冷の No. 3 では，測定点によってばらつきがあるが，平均してほぼ円応力状態と見てよい。回折線プロファイルの半価幅は，塑性加工を受けた試験片では大きいが，急冷試験片では，焼きなまし材とほとんど等しく，大きな塑性状態にはないことを示している。

表 5-3　X線による残留応力の測定値

試験片	測定点	軸方向 kg/mm²	接線方向 kg/mm²	半価幅度
No. 1		0.0	−1.8	1.85
No. 2	1	−14.0	−6.1	2.55
	2	−16.2	−6.1	
	3	−15.5	−6.1	
	平均	−15.3	−6.1	
No. 3	1	−14.6	−18.8	1.90
	2	−26.1	−26.7	
	3	−20.8	−17.0	
	平均	−20.5	−20.8	

5.3.2　磁気ひずみ法による測定結果

磁気ひずみ法による応力測定は，基本式(5.1)を基礎とするのであるが，これを実際に適用するにはなお二，三の問題がある。本章の試験片は，同じ素材よりつくったもので，μ_{r0} のちらばりは小さいが，1本の試験片についても，周波数によって μ_{r0}, Λ_r が変化する



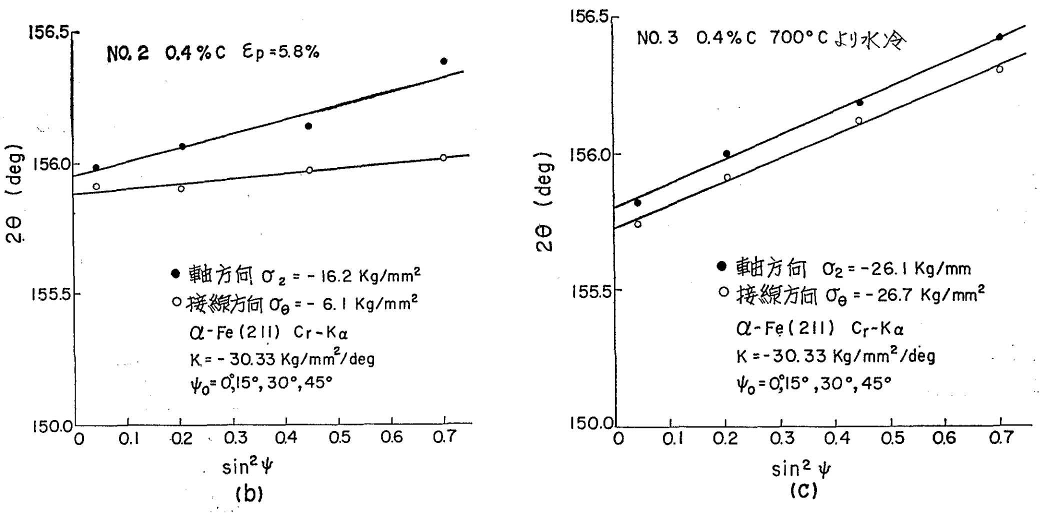


図 5-2　応力測定の $2\theta-\sin^2\psi$ 線図

現象が認められた。その詳しい検討は次章にゆずり，本章では，焼きなまし材の各周波数における μ_{r0} を $\sigma=0$ に対応する基準値として，これからの変化より残留応力を計算した。また，相対磁気ひずみ感度

$$P_r=\frac{\Lambda_r}{\mu_{r0}} \tag{5.3}$$

は，周波数による変化が小さいので一定とした。さらに，5 kHz 付近に可逆透磁率のピークがあらわれる。これは，機械的共振によるモーショナルインピーダンスによるものと思われるが，各試験片に同様のピークがあらわれるので，この周波数比においても焼きなまし材との差を取ることにした。周波数の増加とともに，μ_r は徐々に増加するが，100kHz 付近で急激に減少する。これは，検出コイルの電気的共振によるものであろう。この周波数での測定値の信頼性は低いと思われる。

(1) 磁気ひずみ感度 Λ_r および P_r

磁気ひずみ感度の測定値を表 5-4 に示す。相対磁気ひずみ感度は，ほとんど周波数に無関係で，No. 1 と No. 2 の差はない。No. 3 については測定しなかった。P_r としては，すべて 0.0115 を用いた。

表 5-4 磁気ひずみ感度 Λ_r および P_r

試験片	測定周波数 kHz	μ_{r0}	Λ_r 1/kg/mm²	P_r
No. 1	1	2.75	0.032	0.0116
	20	3.09	0.035	0.0113
No. 2	1	2.56	0.030	0.0117
	20	2.89	0.035	0.0122
No. 3	1	2.84	—	

(2) 周波数による見掛け残留応力の変化

No. 1～No. 3 について，測定周波数を変化させた μ_r の測定値を図 5-3 に示す。ある周波数比に対する No. 2 および No. 3 の μ_r と，基準値と考えた No. 1 の μ_{r0} との差より次式によって応力 σ を求めた。

$$\sigma(f/f_g)=\frac{\mu_r(f/f_g)-\mu_{r0}(f/f_g)}{\mu_{r0}(f/f_g)}\ \frac{1}{P_r} \tag{5.4}$$

この式で $\sigma(f/f_g)$ 等は，その値が f/f_g の関数であることを示す。その結果を図 5-4 に示す。

No.2, No. 3 ともに周波数比が大きい値に対し，すなわち表面の応力は圧縮であるが，周波数比が小さくなると，塑性試験片では圧縮のままであるのに反し，急冷試験片では，次第に圧縮の値が減少し，周波数比が 1 では小さい引張となる。この結果より，塑性引張によって，断面について平衡しない一様な残留応力が発生し，急冷によって，表面が圧縮であり，中心部にはこれと平衡する大きな引張応力が発生していることが推定できる。$f/f_g=100$ で，浸透深さは 0.74mm であり，そのときの値を磁気ひずみ法で求めた表面残留応力とした。

5.4 考察

前節で，X線応力測定法および磁気的応力測定法による表面残留応力の測定結果および磁気的測定法による見掛け残留応力の周波数比による変化を述べた。本節では，この二つの方法による測定結果を比較し，考察を行った。

5.4.1 X線応力と磁気的応力の比較

表面のX線応力と磁気的応力を比較すると，軸方向応力について，No. 2 および No. 3 ともに圧縮応力であるが，磁気的応力はX線応力の約 1/2 である。単一コイルによる現在の磁気的方法で接線応力を求めることは不可能であるが，2.4 で行った 2 軸応力の磁気ひずみ効果についての考察を用いると，この差は次のように説明できる。接線応力 σ_θ の磁気ひずみ効果は，軸応力 σ_z の作用と符号が反対で，大きさが半分である。このことを用いれば磁気的見掛け軸応力 σ_M は

$$\sigma_M=\sigma_z-\frac{1}{2}\sigma_\theta \tag{5.5}$$

である。σ_z および σ_θ に X 線の測定値を用いれば，表 5-5 が得られる。最後の欄に，磁気ひずみ法による表面応力の測定値 σ_{obs} を示す。塑性試験片では，σ_M と σ_{obs} の差が大きいが，急冷試験片ではよく一致している。

表 5-5 磁気的みかけ軸応力 σ_M と実測値 σ_{obs} の比較

試験片	X線応力		σ_M* kg/mm²	σ_{obs} kg/mm²
	σ_z kg/mm²	σ_θ kg/mm²		
No. 2	−15.3	−6.1	−12.2	−7.4
No. 3	−20.5	−20.8	−10.1	−10.5

* $\sigma_M=\sigma_z-\sigma_\theta/2$

5.4.2 急冷試験片

多くの熱処理残留応力の測定結果より知られている

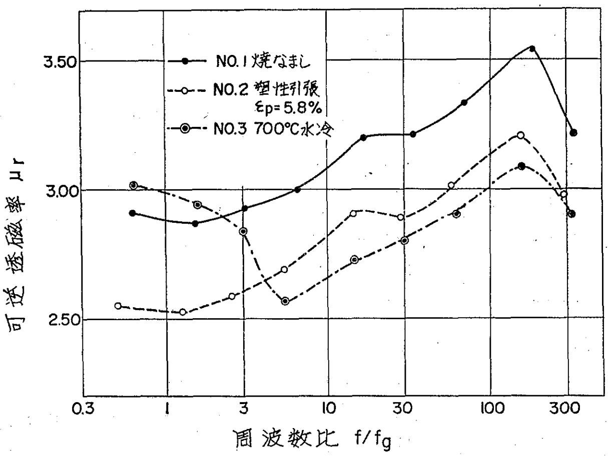


図 5-3 可逆透磁率の周波数比による変化

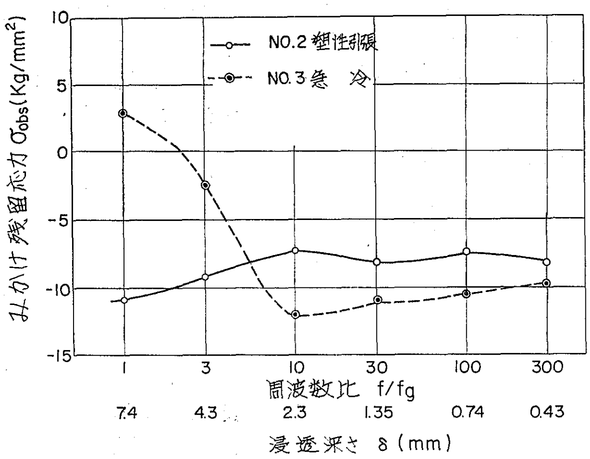


図 5-4 見掛け残留応力の周波数比による変化

ように[51)52)]，急冷試験片では，表面の残留応力が円応力状態であると仮定できるので，実際の軸方向応力σ_zは

$$\sigma_z = 2\sigma_{obs} \tag{5.6}$$

であらわされ，$-21.0\mathrm{kg/mm^2}$となり，X線による測定値 $-20.5\mathrm{kg/mm^2}$ とよく一致する。

図5-4より，中心部に近づくにしたがい，圧縮応力が減少し，引張応力が発生していることが想像される。しかし，内部においては3軸応力状態となり，σ_z, σ_θ, σ_r の間の関係は一般的には求められていないので，表面のように簡単な推定はできない。

内部の熱処理残留応力について，近似的に

$$\sigma_z = \sigma_\theta + \sigma_r \tag{5.7}$$

が成り立つとする。これらは，磁気ひずみ効果に

$$\sigma_M = \sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_\theta + \sigma_r) \tag{5.8}$$

の形で寄与するので，(5.7) より

$$\sigma_M = \frac{1}{2}\sigma_z \tag{5.9}$$

となり，そのときの誤差 $\Delta\sigma_M$ は

$$\Delta\sigma_M = -\frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_\theta - \sigma_r) \tag{5.10}$$

である。σ_z は，残留応力であるから

$$\int \sigma_z dS = 0 \tag{5.11}$$

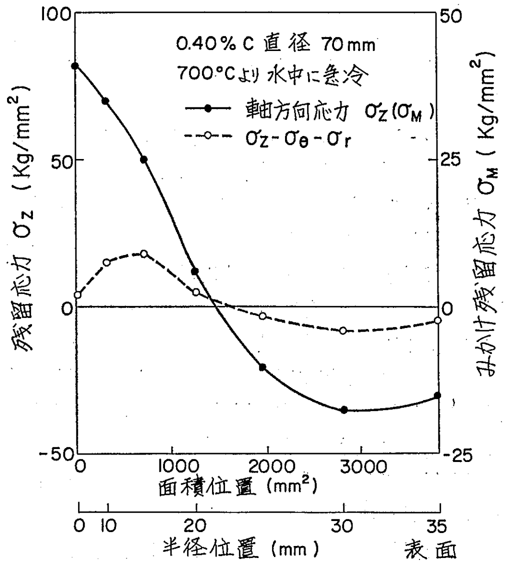


図 5-5　水冷による残留応力測定例（下田ほか，Sacks 法）$\sigma_M=\sigma_z/2$, $\Delta\sigma_M=-(\sigma_z-\sigma_\theta-\sigma_r)/2$

