

# 弾性問題に対する積分方程式の応用 (Airy の応力関数の使用)

天 田 重 庚\*

Application of Integral Equation to Elastic Problems  
(with the Airy's Stress Function)

By

Shigeyasu AMADA

## Synopsis

Muskhelishvili has established the complex variable approach in elasticity which is based on conformal mapping and on the Cauchy integral on boundaries. Many problems in two dimensional space were solved with his method provided that conformal mapping function can be found. But his approach cannot give us the solution of problems without finding the mapping function. To get over this defect, several methods have been suggested so far, one of which is the integral equation approach which has been developed originally in potential theory, the Dirichlet problem and the Neumann problem.

Using the Airy's stress function, the fundamental equation of elasticity can be expressed in biharmonic partial differential equation. Then, it is represented in two harmonic equation to be applied with the integral equation approach. The integral equations from the biharmonic equation are written in the following form with two unknown functions on the boundary.

$$\begin{aligned} \pi\Phi(\rho) &= \iint_D f(x, y) \log \rho_{pq} dxdy + \int_C [\Phi(\log \rho_{ps})' - \Phi' \log \rho_{ps}] ds \\ 4\pi F(\rho) &= \iint_D f(x, y) r_{pq} dxdy + \int_C [F(\nabla r_{ps})' - F' \nabla r_{ps} + (r_{ps})' \Phi - r_{ps} \Phi'] ds \end{aligned}$$

Dividing the boundary into small elements and assuming that  $\Phi$ ,  $\Phi'$ ,  $F$  and  $F'$  are constant in each element, the integral equation can be changed into the linear equation system with unknown values on the boundary. This system can be solved with an ordinary procedure without evaluating unknown values in the region in advance.

This approach includes the wide and powerful applicability in elasticity and plasticity, and may be superior to the finite element method in a sense.

## 1. ま え が き

弾性問題に限らず一般に微分方程式を用いた境界値問題の解法は局所的に平衡を表わす微分方程式を満足する無数の関数を探し出し、その中から境界上で与え

られた条件を満足するものを選び出す手段をとる。ところが応力解析の分野では境界上の値がわかれば我々の問題は解かれたといえる場合が多い。この場合、領域内部で解を見出す段階を飛び越えて直接に境界上の値を見つけることはできないだろうかという疑問が起

\* 機関開発部 原稿受付：昭和50年1月25日

こる。これに答えるのが積分方程式の使用である。以下電子計算機の使用を前提とした弾性問題を積分方程式として形式化する場合を述べる。

Goursat は一つの重調和関数の一般的表示は二つの複素解析関数によって表わされることを示した。これと Conformal Mapping の組合せにより Muskhvishvili<sup>1)</sup> は平面弾性問題の解法を確立した。彼の方法は複素応力関数を Laurent 級数にて仮定し、対象としている場の境界を単位円に写像し、その境界上で Cauchy 積分により級数の係数を決定することによって応力、あるいは変位を求める手段をとる。しかし、写像関数が求められない場合や三次元問題にはこの方法は適用できない欠点がある。一方、Jaswon<sup>2)</sup> や Symm<sup>3)</sup> はポテンシャル論に積分方程式を利用することを試みた。本質的には問題を第2種の Fredholm 積分方程式に帰着させることにある<sup>4)</sup>。また別の観点から弾性学の境界値問題を積分方程式によって解く方法が考えられた。Weinel<sup>5)</sup> は Fig. 1 のような半無限板の境界上の一点に集中力が作用する解を基本解とし、これを対象としている境界上に境界条件を満足させるように分布させて未知関数を求めた。西谷<sup>6)</sup> は最近、基本解として無限体の一点に集中力が作用する応力場を用いる方法を確立した。

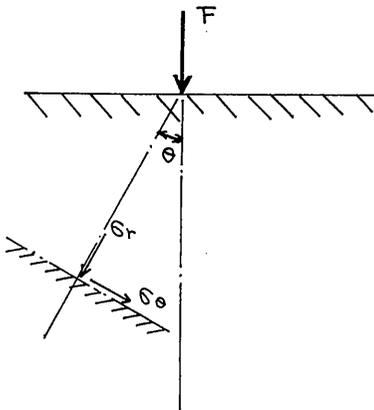


Fig. 1 基本特異解

Airy の応力関数を用いると弾性学の基礎式は重調和と偏微分方程式によって表わされる。重調和型の方程式は二つの調和関数によって表現されるという点を考慮すると Jaswon や Symm 流の方法の拡張が可能である。Weinel や西谷らの方法は物理的な考えから出発したのに対し、本方法は純粋に数学的表現の相似性に立脚している点が異なる。

(216)

一般に積分方程式による弾性問題の特徴<sup>2),3),7)</sup> は次のように表わせる。

- i) Conformal Mapping の手順は必要としない。
- ii) 境界値問題に対して混合型でも非混合型でも同じように扱える。
- iii) 応力と変位は数値微分を必要とせず直接えられる。
- iv) 多連結領域の問題に対しても特別な扱いは必要とせず直接得られる。
- v) 内部応力と内部変位は希望する場合のみ得ればよい。
- vi) 三次元問題に直接拡張しうる。
- vii) 有限差分法や有限要素法では内部領域での節点を必要とするが、本方法では境界上のみで充分である。

