炭素鋼の磁気ひずみ効果による残留応力測定に関する基礎的研究

岩 柳 順 二*

Fundamental Study of the Residual Stress Measurement of Carbon Steel by the Magnetostriction Effect

By
Junji IWAYANAGI

The present paper describes a basic principle of the nondestructive measurement of residual stress distribution inside carbon steel structures by the magnetostriction effect.

Linear relations of magnetic induction and reversible permeability to uniaxial stress were derived from a magnetic theory of anisotropic magnetostriction. They were confirmed experimentally for carbon steel. The effect of the plastic deformation on these relations is small in high magnetic fields. These linear equations can be used as the basic laws for the measurement of residual stress which is usually accompanied with the plastic deformation.

Using above results, the residual stresses in the surface layer of specimens were obtained from the permeabilty measurement by high frequency fields.

The principle of the measurement of the residual stress distribution under the surface is the combination of the magnetostriction effect and the skin effect of AC magnetic field. It was verified for a simple stress distribution in a composite specimen made up of a free outer tube and a loaded inner cylinder by analysing the measurement of permeability by multiple frequency magnetic fields. It was extended to more general stress distributions.

目 次

* 共通工学部 原稿受付:昭和49年10月23日

要　　旨

本研究は，磁気的方法による残留応力測定上の基本的問題を取扱い，炭素鋼の磁気ひずみ効果に及ぼす塑性の影響を求め，表面のみならず内部の応力に関する情報を得るための計測法の原理を明らかにし，一つの残留応力測定法の可能性を示すことを目的として行った。

第1章「緒論」では，機械や構造物における残留応力を，内部の応力分布まで含めて簡単に非破壊的に測定できる計測法の必要性を述べた。次に，磁気ひずみ効果を用いる応力測定法についての従来の研究を，応力測定および塑性変形の影響の二つの面より概観し，さらに渦流探傷検査法との関連を述べ，本研究との関係を明らかにした。

第2章「磁気ひずみ効果の理論」においては，この研究の基礎となる応力と磁気量との関係を理論的に導いた。測定法の原理となる磁気ひずみ効果は，簡単な法則であり，応力以外の要因，すなわち，組成，組織，加工等によってできるだけ変化しないものが望ましい。これについては，磁化現象が可逆的に進行する

高磁界中の磁気ひずみ効果を用いるとよいことを論じた。次に，Bozorthらの理論を拡張して，磁気ひずみに異方性のある鉄の磁気ひずみ効果を計算し，その効果の大きさ，磁界に対する依存性を求めた。

第3章および第4章においては，第2章の結果を実験的に確かめた。

第3章「直流磁界による応力測定」では，磁束密度と応力との関係を，純鉄および0.8%までの炭素鋼について弾性域および塑性域において実験し，きわめてよい直線性で成り立つ1次関係式を求めることができた。この1次式は，塑性ひずみの大きさには無関係に，加工硬化領域でも近似的に同じ係数で応力測定に用いることができることがわかった。また，磁気ひずみ感度の炭素量依存性，塑性に伴う転位密度の増加に対する磁束密度の不変性について実験結果に考察を加えた。

第4章「交番磁界による応力測定」においては，高バイアス磁界中の可逆透磁率と応力との関係を求めた。関係式は，近似的に1次式で，磁気ひずみ感度は第2章の磁界依存性で予想される位置に大きなピークを持ち，このバイアスで応力測定を行うのがよいことが明らかになった。1次式の係数に対する影響は小さく，特に軟鋼では小さいが，保磁力等の補助的測定によって塑性ひずみを推定し，さらに応力測定の誤差を減少させることができた。

第5章および第6章においては，第4章の結果を用いて，軸の表面の残留応力および内部の残留応力分布を求める測定法の研究を行った。

まず，第5章「表面残留応力の測定」において，1軸塑性引張および水中に急冷した試験片に実際生じている残留応力を磁気的方法で測定し，X線応力測定法より得られた表面の残留応力値と比較した。熱処理残留応力の場合には，接線方向応力の影響を考慮すれば，軸方向X線応力と磁気的応力はよく一致した。また，軸方向残留応力の深さ方向の分布が求められる見透しを得た。塑性引張による残留応力は，X線応力測定により得られた相応力と一致することを示した。

第6章「内部残留応力の測定」では，軸の内部に生じている残留応力の測定法の研究を行った。交番磁界の周波数が高いときには，表面の磁気ひずみ効果のみが検出され，低周波では，内部まで含んだ磁気ひずみ効果が検出される。そこで，第4章で求められた可逆透磁率と応力の関係式と，交番磁界の表皮効果の理論を組み合せ，残留応力測定法を組み立てた。次に，二重管試験片を用い，中心部応力検出の実験を行って，その妥当性を立証した。さらに，任意の形をした軸方向残留応力分布も多周波数の交番磁界を用いる測定より求められることを論じた。

第7章「結論」においては，本研究において得られた成果を総括し，さらにこれに関連して将来行わなければならない研究について展望した。

付録「軸方向残留応力の一解析法」においては，任意の形をした未知の残留応力分布を多周波数における見掛け透磁率の測定値より求める解析法と，計算例を示した。

記号および単位

B	磁束密度
C	炭素量（重量パーセント）
H	磁界の強さ
I	磁化の強さ
I_s	飽和磁気の強さ
K	結晶磁気異方性定数
K_u	1軸磁気異方性定数
L	インダクタンス
L_0	空心インダクタンス
P	磁気ひずみの異方性
Q	磁界エネルギの無次元量
S	試験片の断面積
S	内部の透磁率変化による実効透磁変化についての感度
f	周波数
f_g	限界周波数
f/f_g	周波数比
m	磁化の強さの無次元量
p	磁気ひずみのエネルギの無次元量
q	微小磁界のエネルギの無次元量
α_i	磁化の強さの方向余弦（$i=1,2,3$）
β_i	磁界の方向余弦（$i=1,2,3$）
γ_i	観測方向または応力の方向余弦（$i=1,2,3$）
δ	浸透深さ
ε	ひずみ
ε_p	塑性ひずみ
η	充填率（コイル中の試験片の）
λ	磁気ひずみ定数
$\lambda_{100}, \lambda_{111}$	〔100〕および〔111〕方向の飽和磁気ひずみ
μ	透磁率，可逆透磁率，比透磁率

μ_0　真空の透磁率（MKS）
μ_{eff}　実効透磁率
μ_{obs}　ある周波数で測定して得られる見掛け透磁率
μ_r　可逆透磁率
μ_{rel}　比透磁率
π_{ij}　応力テンソルの成分（$i, j=1, 2, 3$）
ρ　固有抵抗
σ　応力
σ　電気伝導度
χ　磁化率，可逆磁化率，比磁化率
ω　角周波数
Φ　磁束
Λ　磁束密度についての磁気ひずみ感度
Λ_r　可逆透磁率についての磁気ひずみ感度

単位は，理論計算においてはM.K.S.A.有理単位系を用いた。それ以外のところでは，磁気系については C.G.S. 系，電気系については M.K.S.A. 系を用いた。また，機械系では工学系を用いた。主な単位についての換算表を示す。

換　算　表

量	記号	M.K.S. 系	C.G.S.系	C.G.S. 系で表した数値 / M.K.S.系で表した数値
磁束	Φ	Wb	Mx	10^8
磁束密度	B	Wb/㎡	G	10^4
磁化の強さ	I	Wb/㎡	G	7.98×10^2
磁界の強さ	H	A/m	Oe	1.256×10^{-2}
磁化率	χ	H/m	無名数	6.35×10^4
比磁化率	$\bar{\chi}$	無名数	⟶	C.G.S. の $4\pi\chi$
透磁率	μ	H/m	無名数	7.97×10^5
比透磁率	$\bar{\mu}$	無名数	⟶	C.G.S. のμ
真空の透磁率	μ_0	$4\pi\times10^{-7}$H/m	1	7.97×10^5
反磁界係数	N	無名数		4π
インダクタンス	L	H	――	10^9
異方性定数	K	J/㎥	erg/㎤	10
磁気ひずみ	λ	無名数	無名数	1
電気伝導度	σ	1/Ωm	1/Ω㎝	10^{-2}
固有抵抗	ρ	Ωm	Ω㎝	10^2
		M.K.S. 系	C.G.S. 系	工学系で表した数値 / M.K.S.系で表した数値
力	W	N	kg	1/9.8
応力	σ	N/㎡	kg/mm²	10^{-6}/9.8
エネルギ	F	J	kg/m	1/9.8

第1章　緒　　論

1.1　緒言

機械および構造物の強度を決定するものは，静的および動的外力だけではない。外力がないときにも各部材に生じている残留応力も強度に大きな影響を与える。

残留応力の破壊に及ぼす影響は，破壊形式によって異なる。ぜい性破壊においては，その影響は極めて大きく，引張残留応力の存在する溶接構造物では，ほとんど零に近い応力で破壊が発生する場合さえあり，き裂の進行も残留応力の場に左右される。疲れ破壊では，圧縮残留応力は疲れ強度を上昇させ，引張残留応力は疲れ強度を減少させると考えられている。また，疲れき裂の発生は応力振幅によってきまり，残留応力は，平均応力としてき裂の進展に影響するであろうという研究も行われ，残留応力の役割がかなり解明されてきた。熱処理によっても各種の残留応力が発生し，破壊の原因となることが知られており，内部の3軸的な残留応力分布との関係が研究されている。座屈破壊

においては，残留応力は，偏心度，初期たわみとともに座屈強度を決定する一つの因子であることが認められ，残留応力の分布形状により影響が異なることが指摘されている。さらに，腐食の進行，腐食疲れ，腐食割れ等にも，残留応力は著しい役割を持っている。

このように，残留応力は材料強度に大きな影響を与えるが，現実の機械や構造物の強度を考えるときには，全数検査，したがって，非破壊的な手段で残留応力を測定する必要がある。しかし，その測定は非常に困難であって，残留応力の実態が十分に把握されているとは言い難い。

残留応力の測定には通常，応力解放の方法がとられている。しかし，この方法は，破壊法であり，被測定物の強度を低下させずに残留応力を求めることはできないという欠点を持っている。非破壊的な方法としては，X線回折を用いるX線応力測定法[1]，超音波の音速の変化を利用する応力測定法[2][3]，および本論文で述べる磁気ひずみ効果を利用する応力測定法がある。

現在最も広く用いられているのは，X線応力測定法である。この方法は，材料の結晶格子間隔の変化を測定するもので，本質的に非破壊であり，多くの特徴を持っている。しかし，表面より100分の数ミリメートルの薄い層内の応力の測定に限られる。

強度に影響を与えるのは，表面の応力だけでなく，内部の残留応力も関係する。内部の応力分布をX線で求めるためには，表面層を取り去る破壊法によらねばならない。そこで，内部の残留応力も測定できる，真の意味での非破壊的な残留応力測定法が要望されている。また，表面残留応力についても，X線法より簡便な測定器が必要となる場合もある。

本論文の目的は，従来断片的に使用されてきた磁気的応力測定法を取り上げ，その問題点を検討し，応力と磁気量との簡単な関係を求め，これを用いて，軸の強度に大きな影響を持つと思われる軸方向残留応力の非破壊的測定に適用し，軸の表面の残留応力および内部の残留応力分布を測定する方法を提案し，その有用性を確かめようとするものである。

1.2 磁気的応力測定についての従来の研究

磁気ひずみ効果を応力測定に利用する試みは古くからある。応力と磁気の相互作用に関連する主な研究を次に述べる。

磁気的性質の応力による変化および磁気体の寸法の磁化による変化二つの現象は，すでに1840年代より研究の対象になっていた。これらは，Joule 効果[4][5]，Guillemin 効果[6]，Wiedemann 効果[7]，Villari 効果[8] 等，発見者の名前によって呼ばれている。20世紀初頭の P. Weiss の磁区の存在の予想[9] にはじまり，多く研究の積み重ねにより，磁区の概念による強磁性体の磁化機構に関する理論が1930年代の前半に急速に形成された。この結果は，1939年の Becker と Döring[10] の著書[10] に集大成された。この中で，磁気と応力との関係が詳しく論じられている。

強磁性体における磁化の強さと応力との関係を，二つの側面よりながめることにする。第一は，強磁性体にマクロな応力が加えられたときの磁化の強さの変化であり，第二は，磁性体の内部に存在するミクロな不均一応力場の磁気的性質への影響である。

Becker, Kersten によるニッケルの磁化曲線の応力による変化の研究[11]，Preisach によるパーマロイの磁気ヒステリシス曲線の張力による角形化の研究[12] は，この時期にあらわれた，第一の側面に関する例であり，これらの磁気ひずみ効果の大きい強磁性体において，応力が磁化曲線に極めて大きい作用を及ぼすことを示している。この現象は，磁気ひずみ変換器として，各種の機械量の計測に利用されている[13][14]。

Bozorth, Williams[15][16] は，鉄-ニッケル合金の磁気ひずみ効果について研究した。彼らは，微小な応力による磁束密度の変化の大きさをあらわす磁気ひずみ感度を磁区理論を用いて計算し，磁束密度に関する依存性および 30〜100 %Ni のパーマロイ領域におけるニッケル組成に関する依存性を，磁気異方性定数，磁気ひずみ定数および飽和磁化の強さによって与える，実験値とよい一致を示す式を得た。

Bozorth らの考察は，磁気ひずみ効果の小さい鉄および鋼に対しても適用できると考えられる。しかし，磁気ひずみ効果がほぼ等方的であるニッケルに対し，鉄においては，異方性がきわめて大きいので，これを考慮していない彼らの理論を直ちに適用することはできない。さらに，超音波受波器等と異なって，応力測定においては，大きな応力を取扱わなければならない。これらの点について，理論的考察を行うこととした。

Förster[17] らは，Ferrograph と呼ぶ磁気ヒステリシス環線観測用測定器を開発し，この方法で加工を受けたニッケル線内部の応力分布の測定を行った。Förster は，その後，鋼材についても各種の測定器を開発し，材質検査法および欠陥検査法の研究を行ってい

るが，マクロな残留応力についての研究は見られないようである。

安積，岩柳[18]は，ピアノ線においても，磁気ひずみ効果は十分に大きく，応力の非破壊的な測定が磁気的方法によって可能であることを示した。安積，岩柳，吉永[19][20]は，さらに一般構造用鋼材についても，プローブによって非破壊的に残留応力を測定できる磁気的方法を研究した。この方法は，最初，単軸応力と見なしてよい鉄骨構造物に対し適用されたが，吉永[21]によって，平板における2軸残留応力に拡張された。

仙頭[22]によって発表されたマグネゲージは，プローブ型測定器の他の一例であり，川田，三沢[23]によってその性能が研究された。2軸応力に対しては，主応力差のみを与えるという特徴をもっている。

篠田，川崎[24][25]は，直流法によって磁気測定を行い，炭素鋼に張力を加えたときの磁束密度の増加は，磁界の強さと無関係にある応力 σ_C で最大となること，σ_C は表面における圧縮残留応力の尺度として使用できることを明らかにした。完全に非破壊的測定とは言い難いが，注目すべき研究であると思われる。

これらの研究の結果，ある条件のもとでは残留応力測定が可能となったと考えられる。しかし，次に述べる強磁性体と応力の相互作用の第二の側面についての考察が不十分であるように思われる。

残留応力は，塑性ひずみに伴って発生している場合が多い。そこで，塑性ひずみと磁気ひずみ効果との関係を明らかにし，変形した材料中の応力と磁気的性質との対応をつける必要がある。この対応が塑性ひずみによって変化するものであれば，測定に大きな不確定要素が入り込むことになる。清田，緒方[26][27]は，初透磁率は，引張応力およびねじり応力に対し，弾性範囲の応力に対しては連続的に変化するが，降伏点を越えるとき，非常に大きな不可逆的変化が生じることを示した。