であるので，$\Delta\sigma_M=0$ としてよいときには

$$\int\sigma_M dS=0 \tag{5.12}$$

である。(5.7) の関係式がどの程度成立するかについては，一例として，700°Cより0.40%C，70mmϕ の円筒状試験片を水中急冷した実験（下田ほか）[53] を用いて計算した σ_M および $\Delta\sigma_M$ を図5-5に示す。(5.7) は，あらい近似で使用できる関係式であるように思われる[54]。そこで，磁気的な見掛け応力を2倍して軸応力分布を求めれば，実際に近いものが得られると思われる。

見掛け可逆透磁率に及ぼす内部の応力の影響は，(5.12) のような単純な形ではなく，位相を含む因子を掛けて平均しなければならない。この問題については，第6章で論じるが，周波数比の小さいところでは，補正因子が全断面にわたって1であるとするならば単純な平均でよい。実際に，図5-4で

$f/f_g=1$　　$\sigma_{obs}=2.9\text{kg/mm}^2$

$f/f_g=3$　　$\sigma_{obs}=-2.5\text{kg/mm}^2$

であり，(5.12) が近似的に成り立っている。そこで軸応力については，図5-4より残留応力分布を推定できる可能性がある。軸応力と見掛け応力との関係は，次章で詳しく述べることにする。

$f/f_g=100$ に対する見掛け残留応力は，浸透深さ $\delta=0.74$mm の範囲に対応するもので，X線にくらべはるかに深い部分までの応力の平均である。$\delta=1.35$ mmまでの平均もほとんど変化しないので，表面近くは，かなり深いところまで圧縮応力が生じていることが推定できる。また，この圧縮応力と平衡している中心部の引張応力の値は，表面の圧縮応力にくらべかなり大きいことが予想される。このようにして，表面の応力のみならず，内部の応力が非破壊的に求められるのが磁気的応力測定法の大きな特長である。

5.4.3　塑性引張試験片

塑性引張試験片の σ_M と σ_{obs} との差はかなり大きい。見掛け残留応力の周波数比依存性を見ると，$f/f_g=100$ に対し $\sigma_{obs}=-7.4\text{kg/mm}^2$ より $f/f_g=1$ に対する $\sigma_{obs}=-10.8\text{kg/mm}^2$ と，圧縮でほぼ一定の値を示す。これは，実際の残留応力も，表面より中心部までほぼ一定の圧縮応力が生じていることを示している。

残留応力は，断面について引張応力と圧縮応力とが平衡するものであるが，1軸引張塑性変形を与えてX線応力測定法で残留応力を測定すると，断面について平衡しない圧縮応力の成分が存在することが報告[39]されている。その原因としては，フェライトとパーライトの二相のうちX線回折にあずかるフェライト相に圧縮応力，パーライト相には引張応力が生じているとする説，X線回折にあずかる結晶面には圧縮残留応力が生じているが，他の結晶面では引張応力があって平衡するという説，加工によって生じるセル構造のセル壁が引張応力を受け持ち，セルの内部には圧縮応力があるとする説等が提出されているが結論は得られていない[55]。

1軸塑性引張の後に可逆透磁率が変化する現象は第4章においても述べたが，そこでは，材質の透磁率の変化として，測定誤差として処理した。本章の実験によって，その半径方向の分布が測定され，表面でも内部でもほとんど等しい大きさの透磁率の変化が起っていることがわかった。この変化は，材質の変化とすることもできるが，X線による測定結果を考慮すれば，実在する残留応力によるものであると考えることができる。この考えにしたがって考察を進める。

この種の残留応力，いわゆる第2種の残留応力は，高炭素鋼あるいは合金鋼に著しいことが知られているが，これは二相合金説を支持するように考えられる。可逆透磁率の塑性による変化も，炭素量の増加とともに大きくなり，X線残留応力と対応している。0.40%

Cの炭素鋼は，ほぼ等量のフェライトとパーライトより成っている。フェライトの磁気ひずみ感度は，パーライトの感度より大きいので，フェライト相とパーライト相に等しい大きさの圧縮残留応力と引張残留応力が生じている場合でも，平均すれば，見掛けの圧縮残留応力が残る。パーライトの感度 Λ_{rP} は0.80%Cの試験片より求め

$$\Lambda_{rP}=-2.20/\mathrm{kg/mm^2}$$

が得られた。また，フェライトの感度 Λ_{rF} としては，0.10%Cの試験片についての第4章の測定値

$$\Lambda_{rF}=-5.60/\mathrm{kg/mm^2}$$

を用いた。フェライトに σ_F，パーライトに $-\sigma_F$ の残留応力があるとき測定される見掛け残留応力 σ_{obs} は

$$\sigma_{obs}=\frac{\Lambda_{rF}-\Lambda_{rP}}{2\Lambda_r}\sigma_F=\frac{\sigma_F}{1.88} \qquad (5.13)$$

となる。実測値 $\sigma_{obs}=-7.4\mathrm{kg/mm^2}$ より

$$\sigma_F=-13.9\mathrm{kg/mm^2}$$

が得られる。これは，X線によって測定された軸応力 $\sigma_z=-15.3\mathrm{kg/mm^2}$，および接線応力 σ_θ を考慮した見掛け応力 $\sigma_M=\sigma_z-\sigma_\theta/2=-12.3\mathrm{kg/mm^2}$ に近く，上の仮説を支持するように思われる。

このように，塑性引張を受けた試験片の表面の磁気的残留応力は，実在するフェライト中の圧縮残留応力，すなわち相応力と考えることができる。したがって，測定された磁気的残留応力が巨視的残留応力と一致するか否かは，内部まで測定された応力値の平均が0となるかどうかで判断しなければならない。

5.5 結言

前章までの結果を用いて，実際の表面残留応力を磁気ひずみ法で測定する目的で，700°Cより水中急冷および1軸塑性引張の2種類の0.40%Cの炭素鋼円柱試験片に生じた表面残留応力をX線応力測定法および磁気的応力測定法で測定し，その値を比較した。磁気的応力測定法では，測定周波数を変化させ，表面付近の残留応力および中心部の残留応力の影響を含んだ見掛け残留応力を測定することができた。

急冷試験片については，表面の熱処理残留応力がほぼ円応力状態であることを考慮して，軸応力については，X線応力と磁気応力がほとんど一致した。また，内部の残留応力について $\sigma_z=\sigma_r+\sigma_\theta$ の関係が近似的に成り立つと仮定すれば，見掛け残留応力の測定値は軸応力の分布によって定められる。測定結果より，表面近くは，かなり深いところまで圧縮応力があり，中心部では表面よりも絶対値の大きな引張残留応力の存在が推定できた。

1軸塑性引張試験片では，磁気応力はX線応力と同じく圧縮応力であるが，約50%小さかった。周波数比を変化させて見掛け残留応力を測定すると，内部までほぼ一様な圧縮応力が生じていることがわかり，X線によって従来見出されている相応力と類似の現象が観測された。これは，第4章のように，塑性変形による材質の変化に伴う測定誤差と考えることができる。しかし，フェライト相に圧縮，パーライト相に引張の残留応力が生じているとする仮説をとると，このような透磁率の変化が説明でき，X線相応力と磁気応力は，補正を行ってよく一致し，この二相合金仮説を支持するように思われる。

そこで磁気的応力測定を行うときには，中心までの応力の平均が0にならないときには，巨視的応力と異なる相応力の存在を考慮しなければならない。

このようにして，実際の残留応力を磁気的応力測定によって，表面ばかりでなく，表面近くの値を非破壊的に測定できることを示すことができた。

第6章　内部残留応力の測定

6.1 緒言

前章までの研究によって，実際に生じている表面の軸方向残留応力を，高周波の交番磁界を用いて測定できることを確かめた。本章においては，この方法を簡単な応力分布を持つ試験片内部の応力測定に適用した結果について述べる。

加工，熱処理等により，丸棒中に各種の残留応力が発生する。このような場合について実験を行えばよいが，その応力分布は別の測定法で確かめなければならない。ところが，この残留応力測定法そのものが熟練を必要とするものであり，また，測定誤差を伴う。そこで，正確に内部の応力をコントロールできる方法として，断面上で階段状の応力分布を持つ二重管試験片を用いた。

第4章で得られた磁気ひずみ効果の基本式が成り立ち，丸棒二重管試験片内の磁束分布が表皮効果の式によって与えられることを仮定する。そして，試験片に巻いたコイルのインダクタンスの内部の応力分布による変化を，上の仮定にしたがって計算し，これを実験値と比較する。このようにして，この方法による応力

分布の測定が可能であることを示す。以上のことが証明されれば，他の複雑な応力分布の測定にも同様な方法が適用できることになる。

6.2 測定原理

第5章と同様な測定を考える。すなわち，丸棒試験片を一定高バイアス磁界中に入れてコイルのインダクタンスを測定すれば，これより見掛け透磁率 μ_{obs} が求められ，可逆透磁率 μ_{rel} が計算される。周波数を変化させると μ_{rel} の周波数特性が得られる。

非常に低い周波数では，μ_{rel} は断面上の各点の可逆透磁率の平均値と考えてよい。非常に高い周波数では，μ_{rel} は表面の可逆透磁率に近い値となる。中間の周波数では，表面近くの可逆透磁率の重みが大きいような，断面上の可逆透磁率の重み付き平均となる。

断面上の応力分布が一様であれば，μ_{rel} の周波数特性は平坦になる。表面が引張で中心が圧縮なら，周波数特性は右上り，逆に表面が圧縮で中心が引張なら右下りの曲線になるであろう。これを図6-1に示す。このように μ_{rel} の周波数特性を測定すれば，試験片内部の応力分布が非破壊的に求められることになる。

以上の説明は μ_{obs} についてもほとんどそのままあてはまる。本章では，二重管試験片の μ_{obs} の近似式を求めて，これより透磁率分布を求める方法をとった。

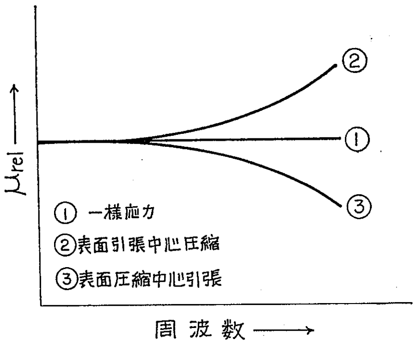


図 6-1 応力分布があるときの透磁率の見掛けの周波数特性

6.2.1 透磁率分布と見掛け透磁率

長い磁性体丸棒に無限長ソレノイドを巻いたときの磁性体内の磁界の強さ H は，軸方向成分だけで

$$\frac{d^2H}{dr^2}+\frac{1}{r}\ \frac{dH}{dt}-i\omega\sigma\mu H=0 \qquad (6.1)$$

であらわされる[45]。ただし

r：半径方向の座標

ω：測定磁界の角周波数

σ：電気伝導度

μ：透磁率

である。H が棒軸に平行なことより，μ は r の関数であってもよいことが導かれる。第6章で用いる透磁率は，すべて可逆透磁率である。そこで，μ_{rel} および μ_r の添字をとくにことわらないかぎり省略する。

磁束 Φ は

$$\Phi=\int_0^a \mu H 2\pi r dr$$
$$=\frac{2\pi a}{i\omega\sigma}\left(\frac{dH}{dr}\right)_{r=a} \qquad (6.2)$$