問題を平面問題に限れば二次元における Green の定理と、Single-layer ポテンシャルと Double-layer ポテンシャルが重要な役割を演ずる。そのため、まず Single-layer ポテンシャルと Double-layer ポテンシャルの性質について説明する。

## 2. Single-layer ポテンシャル<sup>8)</sup>

Single-layer ポテンシャルは次式にて表わせる。

$$u(x, y) = \int_C \mu(s) \log \frac{1}{\rho} ds \quad (1)$$

(1)式中の記号は Fig. 2 に見られるごとく、点(x, y) は内部領域D内を動くものとし、s は境界C上的一点、ds は境界Cの微小長さ、ρ は点(x, y) と s との距離

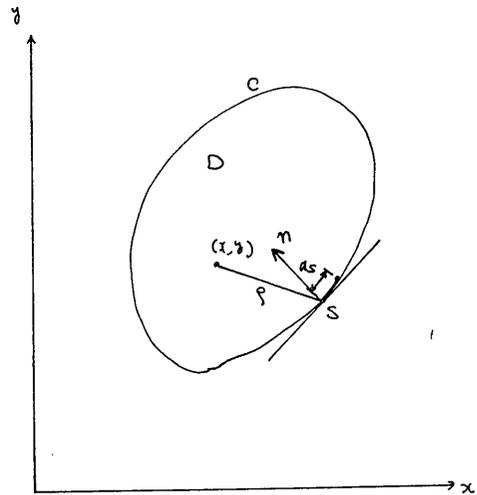


Fig. 2 二次元空間

とする。いま曲線Cの方程式を

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \phi(s) \\ \eta &= \psi(s) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

にて表わそう。するとCは閉曲線であるから

$$\phi(0) = \phi(l), \quad \psi(0) = \psi(l) \quad (3)$$

となる。また  $l$  はCの長さ、すなわち

$$\int_C ds = l \quad (3)$$

である。Density 関数  $\mu(s)$  は  $s$  の連続関数で

$$\mu(0) = \mu(l) \quad (4)$$

な性質をもつものとする。Single-layer ポテンシャルは Neumann 問題、すなわち

i)  $u(x, y)$  はD内で調和関数,  $\nabla u = 0$

ii)  $t$  を  $s$  上の一定点,  $n$  をCに対する Inner normal とするとき

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \phi(t) \\ y \rightarrow \psi(t)}} \frac{\partial u}{\partial n} = g(t)$$

(ただし,  $g(t)$  は与えられるものとする。)

の解として登場する。詳しくは専門の書にゆずり、ここではその性質について述べる。

(1)  $u$  自身はCの内外にて連続である。

(2)  $u$  の  $n$  方向への微分、すなわち  $\partial u / \partial n$  はCにて jump を示す。

性質(2)について詳しく記す。 $s$  上の一定点を  $t$  として

(1)式を下式のように書き変える。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mu(t) \int_0^l \log \frac{1}{\rho} ds \\ &\quad + \int_0^l [\mu(s) - \mu(t)] \log \frac{1}{\rho} ds \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \mu(t) \int_0^l \frac{\cos(\rho, n)}{\rho} ds \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \int_0^l [\mu(s) - \mu(t)] \log \frac{1}{\rho} ds \right\} \end{aligned}$$

ただし,  $\cos(\rho, n)$  はC上の点  $(\xi, \eta)$  におけるCの Inner normal と  $\rho$  との間の角の cosine である。第2項はC上の点  $s$  にて  $(x, y)$  の連続関数であるが、第1項は点  $(x, y)$  がCの内部からCに近づく場合は

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ in } D \rightarrow (\xi, \eta) \quad & \left\{ \mu(t) \int_0^l \frac{\cos(\rho, n)}{\rho} ds \right\} \\ & = 2\pi\mu(t) \end{aligned} \quad (5)$$

となり、一方、点  $(x, y)$  がCの外部からCに近づく場合は

$$\begin{aligned} (x, y) \text{ outside } D \rightarrow (\xi, \eta) \\ \left\{ \mu(t) \int_0^l \frac{\cos(\rho, n)}{\rho} ds \right\} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

となる\*。点  $p(x, y)$  がCの内部からCに近づく場合の  $u$  を  $u_i$ , Cの外部からCに近づく場合を  $u_e$  とすれば、

$$\lim_{p_i \rightarrow p} \frac{\partial u_i}{\partial n} = \int_0^l \mu(s) \frac{\cos(\rho, n)}{\rho} ds - \pi\mu(t) \quad (7)$$

$$\lim_{p_e \rightarrow p} \frac{\partial u_e}{\partial n} = \int_0^l \mu(s) \frac{\cos(\rho, n)}{\rho} ds + \pi\mu(t) \quad (8)$$

となり、 $2\pi\mu(t)$  の jump がある。ただし、 $\rho$  は動点  $(\xi, \eta)$  と定点  $(x, y)$  との距離であるから

$$\frac{\cos(\rho, n)}{\rho} = \frac{(\eta - y)d\xi/ds - (\xi - x)d\eta/ds}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

となる。

### 3. Double-layer ポテンシャル<sup>8)</sup>

Double-layer ポテンシャルは次の形にて表わせる。

$$u(x, y) = \int_0^l \mu(s) \frac{\partial}{\partial n} \left( \log \frac{1}{\rho} \right) ds \quad (9)$$