塑性と磁性との関係は，強磁性体の理論において主要な問題の一つであった。Becker, Döring[10] の著書においては，多くのページが内部応力（internal Stress）に費されている。当時は，軟磁性材料の透磁率を有限の値しか持ち得ないのは，材料内部における不規則な応力分布が，磁壁移動を妨げるためであり，この応力を彼らは“内部応力”と呼んだ。Brown[28] は，“内部応力” の原因は，転位のまわりに生じる応力であることを指摘し，転位と磁壁の相互作用を考えることによって，磁化曲線の飽和漸近則の理論を立てた。

Neél[29] は，同様の相互作用が，不純物，空隙による静磁エネルギによって生じることを明らかにした。

Seeger, Kronmüller[30][31] らは，Brown の考えを発展させ，転位と磁壁との相互作用を詳細に研究し，強磁性体単結晶の初透磁率，保磁力，飽和漸近則，可逆透磁率と転位密度およびその分布との関係を求めた。この研究は，この分野における重要な研究であるが，実験が主としてニッケル単結晶について行われている点で，多結晶体である炭素鋼を取扱う本論文では，そのまま用いることはできない。

そこで，本研究においては，残留応力測定法における重要な側面として，磁性と塑性との関係を，実験的に，できるだけ詳細に研究し，同時に簡単な考察を行うこととした。

緒言で述べたように，残留応力は，表面の値のみでなく，内部の値をも求めることが必要である。

Förster[32] によって始められた渦流探傷法におけるように，磁気的測定法においては，その使用交番磁界の周波数を変化させることによって，磁界の浸透深さを変化させ，応力分布を求めることが考えられる。しかし，実際にこのような方法で応力を測定した例はないようである。本研究においては，磁気的方法の大きな利点として，この問題についての研究をも行うこととした。

第2章　磁気ひずみ効果の理論

2.1　緒言

強磁性体の磁気的性質は，応力によって大きく変化する。パーマロイなどの磁気ひずみ材料では，1 kg/mm² の応力で数十パーセント，あるいはそれ以上の磁束密度の変化を生じる[16]。鋼材の磁気ひずみ効果は比較的小さいが，それでも，1 kg/mm² の応力で，磁束密度が 0.1〜0.2% の変化を生じる。これは，電気抵抗などの他の物理的性質の応力による変化にくらべて非常に大きな値である。磁束密度などの磁気的性質は，磁界，組成，加工，熱処理などによって定まるが，応力による変化は，これらの因子による変化と同じオーダーであって，他の因子の影響をコントロールまたは補正すれば，応力の影響だけを取出すことができる十分な大きさを持っている。このことが，磁気的方法によって鋼材の応力の“非破壊的測定”を可能とする根拠となるのである。

しかしながら，磁性を与える前述の諸因子の影響もまた非常に大きいので，応力を精度よく測定するため

には，これらの影響をできるだけ小さくおさえる必要がある。

磁性理論[33]によれば，強磁性体の磁化は，三つの過程を経て飽和磁気に近づく。すなわち，弱磁界で磁化が磁界に比例する初透磁率範囲，磁化が急激に，不可逆的に増加する不可逆磁化範囲，ゆるやかに磁化の増加する回転磁化範囲である。これを図2-1に示す。

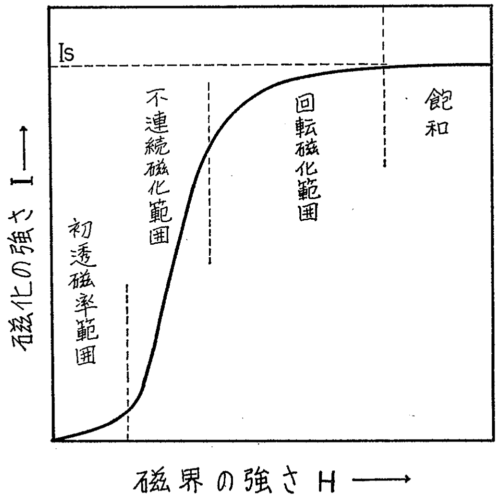


図 2-1　磁化曲線と磁化過程

第1段階の初透磁率は，材質中の内部応力 (internal stress) に逆比例することが示されている。内部応力は，Becker, Kersten の磁気の応力理論[10] において用いられた用語である。内部応力は，のちに Brown[28] Néel[29] によって，転位，不純物，空孔などによるものであることが明らかにされた。これらは，材料の処理，ばらつきで大きく変化するので，初透磁率を応力測定に利用するのは不適当であると考えられる。第2段階の不可逆磁化範囲の磁化過程も同様に材料内部の不規則性に左右される。

第3段階の回転磁化範囲の磁化過程は，可逆的であるばかりでなく，"内部応力" であらわされる不規則性によってほとんど変化しない磁気異方性によって定められる。そこで，この範囲の磁化現象を応力測定に利用すれば，化学成分の差，加工，熱処理の影響を受けずに応力が求められることが予想される。第2章では，回転磁化範囲の磁化現象を考察する。

2.2　高磁界における磁気ひずみ効果

強磁性体に磁界および応力が加えられたときの磁化の強さは，低磁界では，材料中の不均一性のために，理論的に与えることは困難である。しかし，高磁界においては，磁気異方性定数と磁気ひずみ定数によって記述することができる。

強磁性体結晶内の磁化の強さの方向は，次式で示す自由エネルギ F を極小にする条件で定まる[34]。

$$F=F_K+F_\sigma+F_H \tag{2.1}$$

この式で，F_K，F_σ，F_H は，それぞれ，結晶磁気異方性エネルギ，磁気ひずみによるエネルギ，磁界のエネルギであって，次式で与えられる[35]。

$$F_K=K(\alpha_1{}^2\alpha_2{}^2+\alpha_2{}^2\alpha_3{}^2+\alpha_3{}^2\alpha_1{}^2) \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}F_\sigma=&-\frac{3}{2}\lambda_{100}(\alpha_1{}^2\pi_{11}+\alpha_2{}^2\pi_{22}+\alpha_3{}^2\pi_{33})\\&-3\lambda_{111}(\alpha_1\alpha_2\pi_{12}+\alpha_2\alpha_3\pi_{23}+\alpha_3\alpha_1\pi_{31})\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$F_H=-HI_s(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3) \tag{2.4}$$

ここで

K：結晶磁気異方性定数
λ_{100}，λ_{111}：磁気ひずみ定数
π_{ij}：応力テンソル
H：磁界の強さ
I_s：飽和磁化の強さ
α_i：結晶軸に関する磁化の方向余弦
β_i：結晶軸に関する磁界の方向余弦

である。

低磁界で重要な役割りをはたす静磁エネルギは，高磁界では小さく，とくに多結晶では無視できる。

磁化の強さの方向 α_i が求められれば，観測方向の磁化の強さは

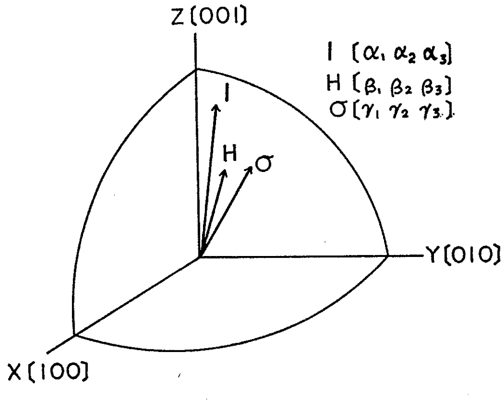


図 2-2　磁化容易軸と磁化の強さ I，
磁界の強さ H，応力 σ の方向

$$I=I_s\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\gamma_i \tag{2.5}$$

によって，一つの結晶粒について与えられる。

ただし　γ_i：結晶軸に関する観測方向の方向余弦である。多結晶については，この結果をすべての結晶粒について平均を取ることによって求められる。

α_i を一般の形で解くのは困難であるが，つぎのような仮定が成り立つときは簡単に解ける。

1. 不連続磁化範囲は十分小さい磁界でおわり，各結晶粒の磁化の強さは，その結晶粒の磁界に最も近い容易磁化方向に向く。
2. 磁界および応力が小さく，$F_K \gg F_H, F_\sigma$ が成り立つ。
3. 応力は1軸応力で，磁界と同じ方向である。

このような考えで，Bozorth[15] らは，等方磁気ひずみ（$\lambda_{100}=\lambda_{111}$）の場合について，応力による磁束密度の変化を求めた。その結果は，鉄-ニッケル合金の測定値を説明することができた。しかし，等方磁気ひずめでない場合は計算していない。

$\lambda_{100}\neq\lambda_{111}$ の場合の近似式をまず求める。磁界 H の方向に加えられた1軸応力を σ とすると

$$\pi_{ij}=\sigma\beta_i\beta_j \qquad i,j=1,2,3 \tag{2.6}$$

で応力が与えられる。自由エネルギは，ラグランジュの未定係数 L を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned}F=&K\sum_{i\neq j}\alpha_i^2\alpha_j^2\\&-\frac{3}{2}\lambda_{100}\sigma\sum_i\alpha_i^2\beta_i^2-3\lambda_{111}\sigma\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j\\&-HI_s\sum_i\alpha_i\beta_i\\&+L(\sum_i\alpha_i^2-1)\end{aligned} \tag{2.7}$$

α_i の決定方程式は

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha_i}=0 \qquad i=1,2,3 \tag{2.8}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2-1=0 \tag{2.9}$$

である。(2.8) より

$$\begin{aligned}&2K\alpha_i(1-\alpha_i^2)\\&-3\lambda_{100}\sigma\alpha_i\beta_i^2-3\lambda_{111}\sigma\beta_i\sum_{i\neq j}\alpha_i\beta_j\\&-HI_s\beta_i+2L\alpha_i=0\\&\qquad i=1,2,3\end{aligned}$$

が得られる。これを変形すれば

$$\begin{aligned}&2K\alpha_i^3-2(K+L)\alpha_i\\&+3(\lambda_{100}-\lambda_{111})\sigma\alpha_i\beta_i^2\end{aligned}$$

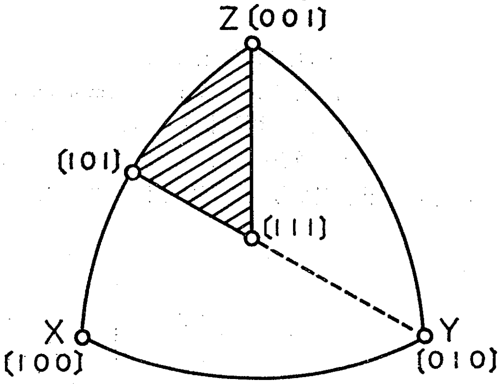


図 2-3　結晶粒方向についての平均範囲

$$\begin{aligned}&+3\lambda_{111}\sigma\beta_i\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\beta_j+HI_s\beta_i=0\\&\qquad i=1,2,3\end{aligned} \tag{2.10}$$

となる。磁界および応力が小さく，磁界の方向が図2-3の斜線の中にあるときは，磁化の強さの方向は，〔001〕に非常に近いと考えてよい。そこで，α_1，$\alpha_2\ll1$，$\alpha_3=1$ としてよい。これを (2.10) に代入し，$\alpha_1, \alpha_2, \sigma$ の2次以上を省略すれば

$$\begin{aligned}&-2(K+L)\alpha_1+3\lambda_{111}\sigma\beta_1\beta_3+HI_s\beta_1=0\\&-2(K+L)\alpha_2+3\lambda_{111}\sigma\beta_2\beta_3+HI_s\beta_2=0\\&-2L+3\lambda_{100}\sigma\beta_3^2+HI_s\beta_3=0\end{aligned} \tag{2.11}$$

が得られる。2次以上をさらに省略すれば

$$\begin{aligned}\alpha_1&=\frac{3\lambda_{111}\sigma\beta_3+HI_s}{2K}\beta_1\\\alpha_2&=\frac{3\lambda_{111}\sigma\beta_3+HI_s}{2K}\beta_2\end{aligned} \tag{2.12}$$

が得られる。磁界の方向の磁化の強さ I は

$$\begin{aligned}I&=I_s\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\beta_i\\&=I_s\left\{\beta_3+\frac{3\lambda_{111}\sigma\beta_3+HI_s}{2K}(\beta_1^2+\beta_2^2)\right\}\\&=I_s\left\{\beta_3+\frac{HI_s}{2K}(1-\beta_3^2)+\frac{3\lambda_{111}\sigma}{2K}\beta_3(1-\beta_3^2)\right\}\end{aligned} \tag{2.13}$$

より求められる。

多結晶については，単結晶の結果を平均すればよい。その方向は，図2-3の斜線の範囲で代表させればよい。平均を，$\overline{\beta_3}$ などで表せば

$$\overline{\beta_3} = 0.835$$
$$\overline{\beta_3{}^2} = 0.701$$
$$\overline{\beta_3{}^3} = 0.599$$

であるから

$$\bar{I}=0.835\,I_s+0.299\frac{I_s{}^2}{2K}H+0.236\frac{3\lambda_{111}\sigma}{2K}I_s \qquad (2.14)$$

が得られる。$\sigma=1\,\mathrm{kg/mm^2}$ に対する磁化の強さの変化は，鉄について

$$\lambda_{111}=-21.2\times10^{-6}$$
$$K=4.2\times10^4\,\mathrm{J/m^2}$$
$$\sigma=9.8\times10^6\,\mathrm{N/m^2}$$
$$I_s=2.15\,\mathrm{wb/m^2}$$

であるから

$$\Delta I=0.236\frac{3\lambda_{111}\sigma}{2K}I_s \qquad (2.15)$$
$$=-0.0038\,\mathrm{wb/m^2}$$
$$=-38\,\mathrm{G}$$

磁気ひずみ感度を，当位応力あたりの磁束密度の変化とすれば，感度 Λ は

$$\Lambda=-38\,\mathrm{G/kg/mm^2}$$

となる。実測値は第3章に示すように，純鉄で，-31〜-38，炭素鋼を炭素量0に外挿した値が-42であって，この簡単な理論とよく一致する。

(2.15) 式の特徴は，磁気ひずみ出力が無次元量 $3\lambda_{111}\sigma/2K$ で定まることである。そこで用いられる磁気ひずみ定数は λ_{111} であって，多結晶の飽和磁気ひずみ $\bar{\lambda}$ ではない。$\bar{\lambda}$ は

$$\bar{\lambda}=\frac{2\lambda_{100}+3\lambda_{111}}{5} \qquad (2.16)$$

で与えられ，等方磁気ひずみの場合には

$$\lambda_{100}=\lambda_{111}=\lambda$$

であるが，一般には $\bar{\lambda}\fallingdotseq\lambda_{111}$ である。鉄の場合には[36]

$$\lambda_{100}=20.7\times10^{-6}$$
$$\lambda_{111}=-21.2\times10^{-6}$$
$$\bar{\lambda}=-4.6\times10^{-6}$$

となり，大きな差を生じる。鉄の磁束密度は，低磁界で増加し，高磁界で減少することはよく知られているが，これは，回転磁化範囲では，λ_{111} がきいて磁束密度が減少するからである。

2.3 1軸応力についての磁気ひずみ効果

応力，磁界，観測方向の三つの方向が一般の場合の磁気ひずみ効果を理論的に求めることは非常に複雑である。実験的にも，理論と比較できる効果を得ることは困難である。そこで，次に最も簡単な，磁界の方向に作用する1軸応力の場合について，近似を進めて計算する。

2.3.1 磁気ひずみ効果

磁化曲線上の一点で，さらに応力 σ と微小な磁界 h が加わったときの磁化の強さ I は，次式であらわされる。

$$I=I_0(H)+a_{11}h+a_{12}\sigma$$
$$+a_{21}h^2+a_{22}h\sigma+a_{23}\sigma^2+\cdots\cdots \qquad (2.17)$$

