

揚力面の数値計算について

小 山 鴻 一*

Numerical Investigation into the Lifting Surface Theory for Planar Wings

By

Koichi KOYAMA

Abstract

Numerical investigation is made of load distributions on planar wings by the lifting surface theory developed by T. Hanaoka. Main conclusions are as follows:

- a) In general the solutions by Hanaoka's Method compare favorably with the results by other methods.
- b) In the case of parabolic wing tip, the coefficients of the Birnbaum Series, which are the solutions of the problem, are infinite at the tip of the wing.
- c) Accurate solutions near the parabolic wing tip cannot be given by the usual lifting surface methods, because the singularity of the solutions at the tip of the wing cannot be treated well in the methods. This undesirable tendency appears explicitly in numerical solutions in the case of the Hanaoka's Method.

緒 言

船舶のプロペラとか舵における流体力学的な性質は航空機の翼におけるそれと同じとみなすことができる。翼の三次元流場を計算する場合、普通それを渦面に置き換えて解析する。渦面の循環分布密度の値は翼の形状・姿勢および運動状態が与えられると計算されるものであるが、そのためには積分方程式を解く必要がある。これは揚力面の積分方程式と言われ、一般には解析的に解くことができず数値的に解かれる。積分方程式が解かれて渦面の循環分布密度の値が求まると、翼に作用する流体力がすべて計算できる。

揚力面の積分方程式の数値解法は、Vortex Lattice

法と Mode Function 法に分けられる。航空機の非平面翼の計算や翼と機体の干渉を調べるとき等にはもっぱら前者が用いられるが、平面翼の場合には後者の方が少ない計算量で解が得られる。いずれの方法においても揚力面の計算例は非常に多く、現在は応用段階に入っている。

筆者は船用プロペラの揚力面の計算を続けているが、翼端近傍の解が未だうまく求まらない¹⁾²⁾³⁾。そのへんの問題点を整理して解決することを目的として、本論においては平面定常直進揚力面というより単純な揚力面について計算を試み検討した。その結果、現在の揚力面理論の数値解法には未だ問題が残されていることが明らかになった。

* 推進性能部 原稿受付：昭和50年9月25日

1. 揚力面の積分方程式

翼が Fig. 1 のように、鉛直上方を z 軸とする右手座標系に固定されていて、これに x 軸の正の向きの一様流れがあたる場合を考える。このとき翼表面の吹上げ w の表示式は、線型理論によると

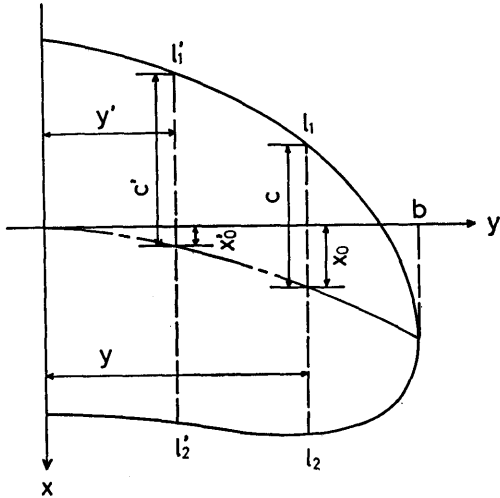


Fig. 1 Coordinates

$$-w(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{l_1'}^{l_2'} \frac{\gamma(x', y')}{(y-y')^2} \left[\frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} + 1 \right] dx' dy' \quad (1.1)$$

である⁴⁾。ただし Fig. 1 に示す通り、 b は半翼幅であり、 l_1' 、 l_2' は翼素の前後縁の座標であり、また $\gamma(x', y')$ は循環分布密度である。

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (x-x_0)/c, & \xi' &= (x'-x_0')/c \\ \xi_0 &= x_0/c, & \xi_0' &= x_0'/c \\ x_0 &= (l_1+l_2)/2, & x_0' &= (l_1'+l_2')/2 \\ c &= (l_2-l_1)/2, & c' &= (l_2'-l_1')/2 \\ \eta &= y/b, & \eta' &= y'/b \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

と置くと、(1.1) 式は

$$-w(\xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma(\xi', \eta') c'}{b(\eta-\eta')^2} \left[\frac{c(\xi+\xi_0) - c'(\xi'+\xi_0')}{\sqrt{\{c(\xi+\xi_0) - c'(\xi'+\xi_0')\}^2 + b^2(\eta-\eta')^2}} + 1 \right] d\xi' d\eta' \quad (1.3)$$

と表わされる。さらに

$$\lambda = b/c', \quad \beta = c/c', \quad \xi_m = (x_0 - x_0')/c' = \beta\xi_0 - \xi_0' \quad (1.4)$$

と書くと、(1.3) 式は

$$-w(\xi, \eta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma(\xi', \eta') \lambda}{\lambda^2(\eta-\eta')^2} \left[\frac{-(\xi' - (\xi_m + \beta\xi))}{\sqrt{\{(\xi' - (\xi_m + \beta\xi))\}^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2}} + 1 \right] d\xi' d\eta' \quad (1.5)$$

と表わされる。

翼形状および姿勢が与えられると、翼表面の境界条件から w が決まり、(1.5) 式は γ を未知数とする特異積分方程式となる。これが揚力面の積分方程式である。この積分方程式を解いて γ が求まると、流体力学的な諸性能はすべて計算できる。揚力面理論の問題は結局この積分方程式を解く問題に帰着する。この積分方程式は一般に解析的に解けないので、数値的に解かれる。

2. 花岡による積分方程式の数値解法^{註)}

揚力面の積分方程式の数値解法は Mode Function 法に限っても Multhopp⁴⁾ にはじまる Collocation 法をはじめ幾つかの方法があるが、本論の計算は主として花岡の解法⁵⁾ によっている。

この方法は、以下に述べるように、積分方程式(1.5)の両辺を ξ に関して Taylor 展開し、その同次の項の係数関数を等置して連立積分方程式を作り、それを解くものである。Flax の方法⁶⁾ は積分方程式の両辺を直交関数列に展開しその係数関数を等置した連立積分方程式によって解を求めるものとみなされるので、花岡の方法は Flax の方法に類似したものと云える。

プロペラ翼の場合のように、平均矢高曲線が比較的単純な形状をしているものでは、積分方程式を直交関数列に展開するより花岡の方法のように、べき級数に展開する方が少ない項数でよいし、また、花岡の方法は核関数の計算が Collocation 法の場合に比べて容易であり、実用上極めて便利な方法である。さらに、特に非定常翼の場合には、他の方法に比べて計算量が非常に少なくてすむ⁷⁾。

$w(\xi, \eta)$ が $-1 < \xi < 1$ の区間で有界連続なものと仮

註) 本節は花岡の解法⁵⁾を要約したものであるが、(2.6) 式は数値計算用に具体的な形に書き改められている。

また、(2.1)、(2.6)、(2.9) 式では原論文の誤りを訂正している。

定すると、積分方程式 (1.5) の両辺を ξ について Taylor 展開したものの ξ の同次の項の係数関数は等しくなければならない。すなわち

$$\begin{aligned}
 -w(0, \eta) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\gamma \lambda}{\lambda^2(\eta-\eta')^2} \\
 &\quad \left[\frac{-(\xi'-\xi_m)}{\sqrt{(\xi'-\xi_m)^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2}} + 1 \right] d\xi' d\eta' \\
 -w^{(1)}(0, \eta) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \\
 &\quad \frac{\gamma \cdot \lambda \beta}{\{(\xi'-\xi_m)^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2\}^{3/2}} d\xi' d\eta' \\
 -w^{(2)}(0, \eta) &= -\frac{3}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \\
 &\quad \frac{\gamma \cdot \lambda \beta^2 (\xi'-\xi_m)}{\{(\xi'-\xi_m)^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2\}^{5/2}} d\xi' d\eta' \\
 -w^{(3)}(0, \eta) &= \frac{3}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \\
 &\quad \frac{\gamma \cdot \lambda \beta^3}{\{(\xi'-\xi_m)^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2\}^{5/2}} d\xi' d\eta' \\
 &\quad - \frac{15}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \\
 &\quad \frac{\gamma \cdot \lambda \beta^3 (\xi'-\xi_m)^2}{\{(\xi'-\xi_m)^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2\}^{7/2}} d\xi' d\eta' \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 &\quad \dots\dots\dots (2.1)
 \end{aligned}$$

である。ただし

$$w^{(i)}(\xi, \eta) = \left(-\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^i w(\xi, \eta) \quad (2.2)$$