ただし、Single-layer ポテンシャルの場合と同様に点  $(x, y) (\in D)$   $s$  はC上を動き、 $l$  はCの長さであり、C自身は Fig. 1 のような閉曲線とする。また、Cに関しては式(3)が成立し、Density 関数は  $s$  の連続関数、すなわち(4)式が成立つものとする。

$u(x, y)$  は Dirichlet 問題、すなわち

(1)  $u$  は閉曲線Cの内部で調和関数,  $\nabla u = 0$

(2) 点  $(\xi, \eta)$  をC上の点とし、 $g(t)$  は与えられるものとする

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \xi \\ y \rightarrow \eta}} u = g(t)$$

の解として登場する。(9)式が調和関数であることは直接微分してみればわかるので、(9)式がCを横切る時に jump をすることを示そう。

C上に  $s=t$  なる一点  $p$  をとる。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mu(t) \int_0^l \frac{\partial}{\partial n} \left( \log \frac{1}{\rho} \right) ds \\ &\quad + \int_0^l [\mu(s) - \mu(t)] \frac{\partial}{\partial n} \left( \log \frac{1}{\rho} \right) ds \end{aligned} \quad (10)$$

また

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \log \frac{1}{\rho} \right) ds = \frac{\cos(\rho, n)}{\rho} ds = d\theta \quad (11)$$

を用いると

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \mu(t) \int_0^l d\theta \\ &\quad + \int_0^l [\mu(s) - \mu(t)] \frac{\partial}{\partial n} \left( \log \frac{1}{\rho} \right) ds \end{aligned} \quad (12)$$

\* 詳しく次節で述べられる。

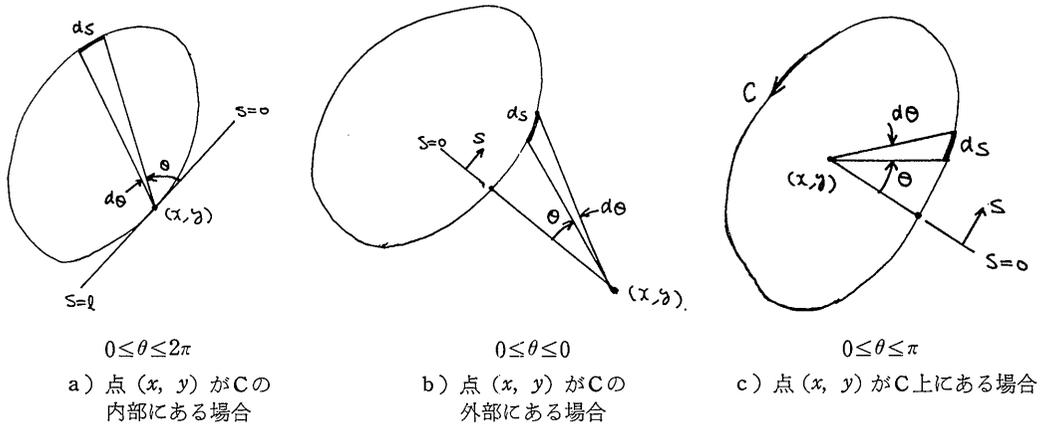


Fig. 3 (12)式の第1項の積分

第2項の積分は  $\rho \rightarrow 0$  の場合でも  $[\mu(s) - \mu(t)] \rightarrow 0$  となるので  $p$  の近傍にて  $(x, y)$  の連続関数となるが、第1項の積分は次の三つの場合に分けられる。

(Fig. 3 を参照)

a) 点  $(x, y)$  が  $C$  の内部にある場合

動点  $s$  が  $0$  の時  $\theta = 0$  であり、1周の後、すなわち  $s = l$  の時  $\theta = 2\pi$  となるから

$$\int_0^l d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \tag{13}$$

b) 点  $(x, y)$  が  $C$  の外部にある場合

$s$  が  $0$  の時  $\theta = 0$  であり、1周の後の  $s = l$  の時でも  $\theta = 0$  となるので

$$\int_0^l d\theta = \int_0^0 d\theta = 0 \tag{14}$$

c) 点  $(x, y)$  が  $C$  上にある場合

$s$  が  $0$  の時  $\theta = 0$  であり、 $s = l$  の時  $\theta = \pi$  となるから

$$\int_0^l d\theta = \int_0^\pi d\theta = \pi \tag{15}$$

それゆえ、(13)、(14)、(15)式の条件と、(12)式の第2項が連続関数であることから

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u(t) + \pi\mu(t) \\ u_e &= u(t) - \pi\mu(t) \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

が得られる。 $u_i$  は点  $(x, y)$  が  $C$  の内部から  $p$  に近づいた場合を、 $u_e$  は点  $(x, y)$  が  $C$  の外部から  $p$  に近づいた場合を示す。 $t$  は  $s$  上の任意の点にとれるから、閉曲線  $C$  上の一点  $s$  の内外における  $u$  の jump は  $2\pi\mu(s)$  となる。

#### 4. 二次元における弾塑性問題の基礎式

つりあい方程式は体積力がないとすると

$$(218)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

ひずみの適合条件式は

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \tag{18}$$

応力とひずみとの関係は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= (\sigma_x - \nu \sigma_y) / E + \epsilon_{x,p} + \alpha T \\ \epsilon_y &= (\sigma_y - \nu \sigma_x) / E + \epsilon_{y,p} + \alpha T \\ \gamma_{xy} &= (1 + \nu) \tau_{xy} / E + \gamma_{xy,p} \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

ここで Airy の応力関数  $F$  を導入する。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{20}$$