第1項は，応力がないときの通常の磁化曲線である。a_{11} は，$\sigma=0$ のときの通常の意味の可逆磁化率 χ_{r0} である。第3項は，微小な応力に対する磁気ひずみ効果をあらわす。Bozorth[15] にならって

$$a_{12}=\Lambda \qquad (2.18)$$

とあらわす。第4項より第6項までは2次効果であるが，重要な意味を持っている。可逆透磁率 χ_r は

$$\chi_r=\left(\frac{\partial I}{\partial h}\right)_{h=0}=a_{11}+a_{22}\sigma \qquad (2.19)$$

となり，応力に比例して変化する。(2.17) で3次以上の効果を考慮すれば，(2.19) に σ の2次の項も入るが，これは省略する。

$$\left.\begin{aligned}a_{11}&=\chi_{r0}\\a_{22}&=\Lambda_r\end{aligned}\right\}\qquad (2.20)$$

と書けば，Λ_r は，可逆透磁率についての磁気ひずみ感度である。これらを整理すれば

$$I=I_0(H)+\chi_{r0}h$$
$$+\Lambda\sigma(1+A\sigma)+\Lambda_r h\sigma \qquad (2.21)$$
$$\chi_r=\chi_{r0}+\Lambda_r\sigma \qquad (2.22)$$

となる。ここで，χ_{r0}, Λ, Λ_r, A もまた H の関数である。

これらの係数を計算するには，(2.10)を適当な近似で解けばよい。H が0でないこと，h および σ の2次の項まで計算することが前節とちがっている。

2.3.2 単結晶

(2.10) において

$$Q=\frac{HI_s}{2K},\quad q=\frac{hI_s}{2K},\quad l=\frac{L}{K}$$
$$p=\frac{3\lambda_{111}\sigma}{2K},\quad P=\frac{\lambda_{100}-\lambda_{111}}{\lambda_{111}} \qquad (2.23)$$

とおいて無次元化すれば，基本式は

$$\alpha_i{}^3-l\alpha_i+\beta_iQ$$
$$+\beta_iq+\beta_i\left(\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\beta_j+P\alpha_i\beta_i\right)p=0 \qquad (2.24)$$

$$\sum_{j=1}^{3}\alpha_j{}^2-1=0 \qquad i=1,2,3 \qquad (2.25)$$

となる。ただし，H と h の方向は一致しており，$H \gg h$ とする。鉄の場合に

$$\sigma=100\mathrm{kg/mm^2}$$
$$H=500\mathrm{Oe}$$

とすれば

$$p \approx -0.7$$
$$Q \approx 1.0$$

となる。

(2.24) および (2.25) の連立4元3次方程式を次の仮定のもとに解く。

(1) $H=0$ では，磁化は容易磁化方向 <100> に向いている。微小な磁界が加えられると，磁化は，磁壁移動によって，全部〔100〕方向に向いてしまう。

(2) 磁界の強さが増加すると，磁化ベクトルは，回転によって磁界の方向に近づく。

(3) 磁界 h による磁界のエネルギおよび磁気ひずみエネルギは結晶磁気異方性エネルギにくらべ小さい。

そこで，基礎方程式を解くのに，まず H のみが作用した場合の正確な解を求め，h および σ による項は摂動項として求める。

基礎式の解は，p, q についての Taylor 展開であらわされるものと考える。

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_i=\alpha_{i0}+\alpha_{i1}+\alpha_{i2}+\cdots\cdots \\ &l=l_0+l_1+l_2+\cdots\cdots \\ &\quad i=1,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

右辺の1，2，3項は，それぞれ，p, q についての0次，1次，2次項をあらわす。(2.26)を基礎式に入れて，同次の項を比較すると，2次の項までについてつぎの結果を得る。

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{i0}^3-l_0\alpha_{i0}+Q\beta_i=0 \\ &\sum_i \alpha_{i0}^2-1=0 \\ &\quad i=1,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right\} \tag{2.27}$$

$$\left.\begin{aligned} &(3\alpha_{i0}^2-l_0)\alpha_{i1}-l_1\alpha_{i0} \\ &\quad =-\{q+\beta_i(\sum_j \alpha_{j0}\beta_j+P\alpha_{i0}\beta_i)p\} \\ &\sum_i \alpha_{i0}\alpha_{i1}=0 \\ &\quad i=1,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right\} \tag{2.28}$$

$$\left.\begin{aligned} &(3\alpha_{i0}^2-l_0)\alpha_{i2}-l_2\alpha_{i0} \\ &\quad =-\{(3\alpha_{i0}\alpha_{i1}-l_1)\alpha_{i1} \\ &\qquad +\beta_i(\sum_j \alpha_{j1}\beta_j+P\alpha_{i1}\beta_i)p\} \\ &2\sum_i \alpha_{i0}\alpha_{i2}+\sum_i \alpha_{i1}^2=0 \\ &\quad i=1,\ 2,\ 3 \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

0次の項についての (2.27) は，磁化曲線をあらわす。磁化曲線は，単結晶の主要軸，〔100〕，〔110〕，〔111〕方向については計算されている。また，飽和に非常に近い磁界に対しては，飽和漸近則として計算されている。しかし，中間の磁界に対する一般の方向もしくは多結晶については計算されていないようである。

0次の項の (2.27) は，4元3次連立方程式であり，逐次近似で解く。1次の項の (2.28)，2次の項の (2.29) は，ともに連立1次方程式であり，p と q に関する項を分離して解くことができる。

このようにして求められた方向余弦 α_i より，磁化の強さ I は，与えられた磁界の強さ Q およびその方向余弦 β_i に対し，p, q の2次の項まですべて分離して (2.17) の形で求めることができる。すなわち，ある結晶方位を持った単結晶についての磁化曲線，可逆磁化率，1次および2次の磁気ひずみ効果，可逆磁化率についての磁気ひずみ効果がすべて求められたことになる。

2.3.3 多結晶

多結晶の磁気ひずみ効果は，単結晶の磁気ひずみ効果の平均として求められる。著しい集合組織が発達しているときには，適当な重みをつけて平均する必要がある。ここでは結晶粒の方位が，一様に分布しているものとして平均を取ることにする。平均は，前節と同様に，単位球面の 1/48 にあたる図2-4の太線で示す球面三角形上で行えばよい。この領域をDとする。磁界の方向は，単位球面上の極座標で与えられる。

$$\left.\begin{aligned} &\beta_1=\sin\theta\cos\phi \\ &\beta_2=\sin\theta\sin\phi \\ &\beta_3=\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

θ, ϕ の関数 f の平均値 $\bar{f}$ は

$$\bar{f}=\frac{48}{4\pi}\iint_D f\sin\theta\, d\theta d\phi \tag{2.31}$$

で与えられる。極座標 (θ, ϕ) を，図2-4に示すように，(ψ, ϕ) に変換すれば，領域 D は，正方形の領域 D' に変換される。ただし

$$\theta=\cot^{-1}(\tan\psi\sin\phi) \tag{2.32}$$

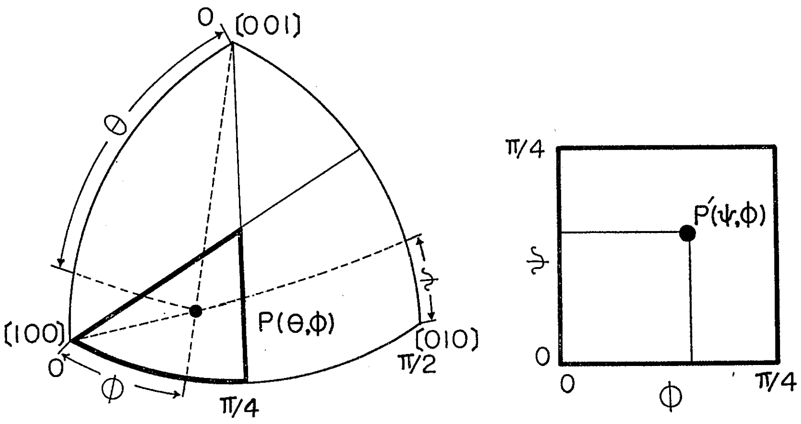
である。

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi}=\frac{\sec^2\psi\sin\phi}{1+\tan^2\psi\ \sin^2\phi} \tag{2.33}$$

$$\sin\theta=\frac{1}{(1+\tan^2\psi\sin^2\phi)^{1/2}} \tag{2.34}$$

であるから，平均値は

$$\bar{f}=\frac{12}{\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/4}\frac{f\sec^2\psi\sin\phi}{(1+\tan^2\psi\sin^2\phi)^{3/2}}\,d\phi d\psi \tag{2.35}$$



(a) 領域 D　　　(b) 領域 D′

図 2-4　結晶粒方向の領域の変換

によって計算される。

前節で単結晶について得られた磁化についての5個の量，$I_0(H)$，χ_{r0}，Λ，Λ_r，A は，(2. 35) を用いて，多結晶の値が計算できる。以上の計算は，かなり複雑なので，すべて計算機によって行った。そのフローチャートを図2-5に，$Q=1$（約500 Oe）の場合の計算例を表2-1に示す。第1列，第2列は磁界の方向 ϕ，θ であって，ともに10分割（ϕ，φ で10等分）してある。第3列より第8列までは，磁化の強さの無次元化された式

$$\frac{I}{I_s}=A_1+A_2q+A_3p+\frac{1}{2}A_4q^2+A_5qp+\frac{1}{2}A_6p^2 \tag{2.36}$$

の中の6個の係数 $A_i(i=1,\cdots\cdots6)$ を与える。第9列は，A_1 を求めるときの逐次近似の回数である。50回以上近似を繰返したものは，第6，7，8列を0としている。このことが平均値に与える影響は無視できる。最後の列は，シンプソンの1/3則の積分公式の係数である。一つの行が，ある方向 ϕ，θ の Q の大きさのバイアス磁界に対する係数を与え，最後の行（HEIKIN）が，多結晶に対する値を与える。

A_i はすべて無次元量であらわされているため，次の変換を行う。

$$I_0(H)=I_sA_1=21.500A_1\quad \mathrm{G}$$

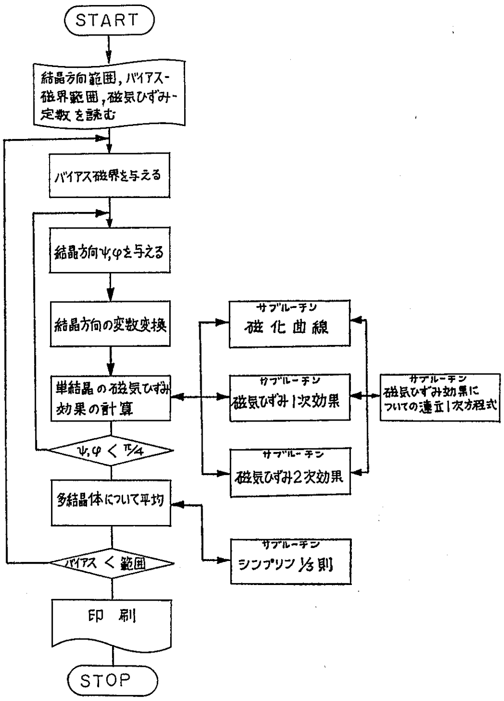


図 2-5　磁気ひずみ効果の計算フローチャート

表 2-1 計算結果の一例

FIELD= 1.00

PHI	THETA	MAG	KAI	LAMDA	KAIR	LAMDAR	LAMDAS	N
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 1.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 4.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 2.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 4.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 2.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 4.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 2.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 4.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 2.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 4.0
0.00	0.00	1.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	1 1.0
4.50	0.00	0.99923	0.00077	0.00229	-0.00116	-0.00192	-0.00118	2 4.0
4.50	0.35	0.99923	0.00078	0.00230	-0.00117	-0.00193	-0.00118	2 16.0
4.50	0.71	0.99921	0.00079	0.00234	-0.00119	-0.00196	-0.00121	2 8.0
4.50	1.08	0.99919	0.00082	0.00242	-0.00123	-0.00203	-0.00124	2 16.0
4.50	1.46	0.99915	0.00085	0.00253	-0.00128	-0.00212	-0.00130	2 8.0
4.50	1.86	0.99910	0.00090	0.00268	-0.00136	-0.00224	-0.00138	2 16.0
4.50	2.29	0.99903	0.00097	0.00288	-0.00146	-0.00241	-0.00148	2 8.0
4.50	2.75	0.99895	0.00106	0.00314	-0.00160	-0.00263	-0.00161	2 16.0
4.50	3.26	0.99883	0.00118	0.00348	-0.00177	-0.00292	-0.00179	2 8.0
4.50	3.83	0.99868	0.00133	0.00394	-0.00201	-0.00330	-0.00203	2 16.0
4.50	4.49	0.99847	0.00154	0.00454	-0.00232	-0.00382	-0.00234	2 4.0
9.00	0.00	0.99697	0.00311	0.00903	-0.00470	-0.00764	-0.00473	2 2.0
9.00	0.71	0.99695	0.00313	0.00908	-0.00473	-0.00768	-0.00475	2 8.0
9.00	1.42	0.99689	0.00319	0.00925	-0.00482	-0.00783	-0.00484	2 4.0
9.00	2.15	0.99680	0.00329	0.00954	-0.00497	-0.00807	-0.00499	2 8.0
9.00	2.91	0.99665	0.00344	0.00996	-0.00520	-0.00843	-0.00521	2 4.0
9.00	3.71	0.99646	0.00364	0.01054	-0.00550	-0.00893	-0.00552	2 8.0
9.00	4.56	0.99620	0.00391	0.01132	-0.00591	-0.00958	-0.00592	2 4.0
9.00	5.48	0.99586	0.00426	0.01233	-0.00645	-0.01045	-0.00646	2 8.0
9.00	6.48	0.99542	0.00473	0.01364	-0.00716	-0.01157	-0.00715	2 4.0
9.00	7.61	0.99485	0.00534	0.01536	-0.00810	-0.01305	-0.00808	2 8.0
9.00	8.89	0.99409	0.00616	0.01763	-0.00936	-0.01502	-0.00931	2 2.0
13.50	0.00	0.99332	0.00708	0.01988	-0.01082	-0.01710	-0.01073	2 4.0
13.50	1.05	0.99328	0.00713	0.02000	-0.01089	-0.01720	-0.01079	2 16.0
13.50	2.12	0.99316	0.00725	0.02036	-0.01109	-0.01752	-0.01098	2 8.0
13.50	3.21	0.99295	0.00748	0.02098	-0.01143	-0.01805	-0.01132	2 16.0
13.50	4.34	0.99265	0.00781	0.02189	-0.01194	-0.01884	-0.01180	2 8.0
13.50	5.52	0.99224	0.00826	0.02314	-0.01263	-0.01993	-0.01248	2 16.0
13.50	6.78	0.99169	0.00886	0.02478	-0.01356	-0.02136	-0.01337	2 8.0
13.50	8.14	0.99099	0.00964	0.02692	-0.01478	-0.02323	-0.01454	2 16.0
13.50	9.63	0.99008	0.01067	0.02966	-0.01639	-0.02567	-0.01607	2 8.0
13.50	11.28	0.98891	0.01203	0.03320	-0.01853	-0.02884	-0.01809	2 16.0
13.50	13.14	0.98740	0.01384	0.03780	-0.02140	-0.03303	-0.02079	2 4.0