とする。

試験関数として Birnbaum 級数を用い

$$\begin{aligned}
 \frac{\gamma}{V} &= \sum_{n=0}^{N-1} A_n(\eta) B_n(\xi) \\
 &= A_0(\eta) \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} + A_1(\eta) \sqrt{1-\xi^2} \\
 &\quad + A_2(\eta) \xi \sqrt{1-\xi^2} + \dots\dots \\
 &\quad + A_{N-1}(\eta) \xi^{N-2} \sqrt{1-\xi^2} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

とおき、これを (2.1) 式に代入すると

$$\begin{aligned}
 -\frac{w^{(i)}(0, \eta)}{V} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{N-1} A_n(\eta') K_{\nu n} d\eta', \\
 &\quad \nu=0, 1, \dots, N-1 \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

$$K_{\nu n} = \int_{-1}^1 B_n(\xi') \cdot L_\nu d\xi' \quad (2.5)$$

と書ける。ただし、 V は翼前方の一樣流速であり、 L_ν の具体形は (2.1) 式から与えられる。

$B_n(\xi')$, L_ν の具体形から核関数 $K_{\nu n}$ が計算でき、その結果は

$$\begin{aligned}
 K_{00} &= \frac{\lambda}{2Y^2} \left[-k_{-1/2}^{(0)} + Y^2 k_{1/2}^{(0)} + (1-\xi_m) k_{1/2}^{(1)} - \pi \right] \\
 K_{01} &= \frac{\lambda}{2Y^2} \left[-2\xi_m k_{-1/2}^{(0)} + 2\xi_m Y^2 k_{1/2}^{(0)} - k_{-1/2}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. + (1-\xi_m^2 + Y^2) k_{1/2}^{(1)} - \pi/2 \right] \\
 K_{02} &= \frac{\lambda}{2Y^2} \left[-k_{-3/2}^{(0)} + (1-3\xi_m^2 + 2Y^2) k_{-1/2}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. - Y^2 (1-3\xi_m^2 + Y^2) k_{1/2}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. - 3\xi_m k_{-1/2}^{(1)} + \xi_m (1-\xi_m^2 + 3Y^2) k_{1/2}^{(1)} \right] \\
 K_{03} &= \frac{\lambda}{2Y^2} \left[-4\xi_m k_{-3/2}^{(0)} + 2\xi_m (1-2\xi_m^2 + 4Y^2) k_{-1/2}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. - 2\xi_m Y^2 (1-2\xi_m^2 + 2Y^2) k_{1/2}^{(0)} - k_{-3/2}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. + (1-6\xi_m^2 + 2Y^2) k_{-1/2}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. + (\xi_m^2 (1-\xi_m^2) - Y^2 (1-6\xi_m^2) - Y^4) k_{1/2}^{(1)} \right. \\
 &\quad \left. - \pi/8 \right] \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 K_{10} &= \frac{-\lambda\beta}{2} \left[(1-\xi_m) k_{3/2}^{(0)} - k_{3/2}^{(1)} \right] \\
 K_{11} &= \frac{-\lambda\beta}{2} \left[-k_{1/2}^{(0)} + (1-\xi_m^2 + Y^2) k_{3/2}^{(0)} - 2\xi_m k_{3/2}^{(1)} \right] \\
 K_{12} &= \frac{-\lambda\beta}{2} \left[-3\xi_m k_{1/2}^{(0)} + \xi_m (1-\xi_m^2 + 3Y^2) k_{3/2}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. - k_{1/2}^{(1)} + (1-3\xi_m^2 + Y^2) k_{3/2}^{(1)} \right] \\
 K_{13} &= \frac{-\lambda\beta}{2} \left[-k_{-1/2}^{(0)} + (1-6\xi_m^2 + 2Y^2) k_{1/2}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. + (\xi_m^2 (1-\xi_m^2) - Y^2 (1-6\xi_m^2) - Y^4) k_{3/2}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. - 4\xi_m k_{1/2}^{(1)} + 2\xi_m (1-2\xi_m^2 + 2Y^2) k_{3/2}^{(1)} \right] \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 K_{20} &= \frac{-3\lambda\beta^2}{2} \left[-k_{3/2}^{(0)} + Y^2 k_{5/2}^{(0)} + (1-\xi_m) k_{5/2}^{(1)} \right] \\
 K_{21} &= \frac{\lambda\beta^2}{2} \left[\xi_m k_{3/2}^{(0)} + k_{5/2}^{(1)} \right] \\
 K_{22} &= \frac{-\lambda\beta^2}{2} \left[-2k_{1/2}^{(0)} + (1-2\xi_m^2 + 2Y^2) k_{3/2}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. - 4\xi_m k_{3/2}^{(1)} \right] \\
 K_{23} &= \frac{-\lambda\beta^2}{2} \left[-9\xi_m k_{1/2}^{(0)} + \xi_m (2-3\xi_m^2 + 9Y^2) k_{3/2}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. - 3k_{1/2}^{(1)} + (2-9\xi_m^2 + 3Y^2) k_{3/2}^{(1)} \right] \\
 &\quad \dots\dots\dots \\
 K_{30} &= \frac{3\lambda\beta^3}{2} \left[-4(1-\xi_m) k_{5/2}^{(0)} + 5Y^2 (1-\xi_m) k_{7/2}^{(0)} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+4k_{5/2}^{(1)}-5Y^2k_{7/2}^{(1)} \\
 K_{31} &= \frac{3\lambda\beta^3}{2} \left[k_{3/2}^{(0)} - Y^2k_{5/2}^{(0)} + \xi_m k_{5/2}^{(1)} \right] \\
 K_{32} &= \frac{3\lambda\beta^3}{2} \left[\frac{2}{3}\xi_m k_{3/2}^{(0)} + \frac{2}{3}k_{3/2}^{(1)} + k_{5/2}^{(1)} \right] \\
 K_{33} &= \frac{-3\lambda\beta^3}{2} \left[-2k_{1/2}^{(0)} - 2(\xi_m^2 - Y^2)k_{3/2}^{(0)} + Y^2k_{5/2}^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. - 4\xi_m k_{3/2}^{(1)} - \xi_m k_{5/2}^{(1)} \right] \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned}
 k^{(j)} &= \int_{-1}^1 \frac{(\xi - \xi_m)^j}{\sqrt{1 - \xi^2} \{ (\xi - \xi_m)^2 + Y^2 \}^s} d\xi \\
 Y &= \lambda |\eta - \eta'|
 \end{aligned} \right\} \tag{2.7}$$

である。

$k_s^{(1)}$ は $\xi_m = 0$ の場合零で、 $\xi_m \neq 0$ の場合 $k_{s-1}^{(0)}$, $k_s^{(0)}$, $k_{s+1}^{(0)}$ の関数として与えられ、また $k_s^{(0)}$ の循環式により、 $k_{s+2}^{(0)}$ は、 $k_{s-1}^{(0)}$, $k_s^{(0)}$, $k_{s+1}^{(0)}$ から計算できる⁵⁾。従って、 $k_{1/2}^{(0)}$, $k_{3/2}^{(0)}$, $k_{5/2}^{(0)}$ の関数表を用意すれば核関数 $K_{\nu n}$ はすべて計算できる。

核関数 $K_{\nu n}$ は $Y=0$ に 2 位の極と対数特異点を持ち、

$$K_{\nu n} \simeq \frac{S^{(\nu n)}(\eta)}{Y^2} + I^{(\nu n)}(\eta) \ln Y \tag{2.8}$$

その積分は有限部分をとるものであるが、連立積分方程式を連立一次方程式に変換するとき、その具体形が必要である。(2.8) 式の具体形を求めると

$$\left. \begin{aligned}
 K_{00} &\simeq -\lambda \left[\frac{1+\pi/2}{Y^2} + \frac{1}{2} \ln Y \right] \\
 K_{01} &= -\frac{\pi}{4} \frac{\lambda}{Y^2} \\
 K_{02} &\simeq \frac{\lambda}{3} \left[\frac{1}{Y^2} + \frac{3}{2} \ln Y \right] \\
 K_{03} &= -\frac{\pi}{16} \frac{\lambda}{Y^2} \\
 &\dots\dots\dots \\
 K_{10} &\simeq -\lambda\beta \left[\frac{1}{Y^2} - \frac{1}{2} \ln Y \right] \\
 K_{11} &\simeq -\lambda\beta \left[\frac{1}{Y^2} + \frac{1}{2} \ln Y \right] \\
 K_{12} &= 0 \\
 K_{13} &\simeq \lambda\beta \ln Y \\
 &\dots\dots\dots \\
 K_{20} &\simeq \lambda\beta^2 \left[\frac{1}{Y^2} - \frac{3}{2} \ln Y \right]
 \end{aligned} \right\} \tag{2.9}$$

$$\left. \begin{aligned}
 K_{21} &= 0 \\
 K_{22} &\simeq -\lambda\beta^2 \left[\frac{1}{Y^2} + \frac{3}{2} \ln Y \right] \\
 K_{23} &= 0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 K_{30} &\simeq -\lambda\beta^3 \left[\frac{1}{Y^2} - \frac{9}{2} \ln Y \right] \\
 K_{31} &\simeq \lambda\beta^3 \left[\frac{1}{Y^2} - \frac{3}{2} \ln Y \right] \\
 K_{32} &= 0 \\
 K_{33} &\simeq -\lambda\beta^3 \left[\frac{2}{Y^2} + 6 \ln Y \right] \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\}$$