で与えられる。a は，試験片の外径である。

コイルによる磁界が

$r=a$ において $H=H_0$

ならば，見掛け透磁率 μ_{obs} は

$$\mu_{obs}=\frac{\Phi}{\pi a^2 H_0}$$
$$=\frac{2}{i\omega\sigma\mu a^2}\ \frac{a}{H_0}\left(\frac{dH}{dr}\right)_{r=a}\mu_s \qquad (6.3)$$

であらわされる。μ_s は標準の透磁率である。たとえば，応力0のときの試料の透磁率ととればよい。

μ が内外2層の中でそれぞれ一定である場合についてはすでに多くの研究がある[56]。これは容易に3層以上の場合にも拡張できる。多周波数を用いる本測定法の説明のために，簡単にその計算を述べる。

試験片は同心円筒状のN層に分れ，その中では応力が一定で，したがって μ および σ は一定であるとする。また，σ の変化は μ の変化にくらべはるかに小さいので，試料全体にわたって一定とする。ある周波数でのコイルのインピーダンスの測定より得られる複素透磁率は，(6.3) で与えられる。

(6.1) および (6.3) を

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{r}{a}\\ h&=\frac{H}{H_0}\\ k^2&=\omega\sigma\mu a^2\\ k_s^2&=\omega\sigma\mu_s a^2=f/f_g \end{aligned}\right\} \qquad (6.4)$$

とおいて無次元化すれば

$$\frac{d^2h}{dx^2}+\frac{1}{x}\ \frac{dh}{dx}-ik^2h=0 \qquad (6.5)$$

$$\mu_{obs}=\frac{2}{ik_s^2}\left(\frac{dh}{dx}\right)_{x=1}\mu_s \qquad (6.6)$$

を得る。透磁率は，すべて比透磁率の意味にとってさ

しつかえない。

第 n 層中の (6.5) の解を $h_n(x)(n=1,\ N)$ とし その層の量にすべて添字 n をつけてあらわす。境界条件は，層の境界を $x_n(n=1,\ N-1)$ とすれば

$$\left.\begin{array}{ll}1. & h_n(x_n)=h_{n+1}(x_n) \quad n=1,\ N-1 \\ 2. & k_n\left(\dfrac{dh_n}{dx}\right)_{x=x_n}=k_{n+1}\left(\dfrac{dh_{n+1}}{dx}\right)_{x=x_n} \\ & \qquad\qquad n=1,\ N-1 \\ 3. & h_1(0) \text{ が有限} \\ 4. & h_N(1)=1\end{array}\right\} \quad (6.7)$$

の $2N$ 個となる。

(6.5) の解は，Kelvin の関数

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{B}(z)=\mathrm{ber}(z)+i\ \mathrm{bei}\ (z) \\ \mathrm{K}(z)=\mathrm{ker}(z)+i\ \mathrm{kei}\ (z)\end{array}\right\} \quad (6.8)$$

を用いて

$$h_n(x)B_n\mathrm{B}(k_nx)+K_n\mathrm{K}(k_nx) \quad (6.9)$$

であらわされる。$B_n,\ K_n$ は境界条件 (6.7) より決定される $2N$ 個の定数である。すなわち

$$\left.\begin{array}{l}B_n\mathrm{B}(k_nx_n)+K_n\mathrm{K}(k_nx_n) \\ \quad =B_{n+1}\mathrm{B}(k_{n+1}x_n)+K_{n+1}\mathrm{K}(k_{n+1}x_n) \\ k_n\{B_n\mathrm{B}'(k_nx_n)+K_n\mathrm{K}'(k_nx_n)\} \\ \quad =k_{n+1}\{B_{n+1}\mathrm{B}'(k_{n+1}x_n)+K_{n+1} \\ \qquad\qquad\qquad \mathrm{K}'(k_{n+1}x_n)\} \\ K_1=0 \\ B_N\mathrm{B}(k_n)+K_N\mathrm{K}(k_n)=1\end{array}\right\}$$

(6.10)

の $2N$ 元1次連立方程式を解けば一義的に定まる。そこで透磁率は

$$\mu_{obs}=\frac{2}{ik_s^2}k_N\{B_N\mathrm{B}'(k_N)+K_N\ \mathrm{K}'(k_n)\}\mu_s$$

(6.11)

で与えられる。$k_n(n=1,N)$ が与えられると B_N, K_N がその関数として求められるから，μ_{obs} は k_n の関数となる。k_n は (6.4) によって μ_n と ω を与えればきまる。ω を変えれば，$B_N,\ K_N$ の μ_n に関する関数形が変るから，N 個の周波数 $\omega_m(m=1,N)$ に対し

$$\mu_{obs}(\omega_m)=g_m(\mu_1,\cdots\cdots\mu_N) \quad (6.12)$$
$$m=1,\ N$$

の形の N 個の関係式が得られる。これを逆に解けば $\mu_{obs}(\omega_m)=\mu_{obs.m}$ と書くと

$$\mu_n=G_n(\mu_{obs,1},\cdots\cdots,\mu_{obs.N}) \quad (6.13)$$
$$n=1,N$$

となる。そこで，N個の異った周波数で μ_{obs} の測定

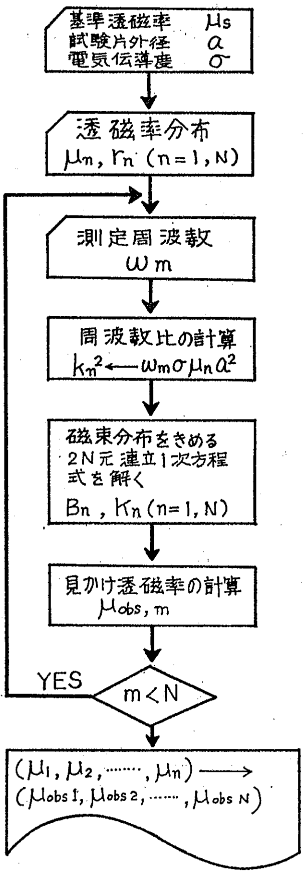


図 6-2 透磁率分布と見掛け透磁率の対応

を行えば，μ_n がすべて求められる。以上の関係を図6-2 のフローチャートに示す。

透磁率分布が階段状でなく，連続関数であらわされる場合にも同様な議論を行うことができる。分布がN次多項式であらわされるときには，$N+1$ 個のパラメータを含み，$N+1$ 個の周波数での μ_{obs} の測定値が必要となる。この場合は付録に述べる。

6.6.2 二重管試験片の実効透磁率

二重管試験片の場合には，Förster の実効透磁率 μ_{eff} にならって

$$\mu_{eff}=\frac{\mu_{obs}}{\mu_s} \quad (6.14)$$

を用いる。これは，μ_s の取り方によって変化する任意性がある。μ_{eff} は，(6.12) に対応し，内層および外層の透磁率 μ_1 および μ_2 の関数であるが，その関数形は，境界 x_1 によって変化する。そこで，x_1 が未知のときには，最小限3個の周波数で測定を行う必

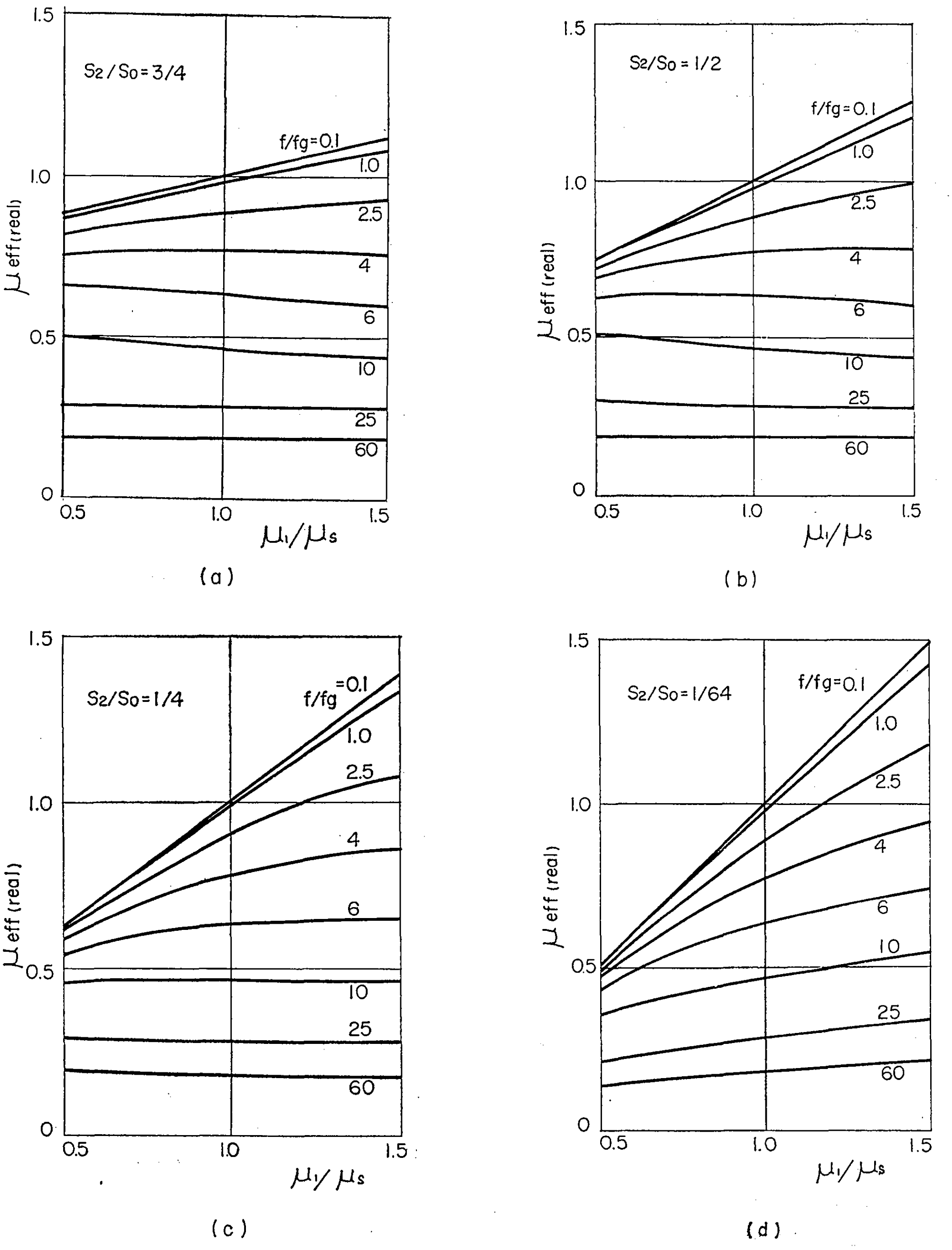


図 **6-3** 実効透磁率 μ_{eff} と内棒の透磁率 μ_1 の関係
S_o/S_2：外管の断面積と全断面積の比

要がある。すなわち

$$\mu_{eff}(k_s^2.m)=g_m(\mu_1,\ \mu_2,\ x_1) \qquad m=1,\ 2,\ 3 \qquad (6.15)$$

となる。

外管の透磁率 μ_2 を μ_s にとり，μ_1 だけを変化させる。また，境界 x_1 により，外管の断面積 S_2 と全断面積の比 S_2/S_0 を変化させて μ_{eff} の実数部分の変化を計算したものを図6-3に示す。$k_s^2 \doteqdot f/f_g$ が小

さいときには，μ_1 とともに μ_{eff} は増加する。k_s^2 が大きくなると，μ_1 の増加により逆に減少する。ただし，$S_2/S_0=1/64$ のように外管が非常に薄いと，μ_{eff} はすべての k_s^2 に対して，μ_1 とともに増加する。