表 2-1 計算結果の一例

18.00	0.00	0.98850	0.01281	0.03427	-0.01990	-0.03024	-0.01937	3	2.0
18.00	1.39	0.98844	0.01288	0.03447	-0.02002	-0.03042	-0.01948	3	8.0
18.00	2.80	0.98824	0.01311	0.03508	-0.02038	-0.03097	-0.01981	3	4.0
18.00	4.24	0.98790	0.01350	0.03613	-0.02099	-0.03190	-0.02039	3	8.0
18.00	5.73	0.98740	0.01408	0.03766	-0.02190	-0.03326	-0.02124	3	4.0
18.00	7.29	0.98673	0.01487	0.03974	-0.02316	-0.03513	-0.02241	3	8.0
18.00	8.95	0.98585	0.01593	0.04245	-0.02483	-0.03759	-0.02397	3	4.0
18.00	10.72	0.98472	0.01731	0.04592	-0.02705	-0.04079	-0.02601	3	8.0
18.00	12.65	0.98330	0.01911	0.05034	-0.02997	-0.04492	-0.02868	3	4.0
18.00	14.78	0.98152	0.02147	0.05592	-0.03386	-0.05027	-0.03222	3	8.0
18.00	17.17	0.97928	0.02461	0.06298	-0.03913	-0.05729	-0.03695	3	2.0
22.50	0.00	0.98286	0.02049	0.05143	-0.03264	-0.04714	-0.03105	3	4.0
22.50	1.73	0.98277	0.02061	0.05173	-0.03282	-0.04741	-0.03122	3	16.0
22.50	3.47	0.98249	0.02096	0.05263	-0.03340	-0.04824	-0.03174	3	8.0
22.50	5.25	0.98200	0.02157	0.05416	-0.03438	-0.04967	-0.03263	3	16.0
22.50	7.09	0.98130	0.02246	0.05639	-0.03584	-0.05175	-0.03394	3	8.0
22.50	9.01	0.98037	0.02368	0.05938	-0.03785	-0.05458	-0.03575	3	16.0
22.50	11.03	0.97917	0.02530	0.06325	-0.04054	-0.05831	-0.03817	3	8.0
22.50	13.20	0.97766	0.02742	0.06814	-0.04412	-0.06314	-0.04136	3	16.0
22.50	15.54	0.97580	0.03018	0.07425	-0.04887	-0.06937	-0.04556	3	8.0
22.50	18.10	0.97356	0.03380	0.08178	-0.05526	-0.07743	-0.05119	3	16.0
22.50	20.94	0.97091	0.03860	0.09102	-0.06408	-0.08803	-0.05890	3	4.0
27.00	0.00	0.97693	0.03047	0.07037	-0.05036	-0.06826	-0.04668	3	2.0
27.00	2.05	0.97681	0.03063	0.07077	-0.05064	-0.06865	-0.04693	3	8.0
27.00	4.11	0.97645	0.03114	0.07199	-0.05149	-0.06983	-0.04768	3	4.0
27.00	6.22	0.97584	0.03200	0.07405	-0.05297	-0.07187	-0.04898	3	8.0
27.00	8.39	0.97497	0.03326	0.07702	-0.05515	-0.07484	-0.05091	3	4.0
27.00	10.65	0.97382	0.03500	0.08097	-0.05818	-0.07888	-0.05358	3	8.0
27.00	13.02	0.97237	0.03729	0.08602	-0.06227	-0.08421	-0.05718	3	4.0
27.00	15.55	0.97061	0.04029	0.09230	-0.06775	-0.09112	-0.06198	3	8.0
27.00	18.25	0.96855	0.04419	0.09995	-0.07513	-0.10009	-0.06847	3	4.0
27.00	21.19	0.96622	0.04931	0.10915	-0.08528	-0.11188	-0.07742	3	8.0
27.00	24.42	0.96378	0.05610	0.12001	-0.09979	-0.12785	-0.09034	3	2.0
31.50	0.00	0.97158	0.04332	0.08991	-0.07587	-0.09522	-0.06846	3	4.0
31.50	2.35	0.97144	0.04354	0.09042	-0.07627	-0.09576	-0.06882	3	16.0
31.50	4.73	0.97103	0.04421	0.09198	-0.07751	-0.09743	-0.06992	3	8.0
31.50	7.15	0.97033	0.04537	0.09461	-0.07967	-0.10028	-0.07183	3	16.0
31.50	9.64	0.96935	0.04706	0.09836	-0.08287	-0.10446	-0.07468	3	8.0
31.50	12.21	0.96809	0.04938	0.10331	-0.08736	-0.11018	-0.07869	3	16.0
31.50	14.91	0.96655	0.05245	0.10954	-0.09349	-0.11777	-0.08419	3	8.0
31.50	17.75	0.96479	0.05645	0.11713	-0.10186	-0.12778	-0.09178	3	16.0
31.50	20.79	0.96291	0.06166	0.12617	-0.11346	-0.14111	-0.10248	3	8.0
31.50	24.05	0.96112	0.06850	0.13668	-0.13015	-0.15947	-0.11828	3	16.0
31.50	27.59	0.95996	0.07762	0.14852	-0.15587	-0.18667	-0.14370	4	4.0

表 2-1 計算結果の一例

36.00	0.00	0.96839	0.06016	0.10859	-0.11649	-0.13358	-0.10272	4	2.0
36.00	2.65	0.96824	0.06044	0.10924	-0.11709	-0.13438	-0.10329	4	8.0
36.00	5.32	0.96780	0.06130	0.11119	-0.11894	-0.13682	-0.10504	4	4.0
36.00	8.03	0.96708	0.06278	0.11446	-0.12217	-0.14102	-0.10813	4	8.0
36.00	10.81	0.96610	0.06493	0.11910	-0.12703	-0.14724	-0.11281	4	4.0
36.00	13.68	0.96489	0.06788	0.12514	-0.13395	-0.15588	-0.11957	4	8.0
36.00	16.67	0.96353	0.07178	0.13761	-0.14366	-0.16765	-0.12924	4	4.0
36.00	19.81	0.96216	0.07686	0.14151	-0.15741	-0.18381	-0.14334	4	8.0
36.00	23.12	0.96108	0.08345	0.15178	-0.17761	-0.20684	-0.16494	4	4.0
36.00	26.66	0.96086	0.09203	0.16310	-0.20957	-0.24246	-0.20119	4	8.0
36.00	30.45	0.96281	0.10319	0.17457	-0.26805	-0.30755	-0.27345	4	2.0
40.50	0.00	0.97086	0.08369	0.12452	-0.20209	-0.20991	-0.17727	4	4.0
40.50	2.93	0.97072	0.08403	0.12534	-0.20314	-0.21133	-0.17849	4	16.0
40.50	5.87	0.97031	0.08506	0.12779	-0.20638	-0.21570	-0.18226	4	8.0
40.50	8.86	0.96967	0.08681	0.13188	-0.21213	-0.22335	-0.18903	4	16.0
40.50	11.92	0.96884	0.08937	0.13759	-0.22102	-0.23499	-0.19967	4	8.0
40.50	15.06	0.96793	0.09282	0.14489	-0.23419	-0.25189	-0.21581	4	16.0
40.50	18.31	0.96713	0.09730	0.15366	-0.25373	-0.27646	-0.24059	4	8.0
40.50	21.70	0.96678	0.10294	0.16359	-0.28380	-0.31367	-0.28059	4	16.0
40.50	25.26	0.96754	0.10971	0.17387	-0.33386	-0.37535	-0.35172	4	8.0
40.50	29.02	0.97076	0.11657	0.18174	-0.43023	-0.49616	-0.50184	4	16.0
40.50	33.00	0.97964	0.11432	0.17246	-0.66727	-0.81039	-0.92653	5	4.0
45.00	0.00	0.99996	0.13658	0.13660	0.00000	0.00000	0.00000	50	1.0
45.00	3.19	0.99983	0.00284	0.00332	0.00000	0.00000	0.00000	50	4.0
45.00	6.39	0.99933	0.00107	0.00278	-0.12632	-0.12948	-0.13294	50	2.0
45.00	9.63	0.99853	0.00207	0.00596	-0.01269	-0.01691	-0.02125	50	4.0
45.00	12.94	0.99749	0.00367	0.01027	-0.00784	-0.01493	-0.02224	8	2.0
45.00	16.32	0.99633	0.00568	0.01536	-0.01262	-0.02354	-0.03504	8	4.0
45.00	19.81	0.99524	0.00802	0.02067	-0.01899	-0.03437	-0.05102	8	2.0
45.00	23.43	0.99453	0.01040	0.02512	-0.02717	-0.04731	-0.07001	7	4.0
45.00	27.19	0.99477	0.01197	0.02656	-0.03685	-0.06119	-0.09011	7	2.0
45.00	31.13	0.99678	0.01009	0.01989	-0.04247	-0.06643	-0.09687	6	4.0
45.00	35.26	1.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	7	1.0
HEIKINCHI	=	0.97880	0.04823	0.08985	-0.11155	-0.13167	-0.11063		

$$\overline{\mu_{r0}}=\frac{I_s^2}{2K\mu_0}A_2+1=43.78A_2+1$$

$$\Lambda=\frac{3\lambda_{111}I_s}{2K}A_3=-159.6A_3\ \mathrm{G/kg/mm^2}$$

$$\Lambda_r=\frac{3\lambda_{111}I_s^2}{4K}A_4=-0.3251A_5/\mathrm{kg/mm^2}$$

$$\Lambda=\frac{A_6}{2A_3}\cdot\frac{3\lambda_{111}}{2K}=-0.0037\frac{A_6}{A_3}/\mathrm{kg/mm^2}$$

このようにして得られた結果を図 2-6 以降に示す。

これらの図中に，第 3 章以降に得られた実験値も同時に示す。本章の理論が，定性的に非常によく高磁界における磁気ひずみ効果を説明できることがわかる。定量的にもかなりよい一致が見られた。たとえば，Λ_r においては 500Oe における感度のピークの存在を正確に与えるが，その絶対値については，材料によってはよく一致するものがあり，差の大きい場合では，実測値が60%も大きいものがある。

1 軸応力による磁気ひずみ効果の理論は，次のようにまとめられる。

(1) 高磁界の磁気ひずみ効果を，回転磁化機構を仮定して理論的に求めることができた。

(2) 可逆透磁率が求められた。実験的に観測されている 400 Oe 付近の変曲点も理論的に得られた。

(3) 磁束密度についての磁気ひずみ感度 Λ の磁界依存性が求められた。1 kg/mm² の引張応力に対し，磁界 0 において約−0.2%の変化が生じる。磁界の増加に伴って，Λ は単調に減少する。実験値との一致はよい。

(4) 可逆透磁率についての感度 Λ_r の磁界依存性が求められた。500 Oe 付近における著しいピークを理論的に求めることができた。そのピークにおいては，約 2 %/kg/mm² の感度があり，非常に大きな効果である。

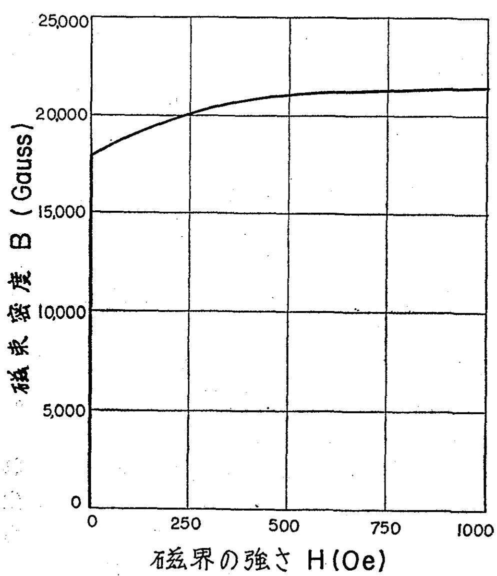


図 2-6　磁化曲線

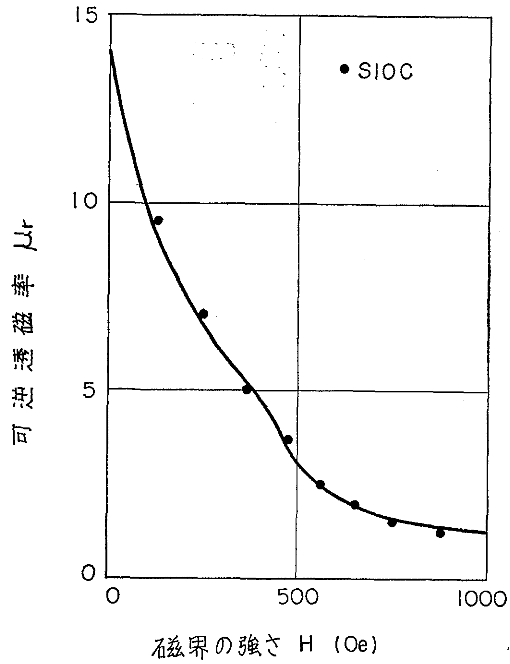


図 2-7　可逆透磁率

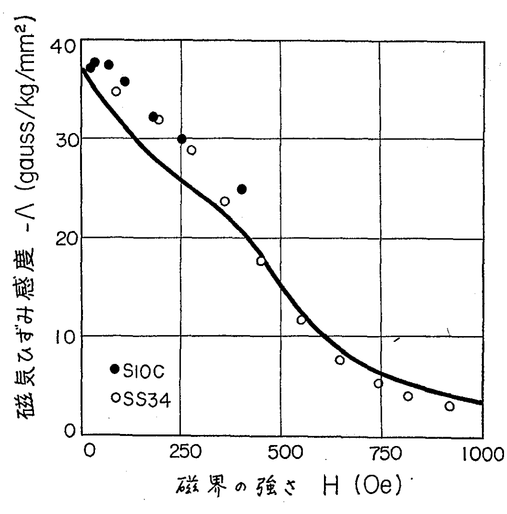


図 2-8　磁気ひずみ感度 Λ

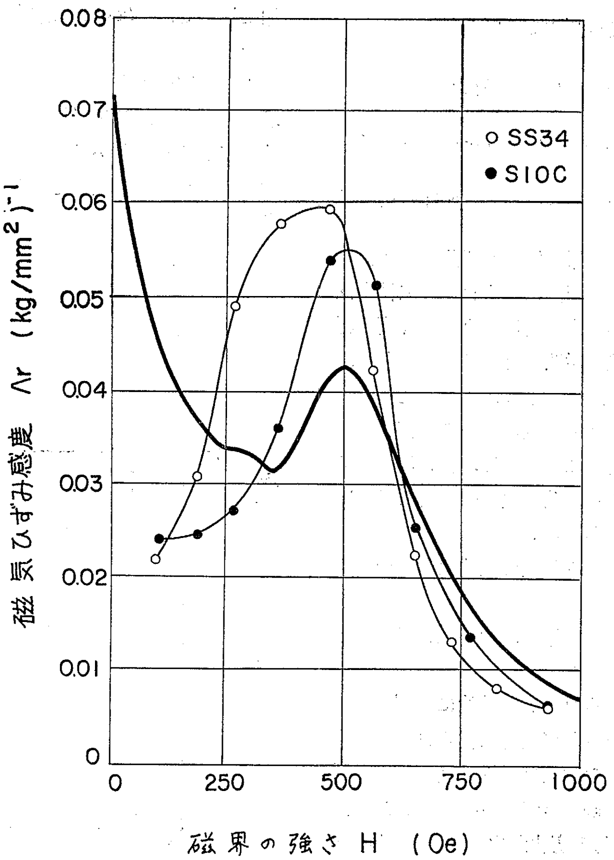


図 2-9 磁気ひずみ感度 Λ_r

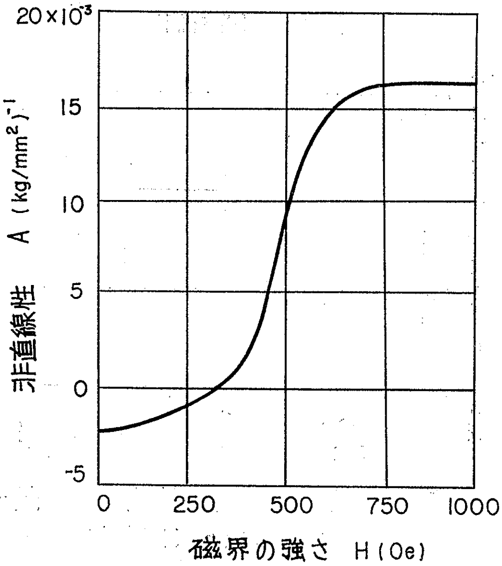


図 2-10 磁気ひずみ効果の2次項

(5) 磁束密度の応力に対する変化の非直線性も求められた。低磁界では非直線係数 A が負，高磁界では正となる。実際にもこのような傾向があることが次章以下で示される。