すると(17)式は恒等的に満足される。(20)式を(19)式に代入し、さらにこれを(18)式に代入すれば

$$\begin{aligned} \nabla^2 F &= -\nu(E\alpha T) \\ &\quad - E \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{x,p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{y,p}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy,p}}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \tag{21}$$

となる。(21)式の右辺を

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -\nu(E\alpha T) \\ &\quad - E \left( \frac{\partial^2 \epsilon_{x,p}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{y,p}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy,p}}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \tag{22}$$

とおくと(21)式は

$$\nabla^2 F = f \tag{23}$$

となる。

ここで

$$\Phi = \nabla^2 F \tag{24}$$

とおくと(23)式は Poisson 型の微分方程式となる。

$$\nabla^2 \Phi = f(x, y) \tag{25}$$

等温，弾性問題では

$$\nabla\Phi=0 \tag{26}$$

となって Laplace の微分方程式となる。

5. 積分方程式による問題の形式化

1次と2次の微分がD内にて連続なる二つの関数  $u(x, y)$  と  $v(x, y)$  を考える。Green の第2定理より

$$\iint_D (u\nabla v - v\nabla u) dydx = \int_C \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \tag{27}$$

がえられる。  $s$  は境界C上の点，  $n$  はCに対する Outer normal である。ここで

$$u=\Phi, v=\log \rho \tag{28}$$

とおく。関数  $v$  は調和関数

$$\nabla v=0$$

であることと， (25)式を考慮して(28)式を(27)式に代入すると，

$$-\iint_D f(x, y) \log \rho dx dy = \int_C \left[ \Phi \frac{\partial}{\partial n} (\log \rho) - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \log \rho \right] ds \tag{29}$$

(29)式の右辺の被積分項の第1項はすでに述べたように Double-layer ポテンシャル，第2項は Single-layer ポテンシャルである。ここで着目している点を  $P$  とすれば(29)式の左辺における  $\rho$  は

$$\log \rho = \log \rho_{PQ} \tag{30}$$

となる。ただし，点  $Q$  はD内の動点  $(x, y)$  を意味する。また右辺の  $\rho$  は

$$\log \rho = \log \rho_{Ps} \tag{31}$$

となる。ただし，点  $s$  はC上にあるとする。これらの説明は Fig. 4 に示す。(29)式は  $r=0$  にて Singular となる。それゆえ， Fig. 5 のごとき手段にてこれを取り除く。(29)式の右辺の第1項は

$$\begin{aligned} \int_{C+C_\epsilon} \Phi \frac{\partial}{\partial n} (\log \rho) ds &= \int_C \Phi \frac{\partial}{\partial n} (\log \rho) ds \\ &- \int_{C_\epsilon} \Phi \frac{\partial}{\partial n} (\log \rho) ds = \int_C \Phi \frac{\partial}{\partial n} (\log \rho) ds \\ &- \int_0^{2\pi} \Phi \left( \frac{1}{\epsilon} \right) \epsilon d\theta = \int_C \Phi \frac{\partial}{\partial n} (\log \rho) ds - 2\pi\Phi(P) \end{aligned} \tag{32}$$

as  $\epsilon \rightarrow 0$

第2項は，

$$\begin{aligned} \int_{C+C_\epsilon} \log \rho \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds &= \int_C \log \rho \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \\ &- \epsilon \log \epsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\theta = \int_C \log \rho \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \end{aligned} \tag{33}$$

as  $\epsilon \rightarrow 0$

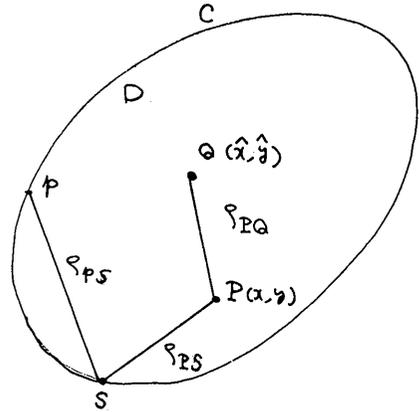


Fig. 4  $\rho$  のサフィックスの説明

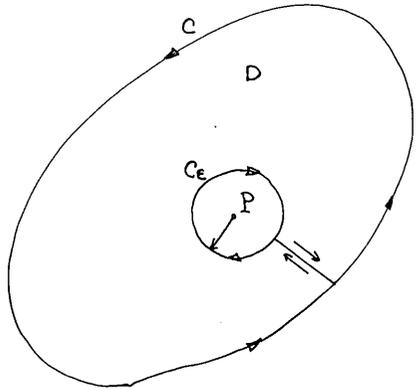


Fig. 5 Singular Point の除去

となる。したがって(29)式は次式の形となる。

$$2\pi\Phi(P) = \iint_D f(x, y) \log \rho_{PQ} dx dy + \int_C \left[ \Phi \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (\log \rho_{Ps}) \right\}_s - \log \rho_{Ps} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] ds \tag{32}$$

内部点  $P(x, y)$  が境界C上の点  $p$  に近づくとき右辺の Double-layer ポテンシャルは jump をすることを(16)式に示した。これを用いる(32)式は境界上の点  $p$  に対して

$$\begin{aligned} \pi\Phi(p) &= \iint_D f(x, y) \log \rho_{pQ} dx dy \\ &+ \int_C \left[ \Phi \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (\log \rho_{ps}) \right\}_s - \log \rho_{ps} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \tag{33}$$