である。

3. 連立一次方程式への変換

連立積分方程式 (2.4) は連立一次方程式に変換して解かれる。核関数 $K_{\nu n}$ の特異性には、(2.8) 式のように 2 位の極の他に対数特異性があるので、数値計算の精度を上げるには工夫が必要である。Mangler and Spencer の方法⁶⁾ は精度がよいとされており⁹⁾、ここでもそれを採用することにする。

まず、(2.4) 式の被積分関数を

$$\left. \begin{aligned}
 A_n(\eta') K_{\nu n} &= A_n(\eta) I^{(\nu n)}(\eta) \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} \ln |\eta - \eta'| \\
 &\quad + \frac{R^{(\nu n)}(\eta, \eta')}{(\eta - \eta')^2}, \\
 \eta &= \cos \varphi, \quad \eta' = \cos \varphi'
 \end{aligned} \right\} \tag{3.1}$$

とおく。当然 $R^{(\nu n)}(\eta, \eta')$ は

$$\begin{aligned}
 R^{(\nu n)}(\eta, \eta') &= A_n(\eta') K_{\nu n} (\eta - \eta')^2 \\
 &\quad - A_n(\eta) I^{(\nu n)}(\eta) \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} (\eta - \eta')^2 \ln |\eta - \eta'|
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

から計算される。次に $R^{(\nu n)}(\eta, \eta')$ を有限 Fourier 級数で表わし

$$\left. \begin{aligned}
 R^{(\nu n)}(\eta, \eta') &= \frac{2}{M+1} \sum_{m=1}^M R_m^{(\nu n)}(\varphi) \\
 &\quad \sum_{k=1}^M \sin k \varphi_m \sin k \varphi', \\
 \varphi_m &= \frac{m\pi}{M+1}, \\
 R_m^{(\nu n)}(\varphi) &= R^{(\nu n)}(\cos \varphi, \cos \varphi_m)
 \end{aligned} \right\} \tag{3.3}$$

とする。

(3.1)(3.3) 両式を連立積分方程式 (2.4) に代入すると

$$\begin{aligned}
-\frac{w^{(w)}(0, \eta)}{V} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2}{M+1} \sum_{m=1}^M R_m^{(v^n)}(\varphi) \\
&\quad \sum_{k=1}^M \sin k\varphi_m \int_{-1}^1 \frac{\sin k\varphi'}{(\eta-\eta')^2} d\eta' \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{N-1} A_n(\eta) I^{(v^n)}(\eta) \\
&\quad \int_{-1}^1 \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} \ln|\eta-\eta'| d\eta'
\end{aligned} \tag{3.4}$$

である。積分を実行して整理すると連立一次方程式

$$-\alpha_\mu^v = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=1}^M F_{\mu m}^{v^n} A_m^n, \quad \begin{cases} v=0, 1, \dots, N-1 \\ \mu=1, 2, \dots, M \end{cases} \tag{3.5}$$

が得られる。ただし、

$$\begin{aligned}
\alpha_\mu^v &= \frac{w^{(w)}(0, \eta_\mu)}{V} \\
A_m^n &= A_n(\eta_m) \\
F_{\mu m}^{v^n} &= \frac{1-(-1)^{m-\mu}}{2} \frac{\sin \varphi_m}{M+1} K_{v^n}, \quad m \neq \mu \\
F_{\mu \mu}^{v^n} &= -\frac{S^{(v^n)}(\eta_\mu)}{\lambda^2} \frac{M+1}{4 \sin \varphi_\mu} - \frac{I^{(v^n)}(\eta_\mu)}{\sin \varphi_\mu} \\
&\quad \left[\frac{\cos 2\varphi_\mu - \ln 4}{-8} + \frac{1}{(M+1)} \right. \\
&\quad \left. \sum_{m=1}^M \frac{1-(-1)^{m-\mu}}{2} \sin^2 \varphi_m \ln|\eta_\mu - \eta_m| \right] \\
\eta_\mu &= \cos \varphi_\mu, \quad \eta_m = \cos \varphi_m, \quad \varphi_\mu = \frac{\mu}{M+1} \pi \\
&\quad \dots\dots\dots(3.6)
\end{aligned}$$

である。 $\sum_{m=1}^M$ は $m=\mu$ を除く総和である。

4. 翼に作用する流体力

連立一次方程式 (3.5) が解かれて $A_n(\eta)$ が得られると、揚力面の積分方程式 (1.1) の解である循環分布密度 γ は (2.3) 式から計算でき、それによって翼に作用する流体力はすべて計算される。

翼上下面の圧力飛躍 Δp は揚力分布密度 Π に等しく、

$$\Delta p = \Pi = \rho V \gamma \tag{4.1}$$

である。ただし、 ρ は流体の密度である。

単位幅の翼素に働く揚力 L は

$$L = \int_{l_1}^{l_2} \Delta p dx = \rho V c \int_{-1}^1 \gamma d\xi \tag{4.2}$$

であり、誘導抵抗 D は

$$D = \rho \int_{l_1}^{l_2} \gamma(-w) dx = -\rho c \int_{-1}^1 \gamma w d\xi \tag{4.3}$$

であり、また、前縁吸引力 S は

$$S = \pi \rho V^2 c A^2_0(\eta) / 2 \tag{4.4}$$

である。

これらの値は

$$\Delta C_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2} \rho V^2}, \quad C_l = \frac{L}{\rho V^2 c}, \quad C_d = \frac{D-S}{\rho V^2 c} \tag{4.5}$$

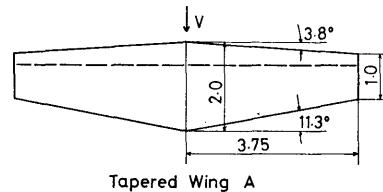
の形で無次元表示される。

5. 数値計算

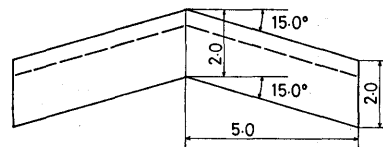
3つの定常直進揚力面における計算結果を以下に示す。いずれもキャンバーのない平板翼であり、その平面型は Fig. 2 に示されている。

Fig. 3-1~Fig. 3-4 は Tapered Wing A が迎角 11.4° で直進する場合、Fig. 4 は Swept Wing B が単位迎角 1 radian で直進する場合、また、Fig. 5-1, Fig. 5-2 は Circular Wing C が単位迎角で直進する場合の計算である。

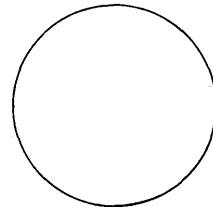
Figs. 3-1, 2 は Tapered Wing A の場合における揚力係数 C_l および誘導抵抗係数 C_d の翼幅方向の分