2.4 2軸応力についての磁気ひずみ効果

2軸応力状態での磁気ひずみ効果については，吉永[21]によって実験的研究が行われているが，理論的には不明なことが多い。1軸応力の場合には，理論と比較しやすい実験を行うことができるが，2軸応力の場合には，磁気的および応力的に両方が同時に理想的であるような実験を行うことが困難であるからである。そこで，もっとも簡単な場合として，1軸応力の場合と同様に，細長い棒の軸方向に磁界を加えられ，これと直角方向に応力が加えられる場合に，磁界方向に生じる磁化の強さの変化を考えることにする。この応力は，棒軸に直角な面内の二つの主応力があらわされる。この二つの主応力の軸方向の磁化変化に対する効

果は，対称から，同じ応力感度による寄与があるとしてよい。棒の側面に直角方向に一様な圧力を受けるときは，二つの主応力は等しい。応力が小さいときは，直線性が成り立つから，一方向だけの圧縮は，一様圧縮のときの磁化変化の1/2を与える。引張でも符号が反対になるだけである。図2-11によって説明する。

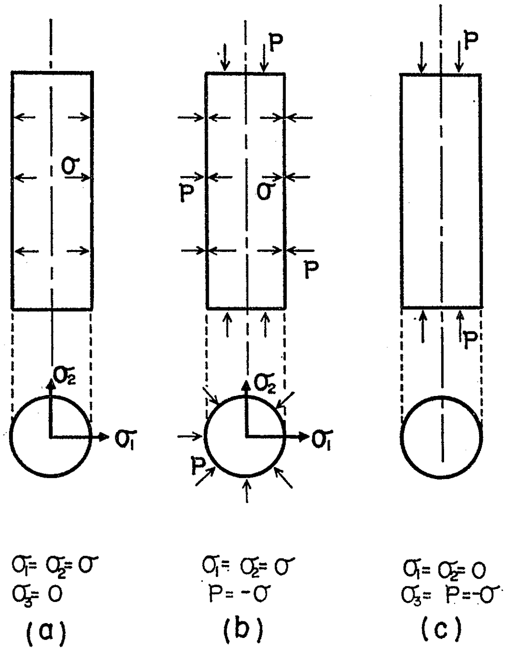


図2-11　2軸応力に対する磁気ひずみ効果

いま，二つの主応力が等しく，これをσとする。この棒にさらに一様圧力$-\sigma$を加えれば，全体の応力状態は，軸方向に$-\sigma$の1軸応力が発生し，これと直角方向の二つの主応力は0となり，前節で考えた実験条件と全く一致する。

強磁性体に静水圧を加えると磁化が変化する現象を体積磁わい効果という。（磁わいは磁気ひずみと同義語である。）これは，普通の磁気ひずみ効果にくらべ無視できることが実験的に確かめられている[37) 38)]。そこで，いま考える細長い棒に一様な圧力を加えても磁化の変化は起らないのであるから，1軸応力の磁気ひずみ効果は，これに直角に作用するこれと符号が反対の円応力の磁気ひずみ効果と等しいことになる。これよりさらに，磁界に直角な応力の作用は，磁界に平行な応力の作用と符号が反対で，大きさは1/2であることが結論される。

一般に，主応力σ_1およびσ_2であらわされる平面応力による磁束密度の磁界方向の変化ΔBは

$$\Delta B=\Lambda_1\sigma_1+\Lambda_2\sigma_2 \qquad (2.37)$$

で近似的にあらわされる[20)]。ただし，σ_1は磁界に平行な主応力，σ_2は直角な主応力である。Λ_1およびΛ_2は，磁気ひずみ感度である。Λ_1は，前に述べたΛと一致する。Λ_1およびΛ_2は，測定法，試験片の形状によって変化する定数であるが，本節の場合には

$$\Lambda_2=-\frac{1}{2}\Lambda_1 \qquad (2.38)$$

である。磁束変化の検出法によって

$$K=\frac{\Lambda_2}{\Lambda_1}$$

は，$-1\sim+1$の範囲で変化することが知られている[20) 23)]。とくに$K=-1$となる場合には

$$\Delta B=(\sigma_1-\sigma_2)$$

となり，主応力を独立に求めることはできない。

2.5　結言

第2章においては，鉄の磁気ひずみ効果を理論的に求め，その大きさ，磁界依存性についての見通しを得ることを試みた。

まず，測定すべき残留応力を，ミクロストレスでなく，マクロストレスに限るなら，残留応力測定に利用する磁気ひずみ効果としては，内部の不均一性に敏感に影響を受ける低磁界の磁気ひずみ効果ではなく，可逆的に磁化が行われる高磁界の磁気ひずみ効果が適当であることを述べた。

バイアス磁界を与えたときの磁気ひずみ効果について，現在確立されている磁気理論を適用し，1軸応力の場合に対し，応力測定に必要な量について1000 Oeまでのバイアス磁界の関数として求めることができた。バイアス磁界とともに，さらに微小な磁界hおよび応力σを与えたときの磁化の強さIは

$$I=I_0+\chi_{r0}h$$
$$+\Lambda\sigma(1+A\sigma)+\Lambda_r h\sigma$$

であらわされる。I_0, χ_{r0}, Λ, A, Λ_rはそれぞれ，バイアス磁束密度，（バイアス）可逆磁化率，磁束密度についての磁気ひずみ感度およびその非直線性，可逆透磁率または透磁率についての磁気ひずみ感度で，すべてバイアス磁界の関数である。また，可逆磁化率χ_rおよび透磁率μ_rについて

$$\chi_r=\chi_{r0}+\Lambda_r\sigma$$
$$\mu_r=\mu_{r0}+\Lambda_r\sigma$$

が成り立つ。

上記の五つの量の理論式は，次章以下で詳細に検討

する実験値と，その大きさおよびバイアス特性が，定性的にも定量的にも一致した。

2軸応力の場合の磁気ひずみ効果についても若干の考察を行った。細長い棒の軸方向に磁界を，直角の方向に応力を加えたときの磁気ひずみ効果は，同じ磁化状態で，軸方向に等しい応力を加えたときにくらべ，符号は反対で，大きさは 1/2 であるという結果を得た。2軸応力については，さらに研究すべきことが多い。

第3章　直流磁界による応力測定

3.1　緒言

本章においては，第2章で得られた磁気ひずみ効果の基本式のうち，磁束密度と応力との関係式を，炭素鋼の棒状試験片について，弾性域および塑性域にわたって実験的に検討する。弾性域の実験より，磁気ひずみ感度の磁界依存性，炭素量，加工および熱処理の影響を求める。塑性域の実験より，磁束密度と応力の関係式に対する塑性ひずみの影響を求める。

次に，炭素鋼のパーライト組織が磁気ひずみ感度をきめる重要な要因になっていることを示す。さらに，塑性変形に伴う転位によって発生する局所的なミクロストレスの磁束密度に与える影響の小さいことを論じ，実験結果を考察する。

この基本式を用いる直流磁界による応力測定は，残留応力の深さ方向の平均の測定に適用されるにすぎず，分布を持つ残留応力の測定には，次章に述べる交流法によらなければならない。

3.2　弾性域

3.2.1　実験方法

炭素鋼の棒状試験片を直流磁化し，これに引張荷重を加え，そのときの磁束変化を測定する。実験装置のブロック図を，図3-1に示す。

磁化コイルは長さ 250mm のソレノイドコイルで

$$H=360\,i\,\mathrm{Oe}$$

の磁界を与える。$i\,(A)$ は磁化電流である。この状態で引張荷重を加えると，磁束は磁気ひずみ効果によって減少する。磁束変化を $\Delta\Phi$ とする。試験片に巻いた検出コイルには，このため電圧が誘起される。この電

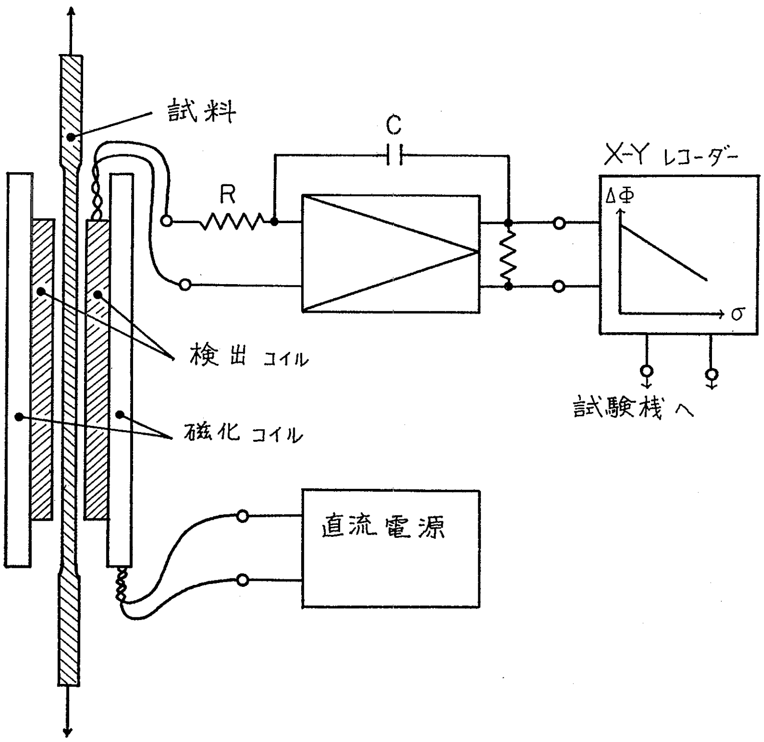


図 3-1　実験装置のブロック図

圧を積分器で積分し，ＸＹレコーダ（理研電子製D―72型）のＹ軸に与える。この電圧は，次の式で与えられる。

$$E=\frac{N}{CR}\int\frac{d\Phi}{dt}dt=\frac{N\Delta\Phi}{CR}=\frac{NS\Delta B}{CR} \tag{3.1}$$

N：検出コイルの巻数（4,930回）
CR：積分器の定数（1.62 sec）
S：試験片の断面積（0.50×10^{-4} m²）
E：積分器の出力電圧（V）

荷重試験機（森試験機製10トルオルセン型万能試験機）の荷重は，試験機の指示ダイヤルの軸に直結したポテンシオメータによって，ＸＹレコーダのＸ軸に与えられ，図3-2のような記録が得られる。

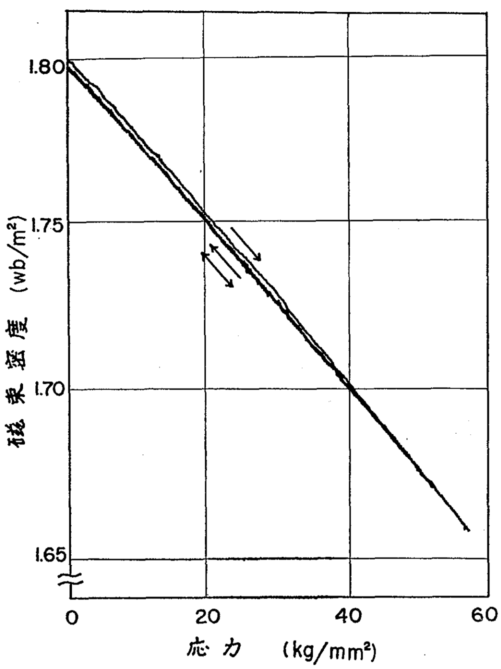


図 3-2　磁束変化—荷重曲線の記録

磁気ひずみ感度 Λ は

$$\Lambda=\frac{dB}{d\sigma}=\frac{CR}{NS}\quad\frac{dE}{d\sigma}=\frac{CR}{N}\quad\frac{dE}{dT} \tag{3.2}$$

で与えられる。T は荷重である。Λ は，試験片の断面積と無関係に，$E-T$ 曲線の傾斜より求められる。

試験片の磁化特性も測定した。これは，上に述べた装置を普通の自記磁束計として使用すればよい。Ｙ軸には，便宜上，磁束密度のかわりに磁化の強さ

$$I=B-\mu_0 H$$

を与えた。μ_0 は真空の透磁率である。

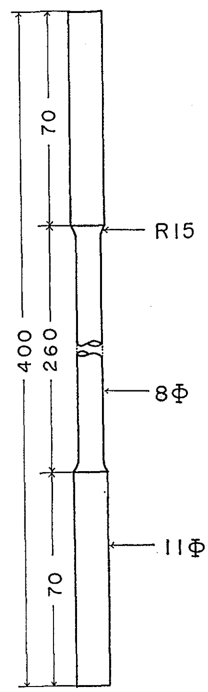
この測定が普通の磁化特性の磁定にくらべ難しい点は，荷重による磁束の変化が小さいことと，荷重試験に時間がかかるため積分器のドリフトが問題になることである。１回の荷重サイクルが３分程度であり，数回サイクルを繰返す間，零ドリフトが小さいことが望ましい。自作した積分器の数回の改造によって，ドリフトを十分に小さくすることができた。

3.2.2　試験片

試料は，純鉄および0.79％までの炭素鋼である。その組成を表3-1に示す。試験片の寸法形状は図3-3に示す。熱間もしくは冷間圧延の棒鋼より旋盤加工によって製作した。測定は旋盤加工のままのもの，これを600°Cおよび900°Cで焼きなましたものの３種類について行った。

3.2.3　磁気ひずみ出力

弾性域および降伏点付近までの応力による磁束変化を図3-4に示す。試験片は0.40％Cの炭素鋼で，加工材である。抵抗線ひずみゲージで応力-ひずみ曲線を同時に測定した。磁束変化は降伏点まで非常によい直



試験片の形状

図 3.3　試験片の形状，寸法

表 3-1　試料の化学成分（％）

試料	C	Si	Mn	P	S	加工の種類
S00C	0.00	0.07	0.09	0.006	0.016	C*
S00H	0.02	0.12	0.13	0.005	0.019	H**
S10C	0.08	0.02	0.28	0.008	0.030	C
S20C	0.21	0.02	0.40	0.022	0.018	C
S40C	0.40	0.30	0.68	0.012	0.026	C
S60C	0.62	0.25	0.47	0.016	0.024	H
S70C	0.75	0.30	0.50	0.015	0.016	H
S80C	0.79	0.30	0.70	0.015	0.014	H