本章の実験は，磁気ひずみ効果の式および表皮効果の式を用いる応力分布の測定の可能性を確かめるのが目的であるので，応力による透磁率の変化が小さい範囲でこれを確かめれば十分である。そこで，(6.15) を $\Delta\mu_1$ について展開し，1次の項だけ取って

$$\mu_{eff}\left(f/f_g\right)=\mu_{eff\cdot0}\left(f/f_g\right)+S\left(f/f_g\right)\frac{\Delta\mu_1}{\mu_s} \tag{6.16}$$

と書く。ただし，$\mu_{eff\cdot0}$ は

$$\mu_1=\mu_2=\mu_s$$

である場合の実効透磁率である。$S(f/f_g)$ は，透磁率変化に対する感度をあらわす。式の意味より

$$S(0)=\frac{S_2}{S_0} \tag{6.17}$$

$$S(\infty)=0 \tag{6.18}$$

となる。このように，μ_{eff} の $\Delta\mu_1$ についての無次元的な感度 $S(f/f_g)$ を定義し，x_1 をパラメータとして測定によって求めておけば

$$\Delta\mu_{eff}(f/f_g)=\mu_{eff}(f/f_g)-\mu_{eff\cdot0}(f/f_g) \tag{6.19}$$

を測定することによって

$$\mu_1=\mu_s+\Delta\mu_1$$
$$=\left\{1+\frac{\Delta\mu_{eff}(f/f_g)}{S(f/f_g)}\right\}\mu_s \tag{6.20}$$

より内部の透磁率 μ_1 を求めることができる。この式において，f/f_g は，μ_s を用いて計算した周波数比であることに注意する必要がある。

$\mu_2 \fallingdotseq \mu_s$ のときには，$\Delta\mu_{eff}(f/f_g)=0$ であるような周波数で μ_2 を測定して，応力0のときの透磁率のかわりに，この μ_2 を μ_s ととって f/f_g を計算すればよい。

6.3 実験方法

第5章と同様な方法によってバイアス磁界中の二重管試験片に巻いたコイルのインダクタンスを測定し，透磁率を計算して，応力と透磁率との関係を求める。いままで用いてきた，電磁誘導検査法で用いられる3種類の透磁率を使用する。

1. μ：材料の透磁率。実数。
2. μ_{obs}：ある周波数で測定された見掛け透磁率。主として実数部分だけを扱う。
3. μ_{eff}：実効透磁率。$\mu_{obs}=\mu_{eff}\cdot\mu$ で定義される。透磁率分布があるため，μ の取り方で変化する。

測定されたインダクタンス L より μ_{obs} は

$$\mu_{obs}=1-\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta}\ \frac{L}{L_0} \tag{6.21}$$

で求められる。η は充塡率，L_0 はコイルの空心インダクタンスである。

μ_{eff} は，試験片内部が一様であるときは，周波数比のみの関数となるが，内部の透磁率が一様でないときには，さらに別の分布をきめるパラメータの関数となる。本章では，使用する材質について，磁気ひずみ効果を求めた後，この結果を用いて，二重管試験片の実験を行った。

6.3.1 実験装置

実験装置は，第4章，図4-1に示すものとほとんど同じである。測定周波数範囲が，第4章より広くなるので，必要な変更を行った。使用したマクスエルブリッジは，測定周波数範囲が1kHz以上であって，1kHz以下では感度が低下するとともに，電源周波数 50Hz の高調波とのビートによって，ブリッジの平衡点が不明瞭になる。そこで，増幅器の出力回路に，普通のフィルタと直列に数個のメカニカルフィルタを挿入して測定精度をあげた。測定周波数は，175Hz，275Hz，475Hz，975Hz，1975Hz，3975Hz および 1～100kHz 間の任意の周波数である。ピックアップコイルは，寸法13.67ϕ×100mm，巻数470回で，空心インダクタンス L_0 は 0.380mH であった。

高周波の測定では，電気伝導度の値が表皮効果の計算に大きくきくので，ダブルブリッジ（横河電機製2725型）により，使用試験片についてその都度実測した。

6.3.2 試験片

試験片は，ＳＳ34の棒鋼より製作した。その化学成分を表6-1に，寸法，形状を図6-4に示す。外管と内棒は自由に滑るように仕上げ，内棒だけに正確に荷重

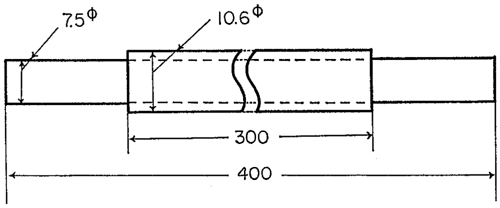


図 6-4　試験片の形状，寸法

が加えられる。機械加工を行ったままの試験片およびこれを650°C，1時間焼きなましたものについて実験を行った。

表 6-1　試料の化学成分（%）

試料	C	Si	Mn	P	S
S S34	0.13	<0.01	0.62	0.014	0.021

6.4 結果

最初に，磁気ひずみ効果の関係式

$$\mu=\mu_0+\Lambda_r\sigma$$

を確かめ，μ_0 と Λ_r のバイアス特性と加工による変化をしらべた。

次に，μ を測定周波数全範囲について測定し，その周波数特性を求めた。μ が材料固有の定数であれば，周波数に無関係に一定になるはずである。

材料の特性を求めた後，内棒に荷重を加えたときの $\mu_{obs}(f/f_g)$ を測定し，(6.16) で与えた，内棒の応力による実効透磁率 $\mu_{eff}(f/f_g)$ の変化についての感度 $S(f/f_g)$ を求め，これを理論値と比較した。

6.4.1 磁気ひずみ効果

二重管試験片の内棒（7.5 ϕ）について

$$\mu=\mu_0+\Lambda_r\sigma$$

の関係を確かめた。表皮効果の影響を少なくするため

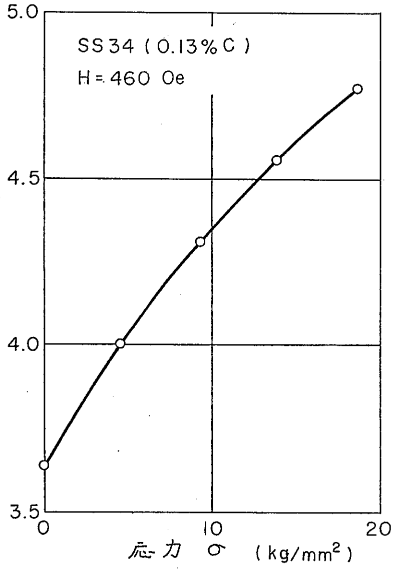


図 6-5　透磁率―応力曲線

に，475Hz で測定した。バイアス 460Oe における透磁率と応力の関係を図 6-5 に示す。ほぼ直線関係が成り立っている。μ_0 のバイアス特性についての測定結果を図 6-6 に示す。加工材と焼きなまし材との差は，応力換算で約 1.5kg/mm² である。Λ_r のバイアス特性を図 6-7 に示す。第 4 章の測定結果と定性的には同じであるが，その最大値が約 20% 大きい。加工材の Λ_r は，焼きなまし材にくらべ，460 Oe で 15〜20% 小さい。

以下の議論には，磁気ひずみ感度のかわりに，相対磁気ひずみ感度 P_r を使うのが便利である。これは

$$P_r=\frac{\Lambda_r}{\mu_0} \tag{6.22}$$

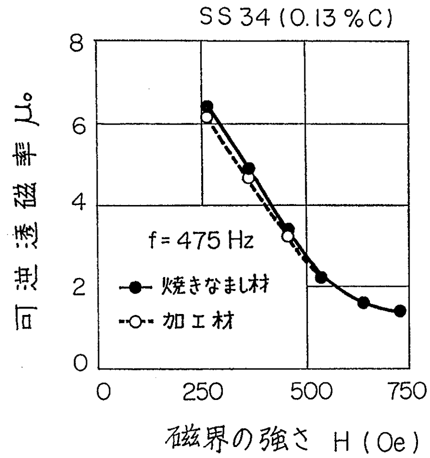


図 6-6　可逆透磁率 μ_0 のバイアス依存性

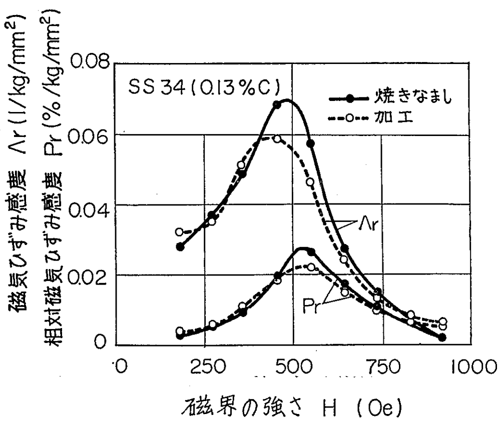


図 6-7　磁気ひずみ感度と相対磁気ひずみ感度のバイアス依存性

で与えられ，磁気ひずみ効果は，P_r を用いて

$$\mu=\mu_0(1+P_r\sigma) \tag{6.23}$$

であらわされる。P_r のバイアス特性は，図6-7に Λ_r とともに示す。P_r は，Λ_r と同じ形をしているが，460Oe における加工材と焼きなまし材の P_r の差は，Λ_r の場合より小さく，5%である。

6.4.2 透磁率の周波数依存性

透磁率 μ は，物質定数であり，周波数には無関係であると考えられる。これを確かめるために，各周波数の μ_{obs} に表皮効果の補正を行って μ の周波数特性を求めたものが図6-8である。f/f_g<10 の範囲では μ は一定であるが，10〜100 では徐々に増加し，100 以上になると急激に増加する。

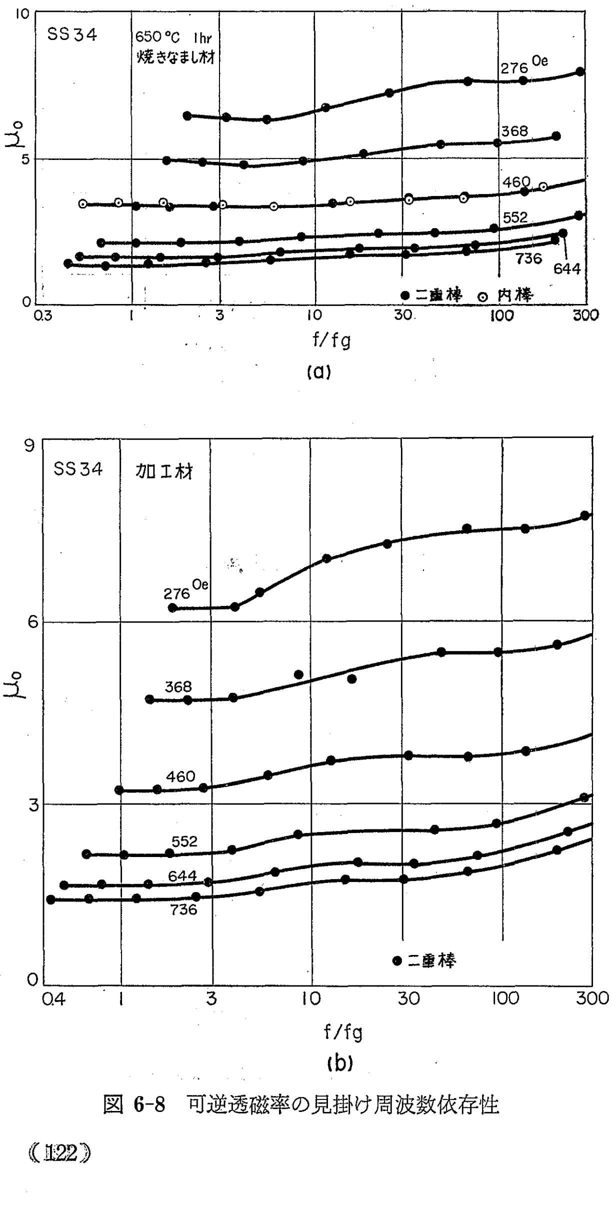


図 6-8　可逆透磁率の見掛け周波数依存性

この原因については，次のことが考えられる。

(1) 測定誤差：f/f_g の増加によりインダクタンスが減少し，(6.21) による μ_{obs} の算出に大きな誤差が入る可能性がある。

(2) コイルの浮遊容量：ピックアップコイルの浮遊容量による共振のため，共振周波数 f_0 より下では，インダクタンスは増加する。f_0 は 100kHz 以上であるが，50kHz以上の μ の上昇には，この影響が大部分を占めるものと考えられる。