重調和関数に対して(33)式と同様な式を求めよう。(27)式に  $u=\nabla F$  を代入すると，

$$\begin{aligned} & \iint_D (\nabla F \nabla v - v \nabla^2 F) dx dy \\ &= \int_C \left[ \nabla F \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial}{\partial n} (\nabla F) \right] ds \end{aligned} \quad (34)$$

34式にて  $F$  と  $v$  を入れ換えると

$$\begin{aligned} & \iint_D (v \nabla F - F \nabla^2 v) dx dy \\ &= \int_C \left[ v \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial}{\partial n} (v) \right] ds \end{aligned} \quad (35)$$

となる。35式から34式を引くと

$$\begin{aligned} & \iint_D (F \nabla^2 v - v \nabla^2 F) dx dy \\ &= \int_C \left[ F \frac{\partial}{\partial n} (v) - v \frac{\partial F}{\partial n} - v \frac{\partial (\nabla F)}{\partial n} \right. \\ & \quad \left. + \nabla F \frac{\partial v}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \quad (36)$$

がえられる。ここで、関数  $v$  として次の形を採用する。

$$v = \rho^2 \log \rho \equiv r \quad (37)$$

すると関数  $v$  は重調和関数、 $\nabla^2 v = 0$  となる。25式を考慮して37式を36式に代入すると、

$$\begin{aligned} & - \iint_D r \nabla^2 F dx dy = \int_C \left[ F \frac{\partial}{\partial n} (\nabla r) - \nabla r \frac{\partial F}{\partial n} \right. \\ & \quad \left. - r \frac{\partial (\nabla F)}{\partial n} + \nabla F \frac{\partial r}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \quad (38)$$

29式にて  $r=0$  なる特異点を考慮したように38式においても特異点を取り除こう。

$$\begin{aligned} & \int_{C_+ C_\varepsilon} F \frac{\partial}{\partial n} (\nabla r) ds = \int_C F \frac{\partial}{\partial n} (\nabla r) ds \\ & - \int_{C_\varepsilon} F \frac{\partial}{\partial n} [4(1 + \log \rho)] ds = \int_C F \frac{\partial}{\partial n} (\nabla r) ds \\ & - \int_0^{2\pi} F \left( \frac{4}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta = \int_C F \frac{\partial}{\partial n} (\nabla r) ds - 8\pi F(P) \end{aligned} \quad (39)$$

as  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \int_{C_+ C_\varepsilon} \nabla r \frac{\partial F}{\partial n} ds = \int_C \nabla r \frac{\partial F}{\partial n} ds \\ & - \int_{C_\varepsilon} 4(1 + \log \rho) \frac{\partial F}{\partial n} ds = \int_C \nabla r \frac{\partial F}{\partial n} ds \\ & - 4\varepsilon \int_0^{2\pi} (1 + \log \varepsilon) \frac{\partial F}{\partial n} d\theta = \int_C \nabla r \frac{\partial F}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (40)$$

as  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \int_{C_+ C_\varepsilon} r \frac{\partial (\nabla F)}{\partial n} ds = \int_C r \frac{\partial (\nabla F)}{\partial n} ds \\ & - \varepsilon^3 \log \varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{\partial (\nabla F)}{\partial n} d\theta = \int_C r \frac{\partial (\nabla F)}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (41)$$

as  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \int_{C_+ C_\varepsilon} \nabla F \frac{\partial r}{\partial n} ds = \int_C \nabla F \frac{\partial r}{\partial n} ds \\ & - \varepsilon^2 (1 + 2 \log \varepsilon) \int_0^{2\pi} \nabla F d\theta = \int_C \nabla F \frac{\partial r}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (42)$$

as  $\varepsilon \rightarrow 0$

(220)

39式から42式の結果を考慮すると38式はD内の点Pに対して次のようになる。

$$\begin{aligned} 8\pi F(P) &= \iint_D r \rho \nabla f(\hat{x}, \hat{y}) dx dy \\ &+ \int_C \left[ F \left\{ \frac{\partial (\nabla r_{ps})}{\partial n} \right\}_s - \frac{\partial F}{\partial n} \nabla r_{ps} + \left( \frac{\partial r_{ps}}{\partial n} \right)_s \nabla F \right. \\ & \quad \left. - r_{ps} \frac{\partial (\nabla F)}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \quad (43)$$

43式の第2項目の積分において最初の項は Double-layer ポテンシャルを含むので、点Pが境界C上の点pに近づく時 jump する。jump 量は10式から求まり、これと39式を考慮すると

$$\begin{aligned} 4\pi F(p) &= \iint_D r \rho \nabla f(\hat{x}, \hat{y}) dx dy \\ &+ \int_C \left[ F \left\{ \frac{\partial (\nabla r_{ps})}{\partial n} \right\}_s - \frac{\partial F}{\partial n} \nabla r_{ps} + \left( \frac{\partial r_{ps}}{\partial n} \right)_s \nabla F \right. \\ & \quad \left. - r_{ps} \frac{\partial (\nabla F)}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \quad (44)$$