Tapered Wing A



Swept Wing B



Circular Wing C

Fig. 2 Planforms for the wings

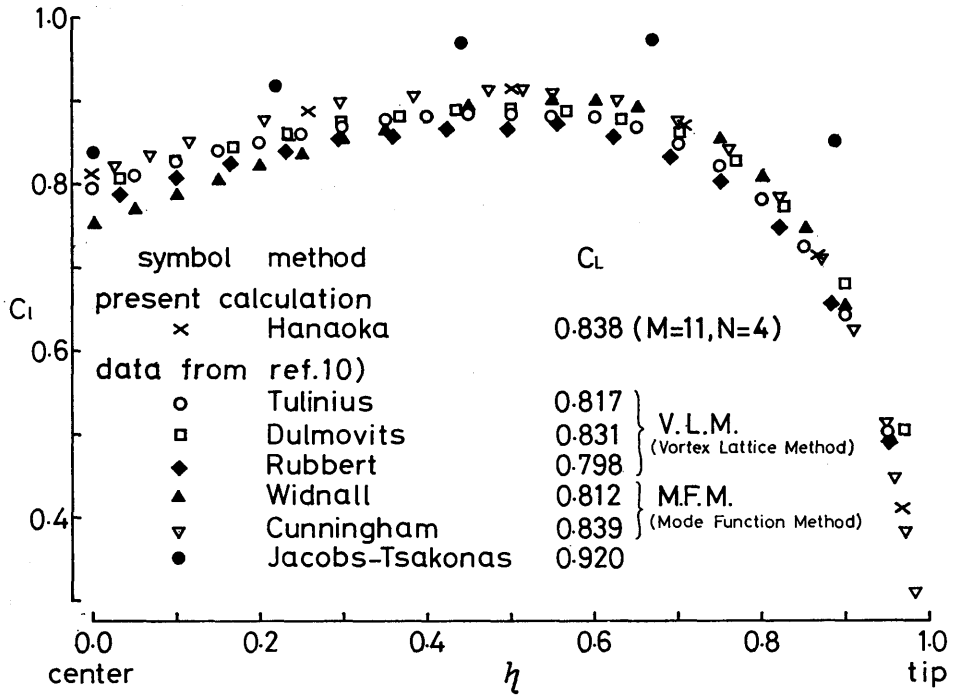


Fig. 3-1 Spanwise lift distribution for the tapered wing at 11.4° angle of attack

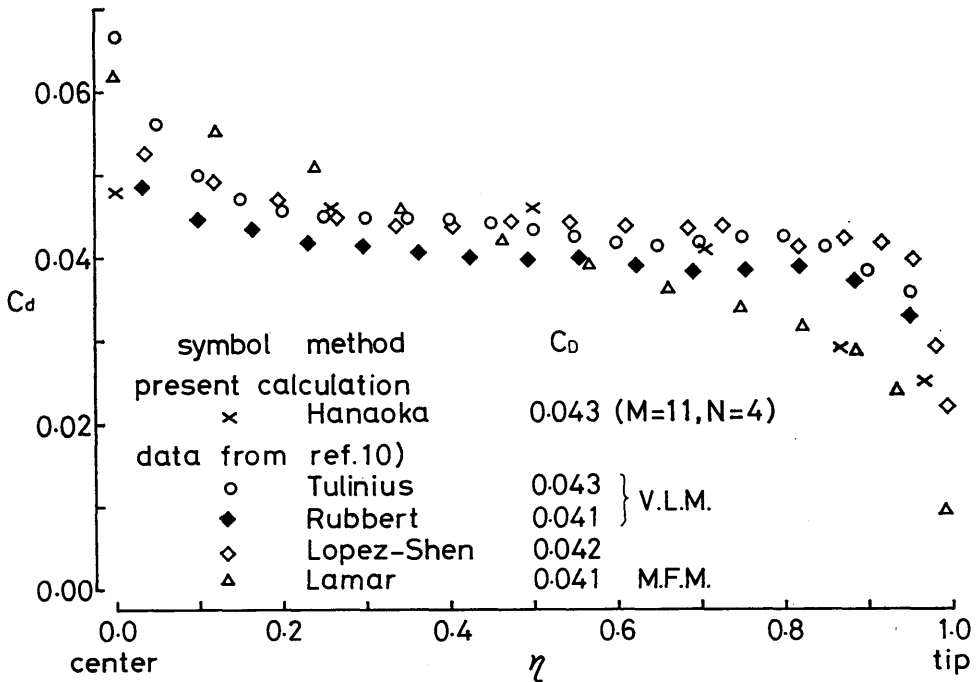


Fig. 3-2 Spanwise distribution of induced drag for the tapered wing at 11.4° angle of attack

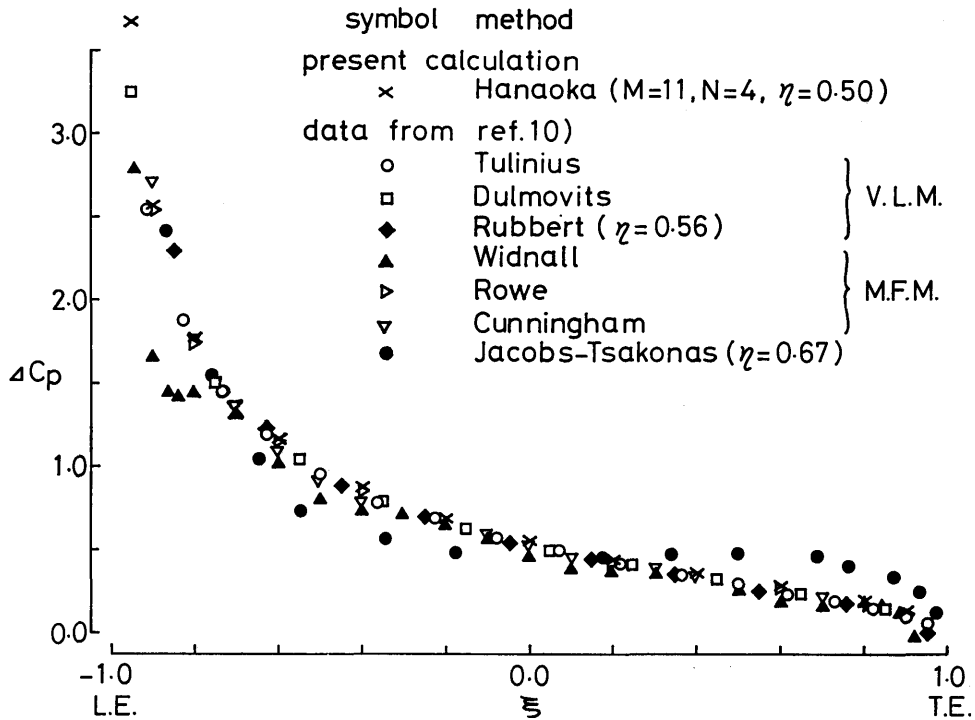


Fig. 3-3 Chordwise variation of the pressure jump coefficient at $\eta=0.58$ for the tapered wing at 11.4° angle of attack

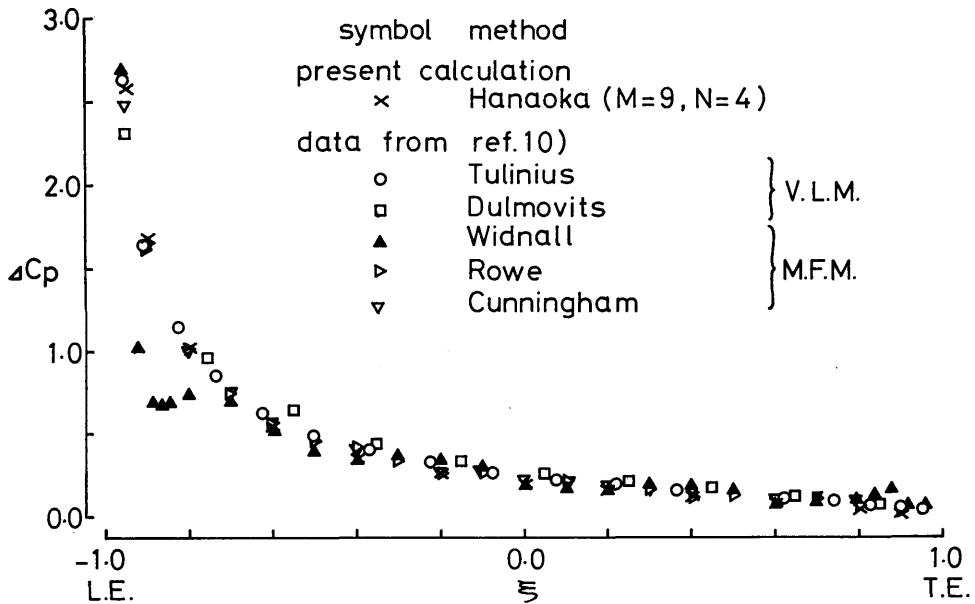


Fig. 3-4 Chordwise variation of the pressure jump coefficient at $\eta=0.95$ for the tapered wing at 11.4° angle of attack