(3) 反磁界：f/f_g が大きくなると，磁束は試験片の表面近くに限られ，寸法比が低周波の場合より大きくなる。このため，反磁界が小さくなって見掛けの透磁率は大きくなり真の透磁率に近づく，この影響は，透磁率の大きい低バイアス磁界の場合と，コイルが非常に短い場合を除いては小さいであろう。

(4) 電気伝導度：電気伝導度の測定に誤差があると，高周波側で，表皮効果の補正に大きな誤差を生じる。しかし，いろいろの値を入れて計算しても，μ が一定になるような電気伝導度の値は見出せなかった。

(5) 材質の μ の周波数特性：μ 自身にも周波数特性が考えられる。初透磁率が，磁気余弦や共鳴によって，ある周波数で損出角に極大が生じることはよく知られている[51]。しかし，高バイアス磁界での磁化の回転による磁化現象に同様の現象がおこることは一応考慮の外に置いてもよいであろう。

このように，原因はいろいろ考えられるが，これらを考慮して補正を行っても，μ を完全に一定にすることはできなかった。測定法と計算式の改良によってさらによい結果を得ることは考えられるが，図6-8でわかるように，各バイアスにおける $\mu-f/f_g$ 曲線の傾向が似ているので，むしろこのような周波数特性を仮定した方が簡単である。図6-9に，460Oe における加工材と焼きなまし材の周波数特性を示す。焼きなまし材の μ は，ほとんどこの曲線の上

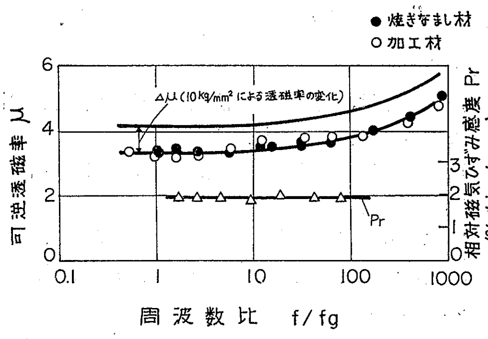


図 6-9　可逆透磁率と相対磁気ひずみ感度の周波数比依存性（M曲線）

に乗るが，加工材の測定点は，上下にちらばる。これは，加工による残留応力のためと思われる。そのちらばりは，3kg/mm² に相当する。図中に10kg/mm² の引張応力に対する変化を記入した。

f/f_g に対する相対感度 P_r を図6-9の下の曲線で示す。P_r は f/f_g に対しほとんど変化しない。そこで，以下の議論では，μ に対しては f/f_g 特性—M曲線—を仮定し，P_r は一定であるとする。

6. 4. 3　二重管試験片

二重管試験片の内棒に荷重を加え，見掛け透磁率を測定する。そのときの応力分布を図6-10に示す。実効透磁率の変化 $\Delta\mu_{eff}$ をつぎの式によって求める。

$$\Delta\mu_{eff}=\frac{\mu_{obs}(\sigma)-\mu_{obs}(0)}{\mu_0} \tag{6.24}$$

ここで，$\mu_{obs}(\sigma)$ は，応力 σ のときの μ_{obs} であり，他の量についても，今後このような表現を用いる。

この $\Delta\mu_{eff}$ は，試験片に一様な応力が加わったときには，実効透磁率の定義より自然に導かれるものであるが，本節の場合には，上式で定義されるものであることに注意する必要がある。

バイアス磁界を変化させ，そのときの σ, P_r に対する $\Delta\mu_{eff}$ より

$$S=\frac{\Delta\mu_{eff}}{P_r\sigma} \tag{6.25}$$

を求める。S は，(6.16) で与えた $S(f/f_g)$ と一致する。

測定周波数は，175 Hz から 100kHz の範囲で6通り，バイアスは，280Oe より 460Oe までの範囲で10通り，試験片の種類が，加工材と焼きなまし材で2通りである。組合せ総数は，120 組であって f/f_g は，0.3〜300 の範囲で変化した。内棒に与えた応力は，10kg/mm² 一定とした。この範囲では，直線性は十分成り立っているとしてよい。

周波数とバイアス磁界の一つの組合せに対し，一つの f/f_g が対応する。この試験片では

$$f/f_g \doteqdot \frac{f\mu}{570} \tag{6.26}$$

である。

S を f/f_g に対してプロットしたものが図6-11である。この図より次のことが明らかになった。

(1) $f/f_g \to 0$ のとき，$S \to 0.5$ となる。

(2) f/f_g が大きくなるとともに S は急激に減少し，$f/f_g \approx 5$ 付近で0となる。

(3) $f/f_g > 5$ では，内棒の透磁率 μ_1 が増加しても，μ_{eff} は減少し，$f/f_g \approx 10$ の付近に S の極小

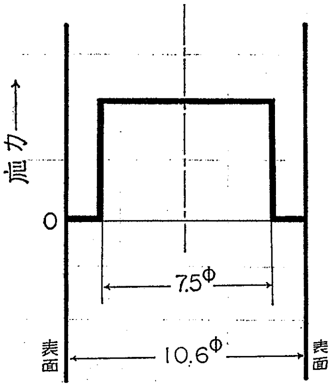


図6-10　二重試験片断面上の応力分布

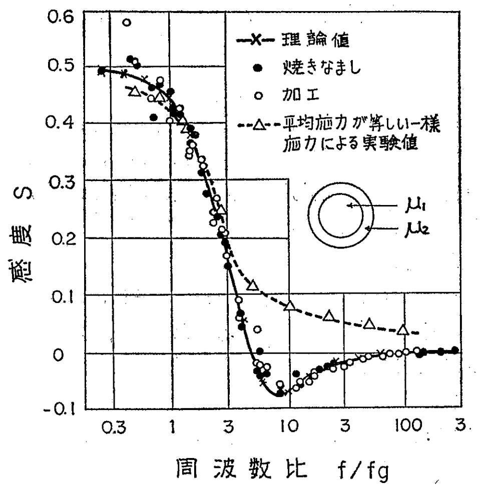


図6-11　μ_1 の変化による実効透磁率変化の感度 S の周波数比依存性
$S=\Delta\mu_{eff}/\{(\mu_1-\mu_2)/\mu_2\}$

がある。

(4) $f/f_g \approx 100$ で，S は非常に小さくなる。

(5) S の測定点は，滑かな一つの曲線の近くに集まる。

これらの結果は理論的にも予想できることである。6.2.1 の表皮効果の計算を行って，(6.16)より求めた $S(f/f_g)$ が図 6-11 の実線であって，測定結果とよく一致している。そこで，$\Delta\mu_{eff}$ は，μ と P_r の異なった組合せでも，f/f_g および内棒と外管の透磁率の比だけできまることが明らかになった。

図中の△印の測定点は，試験片全体に一様な引張応力が加わったとき $\Delta\mu_{eff}$ を，二重管試験片と等しい外径を持つ試験片について測定したものである。荷重は，二重管試験片と等しく，平均応力は等しいが，中心部の応力は1/2になるように取った。平均応力が等しいために，f/f_g が小さいときは，二重管試験片の場合と同様に，S はほぼ0.5となる。$f/f_g=3$ 付近までは，比較的二つの測定値は近いが，それ以上では次第に離れる。S は常に正であって，ステップ状の応力分布と一様応力分布との差が，f/f_g 特性の形にはっきりあらわれる。また，$f/f_g=100$ においても，表面部における応力変化による μ_{obs} の変化は十分に大きく，この範囲の測定より外管の透磁率 μ_2 が正確に求められる。

f/f_g の小さい範囲で測定点がちらばっているが，これは，バイアス磁界の大きい範囲の測定点であって，図6-7よりわかるように，P_r，μ_0 がともに低下し，測定誤差が大きくなったためと思われる。

6.5 二重管試験片の応力分布の計算

前節の実験により，二重管試験片の内棒に一様応力を加えた場合の階段状応力分布について，実効透磁率の変化 $\Delta\mu_{eff}$ の f/f_g 依存性が求められた。また，全断面にわたって一様な応力分布に対する $\Delta\mu_{eff}$ との対比を行い，応力分布の差が，このような測定によってはっきり出ることが示された。さらに，二重管試験片の測定値は，表皮効果を考えた理論式と定性的および定量的によく一致することが示された。

本節では，これらの結果を用い，透磁率の測定より二重管試験片の外管および内棒の応力値を求める。

6.5.1 計算法

二重管試験片の測定値より応力分布を求めるために，これまでの研究によって，次のことを仮定する。

(1) 透磁率と応力の間には

$$\frac{\mu}{\mu_0}=1+P_r\sigma \qquad (6.27)$$

の関係が成り立つ。

(2) 透磁率は，周波数比の関数で，その依存性は図6-9 で示されるM曲線で与えられる。

(3) 相対感度 P_r は，周波数比に無関係に，バイアスできまる一定値をとる。

(4) ステップ状応力分布の実効透磁率におよぼす影響は，$\Delta\mu_{eff}$ の周波数比依存性を示す図6-11の S 曲線で与えられる。

さらに，最適バイアスを 460Oe にきめる。その理由として次のことがあげられる。

(1) 感度 Λ_r が最大である。相対感度 P_r もピークに近く，加工の影響が小さい。

(2) $\mu \approx 3.4$ であって，磁界の浸透深さ δ を大きくすることが容易である。δ は，棒の半径を a とすれば

$$\delta=\sqrt{\frac{2}{f/f_g}}\,a$$

で与えられる[45]。175Hz における δ は7 mmで，十分内部まで磁界が浸透していると考えてよい。また，50kHz では，$\delta=0.4$mm である。

(3) 透磁率が小さいため，表皮効果による見掛けの透磁率の変化が小さく，M曲線が平坦である。

周波数を 175Hz～50kHz の範囲で変化させる。f/f_g は，1～400 の範囲で変化する。

最初に，高周波の測定より外管の応力を決定する。次に，S曲線を用いて，低周波の測定より内棒と外管の透磁率の比を求める。この比と外管の応力より，内棒の応力が求められる。

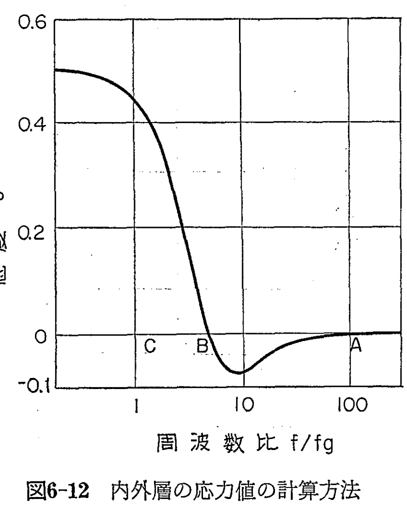


図6-12 内外層の応力値の計算方法

図6-12にS曲線を示す。$f/f_g>100$ では，内層の透磁率 μ_1 は μ_{eff} に影響を及ぼさないから，図6-12のA点で μ_{obs} を測定し，一様透磁率 μ_2 に対する表皮効果の計算より，A点の $f/f_g, \mu_2, \mu_{eff}$ が求められる。各周波数比に対する μ_2 をM曲線によって計算しておく。