さらに、24式を考慮すると最終的に次式が得られる。

$$\begin{aligned} 4\pi F(p) &= \iint_D r \rho \nabla f(\hat{x}, \hat{y}) dx dy \\ &+ \int_C \left[ F \left\{ \frac{\partial (\nabla r_{ps})}{\partial n} \right\}_s - \frac{\partial F}{\partial n} \nabla r_{ps} + \Phi \left( \frac{\partial r_{ps}}{\partial n} \right)_s \right. \\ & \quad \left. - r_{ps} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right] ds \end{aligned} \quad (45)$$

45式において Airy の応力関数  $F$  の境界上の値は境界条件によって決定される。それゆえ、45式と33式を連立させることにより、未知関数  $\Phi$  と  $\partial \Phi / \partial n$  の境界上の値を求める系を得る。

## 6. 積分方程式の線形代数方程式化

一般に33式と45式の連立積分方程式を解析的に解くことは困難なので、ここでは電子計算機の使用を前提とした数値解析を考える。

与えられた領域Dの境界Cを Fig. 6 のように  $m$  個の要素に分割する。そして各々の要素内では  $F$ ,  $\partial F / \partial n$ ,  $\Phi$ ,  $\partial \Phi / \partial n$  は一定であると仮定する。簡略化のために  $\partial / \partial n$  を ( )' にて表わそう。すると33式の積分方程式は  $\Sigma$  を用いて次のように変形される。

$$\pi \Phi_i = \sum_{j=1}^m (a_{ij} \Phi_j + b_{ij} \Phi_j') + h_i \quad (46)$$

ただし、 $i=1, 2, \dots, m$

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= \int_j \frac{\partial (\log \rho_{ij})}{\partial n} ds \\ b_{ij} &= - \int_j \log \rho_{ij} ds \\ h_i &= \iint_D f(\hat{x}, \hat{y}) \log \rho_{iq} dx dy \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

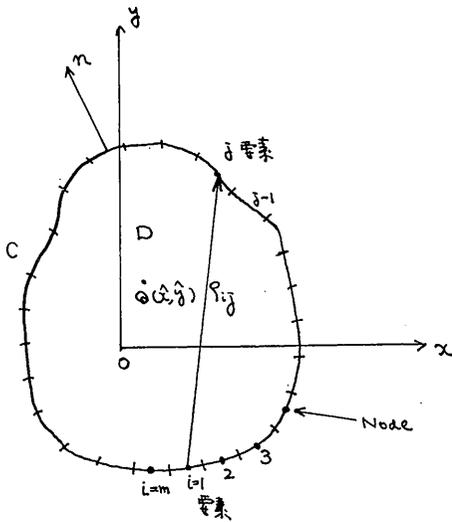


Fig. 6 境界Cの分割

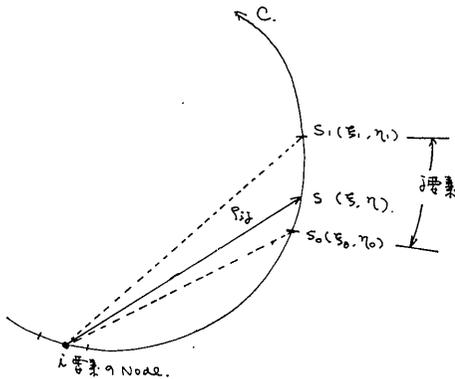


Fig. 7 積分範囲

$i$  番目の要素の Node (あえて原語を使ったのは日本語の節点と若干意味が異なることにより混乱をさけるため) をその要素の中点と定義すれば、 $\rho_{ij}$  は  $i$  番目の要素の Node と  $j$  要素内の任意の点との距離であり、 $a_{ij}$  と  $b_{ij}$  の積分範囲は  $j$  要素の長さにとる。それらの幾何学的表示は Fig. 7 にて与えられる。例えば(47)式の  $a_{ij}$  は

$$a_{ij} = \int_{s_0}^{s_1} \frac{\partial(\log \rho_{ij})}{\partial n} ds$$

のようになる。

一方、(45)式は  $\Sigma$  を用いると

$$4\pi F_i = \sum_{j=1}^m (c_{ij}\Phi_j + d_{ij}\Phi_j' + e_{ij}F_j + f_{ij}F_j') + k_i \quad (48)$$

となる。ただし、 $i=1, 2, \dots, m$

$$\left. \begin{aligned} c_{ij} &= \int_j \frac{\partial(r_{ij})}{\partial n} ds \\ d_{ij} &= - \int_j r_{ij} ds \\ e_{ij} &= \int_j \frac{\partial(\nabla r_{ij})}{\partial n} ds \\ f_{ij} &= - \int_j \nabla r_{ij} ds \\ k_i &= \iint_D f(x, y) r_{ij} dx dy \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

(47)式と(49)式にて与えられる係数は幾何学形状がわかれば計算でき、 $i \neq j$  の場合は Simpson Rule などで求められ、 $i=j$  の場合は解析的に特異点を除いた積分を行わなければならない。

(46)式と(48)式は次のように書きなおすことができる。

$$\sum_{j=1}^m (a_{ij} - \delta_{ij}\pi) \Phi_j + \sum_{j=1}^m b_{ij}\Phi_j' = -h_i \quad (50)$$

$$\sum_{j=1}^m c_{ij}\Phi_j + \sum_{j=1}^m d_{ij}\Phi_j' = - \sum_{j=1}^m (e_{ij} - \delta_{ij}4\pi) F_j - \sum_{j=1}^m f_{ij}F_j' - k_i \quad (51)$$