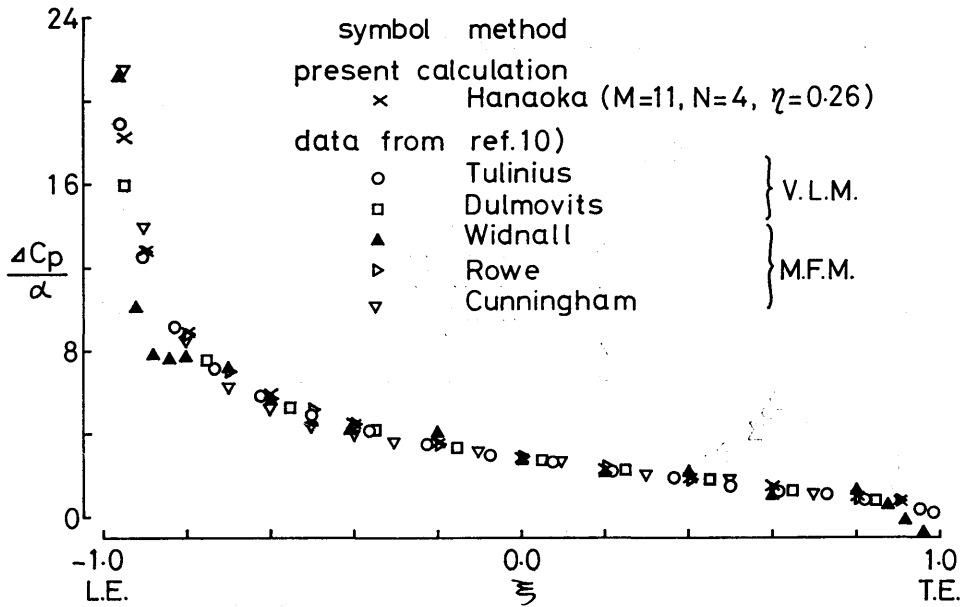


Fig. 4 Chordwise variation of the pressure jump coefficient at $\eta=0.2$ for the swept wing at 1 rad. angle of attack

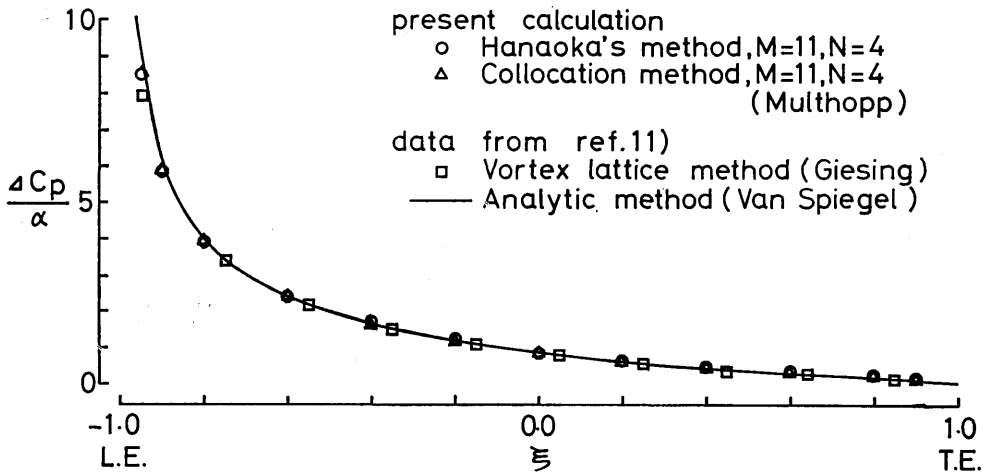


Fig. 5-1 Chordwise variation of the pressure jump coefficient at $\eta=0.0$ for the circular wing at 1 rad. angle of attack

布形である。Figs. 3-3, 4 は、翼幅方向の位置が各 $\eta = 0.58$ および $\eta = 0.95$ における圧力飛躍係数 ΔC_p の翼弦方向の分布形である。

Fig. 4 は Swept Wing B の場合の $\eta = 0.20$ における ΔC_p である。

Figs. 5-1, 2 は Circular Wing C の場合の $\eta = 0$

および $\eta = 0.866$ における ΔC_p である。

Fig. 3-1~Fig. 3-4 および Fig. 4 には、花岡の方法による計算の他に多種の計算結果を載せてあるが、それらは Langan and Wang の計算値¹⁰⁾を転載したものである。その中で、Tulinus, Dulmovits, Rubbert は Vortex Lattice 法による計算であり、Lamar,

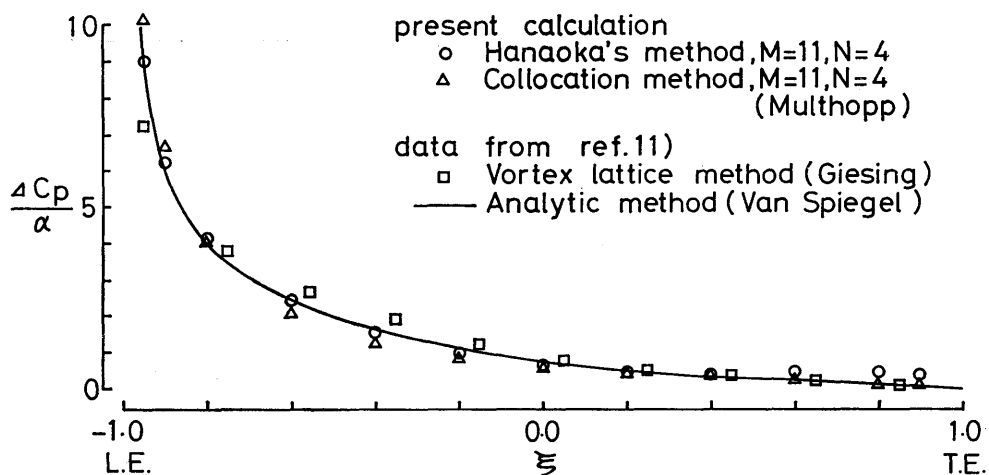


Fig. 5-2 Chordwise variation of the pressure jump coefficient at $\eta=0.866$ for the circular wing at 1 rad. angle of attack

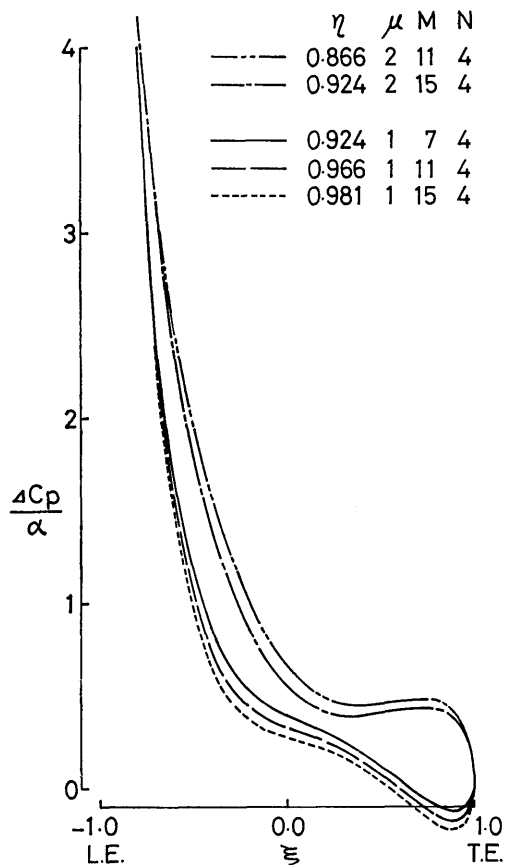


Fig. 6 Chordwise variation of the pressure jump coefficient near the tip of the circular wing by the Hanaoka's Method ($N=4$)