次に，低周波の測定より μ_1 を求める。測定周波数は，$S\fallingdotseq0$ であればどう選んでもよいが，S 曲線の形より，$f/f_g=1$ 付近（図6-12のC点）にとると誤差が少ない。まず，測定周波数 f と μ_2 より f/f_g を計算する。μ_1, μ_2 および見掛け透磁率 μ_{obs} については，(6.20) および (6.24) によって次の関係が成り立つ。

$$\frac{\mu_1}{\mu_2}=1+\frac{\Delta\mu_{eff}}{S} \tag{6.28}$$

$$\Delta\mu_{eff}=\frac{\mu_{obs}-\mu_{obs}(\sigma_2)}{\mu_2} \tag{6.29}$$

ここで $\mu_{obs}(\sigma_2)$ とは，二重管試験片が全断面にわたって一様な応力で，透磁率は一様に μ_2 のときに観測されるはずの見掛け透磁率を計算で求めたものである。

μ_1 および μ_2 が求められたので，応力 σ_1 および σ_2 は，磁気ひずみ効果の式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mu_1}{\mu_0}&=1+P_r\sigma_1\\ \frac{\mu_2}{\mu_0}&=1+P_r\sigma_2\end{aligned}\right\} \tag{6.30}$$

によって求められる。

6.5.2 誤差

誤差は，μ_0 のばらつきによる誤差，相対感度 P_r のばらつきによる誤差，μ のM曲線による誤差などから生じる。測定器による μ_{obs} の測定誤差は無視できる。

μ_0 による誤差は最も大きく，加工によるものが2〜3kg/mm^2 である。M曲線を仮定しても生じる μ の f/f_g 依存性のばらつきは，約±1kg/mm^2 程度であると推定される。P_r は，加工によって指示値の ±5％の誤差を生じる。これらを総合して，誤差は約±3kg/mm^2 と推定される。

6.6 考察

前節で，二重管試験片については，2周波数で測定を行って内外の応力を求めることができることを示した。しかし，実際の丸棒試験片に生じている残留応力は，さらに複雑なものであり，これを上述の2段ステップ状応力分布で近似すれば，きわめてあらい近似となる。この点を改善するには，内外の境界面も可変にして3周波数で測定を行うことが考えられる。図6-13は，断面積比を3/4，1/2，1/4，1/16，1/64と変化させたときの S 曲線を示す。10ϕ の試験片について外管の厚さを示せば，1/64 で 0.04mm，1/4 で 0.67 mm である。f/f_g が増加するときの S の減少のしかたが，外管の肉厚によって変化することがわかる。$f/f_g=4$ および1のときの S の比を図6-14に示す。S 曲線は，内棒と外管の透磁率の比についての感度曲線であり，外管の肉厚が0.2mm ぐらいになると $f/f_g=100$ でも，かなり内棒の影響が出るので，μ_2 の値を高周波の測定より直ちに計算することはできない。しかし，図6-14を用いて2段ステップ状応力分布で近似した場合の境界面がほぼ求められ，実際の表面近くの応力の推定を行うことができる。

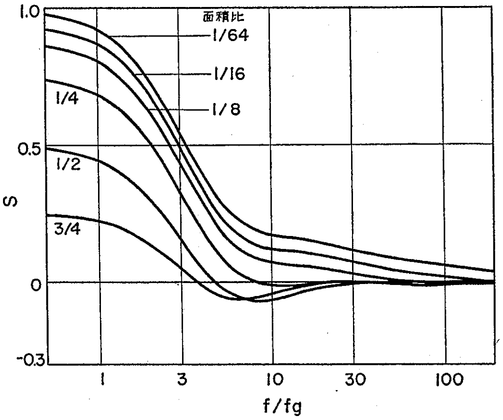


図6-13　外管の断面積と全断面積の比がS曲線におよぼす影響

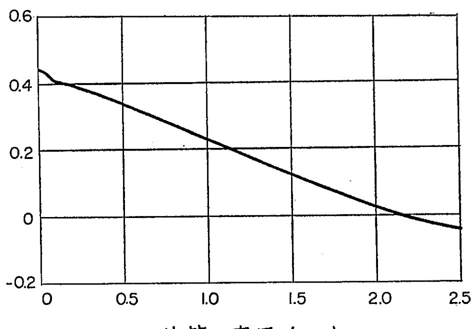


図6-14　周波数比4および1における感度に対する外管肉厚の影響（外径10.5mmの場合）

第二の方法としては，さらに複雑な分布として，3段ステップ状分布を仮定することである。途中に最大，最小がある場合の近似が可能である。境界面を固定すれば，3周波数の測定値でよい。

第三の方法は，残留応力分布を N 個の係数を持つ多項式で近似し，その場合の表皮効果の式を解き，測定値と係数の関係を求める方法である。この方法は実際的であるので，その近似解法の一つを付録で述べる。

6.7 結言

本章においては，前章までに求められた結果を基礎とし，多周波数の測定によって残留応力分布を求める方法の可能性を実験的にたしかめることができた。

測定原理は，表皮効果のため磁界の浸透深さが周波数によって変化することと，磁気ひずみ効果との組合せである。

これを確かめるために，簡単な応力分布が与えられる二重管試験片にこの測定原理を適用し，実験結果と理論値との比較を行った。

最初に，N 個の定数で与えられる透磁率分布は，N 個の周波数における見掛け透磁率の測定より求められることを示した。次に，実験と比較するために，二重管試験片の見掛け透磁率の変化と内棒の透磁率変化の関係を計算により求めた。

試験片の材質について，磁気ひずみ効果を測定し，相対感度 P_r は感度 Λ_r よりも加工の影響が小さいことを見出した。

広い範囲の周波数比での透磁率の測定より，理論的には補正できない周波数比依存性を見出し，これをM曲線と呼んで，実験的に補正することにした。P_r は周波数比に無関係で，磁気ひずみ効果の基本式として

$$\frac{\mu}{\mu_0}=1+P_r\sigma$$

を採用した。

次に，二重管試験片の内棒に引張荷重を加え，見掛け透磁率の変化を測定し，これを実効透磁率の変化 $\Delta\mu_{eff}$ として整理し

$$S=\frac{\Delta\mu_{eff}}{P_r\sigma}$$

により，バイアス，周波数，材質の120個の組合せより $S-f/f_g$ 曲線を求めた。この結果は，理論的に求めたS曲線とよく一致し，この磁気ひずみ効果と表皮効果を組み合せた測定原理が確かめられた。

この結果を用いて，二重管試験片の内外層の応力を，高周波および低周波の二つの測定値より計算する方法を述べ，さらに複雑な残留応力分布を求める方法についても若干の考察を行った。

第7章 結 論

7.1 緒言

機械および構造物の強度に大きな影響を及ぼす残留応力を，磁気ひずみ効果を用いる磁気的測定法によって求めるための基礎的研究を行った。この方法の特徴は，表面よりミリメートルオーダーの深さの内部の応力状態を非破壊的に求められることである。

残留応力の発生の多くが塑性変形に伴うものであることを考え，磁気ひずみ効果におよぼす加工の影響について特に詳しく研究を行った。

まず，炭素鋼について，磁束密度および可逆透磁率の応力による変化について基礎的な関係式を求めた。この関係式を用いて，炭素鋼の応力を，塑性ひずみには無関係に，同じ磁気ひずみ効果の関係式を用いて測定できることを示した。

次に，断面上で一様でない残留応力を求めるために，周波数によって浸透深さのちがう交番磁界を用いればよいことを提案し，この測定法の考え方が正しいことを実験的に示すことができた。

この研究において得られた結果を次節に列挙する。

7.2 本研究の成果

(1) 磁気ひずみ効果の理論

高磁界における磁気ひずみ効果は，材料内部の不均一性に影響されない飽和磁気の強さ，磁気異方性定数，磁気ひずみ定数によって決定される。等方磁気ひずみ材料の磁束密度の応力による変化に対する Bozorth らの理論を拡張し，磁束密度，可逆透磁率，磁束密度についての磁気ひずみ感度とその2次項，可逆透磁率についての磁気ひずみ感度を，もっとも簡単な1軸応力の場合について，バイアス磁界の関数として求めた。実験値との比較を行って，定性的および定量的にこれらの磁気的性質をよく説明することができた。

(2) 磁束密度と応力との関係

一定のバイアス磁界中の炭素鋼に応力を加えたとき磁束密度 B と応力 σ の間には

$$B=B_0+\Lambda\sigma$$

の1次式が成立する。B_0 は基準の磁束密度，Λ は磁気ひずみ感度である。この式は，材料が弾性域にある

か塑性域にあるかに無関係に，同じ B_0 と Λ を用いて成立するとしても近似的にはさしつかえない。B_0, Λ は，バイアス磁界，組成，加工度，熱処理等の因子の関数である。Λ の炭素量の増加による減少を，パーライト結晶粒中のセメンタイト板にもとづく静磁エネルギで説明した。

B_0 は，塑性ひずみによってほとんど影響を受けないことが確かめられた。この結果は，塑性変形に伴う転位密度の増加によるミクロストレスを考慮しても妥当であることが示された。

(3) 可逆透磁率と応力との関係

不均一分布の残留応力を交番磁界で測定する場合に必要となる，可逆透磁率と応力との関係を求めた。一定バイアスで，可逆透磁率 μ_r と応力 σ の間には

$$\mu_r=\mu_{r0}+\Lambda_r\sigma$$

の1次式が成立する。μ_{r0}, Λ_r は，バイアス磁界，組成，加工等の関数である。

Λ_r は，500Oe 付近に著しいピークを持っており，この付近のバイアスで測定を行うのが適当である。

μ_{r0}, Λ_r に対する塑性ひずみの影響を詳細にしらべた。この二つの定数の変化は，塑性ひずみが3〜5%までに大部分が起り，それ以上では，変化は徐々に増加する。塑性ひずみの大きさを保磁力の測定によって推定して μ_{r0}, Λ_r の加工による変化から生じる誤差を半減させることができ，総合的には，約3kg/mm^2 の誤差で応力測定が可能である。

(4) 表面残留応力の測定

実際に残留応力の生じている1軸塑性引張試験片および水中急冷試験片に，可逆透磁率と応力との関係式を適用し，高周波の交番磁界を用いて表面の残留応力を測定し，X線応力測定法による残留応力値と比較した。表面における2軸応力状態の考察より，磁気的に求めた軸方向残留応力は，X線による軸方向残留応力と一致し，磁気ひずみ法が実用できる見透しを得た。さらに，周波数を変化させて見掛け逆磁率を測定し，急冷試験片内部の応力分布について定性的な推定を行うことができた。

(5) 残留応力測定法の原理

内部の残留応力測定法の原理は，交番磁界の浸透深さが，表皮効果のため周波数によって変化することを利用する。バイアス磁界のため，可逆透磁率は低下し，内部の応力を十分測定することができる。

応力分布が N 個の定数で与えられる場合には，N 個の周波数で見掛け透磁率の測定を行えば応力分布が得られる。内棒と外管の断面積の等しい二重管試験片では，応力分布は内外層の応力値で指定できるので，2周波数の測定が必要である。

磁気的残留応力測定法の原理として次のものを採用した。

1. 磁気ひずみ効果は
$$\frac{\mu}{\mu_0}=1+P_r\sigma$$
で与えられる。
2. 交番磁界で測定した見掛け透磁率は，物体内部で透磁率が均一でないことを考慮した表皮効果の式によって与えられる。
3. 透磁率は，見掛け上，一定の周波数比依存性にしたがって変化する。相対感度 P_r は，周波数比に無関係に一定である。