マトリックスの形で(50), (51)の両式を表わすと、

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} [a_{ij} - \delta_{ij}\pi] & [b_{ij}] \\ [c_{ij}] & [d_{ij}] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} [\Phi_i] \\ [\Phi_i'] \end{Bmatrix} \\ &= - \begin{pmatrix} [0] & [0] \\ [e_{ij} - \delta_{ij}4\pi] & [f_{ij}] \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} [F_i] \\ [F_i'] \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} [h_i] \\ [k_i] \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (52)$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} [a_{ij} - \delta_{ij}\pi] & [b_{ij}] \\ [c_{ij}] & [d_{ij}] \end{pmatrix} \\ \hat{X} &= \begin{Bmatrix} [\Phi_i] \\ [\Phi_i'] \end{Bmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{Bmatrix} [F_i] \\ [F_i'] \end{Bmatrix}, \quad \hat{H} = \begin{Bmatrix} [h_i] \\ [k_i] \end{Bmatrix} \\ B &= - \begin{pmatrix} [0] & [0] \\ [e_{ij} - \delta_{ij}4\pi] & [f_{ij}] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおけば、(52)式は簡単に次の形となる。

$$A\hat{X} = B\hat{F} - \hat{H} \quad (53)$$

それゆえ、

$$\hat{X} = A^{-1}B\hat{F} - A^{-1}\hat{H} \quad (54)$$

となって境界上の未知関数の値が得られる。

### 7. 領域内部における未知関数の求め方

いままでの議論はC上での未知関数を求めることに

あったが, 領域Dの内部での応力を求める場合を考える。点  $i(x, y) \in D$  での積分方程式はすでに(43)式にて求められているので, (20)式から応力成分がえられる。

$$8\pi\sigma_x(x, y)_i = \sum_{j=1}^m (E_{ij}F_j + F_{ij}F'_j) + C_{ij}\Phi_j + D_{ij}\Phi'_j + K_i \quad (55)$$

(55)式における係数は次の形となる。

$$E_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}(e_{ij}) = \int_j \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\nabla r_{ij}) \right] ds \\ = \int_j \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (4 + 4 \log \rho_{ij}) \right] ds$$

ここで  $\rho_{ij}$  は点  $i(x_i, y_j) \in D$  と境界C上の要素内の点  $(\xi, \eta)$  である。

$$\left. \begin{aligned} E_{ij} &= 4 \int_j \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{(x_i - \xi)^2 - (y_i - \eta)^2}{[(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2]^2} \right\} ds \\ F_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}(f_{ij}) \\ &= 4 \int_j \left\{ \frac{(y_i - \eta)^2 - (x_i - \xi)^2}{[(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2]^2} \right\} ds \\ C_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}(c_{ij}) = \int_j \frac{\partial}{\partial n} \left\{ 1 + \log [(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(y_i - \eta)^2}{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2} \right\} ds \\ D_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}(d_{ij}) = - \int_j \left\{ 1 + \log [(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(y_i - \eta)^2}{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2} \right\} ds \\ K_i &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_i) = \iint_D \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} [(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2] \right. \\ &\quad \times \log \sqrt{(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2} \\ &\quad + 2 \frac{\partial f}{\partial y} (y_i - \hat{y}) [1 + \log \langle (x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2 \rangle] \\ &\quad \left. + f [1 + \log \langle (x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2 \rangle] \right\} d\hat{x}d\hat{y} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

応力成分  $\sigma_y$  については,

$$8\pi\sigma_y(x, y)_i = \sum_{j=1}^m (-E_{ij}F_j - F_{ij}F'_j) + \bar{C}_{ij}\Phi_j + \bar{D}_{ij}\Phi'_j + \bar{K}_i \quad (57)$$

ただし, 係数は次のようになる。

(222)

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(c_{ij}) = \int_j \frac{\partial}{\partial n} \left\{ 1 + \log [(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(x_i - \xi)^2}{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2} \right\} ds \\ \bar{D}_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}(d_{ij}) = - \int_j \left\{ 1 + \log [(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(x_i - \xi)^2}{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2} \right\} ds \\ \bar{K}_i &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_i) = \iint_D \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} [(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2] \right. \\ &\quad \times \log \sqrt{(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2} \\ &\quad + 2 \frac{\partial f}{\partial x} (x_i - \hat{x}) [1 + \log \langle (x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2 \rangle] \\ &\quad \left. + f [1 + \log \langle (x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2 \rangle] \right\} d\hat{x}d\hat{y} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

せん断応力成分  $\tau_{xy}$  については

$$-8\pi\tau_{xy}(x, y)_i = \sum_{j=1}^m (\bar{E}_{ij}F_j + \bar{F}_{ij}F'_j) + \bar{C}_{ij}\Phi_j + \bar{D}_{ij}\Phi'_j + \bar{K}_i \quad (59)$$

となる。ただし, 係数は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(e_{ij}) \\ &= -8 \int_j \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{(x_i - \xi)(y_i - \eta)}{[(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2]^2} \right\} ds \\ \bar{F}_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(f_{ij}) \\ &= 8 \int_j \frac{(x_i - \xi)(y_i - \eta)}{[(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2]^2} ds \\ \bar{C}_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(c_{ij}) \\ &= 2 \int_j \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{(x_i - \xi)(y_i - \eta)}{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2} \right\} ds \\ \bar{D}_{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(d_{ij}) \\ &= -2 \int_j \frac{(x_i - \xi)(y_i - \eta)}{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2} ds \\ \bar{K}_i &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(k_i) \\ &= \iint_D \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} [(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2] \right. \\ &\quad \times \log \sqrt{(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2} \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial y} (x_i - \hat{x}) [1 + \log \langle (x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2 \rangle] \right\} d\hat{x}d\hat{y} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

$$\left. \begin{aligned} &+(y_i - \hat{y})^2 >] + \frac{\partial f}{\partial x} (y_i - \hat{y}) [1 \\ &+ \log < (x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2 >] \\ &+ 2f \frac{(x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2} \} d\hat{x}d\hat{y} \end{aligned} \right\}$$