*：冷間加工　　**：熱間加工

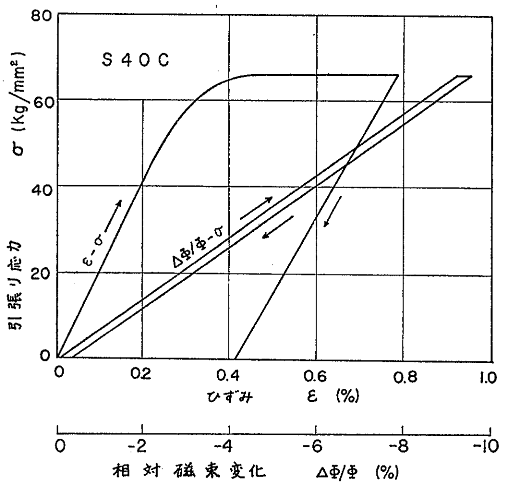


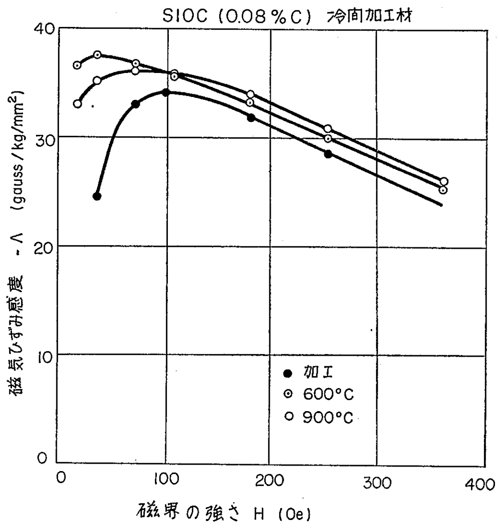
図 3-4 降伏点付近までの磁束変化―ひずみ曲線と応力―ひずみ曲線（加工材）

線性を保つ。図中の応力は，公称応力であって，3.2.1の議論によって，磁気ひずみ感度は，この応力範囲で一定であることがわかる。降伏点より上で塑性変形が生じても大きな磁束変化は起らない。本節では，直線性が成り立つものとして，弾性域の測定より磁気ひずみ感度に影響する因子をしらべることにする。

3.2.4 磁気ひずみ感度とバイアス磁界

磁気ひずみ感度 Λ は，バイアスによって変化する。使用バイアス状態としては，図3-5に示す磁気ヒステリシス環線の下降曲線BC上で測定を行う。この下降曲線上では，磁化現象が比較的簡単で，材料内部の不均一性の影響が小さいと考えられる。

加工材，これを600°Cおよび900°Cで焼きなました



(a)

図 3-6 磁気ひずみ感度のバイアス依存性

同一試験片の3種類の処理状態について，Λ をバイアス関数として測定した。Λ は応力0～10kg/mm²の範囲の $\Delta\Phi/T$ 曲線より求めた。図3-6にその結果を例示する。

磁気ひずみ感度 Λ は

$$\Lambda = -30 \sim -40\mathrm{G/kg/mm^2}$$

であって，引張応力によって磁束密度は減少する。ひずみゲージの感度をあらわすゲージ率を使用すれば，低炭素鋼の磁気ひずみ効果のゲージ率 K_M は

$$K_M = \frac{\Delta\Phi}{\Phi}\ \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\Delta B}{B}\ \frac{\Delta\sigma}{E}$$

$$= -30 \sim -40 \qquad (3.3)$$

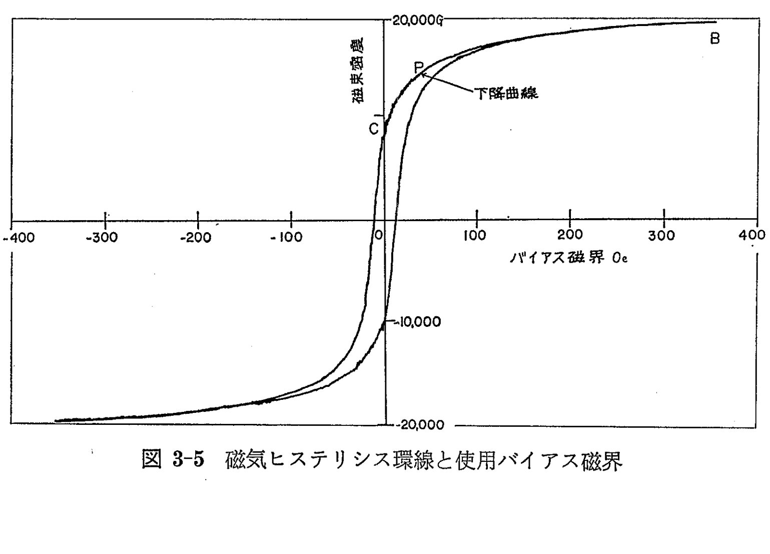


図 3-5 磁気ヒステリシス環線と使用バイアス磁界

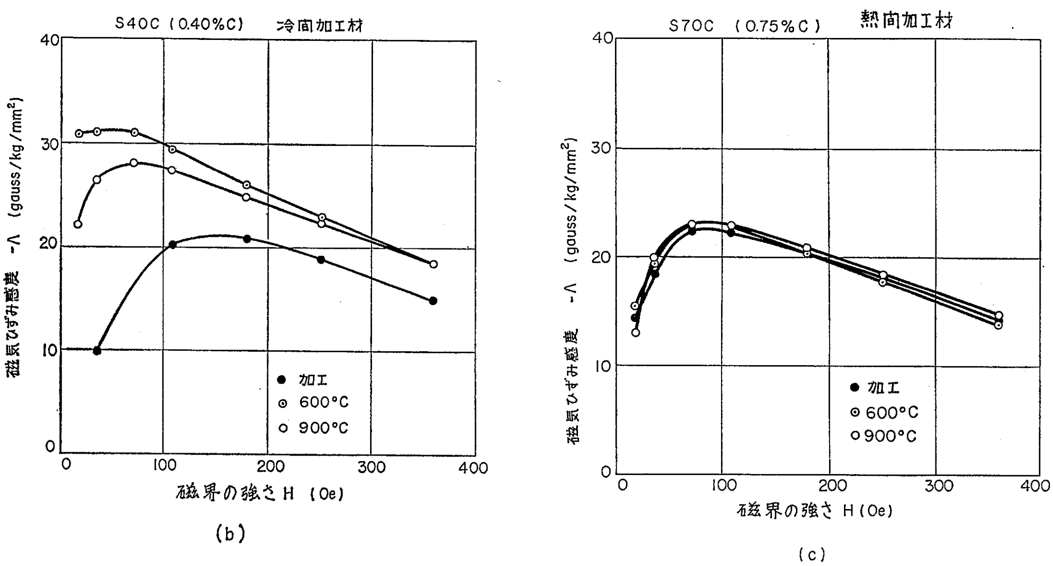


図 3-6 磁気ひずみ感度のバイアス依存性

であり，非常に大きい。

Λ の絶対値は 100 Oe 付近のバイアスで極大となり，これより低磁界側で急激に減少する。高磁界側には，バイアスの増加とともに直線的に減少する。

加工材の Λ は焼きなまし材にくらべ一般に小さい。また，Λ の極大が高磁界側に移動する。このピークより低いバイアスでは，焼きなまし材との差は非常に大きい。加工の効果は炭素量とともに増加する。

3.2.5 磁気ひずみ感度と炭素量

磁気ひずみ感度は化学成分によって変化する。炭素鋼の場合には，炭素量の影響が最も大きい。炭素量の影響を求めるのに，バイアス 0 に外挿した磁気ひずみ感度 Λ_0 を考える。

炭素鋼の磁気特性は炭素量によって異るから，等しいバイアス磁界における感度で比較するのは合理的ではない。第 2 章で述べた磁気ひずみ効果の理論においては，磁性体の磁化の強さが非常に小さい磁界で非可逆的にかなり飽和に近い状態まで増加し，各単結晶内では<100>方向のうち磁界に最も近い方向に向っており，磁界を与えると，この状態より可逆的に磁化ベクトルが磁界の方向に回転して磁化の強さが増加すると仮定した。実際には，不純物，内部応力等により，この二つの磁化状態の間にははっきりした境界がなく，この実験に見られるようにかなり大きな磁界まで中間的な状態が続く。100 Oe 以上ではほぼ可逆的に磁化が変化すると考えてよいであろう。そこで材料中にある不均一性の影響を取除いた磁気ひずみ感度を求めるために，Λ—バイアス曲線をバイアス 0 に外挿してこれを Λ_0 とすれば，これは炭素量の差による磁気特性の差をも取除いた定数となる。

Λ_0 を求める一例を図3-7に示す。このようにして求めた Λ_0 と炭素量の関係が図 3-8 である。

Λ_0 の絶対値は炭素量 C に対しほぼ直線的に減少し

$$\Lambda_0 = -42.0 + 20.9C \pm 1.0 \mathrm{G/kg/mm^2} \quad (3.4)$$

C : 炭素量（重量パーセント）

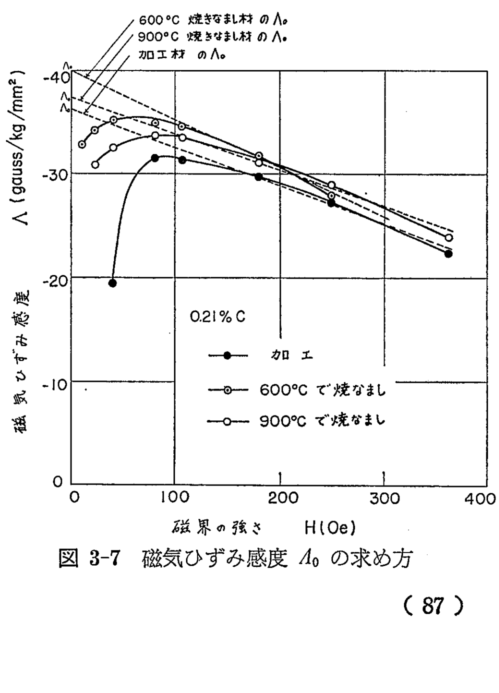


図 3-7 磁気ひずみ感度 Λ_0 の求め方

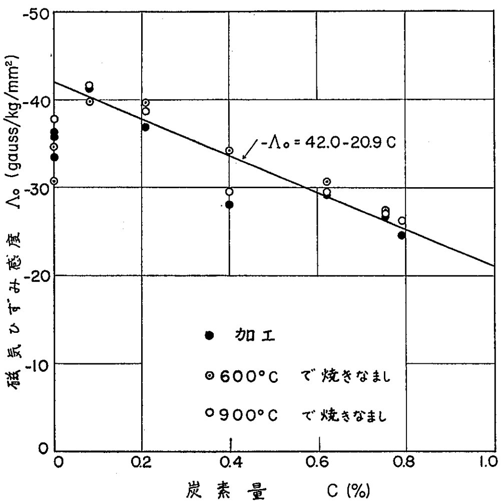


図 3-8 磁気ひずみ感度 Λ_0 の炭素量依存性

であらわされる。純鉄の Λ_0 は，この直線より大きく外れているが，その理由は不明である。製造法が他の鋼棒とかなりちがうので，結晶方位の分布が大きくちがうのかもしれない。

加工材と焼きなまし材の差は，0.4%C を除いては小さい。炭素量の増加とともに加工の影響は大きくなると思われるが，0.6% 以上ではその差が小さいのは，これらの試料が熱間圧延材より製作したものだからであろう。

磁気ひずみ効果を利用したプローブによる従来の測定法では[20]，感度は炭素量の増加に伴い感度が急激に減少する。0.2%Cの低炭素鋼を基準に取れば，0.4〜0.5%Cで約1/3，共析鋼（0.8%C）では約1/10に感度が減少する。これに反し，ここで述べた感度Λ_0は，0.15%Cにくらべ0.45%Cで3/4，0.80%Cで3/5に感度が低下するにすぎない。すなわち，高磁界の磁気ひずみ効果を利用することによって，炭素量の増加による感度の低下をはるかに小さくおさえ得ることがわかった。

3.3 塑性域

弾性域における磁気ひずみ効果は前節において明らかになったが，残留応力は多くの場合，塑性変形に伴って生じるので，塑性ひずみの影響をさらに詳しく調べる必要がある。塑性加工にはいろいろの形式が考えられるが，本研究においては1軸塑性引張による塑性変形を取り上げる。

3.3.1 実験方法

実験方法は前節とほとんど同じである。ただ，塑性ひずみによる試験片の断面積の変化を考慮する必要がある。この場合の磁束変化は，次式で与えられる。

$$\delta\Phi=\delta(B\cdot S)$$
$$=\delta B\cdot S+B\cdot\delta S \qquad (3.5)$$

一定バイアスにおいては，Bは応力 σ および塑性ひずみ ε_p の関数であると考えられる。塑性ひずみと断面積の間には，塑性力学の仮定により

$$(1+\varepsilon_p)S=S_0 \qquad (3.6)$$

が成り立つものとする。S_0 は $\varepsilon_p=0$ のときの断面積である。したがって，B は σ と S との関数となり

$$\delta\Phi=S\frac{\partial B}{\partial\sigma}\delta\sigma+\left(S\frac{\partial B}{\partial S}+B\right)\delta S \qquad (3.7)$$

が得られる。第1項は応力による磁束変化であり，第2項は塑性ひずみによる磁束変化である。磁束変化を示す $\sigma-\Delta\Phi$ 曲線を図式的に図3-9に示す。σ は公称応力である。これは普通の応力ひずみ曲線に似ている。ただ，磁気ひずみ感度が大きいために，弾性変形に対する傾斜がゆるくなっている。

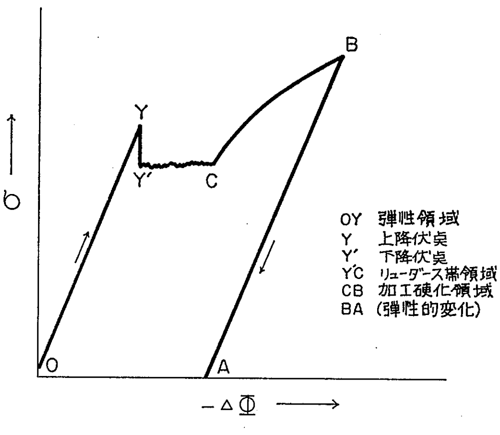


図 3-9 応力—磁束変化線図

(3.7) の第1項と第2項につぎのように実験的に分離することができる。第1項の $\partial B/\partial\sigma$ は磁気ひずみ感度であって，加工材であっても，焼きなまし材であっても，それぞれの弾性域（図3-9のOY）の測定より

$$\Lambda=\frac{\partial B}{\partial\sigma}=\frac{\partial\Phi}{\partial T} \qquad (3.8)$$

として求めることができる。ただし，弾性変形による断面積の変化の影響が1.5%程度あるが，無視する。YBの間では，塑性ひずみと加工硬化が同時に起る。

Bより荷重を減少させると，BAにそって磁束は直線的に下降する。A点では，応力は0となるから第1項は消えて，第2項の塑性ひずみの影響だけが残る。その場合の磁束変化（図3-9のOA）を $\Delta\Phi$ とし，そのときの ε_p を測定すれば，第2項と ε_p もしくは，ΔS との関係が求められる。

磁束変化は，XYレコーダに記録された電圧 E より

$$\Delta\Phi=\frac{CR}{N}\cdot E \tag{3.9}$$

で求められる。ただし，前節の定数を変更し

N：検出コイルの巻数（800回）

CR：積分器の定数（0.04 sec）

とした。検出コイルは直径15mm，長さ28mmである。積分器の演算増幅器は，Philbrick SP 456 A を使用し，非常に安定であった。

塑性ひずみは，試験片の中央260mmの範囲に20mm間隔につけたけがき線を，読取り顕微鏡で読取り，計算した。断面積変化は(3.6)を用いて求めた。

3.3.2 試験片

試料は，0～0.62%C の炭素鋼であり，その化学成分を表3-2に示す。試験片は旋盤加工で 8φ×400, 8φ×450, 12φ×500 の3種類の寸法に仕上げた円柱状試験片である。

表 3-2 試料の化学成分（%）

試料No.	C	Si	Mn	P	S
1.2.3.	Trace	0.07	0.09	0.006	0.016
4.5.	0.16	Trace	0.40	0.017	0.023
6.7.	0.21	0.02	0.40	0.022	0.018
8.	0.40	0.30	0.68	0.012	0.026
9.10.	0.40	0.32	0.65	0.022	0.013
11.	0.62	0.25	0.47	0.016	0.024