(6) 内部残留応力測定法の検討

測定法の原理を確かめるために，円棒と外管が等しい断面積を持つ二重管試験片の内棒に与えた応力による見掛け透磁率の変化を測定し，理論と比較した。

外管の応力が0で，内棒の応力のみが変化するときには，見掛け透磁率について

$$\frac{\Delta\mu_{obs}}{\mu_0}=S(f/f_g)P_r\sigma$$

が成り立つ。理論的に求めた $S(f/f_g)$ を，上式によって実験的に求めたものと比較した。試料について求めた μ_0, P_r を用い，補正係数は用いずに，実測値と理論曲線は，$f/f_g=1$〜300 の範囲でよく一致し，この測定法の基本的な考え方が正しいことが確かめられた。

7.3 今後の問題

丸棒の1軸残留応力の磁気的測定は，弾性域および塑性域にわたって，以上の結果を用いれば可能であると考えられる。しかし，この研究では未解決であった多くの問題が残されている。そのいくつかについて簡単に述べる。

(1) 大きな塑性ひずみの影響

塑性ひずみの影響については，約30%の範囲でしらべた。しかし，局部収縮を起して破壊にいたる過程で，どのような現象が起るかについては不明である。大きな変形のために，正確な磁気測定が困難であり，今後の課題である。

(2) 組織の影響

この研究で用いた試験片は，層状パーライト結晶粒

を含んだ炭素鋼である。しかし，焼き入れ，焼きもどし等の熱処理をした炭素鋼は，マルテンサイト，残留オーステナイト等のいろいろの相を含んだ組織となる。本研究では，このような組織の磁気ひずみ効果については触れなかった。0.79％Cの炭素鋼を900°Cより水焼き入れした材料について磁気ひずみ効果の測定を試みたが，応力による磁束密度の変化はほとんど観測されなかった。そこでマルテンサイト相を大量に含んだ材料の焼き入れ残留応力の測定が本論文の方法で可能であるかどうかは疑問である。

オーステナイト相は，非磁性であるので，オーステナイト相を含んだ材質の磁気ひずみ効果は，減少するものと思われる。

これらの問題は，熱処理残留応力の測定を行うときには非常に重要な問題であるので，将来に残された大きな課題であろう。

(3) 結晶方位分布の影響

磁気ひずみ効果の理論では，第一段階で，磁界に対しある方向を持った結晶粒について効果を計算し，第二段階で，その方向が一様に分布しているものとして平均し，多結晶の磁気ひずみ効果を求めた。しかし，実際の材料には，加工のため，引抜集合組織，圧延集合組織などが生じる。このような場合においては，磁気ひずみ感度は，単に塑性ひずみの影響だけでなく，これらの集合組織の影響によってその値が変化する可能性があり，さらに検討する必要がある。

(4) 多軸応力による磁気ひずみ効果

本研究において取り扱った磁気ひずみ効果は，丸棒の軸方向にバイアス磁界と1軸応力が加えられた場合についてである。2軸応力については簡単に触れたにすぎない。しかし，現実の残留応力については，丸棒においても，軸方向ばかりでなく，半径方向および接線方向にも残留応力が存在している場合が多い。このような場合についても，実験的および理論的に研究を進める必要がある。

(5) 平板の残留応力の測定法

軸の残留応力を求めることを主眼とし，残留応力測定における基礎的な問題を研究し，二重管試験片を使ってその妥当性を示すことができた。今後に残された最大の課題は，これを実際の構造物に適用することである。普通の場合には，この研究のようにピックアップコイルを巻くこと自体が不可能であることが多い。そのためには，構造物の表面から応力分布を測定できるようなプローブ形の測定器を開発することが要望される。

磁気の研究に導いて下さった茅誠司先生に深く感謝するとともに，磁気ひずみ効果の研究に終始懇切な御指導をいただいた電子航法研究所長　安積健次郎博士に，また残留応力の研究について有益なる御助言をいただいた東京工業大学　中澤一教授に衷心より御礼を申し上げます。

また，この研究の遂行に大きな便宜を与えていただき，また重要な御示唆をいただいた交通安全公害研究所長　花島政人博士に深く感謝いたします。また，この研究に終始協力，困難な実験を行っていただいた当研究所　安福精一主任研究官，電算機による理論計算に協力された滝沢千嘉子技官，さらに特殊計測研究室吉永昭男室長その他の研究員の諸氏に感謝の意を表する次第です。

なお，本研究の理論計算は，当研究所共用計算機によって行ったことを付記します。

参考文献

1) 日本材料学会編：X線応力測定法，養賢堂，1966
2) W. J. McGonagle, S. S. Yun : Proc. 5th Intern. Conf. NDT, Montreal, 1967, p.159
3) 李，鳥飼：生産研究，**21**，1969，p.379
4) J. P. Joule : Ann. Electr. Magn. Chem., 8, 1842. p. 219
5) J.P.Joule : Phil. Mag., [3], **30**, 1847, p. 76
6) A. Guillemin : Compt. rend., **22**, 1846, p.264, p. 432
7) G. Wiedemann : Pogg.Ann., **117**, 1862, p. 501
8) E. Villari : Ann. Phys.Chem., **126**, 1886, p.87
9) P. Weiss : J.Phys., [4], **6**, 1907, p. 661
10) R. Becker, W. Döring : Ferromagnetismus, Springer, 1939
11) R. Becker, M. Kersten : Z. Phys., **64**, 1930, p. 389
12) F. Preisach : Phys. Z., **33**, 1932, p. 913
13) ブリール（岡修一郎他訳）：機械量の電気的計測，コロナ社，1942，p. 45
14) 安積：磁わい計測とその応用，オーム社，1962
15) R. M. Bozorth, H. J. Williams : Rev. Mod. Phys., **17**, 1945, p. 72
16) R. M. Bozorth : Ferromagnetism, Van Nostrand, 1951, p. 595

17) F. Förster, K. Stambke：Z. Metallkd., **33**, 1941, p. 97, p. 104
18) 安積，岩柳：応用物理，**16**，1947，p. 179
19) J. Iwayanagi, A. Yoshinaga：Proc. 13th Japan Nat. Cong. Appl. Mech., 1963, p. 63
20) 安積，吉永，岩柳：機械学会誌，**68**-554，1965，p. 314
21) 吉永，市川，前田：機械学会講演論文集，No. 183，1967，p. 57
22) 精工機器（株）：マグネゲージ（鋼材内部歪測定装置）解説
23) 川田，三沢：機械学会講演論文集，No. 141，1965，p. 63
24) 篠田，川崎：日本金属学会誌，**16**，1952，p. 139
篠田，川崎：日本金属学会誌，**14**，1950，p. 12
25) 篠田，川崎：日本金属学会誌，**18**，1954，p. 305
26) 清田，緒方：第9回材料試験連合前刷集，第Ⅰ部，1965，p. 45
27) K. Kiyota, N. Ogata：JSME 1967 Semi-international Symposium, Tokyo, 1967, p. 205
28) W. F. Brown：Phys. Rev.. **58**, 1940, p. 763, **60**, 1941, p. 132
29) L. Neél：J. Phys. Radium, **9**, 1948, p. 184
30) A. Seeger, H. Kronmüller, H. Rieger, H. Träuble：J. Appl. Phys., **35**, 1964, p. 740
31) H. Träuble：Magnetism and Metallurgy 2 (edited by A. E. Berkowitz, E. Kneller), Academic Press, 1969, p. 621
32) F. Förster：Z. Metallkd., **43**, 1952, p. 163
33) 近角：強磁性体の物理，裳華房，1963，p. 174
34) R. M. Bozorth：Ferromagnetism, Van Nostrand, 1951, p. 617
35) R. Becker, W. Döring：Ferromagnetismus, Springer, 1939, p. 146
36) E. W. Lee：Rep. on Prog. in Phys., XVIII, 1955, p. 184
37) M. Kornetzki., Z. Phys., **87**, 1933, p. 560
38) A. Oguchi, S. Yoshida：Japan. J. Appl. Phys., **6**, 1968, p. 672
39) K. Kolb, E. Macherauch：Arch. Eisenhüttw., **36**, 1965, p. 9
40) 近角：強磁性体の物理，裳華房，1963，p. 148
41) 阿部：金属組織学序論，コロナ社，1967，p. 188
42) 近角：強磁性体の物理，裳華房，1963，p. 96
43) 鈴木：転位論入門，アグネ，1967，第3章
44) A. S. Keh：Direct Observation of Imperfection in Crystals (edited by J. B. Mewkirk and J. H. Wernick), Interscience, 1962, p. 213
45) 日本非破壊検査協会：非破壊検査便覧，Ⅳ. 2. 電磁誘導法による非破壊検査，日刊工業，1967，p. 624
46) S. Abuku, B. D. Cullity：Exptl. Mech., **11**, 1971, p. 217
47) W. Precht：Bull. de l'Acad. Pol. Sc. Tech., **14**, 1966, p. 171
48) 岩柳，安福：応用物理，**34**，1965，p. 492
49) G. Sacks：Z. Metallkd：**19**, 1927, p. 352
50) E. Heyn, O. Bauer：Intern. Z. f. Metallographie, **1**, 1911, p. 15
51) 菅野，阪本：鉄と鋼，**36**，1950，p. 61，p. 548
52) H. Bühler, E. Scheil：Arch. Eisenhüttw., **6**, 1932/33, p. 283
53) 下田，ほか：日本機械学会，残留応力評価調査研究分科会成果報告書，別冊Ⅰ，残留応力分布図集 1970，p. 2
54) 井上，田中：材料，**22**，1973，p. 218
55) 平：材料，**14**，1965，p. 924
56) 大山，新井：非破壊検査，**12**，1963，p. 49
57) 近角：強磁性の物理，裳華房1963，p. 217～253

付録　軸方向残留応力の一解析法

A.1　緒言

本文第6章「内部残留応力の測定」において，二重管試験片の実験により，丸棒内部の残留応力分布は，磁気ひずみ効果と磁界の表皮効果を組み合せた測定原理によって求められることを示した。付録においては，第6章におけるステップ状の応力分布ばかりでなく，連続的に変化する一般的な応力分布の場合も，本論文の方法によって解析が可能であることを示し，これを，第5章の熱処理残留応力の測定結果に適用して，その残留応力分布を求めた。

A.2　解析法

丸棒の表皮効果は，(6.1)および(6.3)または，これを無次元化した(6.4)，(6.5)，(6.6)であらわされる。これをやや変形し，次の形に書く。

$$\frac{d^2h}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dh}{dx}-ik^2h=0 \qquad \text{(A. 1)}$$

$$\mu_{eff}=\frac{2}{ik_s^2}\left(\frac{dh}{dx}\right)_{x=1} \qquad \text{(A. 2)}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{r}{a}\\ h&=\frac{H}{H_0}\\ k^2&=\omega\sigma\mu a^2\\ k_s^2&=\omega\sigma\mu_s\cdot a^2=\frac{f}{f_g}\\ \mu_{eff}&=\frac{\mu_{obs}}{\mu_s}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A. 3)}$$

(A. 3) において，表面 $r=a(x=1)$ において磁界の強さは $H=H_0(h=1)$ となる。さらに，ω：測定角周波数，σ：電気伝導度，μ：可逆透磁率である。μ_s は応力 0 のときの透磁率にとる。k_s^2 は周波数比 f/f_g に等しい。また，実効透磁率 μ_{eff} を (A. 3) の最後の式によって定義する。

残留応力分布によって，μ は x の関数となり，これを次の形におく。

$$\mu(x)=(1+f(x))\mu_s \qquad \text{(A. 4)}$$

そこで，μ_{eff} の観測値より $f(x)$ を求めるのは

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2h}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dh}{dx}-ik_s^2(1+f(x))h=0\\ &\mu_{eff}=\frac{2}{ik_s^2}\left(\frac{dh}{dx}\right)_{x=1}\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A. 5)}$$