## 8. 数値計算にあたって

③式を実際に解いて得られる解の中には二つの誤差, すなわち Descritization 誤差と Round-off 誤差が含まれる。Descritization 誤差は積分方程式③と④から線形方程式④と④への変換の時に導入されるものである。これは分割された要素内で  $F, F', \Phi, \Phi'$  を一定と仮定したことによって生じたが, これら関数の連続性が保証されていれば分割数を増やすことにより問題は解決する。

一方, Round-off 誤差についてはマトリックス  $A$  の性質に依存している。もし  $A$  が well-conditioned であるならば問題はないが, ill-conditioned ならば充分注意を払う必要がある。⑤式からわかるように  $A$  は非対称で, 有限要素法の剛性マトリックスのように疎でない。したがって有限要素法で開発された線形代数方程式の解法は直接応用できず, 現在のところ Gauss の消去法などに頼ったほうが無難と思われる。 $A$  自身の安定性についてはこれからの研究を待たざるをえない。

## 9. おわりに

調和型の境界値問題に対しては積分方程式を用いて解く方法が流体, 電場, 振りなどの問題に応用されてきた。弾性学の分野に現われる重調和型の境界値問題に上記の方法が拡張でき, 最終的に境界上で未知数を含む線形代数方程式の系がえられた。それまでの手順で重要な役割を演じたのは Single-layer と Double-layer ポテンシャル, ならびに二次元における Green の定理であった。本報告では単連結の場合について述べたが, 多連結物体に対しては多連結の場合の Green の定理を用いればよい。

本方法は内部領域の未知数を求めることなく境界上の値を得ることができること, 分割要素が境界上のみに限られることなどを考慮すると差分法や有限要素法と比較して優劣をつけがたい。むしろ問題によって両者の方法よりすぐれている場合もありうる。

具体的な計算例については次回に報告したい。

## 10. 記号

$\xi, \eta$	: 閉曲線 $C$ 上の点の $x$ 座標, $y$ 座標の値
$s$	: 閉曲線 $C$ に沿っての座標
$\hat{x}, \hat{y}$	: 閉曲線 $C$ に囲まれた領域 $D$ 内の任意の点 $Q$ の座標
$\phi, \psi$	: 閉曲線 $C$ の方程式
$t$	: 閉曲線 $C$ 上の一定点
$n$	: 閉曲線 $C$ の法線方向, Inner か Outer かは本文中にて指定される
$\mu$	: $C$ 上でのみ定義される Density 関数
$\rho_{PQ}$	: 点 $P(x, y) \in D$ , 点 $Q(x, y) \in D$ 間の距離
$\rho_{Ps}$	: 点 $P(x, y) \in D$ 点 $S$ on $C$ 間の距離
$\rho_{pQ}$	: 点 $p$ on $C$ , 点 $Q(\hat{x}, \hat{y})$ 間の距離
$\rho_{ps}$	: 点 $p$ on $C$ , 点 $s$ on $C$ 間の距離
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	: $x, y$ 方向の垂直応力とせん断応力
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$	: $x, y$ 方向の垂直ひずみとせん断ひずみ
$\nu$	: ポアソン比
$E$	: ヤング率
$\alpha$	: 線膨脹係数
$T$	: 温度
$\varepsilon_x, p, \varepsilon_y, p, \gamma_{xy}, p$	: $x, y$ 方向の垂直ひずみの塑性成分とせん断ひずみの塑性成分
$F$	: Airy の応力関数

## 謝辞

本研究は, アメリカ航空宇宙局 (NASA) Lewis Research Center の Dr. Walter Rzanicki に多大のご教示を御願したもので, ここに御礼申し上げる次第である。(1975年6月, ミシガン大学応用力学科, アナーバにて)

## 参考文献

- 1) Muskhelishvili; "Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity" Nordhoff, (1963).
- 2) M. A. Jaswon; "Integral Equation Methods in

- Potential Theory—I” Proceedings of Royal Soc., Ser. A, Vol. 275, (1963), pp. 23~32.
- 3) G. T. Symm; “Integral Equation Methods in Potential Theory—II” Proceedings of Royal Soc., Ser. A, Vol. 275, (1963), pp. 33~46.
- 4) 近藤次郎; “積分方程式” 培風館, (1961).
- 5) E. Weinel; “Die Integral gleichungen des ebenen Spannungs zustands und der Platten-theory” ZAMM, Vol. 11, (1931), pp. 349~360.
- 6) 西谷; “電子計算機による二次元応力問題の解法” 日本機械学会誌, 70 卷, 580 号, pp. 627~635 (1967).
- 7) A. Mendelson; “Boundary Integral Methods in Elasticity and Plasticity” NASA, TN D-7148, (1973).
- 8) 日高; “応用積分方程式論” 河出書房, (1943), pp. 169~188.

%%