650°C，2時間のひずみとりの焼きなましを行ったものを基準とし，これに引張試験によって段階的に塑性ひずみを与えながら測定を行った。

3.3.3 磁気ひずみ感度と塑性ひずみ

試験片に局部収縮が生じる直前まで塑性ひずみを段階的に与えて，これに対する磁気ひずみ感度および荷重0に対する磁束変化を測定した。実験した塑性ひずみの値を図3-10に一括して示す。

(1) 180Oe の一定バイアスで，$\sigma-\Delta\Phi$ 曲線を測定しながら，適当な塑性ひずみを与え，つぎに荷重を除く。荷重0に対する $\Delta\Phi$ が得られる。

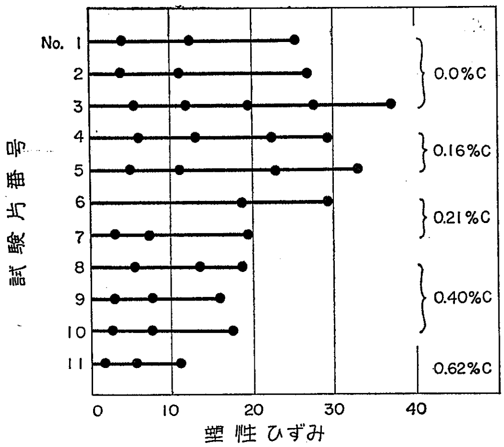


図3-10 試験片に与えた塑性ひずみ（●は測定点）

(2) この状態で，各バイアスにおける磁気ひずみ感度および磁気ヒステリシス曲線を測定する。

(3) 試験片を荷重試験機より取外し，塑性ひずみを測定する。

(4) 再び，試験片を荷重試験機にセットしたのち，上述の実験のサイクルを局部収縮が出るまで繰返す。

数回の荷重サイクルを繰返した $\sigma-\Delta\Phi$ 曲線を一つの曲線にまとめた一例が図3-11である。塑性ひずみの測定および感度の測定のために時間がかかるので，応力-ひずみ曲線の場合にもあらわれる時効現象で，曲線のつぎめに多少の段がつく以外は，全体としてなめらかな曲線になっている。

180Oe における磁気ひずみ感度の塑性ひずみ依存

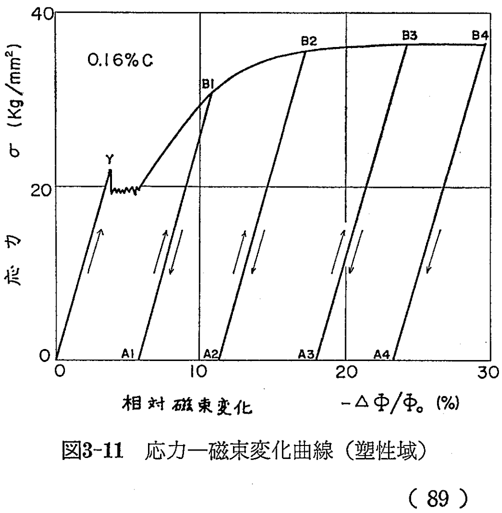


図3-11 応力―磁束変化曲線（塑性域）

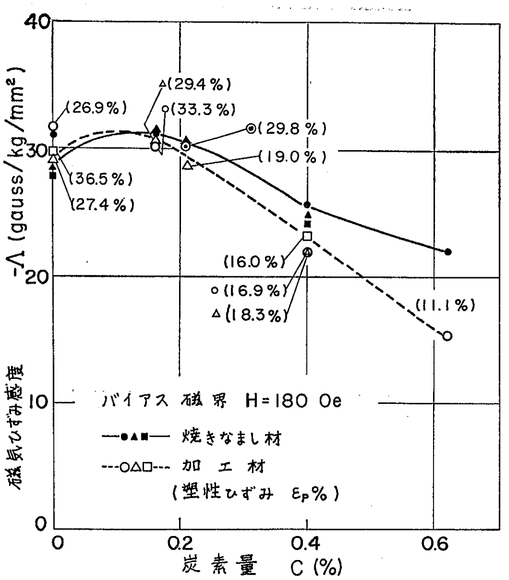


図3-12 磁気ひずみ感度の炭素量および塑性ひずみ依存性

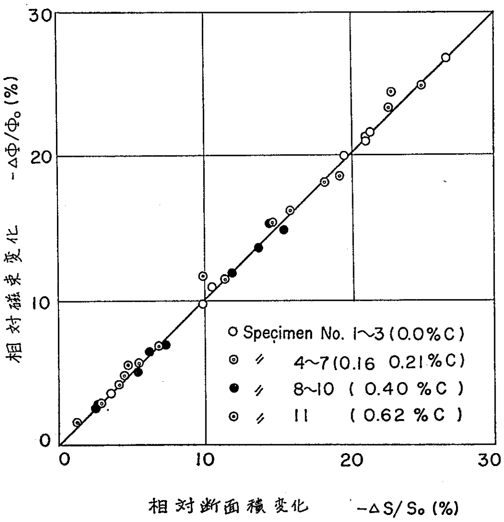


図3-13 磁束変化と断面積変化

性を図3-12に示す。焼きなまし材および局部収縮直前の加工度の大きい試験片についての値が与えられている。塑性ひずみの影響は，炭素量とともに大きくなる。0.4%C以上の材料については，はっきりと Λ の減少が認められ，0.62%Cでは30%減少した。低炭素鋼および純鉄では，その影響は小さく±5%以下である。

磁気ひずみ感度の変化の大部分は，$\varepsilon_p=3\sim4\%$ の範囲で起る。それ以上の塑性ひずみに対しては，変化は飽和する傾向がある。

磁気ひずみ出力は，応力について非常によい直線性を持っている。加工硬化を起しても，この直線性が少くとも局部収縮を起すまで失われないことは注目すべきである。0.40%Cの試料で，応力75kg/mm²まで非直線性は誤差範囲内であり，0.62%Cの試料では，84 kg/mm² の範囲で±0.6%であった。

3.3.4 バイアス磁束と塑性ひずみ

塑性ひずみのためにバイアス磁束の変化が起ると，磁束測定によって応力を求ぬる場合には零点の移動となって，測定誤差となる可能性がある。そこで，磁束変化と塑性ひずみのあいだの法則を求めた。

荷重0に対する磁束変化は (3.7) の第2項

$$\delta\Phi=\left(S\frac{\partial B}{\partial\sigma}+B\right)\delta S \qquad (3.10)$$

である。これは，磁束密度が塑性ひずみによって変化する項と，塑性ひずみによる断面積変化による項より成り立っている。

磁束の相対変化 $\Delta\Phi/\Phi_0$ と断面積の相対変化 $\Delta S/S_0$ の関係を図3-13に示す。測定点は，ほとんど45°の傾斜の直線上に乗っている。そこで

$$\frac{\Delta\Phi}{\Phi_0}=\frac{\Delta S}{S_0} \qquad (3.11)$$

が実験的に成り立つ。Φ_0，S_0 は $\varepsilon_p=0$ に対する磁束および断面積である。(3.11) の微分を取れば

$$\frac{\delta\Phi}{\Phi_0}=\frac{\delta S}{S_0} \qquad (3.12)$$

が，塑性変形の各段階について成り立つ。

(3.12) と (3.10) より

$$S\frac{\partial B}{\partial S}+B=B_0 \qquad (3.13)$$

が得られる。ただし，$B_0=\Phi_0/S_0$ である。$S=S_0$ のとき $B=B_0$ の条件で (3.13) を解けば

$$B=B_0 \qquad (3.14)$$

という解が得られる。すなわち，磁束密度は，塑性変形に無関係で，バイアス磁界によって決定される。

測定点の45°の直線からの外れの誤差は ±0.4% であった。これを応力に換算すれば±3kg/mm²が，$B=B_0$ と仮定したときの誤差となる。

炭素鋼の1軸引張塑性変形の際に残留応力が発生することはよく知られている[39]。このような場合には，荷重が0になっても応力は0とならないから，本節の議論が成り立たない。しかし，この場合でも，残留応

力を全断面積について平均すれば0となる。応力に対する直線性は非常によいので，応力 σ がある場合には

$$\varDelta\Phi=\int(B+\varLambda\sigma)dS-B_0S_0$$
$$=\int BdS+\varLambda\int\sigma dS-B_0S_0$$
$$=\int BdS-B_0S_0 \qquad (3.15)$$

が得られる。B と塑性ひずみ ε_p との関係が

$$B=B_0+B_1\varepsilon_p \qquad (3.16)$$

で近似的に与えられるとすれば，(3.15) より

$$\varDelta\Phi=B_0(S-S_0)+B_1\int\varepsilon_p dS$$
$$=B_0\varDelta S+B_1\int\varepsilon_p dS \qquad (3.17)$$

が得られる。実験的に

$$\varDelta\Phi=B_0\varDelta S$$

であるから

$$B_1\int\varepsilon_p dS=0$$

となり，これより

$$B_1=0 \qquad (3.18)$$

が導かれる。そこで，残留応力が存在する場合にも

$$B=B_0=\text{一定} \qquad (3.14)$$

が成り立ち，本節の結論には影響がない。

3.4 考察

前節までで，炭素鋼の磁気ひずみ効果を弾性域および塑性域にわたって実験的に明らかにした。本節においては，この結果について若干の考察を試みる。

炭素鋼は，通常は，フェライト結晶粒とパーライト結晶粒の混在した組織である。パーライト結晶粒は，さらにセメンタイト板とフェライトより成り立っている。炭素鋼の磁気ひずみ効果は，この組織と関係があるに違いない。

また，塑性ひずみの磁気ひずみ感度およびバイアス磁束密度に対する影響は小さかった。しかし塑性ひずみの増加に伴う転位の増加によって，非常に大きなミクロストレスが材質内に発生する。当然このミクロストレスは，磁性に影響を与えるものと考えられる。

これらの影響を計算によって見積り，実験結果との比較を行うことにする。

3.4.1 セメンタイトの静磁エネルギと磁気ひずみ感度の炭素量依存性

磁気ひずみ効果は，磁気ひずみエネルギと磁気異方性エネルギの比によって決定される。異方性エネルギは，一様な結晶では結晶磁気異方性エネルギだけであるが，炭素鋼では，セメンタイトのための異方性を考慮する必要がある。

3.2.5 で感度 $\varLambda_0$ の炭素量依存性として

$$\varLambda_0=-42.0+20.9C\pm1.0\ \mathrm{G/kg/mm^2}$$
$$C：\text{炭素量（重量パーセント）} \qquad (3.4)$$

が得られた。これはまた

$$\varLambda_0\fallingdotseq-42.0(1-0.5C)\ \mathrm{G/kg/mm^2} \qquad (3.19)$$

のようにあらわすことができる。セメンタイトの磁気

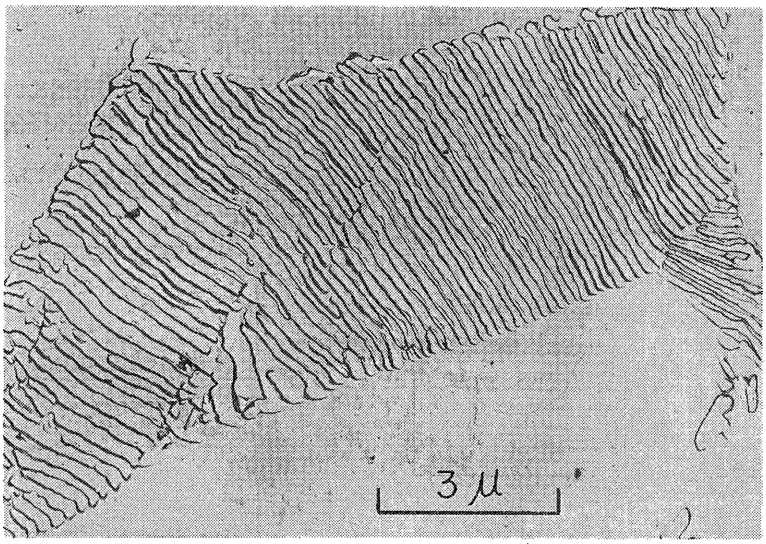


写真 3-1 パーライト結晶粒の電顕写真（試料S20C）

ひずみ効果に対する寄与がないと単純に仮定すれば

$$\Lambda_0 = -42.0(1-0.15C)\,\mathrm{G/kg/mm^2} \qquad (3.20)$$

となる。また，パーライト結晶粒の寄与がないと仮定すれば

$$\Lambda_0 = -42.0(1-1.2C)\,\mathrm{G/kg/mm^2} \qquad (3.21)$$

となるはずである。実際は，その中間にあるので，その原因を考えなければならない。

写真3-1は，試験片の電顕写真の一例で，層状パーライト結晶粒の部分である。共析鋼（0.83％C）の感度について考える。層状パーライト中のセメンタイト板は，磁気ひずみ効果に対する寄与はないものと考えてよいが，それ以外にも大きな影響を持っている。セメンタイトの飽和磁化は12,400Gで，フェライトの飽和磁化よりかなり小さい。図3-14は，パーライト結晶粒を模型的に示したものである。磁界がセメンタイト板に直角のときには，セメンタイトとフェライトの境界面に，飽和磁化の差

$$\Delta B_s = 21,500-12,400$$
$$=9,100\,\mathrm{G}$$

のため，強い磁極が発生する。このため大きな反磁界ができ，非常に磁化しにくい。一方，磁界がセメンタイト板に平行のときは，粒界に生じる磁極は小さく，また距離が離れているので，反磁界は考えなくてよい。そのため，セメンタイトとフェライトが独立にある場合と同じになる。このようにして磁界の方向によって磁化のしやすさが変化するので，セメンタイト板に垂直な，大きな1軸磁気異方性が生じることになる。このようなエネルギを静磁エネルギ（magnetostatic energy）という。

薄い板状の磁性体内に生じる反磁界は，N極よりS極に向き，磁束密度を B とすれば，B Oe (C.G.S.)