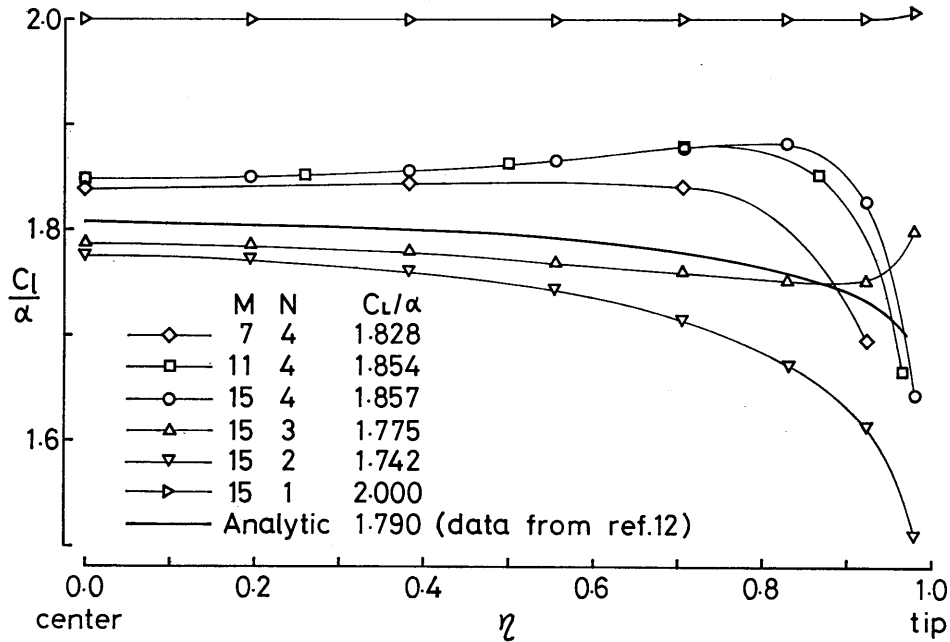


Fig. 7 Spanwise lift distribution for the circular wing by the Hanaoka's Method

Widnall, Rowe, Cunningham は Mode Function 法による計算である。また, Jacobs and Tsakonas は Flax の方法によっている。

Figs. 5-1, 2 には, 花岡の方法による計算の他, Collocation 法(附録参照)による計算結果を示す。同図中の Vortex Lattice 法による計算値(Giesing)および解析解(Van Spiegel)は参考文献¹¹⁾からの転載である。

以上の結果を見ると, 花岡の方法による計算は, 全般的に他の計算に劣らず精度のよい結果が得られていることがわかる。

ただし, Circular Wing の翼端近傍(Fig. 5-2)に限っては, 後縁近傍の値の精度がよくない。

6. 円形翼の翼端近傍における解に対する考察

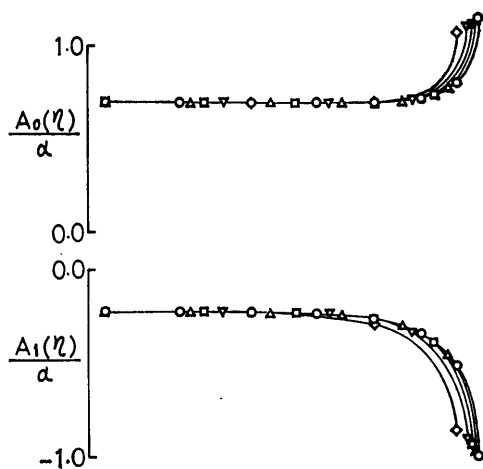
前節の計算結果によると, 円形翼では翼端寄の計算値(Fig. 5-2)の精度が悪い。翼中央部(Fig. 5-1)の精度を参照すると, 翼端に近づくにつれてさらに計算精度が悪くなることが想像される。本節においてはこの点について詳細に検討する。本節の論議は円形翼の翼端近傍における解の問題に限られているが, これ

は放物形翼端をもつ翼の翼端近傍における解の問題⁹⁾に同じものと考えられる。

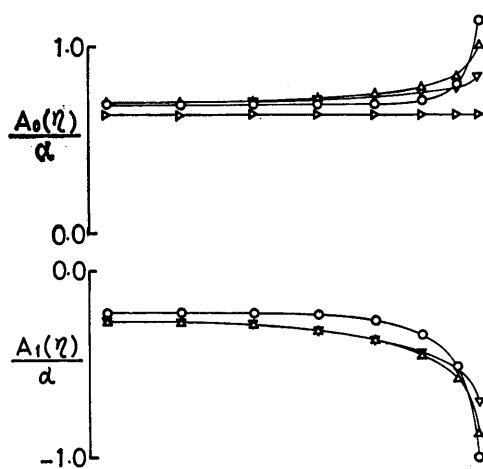
花岡の方法によって求めた円形翼の翼端近傍の圧力飛躍係数 ΔC_p をさらに細かく示すと Fig. 6 の通りである。翼幅方向の標点数 M を 7, 11, 15 と増すことによって, より翼端に近の部分の値が求められるはずであり, それを示したものである。翼端に最も近い標点 ($\mu=1, M$) とその隣の標点 ($\mu=2, M-1$) における ΔC_p を示した。 $\eta=0.924$ における値は, M の異なる 2 通りの結果が載っているが両者は一致しておらず, 翼端近傍の計算精度の悪さが現われている。

このとき, 翼素に作用する揚力係数 C_l の翼幅方向分布形は Fig. 7 の通りである。翼幅方向の計算標点数 M を増してゆくと翼端近傍の値が若干変化してゆく。Birnbaum 級数の項数 N (これは連立積分方程式の連立数に等しく, また Collocation 法における翼弦方向の計算標点数に対応する) を変えると, C_l の値はかなり変化し, 特に翼端近傍の様子は著しく異なり, 解析解の値¹²⁾に収束していない。

Fig. 8, Fig. 9 は Birnbaum 級数の係数 $A_n(\eta)$ であるが, いずれも翼端で発散し, その傾向は n が大きいほど著しい。Fig. 8 は翼幅方向標点数 M を変化



	M	N
○	15	4
△	13	4
□	11	4
▽	9	4
◇	7	4



	M	N
○	15	4
△	15	3
▽	15	2
▶	15	1

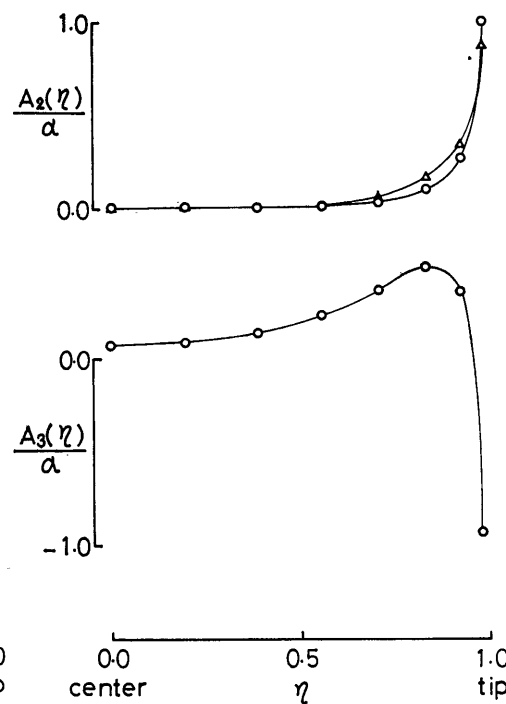
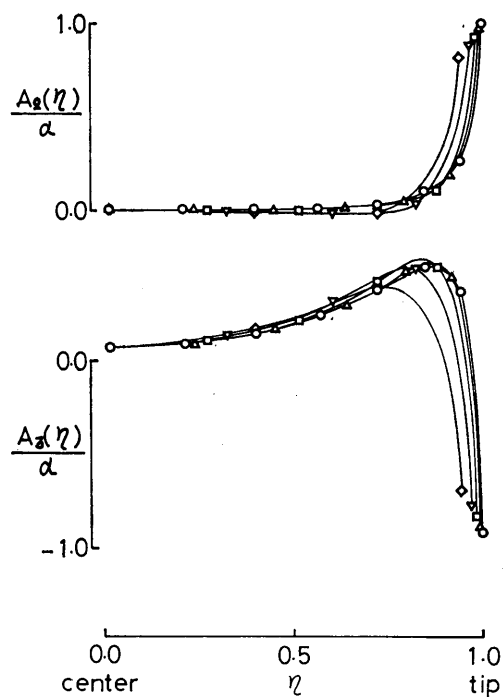


Fig. 8 Coefficients of the Birnbaum Series for the circular wing by the Hanaoka's Method ($N=4$)

Fig. 9 Coefficients of the Birnbaum Series for the circular wing by the Hanaoka's Method ($M=15$)

させたものであり、Fig. 9 は Birnbaum 級数の項数 N を変化させたものである。

Fig. 8 によると、翼端近傍の解は M を増してもなかなか収束の様子が見られず真値を求めがたい。

Fig. 9 によると、 N を増すほど各 $A_n(\eta)$ における翼端の発散の傾向が強くなる。また、級数の最終項 $A_{N-1}(\eta)$ の発散の傾向が他の $A_n(\eta)$ ($n < N-1$) のそれに比べて強く、これによって C_l の翼端近傍の傾向 (Fig. 7) が支配されている。