において，μ_{eff} を与えて $f(x)$ を求める問題に帰着する。厳密に解くのは困難であるから近似解法による。

$f(x)$ が小さい場合の近似解として，h は

$$\frac{d^2h}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dh}{dx}-ik_s^2h=ik_s^2f(x)h_0 \qquad \text{(A. 6)}$$

の解であるとする。h_0 は，$f(x)=0$ の場合の解である。第1近似 h_1 は，h_0 と同じ境界条件

$x=1$ で $h_1=1$

$x=0$ で h_1 は有限

を満足しなければならない。この条件により，(A. 6) の解 h_1 は

$$h_1=h_0\{1+F_1(x)-F_1(1)\} \qquad \text{(A. 7)}$$

となる。ここで，$F_1(x)$ は

$$F_1(x)=\int_0^x\frac{1}{xh_0^2}\int_0^x ik_s^2f(y)yh_0^2dydx \qquad \text{(A. 8)}$$

である。(A. 5) の第2式に h_1 を入れると

$$\begin{aligned}\mu_{eff}&=\frac{2}{ik_s^2}\left|\frac{dh_0}{dx}(1+F_1(x)-F_1(1))\right|_{x=1}\\ &\quad+\frac{2}{ik_s^2}\left|h_0\frac{dF_1(x)}{dx}\right|_{x=1}\\ &=\frac{2}{ik_s^2}\left|\frac{dh_0}{dx}\right|_{x=1}+\frac{2}{ik_s^2}\left|\frac{dF_1(x)}{dx}\right|_{x=1}\end{aligned}$$

第1項は，$f(x)=0$ のときの $\mu_{eff}=\mu_{eff\cdot0}$ であり，第2項の微分を実行すると

$$\mu_{eff}=\mu_{eff\cdot0}+2\int_0^1 f(x)xh_0^2dx$$

が得られる。そこで，実効透磁率の変化 $\varDelta\mu_{eff}$ を与える式として

$$\varDelta\mu_{eff}(k_s)=2\int_0^1 f(x)x\{h_0(k_s,x)\}^2dx \qquad \text{(A. 9)}$$

が得られる。(A. 9) の両辺は，周波数比 k_s^2 の関数である。この式は，フレドホルムの第1種の積分方程式であって，$f(x)$ の $\varDelta\mu_{eff}$ に対する影響は，半径 x の各点における $f(x)$ の値に比例した影響の総和であって，$f(x)$ に対する非線形性や相互作用は無視している。

$f(x)$ が大きくなった場合，近似を上げるためには，(A. 6) の右辺の h_0 のかわりに h_1 を用いればよい。この場合には，

$$\frac{d^2h}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dh}{dx}-ik_s^2h=ik_s^2f_1(x)h_0 \qquad \text{(A. 10)}$$

$$f_1(x)=\{1+F_1(x)-F_1(1)\}f(x) \qquad \text{(A. 11)}$$

によって第2近似が与えられる。まったく同様にして

$$h_2=h_0\{1+F_2(x)-F_2(1)\} \qquad \text{(A. 12)}$$

$$F_2(x)=\int_0^x\frac{1}{xh_0^2}\int_0^x f_1(y)yh_0^2dy \qquad \text{(A. 13)}$$

$$\varDelta\mu_{eff}(k_s)=2\int_0^1 f_1(x)x\{h_0(x,k_s)\}^2dx \qquad \text{(A. 14)}$$

によって $\varDelta\mu_{eff}$ の第2近似が与えられる。$F_1(x)$ には，$f(x)$ による影響が第1近似として含まれているから，$f_1(x)$ にもその影響が含まれており，$\varDelta\mu_{eff}$ は $f(x)$ の2次項まで求められる。さらに近似を高めることも可能である。

以上の式中，μ_{obs} は，複素透磁率として求められている場合であるが，本文における測定では，つねに実数部分だけを測定した。その場合には，(A. 9) は，X の実数部分を REAL (X) であらわすと

$$\varDelta\mu_{eff}(k_s)=\mathrm{REAL}\left(2\int_0^1 f(x)x\{h_0(k_s,x)\}^2dx\right) \qquad \text{(A. 15)}$$

となる。(A. 14) についても同様である。

A.3 数値計算

(A.15) を解析的に解くのは困難であるので，数値解法による。(A.9) および(A.14) の積分方程式の解の存在および一意性について疑問が残るが，$f(x)$を次数の低い多項式に限定すれば，解は定まるようである。$f(x)$ は，残留応力分布をきめる関数であるので，このような仮定を置いてもよいであろう。

$f(x)$ を $(M-1)$ 次の多項式とする。

$$f(x)=\sum_{J=1}^{M} AM(J)x^{J-1} \qquad (A.16)$$

これを (A.15) に入れると

$$\varDelta\mu_{eff}(I)=\sum_{J=1}^{M} AM(J)A(I,J) \qquad (A.17)$$

$$A(I,\ J)=\mathrm{REAL}\left(2\int_0^1 x^J\{h_0(k_{s.I}x)\}^2\,dx\right)$$
$$I=1,\ N \qquad (A.18)$$

が得られる。ただし，$\varDelta\mu_{eff}(I)$ は，I番目のk_s，$k_{s.I}$ に対する実効透磁率の変化をあらわす。$AM(J)$ は，(A.17) の N 個の M 元連立1次方程式より，$N\geq M$ とすれば求めることができる。$AM(J)$ が求められると，(A.16) より $f(x)$ が計算でき，残留応力 $\sigma(x)$ は，磁気ひずみ感度 P_r を用いて

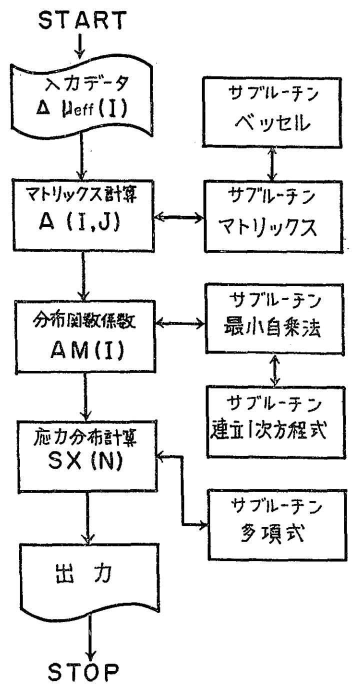
$$\sigma(x)=\frac{f(x)}{P_r} \qquad (A.19)$$

より求められる。

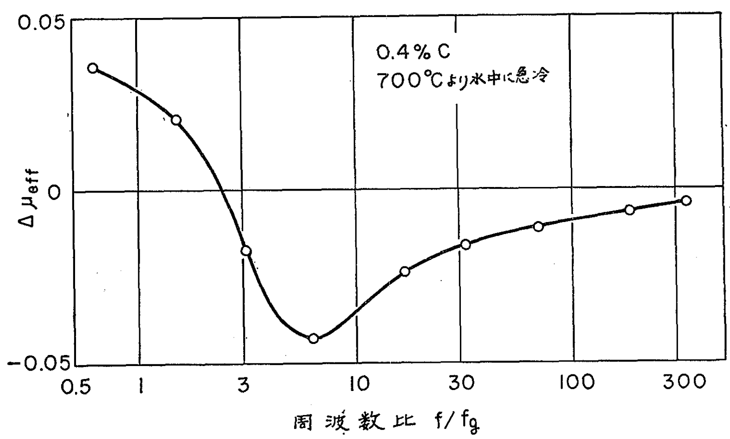
A.4 解析例

第5章において，700°C より水中に急冷した炭素量0.4%の炭素鋼丸棒の表面残留応力を測定し，X線応力測定法による残留応力値と比較した。また，浸透深さが十分大きな測定周波数まで下げて測定を行い，表面には圧縮，中心にはかなり大きな引張残留応力が発生していることを推定した。この測定結果に本解析法を適用した結果を次に述べる。

図5-4には，測定された見掛け透磁率 μ_{obs} より断面上で一様な応力であるとした場合の可逆透磁率 μ_s



図A-2 応力分布計算フローチャート



図A-1 急冷試験片の実効透磁率変化の周波数比依存性

を周波数比 f/f_g に対して示している。各測定点に対する周波数比は，μ_s が変化するために，焼きなまし試験片と急冷試験片で，測定周波数が同じでも変化する。しかし，この解析法では，応力分布を考えに入れ，μ_s を焼きなまし試験片の μ_s に取るので，μ_{obs} の測定値の変化そのものを，焼きなまし試験片の $k_s(I)$ に対応させればよい。このようにして求めた実効透磁率の変化 $\Delta\mu_{eff}(I)$ は

$$\Delta\mu_{eff}(I)=\frac{\mu_{obs}(I)-\mu_{obs.o}(I)}{\mu_s} \quad (\mathrm{A.20})$$

で与えられる。その実測値を図A-1に示す。

測定点は，$I=1, 9$ の9点あるので，$f(x)$ は最大8次の多項式で求められる。しかし，$A(I,J)$ は，特異マトリックスに近く，また，測定値の誤差，非線形項の影響もあるので，未知数 $AM(J)$，$J=1, M$ の数を減少させ

$$N>M$$

とし，最小自乗法によって $AM(J)$ を求めた。この計算のフローチャートを図A-2に示す。

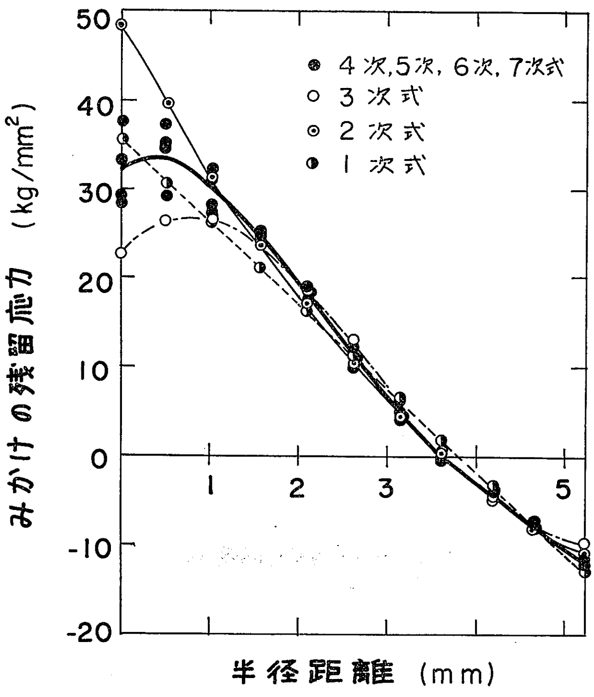
Mを2より8まで変えて，そのときの半径上の応力分布を求めた結果を図A-3に示す。1～3次式では，中心付近の応力が大きな幅でばらつくが，4～7次式の応力分布は，ほとんど同一の曲線であらわされるので，これを実際の応力分布としてよいと考えられる。

このようにして求められた見掛けの磁気的応力より実際の軸方向残留応力分布を求めるには，熱処理残留応力分布であることを考慮して，第5章の考察より，単純に2倍すればよい。

A.5　結言

磁気ひずみ効果と磁界の表皮効果を利用して丸棒の内部残留応力分布を求める実験において，測定値より応力分布を求める解析法を述べた。この方法は，応力に対する実効透磁率の変化の非線形項を無視した1次近似であるが，分布をほぼ正確に求めることができると思われる。解析法の近似を上げることも可能である。

この解析法を本文第5章で述べた急冷試験片の熱処理残留応力の測定に適用し，その応力分布を求めることができた。



図A-3　急冷試験片の残留応力分布