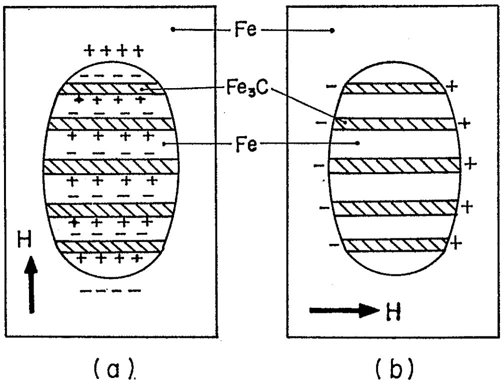


図3-14　層状パーライト結晶粒の磁化模型

である。そこで，フェライトが，厚いセメンタイト板に囲まれて飽和まで磁化されているときには，9,100 Oe という大きな反磁界が生じている。この場合の静磁エネルギ密度は M.K.S. 単位系で

$$U=\frac{1}{2}\,\frac{I^2}{\mu_0} \qquad (3.22)$$
$$=3.5\times10^5\ \mathrm{J/m^3}$$

となる[40]。これは結晶磁気異方性エネルギ

$$K=4.2\times10^4\ \mathrm{J/m^3}$$

のほぼ8倍である。そこで磁気ひずみ現象においても，この大きな異方性に抗して，磁化が磁気ひずみエネルギの作用で変化するのであるから，磁気ひずみ感度が大きく低下することは明らかである。

実際のパーライト結晶では，フェライト中に薄いセメンタイト板が層状に，ほぼ等間隔に入っているので，フェライト中の一点の磁界を考えるときには，となりのセメンタイトとの境界に生じる磁極ばかりでなく，パーライト結晶全体の境界面にある磁極を考えなくてはならない。図3-15のような円柱状のパーライト

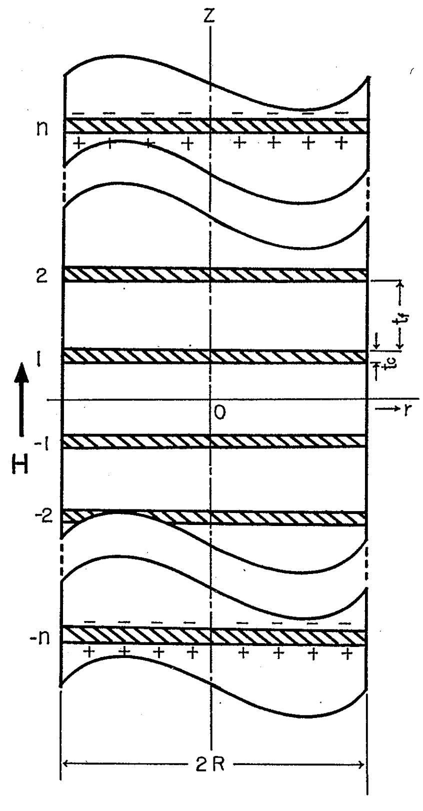


図3-15　パーライト結晶粒の円柱状模型

結晶を考える。フェライト1層の厚さを t_f セメンタイト1層の厚さを t_c，セメンタイト板の全数を N 個，結晶の半径を R とする。この場合の結晶の中心のフェライトの0点における反磁界を計算する。

パーライト中のセメンタイトとフェライトの重量比はほぼ1：7であり，容積比でも1：7と見てよい。そこで

$$t_f=7t_c \tag{3.23}$$

とする。R は実際のパーライト結晶について見ると

$$2R=5t_f\sim40t_f \tag{3.24}$$

としてよいように思われる。これらの数値を用い反磁界 H を計算したのが図3-16である。セメンタイト板が100程度になれば，静磁エネルギ E_m は

$$E_m=4.4\times10^4\,\mathrm{J/m^3}$$

に近づき

$$E_m\approx K$$

となる。たとえば，写真3-1の結晶粒では，$N=60$，$2R=35t_f$ であるので

$$E_m=3.9\times10^4\,\mathrm{J/m^3}$$

となる。そこで，以下の計算では

$$E_m=K_u=uK \tag{3.25}$$

で，u は1に近い定数とする。

磁界に対しパーライト結晶が傾いている場合について考える。セメンタイト板はフェライトの(110)面上に生長する[41]。たとえば図3-17に示すようにZ軸を含んで，XY平面を二等分する方向に生長しているとする。この場合の静磁エネルギは，磁化の方向とセメンタイト板の法線のなす角を θ とすれば

$$E_m=K_u\cos^2\theta$$

である[42]。磁化の方向余弦を α_1，α_2，α_3 とすれば

$$E_m=K_u\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}-\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \tag{3.26}$$

となる。そこで，K および K_u が同時にあるときの自由エネルギ F は(2.7)と(3.26)より

$$F=K\sum_{i\neq j}\alpha_i^2\alpha_j^2+K_u\left(\frac{\alpha_1}{\sqrt{2}}-\frac{\alpha_2}{\sqrt{2}}\right)^2$$
$$-\frac{3}{2}\lambda_{100}\sigma\left(\sum_i\alpha_i^2\beta_i^2-\frac{1}{3}\right)+3\lambda_{111}\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j\beta_i\beta_j$$
$$-HI_s\sum_i\alpha_i\beta_i+L\left(\sum_i\alpha_i^2-1\right) \tag{3.27}$$

となる。

磁界が0のときの感度 Λ_0 を論じればよい。そこで2.2の近似計算のように

$$\alpha_1,\ \alpha_2\ll1,\ \alpha_3=1$$

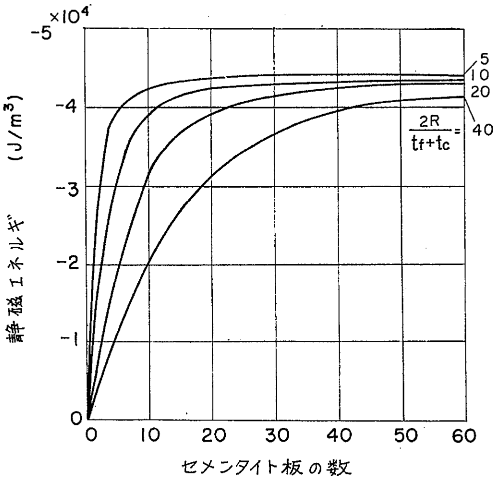


図3-16　静磁エネルギと結晶組織

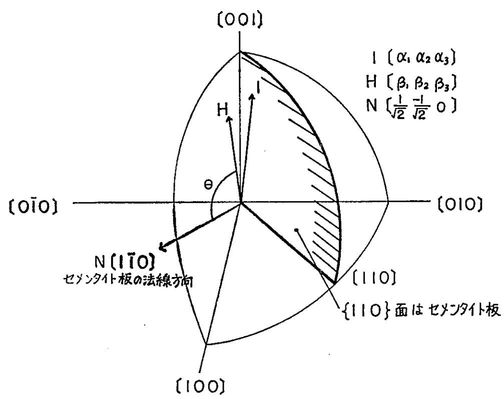


図3-17　セメンタイト板と結晶軸との関係

として計算すればよい。

α_i の決定方程式は，2.3の記号を用いれば

$$\alpha_1^3-l\alpha_1-\frac{u}{2}(\alpha_1-\alpha_2)$$
$$+p\beta_1\left(\sum_j\alpha_j\beta_j+P\alpha_1\beta_1\right)=0$$

$$\alpha_2^3-l\alpha_2+\frac{u}{2}(\alpha_1-\alpha_2)$$
$$+p\beta_2\left(\sum_j\alpha_j\beta_j+P\alpha_2\beta_2\right)=0$$

$$\alpha_3^3-l\alpha_3+p\beta_3\left(\sum_j\alpha_j\beta_j+P\alpha_3\beta_3\right)=0$$

$$\sum_i\alpha_i^2-1=0 \tag{3.28}$$

となる。α_1，$\alpha_2\ll1$ として第1近似を取れば

$$\left.\begin{aligned}&-l\alpha_1-\frac{u}{2}(\alpha_1-\alpha_2)+p\beta_1\beta_3=0\\&-l\alpha_2+\frac{u}{2}(\alpha_1-\alpha_2)+p\beta_2\beta_3=0\\&1-l=0\end{aligned}\right\}\qquad(3.29)$$

が得られる。(3.29) を解けば

$$\alpha_1=\frac{1}{2}\left(\beta_1+\beta_2+\frac{\beta_1-\beta_2}{1+u}\right)\beta_3 p$$

$$\alpha_2=\frac{1}{2}\left(\beta_1+\beta_2-\frac{\beta_1-\beta_2}{1+u}\right)\beta_3 p$$

$$\alpha_3=1$$

が得られる。無次元化された磁化の強さ $m=I/I_s$ は

$$m=\sum_i\alpha_i\beta_i$$

$$=\beta_3+\frac{1}{1+u}\left\{(\beta_3-\beta_3^3)\left(1+\frac{u}{2}\right)+u\beta_1\beta_2\beta_3\right\}p\qquad(3.30)$$

で与えられる。

多結晶については，β_3 を図 2-3 の積分範囲で平均すれば

$$\overline{m}=0.835+\frac{1}{1+u}\left\{0.236\left(1+\frac{u}{2}\right)+0.021u\right\}p$$

$$=0.835+\frac{0.236(1+0.589u)}{1+u}p\qquad(3.31)$$

となる。そこで，$u=1$ のときの感度 $\Lambda_0(1)$ と $u=0$ のときの感度 $\Lambda_0(0)$ の比は

$$\frac{\Lambda_0(1)}{\Lambda_0(0)}=0.79\qquad(3.32)$$

となる。セメンタイトによるフェライト容積の13%の減少による感度低下が加わるので，全体の感度低下は

$$1-0.87\times0.79=0.31$$

となり，31%感度が低下する。

実測値では，共析鋼で41%の感度低下が起っているが，その原因としては，パーライト組織とそれにもとづく静磁エネルギが主な原因であると考えられる。実測値との不一致の原因については，磁化機構の検討，パーライト結晶粒内の内部応力等についてさらに研究を行う必要がある。

粒状パーライト組織においては，粒状セメンタイトによる反磁界は，板状セメンタイトの反磁界にくらべ 1/3 であるので，静磁エネルギにもとづく異方性は小さく，その磁気ひずみ感度は，反磁界を考えない場合と層状パーライトの場合の中間の値を持つものと思われる。

3.4.2 転位と磁束密度の加工度依存性

磁気ひずみ効果の加工度依存性は小さいという結果が実験的に得られたが，このことを転位のつくる応力場という観点から検討する。転位と磁性との関係は，最初 Brown によって研究され，後に Seeger, Kronmüller によってその理論が発展された。かれらは，磁性体についての Becker, Kersten の理論[10]における内部応力 (internal stress) は転位のまわりの応力場と磁気モーメントとの相互作用によると考えている。この研究の対象は，主としてニッケル単結晶の塑性変形に限られていて，この場合には直ちに適用できない。しかしながら，磁気ひずみ効果が加工状態で変化する現象には，このような転位によるミクロストレスが関係することは疑いない。この論文で取扱う残留応力は，このような微視的応力とは異なって， long range の巨視的応力である。微視的応力は，加工状態あるいは塑性域という用語をつかって材料の一つの状態として考えている。しかし，本節においては，このミクロストレスを考えることにする。

転位があると，その近傍には非常に大きな応力場が生じる。刃状転位が図3-18のようにあるとき，点 P (x, y) の応力場[43]は，転位のコアの外では

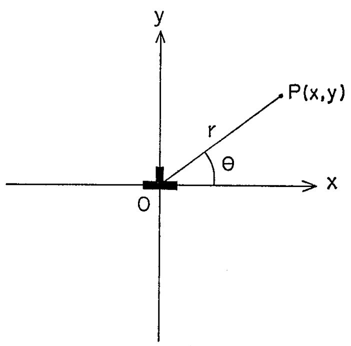


図3-18 刃状転位

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=-D\frac{y(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\\sigma_{yy}&=D\frac{y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\\sigma_{zz}&=\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\\\tau_{xy}&=D\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\\tau_{yz}&=\tau_{zx}=0\end{aligned}\right\}\qquad(3.33)$$

で与えられる。この式で，D は

$$D=\frac{Gb}{2\pi(1-\nu)}\qquad(3.34)$$

である。G は横弾性係数，b はバーガースベクトル，ν はポアソン比である。転位による応力のうち，もっとも大きいのは σ_{xx} である。σ_{xx} は，極座標で

$$\sigma_{xx}=\frac{-G}{2\pi(1-\nu)}\ \frac{b\sin\theta(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{r}$$
$$=-\sigma_0 f(r,\ \theta) \qquad (3.35)$$

となる。ただし

$$\sigma_0=\frac{G}{2\pi(1-\nu)} \qquad (3.36)$$
$$\fallingdotseq 1800\mathrm{kg/mm^2}$$

である。σ_{xx} の等高線を図3-19[43]に示す。

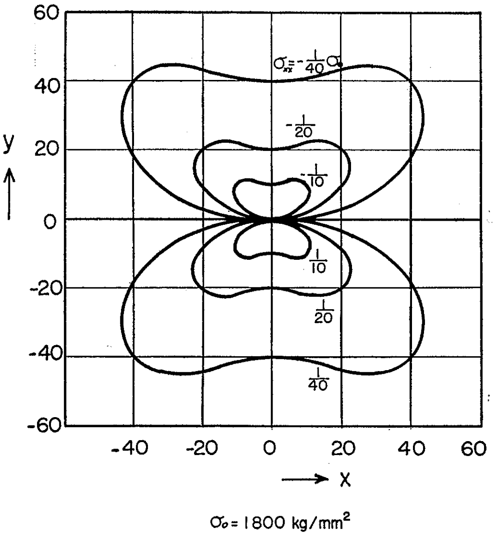


図3-19　刃状転位の応力場（σ_{xx}）

転位による σ_{xx} は，$y<0$ で引張，$y>0$ で圧縮で，絶対値は，x 軸について対称である。磁気ひずみ効果が応力に対して対称であれば，正負打消し合って転位の影響は 0 となる。しかし，磁気ひずみ効果の応力の正負についての非対称から転位の影響があらわれる。第 4 章に述べる実験より推定すれば，±10kg/mm²の範囲で，非直線性は 180Oe のバイアスにおいて

$$\Delta B=-32.5(1+0.0022\sigma)\sigma$$

であらわされる。また第 2 章の理論によれば，同じバイアスで

$$\Delta B=\Lambda_0(1+0.002\sigma)\sigma \qquad (3.37)$$

となる。ほぼ一致するので，高い応力まで，この式が成り立つものとすれば，$\sigma=100\mathrm{kg/mm^2}$ で磁気ひずみ出力の引張および圧縮の差としては 100kg/mm² の出力の40%の磁束密度の減少が生じることになる。

転位による $\sigma_{xx}=\mathrm{const}$ の曲線の中の面積 S は，図3-19の $y>0$ について，(3.35) より

$$S=1.96\left(\frac{\sigma_0}{\sigma_{xx}}\right)^2 b^2$$
$$\fallingdotseq 2F^2b^2 \qquad (3.38)$$

となる。ただし

$$F=\frac{\sigma_0}{\sigma_{xx}} \qquad (3.39)$$

とする。

磁気ひずみ効果は，各点の応力に対応する磁気ひずみ効果の和であると仮定すれば，全体の磁束密度の変化は，x 軸の上下の差だけを考えて

$$\Delta B=\frac{2}{S_0}\int_{s0}\Lambda_0\cdot 0.002\sigma_{xx}^2\,dS$$

となる。積分範囲は，$y>0$ の半平面で適当な領域 S_0 を考えればよい。(3.38)，(3.39) より

$$\Delta B=\frac{0.002\times 8\Lambda_0\sigma_0^2b^2}{S_0}\int_{F_1}^{F_2}\frac{dF}{F}$$
$$=\frac{0.016\Lambda_0\sigma_0^2b^2}{S_0}\left|\log F\right|_{F_1}^{F_2} \qquad (3.40)$$

となる。

転位密度を N とすれば，一つの転位の効果としてとなりの転位までの距離の半分までの面積を考えればよいであろう。そこで，$S_0=1/N$ ととる。さらに転位は，正方形の格子状に規則正しく分布しているとすれば，$F_2=1/2\sqrt{N}b$ となる。F_1 は転位のコアによって定められるが，便宜上 $\log F_1=1$ ととる。$F_1=e$ であって，コアの半径を 2.7 と取ることに相当する。これらの値を (3.40) に入れれば

$$\Delta B=0.016\Lambda_0 Nb^2\sigma_0^2\left(\log\frac{1}{2\sqrt{N}b}-1\right) \qquad (3.41)$$

を得る。

$$\Delta B=\Lambda_0\sigma_{\mathrm{eq}} \qquad (3.42)$$

とすれば

$$\sigma_{\mathrm{eq}}=0.016\sigma_0^2(b\sqrt{N})^2\left(\log\frac{1}{b\sqrt{N}}-1.70\right) \qquad (3.43)$$

となる。これは，転位密度による応力のための磁束密度の減少を応力換算したものである。転位密度 N に対し σ_{eq} を計算した結果を図3-20に示す。

転位密度は，加工材でも $10^{11}/\mathrm{cm}^2$ より小さいと思われる。Keh[44] によれば，純鉄に30%の塑性ひずみを与えたときの平均転位密度は 1.54×10^{10}，また加工硬化過程で生じるセル境界中の転位密度は 6×10^{10} 程度であるという。この場合には，図3-20 によって，$\sigma_{\mathrm{eq}}=2.0\sim2.5\mathrm{kg/mm^2}$ となる。前節で述べた磁気的な静磁エネルギの作用によって，以上の考察に用いた単純な仮定は正確には成り立たず，さらにこの効果が制限される。そこで実験的に塑性ひずみによる磁束密度の変化が非常に小さいことは，このような微視的な考