さて、Fig. 5-2 には Collocation 法 (附録参照) による計算値も示したが、この方法によると一見問題がなさそうに見える。しかし、この方法による円形翼の翼端近傍における圧力飛躍係数 ΔC_p の値をさらに細かく計算すると Fig. 10 の通りであり、花岡の方法によるものと同様に翼端近傍の計算精度は悪い。以下 Fig. 11~Fig. 13 に Collocation 法による円形翼の計算結果を示す。

Fig. 11 に M 変化および N 変化に対する揚力係数 C_l を示した。 N の増加に対して C_l が殆んど一定値に収束し解析解¹²⁾に近い値を示しているのは、花岡の方法によるもの (Fig. 7) と異なる点である。

Fig. 12 に M 変化に対する Birnbaum 級数の係

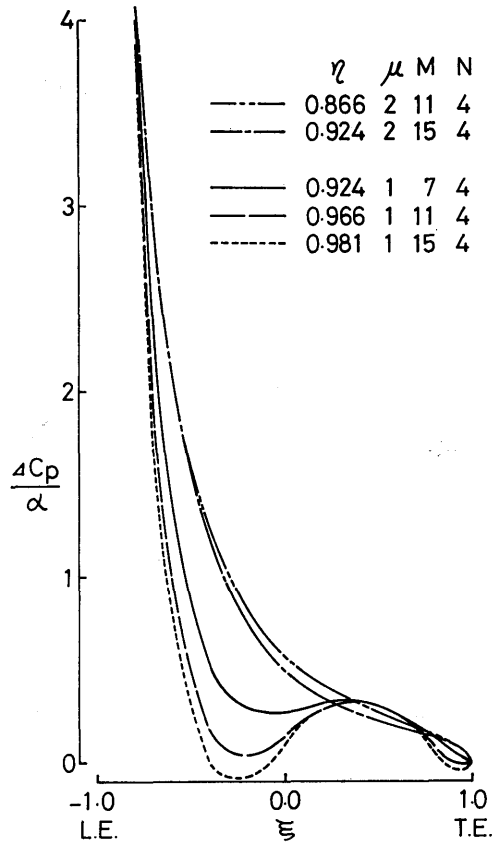


Fig. 10 Chordwise variation of the pressure jump coefficient near the tip of the circular wing by the Collocation Method ($N=4$)

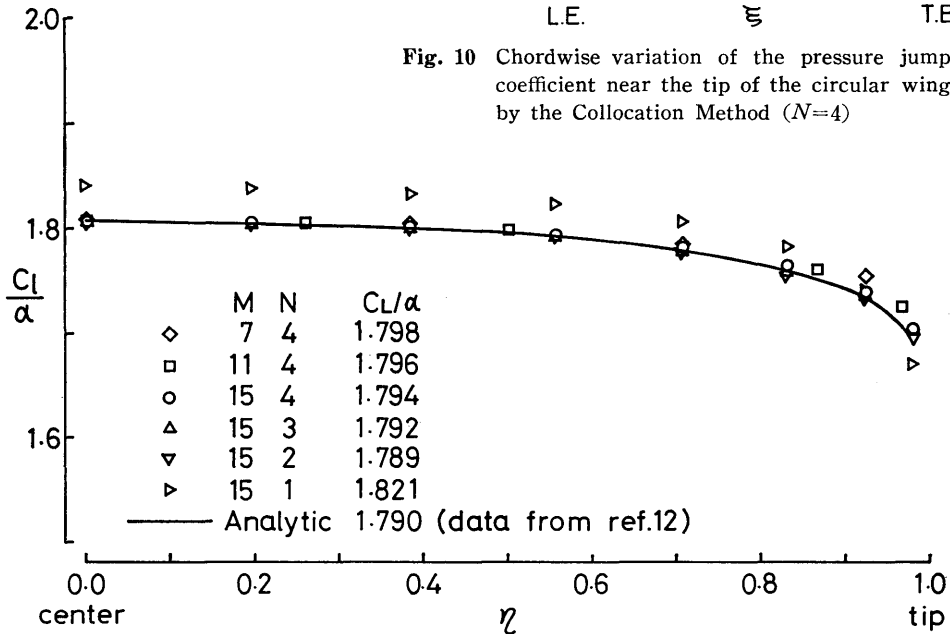


Fig. 11 Spanwise lift distribution for the circular wing by the Collocation Method

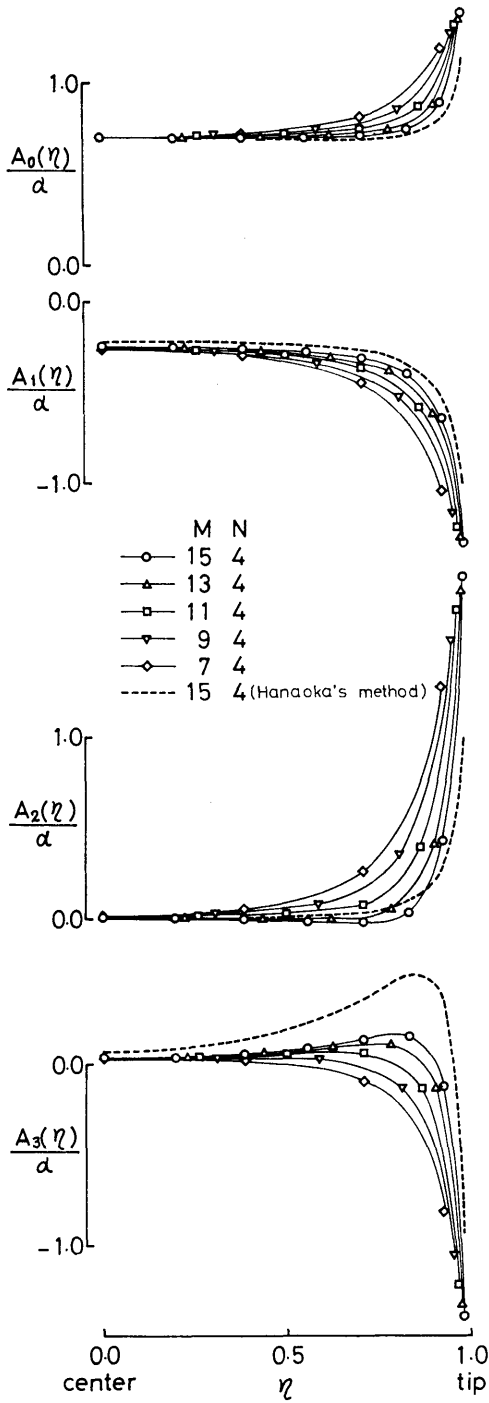


Fig. 12 Coefficients of the Birnbaum Series for the circular wing by the Collocation Method ($N=4$)

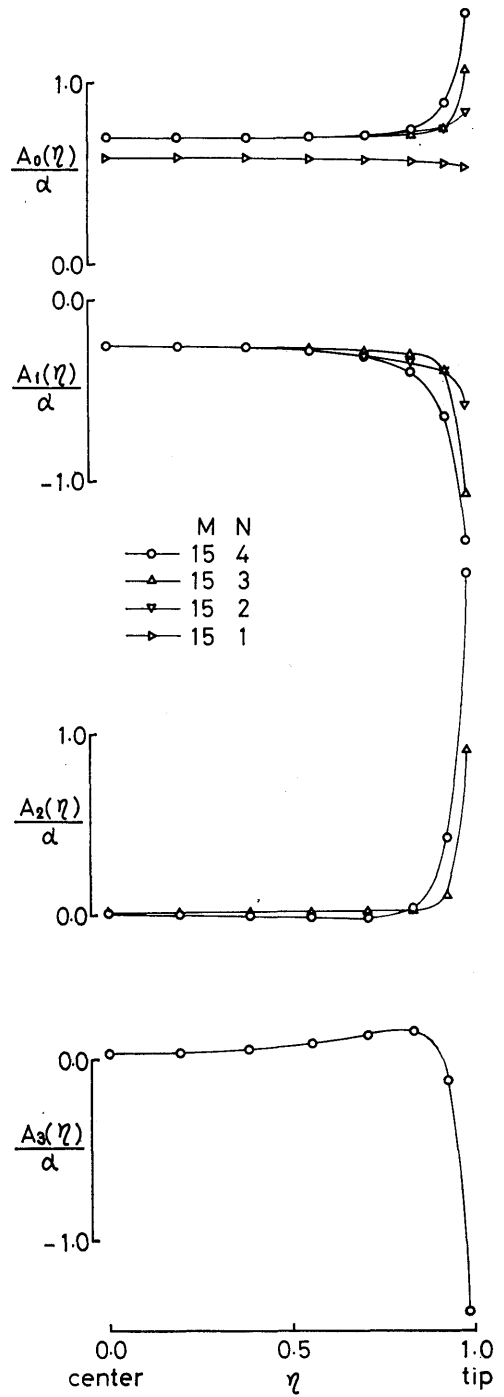


Fig. 13 Coefficients of the Birnbaum Series for the circular wing by the Collocation Method ($M=15$)

数 $A_n(\eta)$ を示した。花岡の方法の場合 (Fig. 8) よりも、 M 変化に対してバラツキが大きい。

Fig. 13 に N 変化に対する $A_n(\eta)$ を示した。花岡の方法の場合 (Fig. 9) に比べて、 $A_2(\eta)$, $A_3(\eta)$ 特に $A_3(\eta)$ は翼端近傍以外ではより零に近い。 C_l (Fig. 11) が N 変化に対して安定なのはこのためといえる。

花岡の方法および Collocation 法による計算の結果 (Figs. 8, 12) から、円形翼の場合、Birnbau 級数の係数 $A_n(\eta)$ は翼端 $\eta \rightarrow \pm 1$ で発散すること、また翼端近傍の解が安定して求まらないことがわかった。

ところで、花岡の方法においてもまた Collocation 法においても、連立一次方程式への変換の際に、被積分関数の中の $R^{(\nu n)}(\eta, \eta')$ を、翼端 $\eta' = \pm 1$ において零という条件をつけて (3.3) 式のようにおいている。核関数 K_{0n} は (2.6) 式に明らかなように $c' = \sqrt{1-\eta'^2}$ に比例しているから、仮りに解 $A_n(\eta')$ が翼端 $\eta' \rightarrow \pm 1$ において有限値であるなら (3.3) 式の仮定は妥当である。しかし、 $A_n(\eta')$ が翼端 $\eta' \rightarrow \pm 1$ において無限大に発散する場合には、(3.3) 式の仮定は成立しないこともあり得る。本論の計算はこのような場合に当たっているものと考えることができる。従って、このために翼端近傍の解が安定して求まらないものとする。

Fig. 7 と Fig. 11 を比較すると、花岡の方法による計算では揚力係数 C_l の値が不安定である。これは、花岡の方法においては大きな n に対する $A_n(\eta)$ の精度が悪いことによると考えられる。

花岡の方法においては、核関数 $K_{\nu n}$ は (2.9) 式から明らかなように $c'^{1-\nu}$ に比例する。従って、高次 (ν が大) のものほど、被積分関数 $R^{(\nu n)}(\eta, \eta')$ の翼端における発散性が顕著になる。そのために、大きな ν ほど (3.3) 式のまずさが著しく、従って Collocation 法に比べて、翼端処理のまずさが強調されて現われると考えられる。

結 言

本論においては、Tapered Wing, Swept Wing, Circular Wing の3つの平面定常直進揚力面の計算を花岡の方法によって行ない、他の計算値と比較した。また、Circular Wing の翼端近傍における解についてはさらに Collocation 法による計算も試み、解の性質および揚力面の数値解法における問題点を検

討した。その結果、次のことが明らかになった。

- 1) 花岡の方法による計算値は、他の計算法によるものに比べて、普通の平面翼の場合、全般的には遜色がない。
- 2) 放物形翼端の場合、Birnbau 級数の係数 $A_n(\eta)$ は翼端 $\eta \rightarrow \pm 1$ において発散する。
- 3) 現在の揚力面理論では、放物形翼端の場合、翼端における $A_n(\eta)$ の特異性を正しく処理していないので、翼端近傍の解を精度よく求めることができない。この欠点は、花岡の方法において強調されて現われる。

本論においては、放物形翼端における問題点の指摘と整理にとどまり、その解決策についてはふれなかった。これについては最近の花岡の研究^{13), 14)}があるが、数値計算におけるその検証は今後の課題としたい。

終りに、本研究にあたり終始懇切なる御指導を賜わった花岡達郎運動性能部々長に深く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 小山鴻一：新しい方法によるプロペラ揚力面の数値的解析，日本造船学会論文集，第132号，(1972)
- 2) 小山鴻一：不均一流中のプロペラ揚力面の実用計算法と計算例，日本造船学会論文集，第137号，(1975)
- 3) 花岡達郎：揚力面の翼端条件と数値解法，船舶技術研究所報告，第11巻，第2号，(1974)
- 4) H. Multhopp : Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting-Surface Theory), A.R.C., T.R., R. & M. No. 2884, (1950)
- 5) 花岡達郎：揚力面の積分方程式の新しい数値解法，船舶技術研究所報告，第6巻，第1号，(1969)
- 6) A.H. Flax : General Reverse Flow and Variational Theorems in Lifting-Surface Theory, J. of Aero. Sci., Vol. 19, No. 6, (1952)
- 7) 花岡達郎：非常常プロペラ揚力面の数値解法，船舶技術研究所報告，第6巻，第5号，(1969)
- 8) K.W. Mangler and B. F. R. Spencer : Some Remarks on Multhopp's Lifting-Surface Theory, A.R.C., T.R., R. & M. No. 2926, (1952)
- 9) H.C. Garner : Accuracy of Downwash Evaluation by Multhopp's Lifting-Surface Theory,

- A.R.C., T.R., R. & M. No. 3431, (1966)
- 10) T.J. Langan and H.T. Wang : Evaluation of Lifting-Surface Programs for Computing the Pressure Distribution on Planar Foils in Steady Motion, NSRDC, Report 4021, (1973)
- 11) J.P. Giesing : Lifting Surface Theory for Wing-Fuselage Combinations, Report DAC-67212, Vol. 1, (1968)
- 12) P.F. Jordan : Remarks on Applied Subsonic Lifting Surface Theory, WGLR-DGRR Annual Meeting, Karlsruhe, (1967)
- 13) 花岡達郎 : 揚力面の数値解における問題点, 日本航空宇宙学会誌, 第23巻, 第262号, (1975)
- 14) 花岡達郎 : 揚力面の翼端条件と数値解法(続), 船舶技術研究所報告, 第13巻, 第1号, (1976)

附録 Collocation 法

本文の Figs. 5-1, 2, Figs. 10~13 に Collocation 法による計算値を示したが, その計算法の概略を述べる。

積分方程式 (1.5) を解くにあたり, Collocation 法においては, 吹上げ標点 (ξ, η) を離散的に与え, その標点で積分方程式が満足されるような解を求める。吹上げ標点としては

$$\eta_{\mu} = \cos \frac{\mu}{M+1} \pi, \quad \mu = 1, 2, \dots, M$$

$$\xi_{\nu} = -\cos \frac{2\nu}{2N+1} \pi, \quad \nu = 1, 2, \dots, N$$

をとる。翼幅方向標点 η_{μ} は花岡の方法におけるものと同様である ((3.6) 式参照)。翼弦方向には N 個の標点 ξ_{ν} を分布させるが, これに対し花岡の方法では, 翼弦中点 $\xi_{\nu} = 0$, 1 点を選ばれ, その点における曲り流れから連立積分方程式の高次の式を導いている。(1.5) 式において $\xi_{\nu} = 0$ とおいたものが花岡の連立積分方程式 (2.1) の第 1 式であるが, 逆に花岡の連立積分方程式 (2.1) の第 1 式において, ξ_m の代わりに $\xi_m + \beta \cdot \xi_{\nu}$ と置けば (1.5) 式となる。

花岡の方法と同様に試験関数として Birnbaum 級数 (2.3) 式を用いると, 積分方程式 (1.5) は, (2.4) 式と同様に

$$-\frac{w(\xi_{\nu}, \eta_{\mu})}{V} = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{N-1} A_n(\eta') K'_{\nu n} d\eta'$$

と書かれる。この核関数 $K'_{\nu n}$ は花岡の解法における (2.6) 式の核関数 K_{0n} において ξ_m の代わりに $\xi_m + \beta \cdot \xi_{\nu}$ を入れたものである。

また, $K'_{\nu n}$ の $Y=0$ における特異性は

$$K'_{\nu n} \approx -\frac{\lambda}{Y^2} \int_{-1}^{\xi_m + \beta \xi_{\nu}} B_n(\xi') d\xi' + \frac{\lambda}{2} \frac{dB_n(\xi')}{d\xi'} \Big|_{\xi' = \xi_m + \beta \xi_{\nu}} \cdot \ln Y$$

で与えられる⁴⁾。

連立一次方程式への変換は本文第 3 節の方法と全く同様に行なうことができる。