揚力面の翼端条件と数値解法（続）

花　岡　達　郎*

Tip Condition and Numerical Method Concerning Lifting-Surface Theory (2)

By

Tatsuro HANAOKA

Abstract

The theory presented in this paper is an extension of the lifting-surface theories of Multhopp for steady flow. New modal functions for pressure distribution on a lifting-surface are adopted and the range of the validity of lifting-surface theory is extended to include the wing tip by introducing the condition "tip-upwash finite".

The analyses in the previous paper is not available for practical use, because a wrong course was taken. They are corrected in this paper.

まえがき

揚力面の数値解法には圧力の基本の形（mode function という）を仮定し，それの積み重ねで一般を計算する mode function 法（MFM と略記する）と，翼を多数の box に分割し，離散的に仮定した圧力分布によって解を求める vortex-lattice 法（VLMという）の2系列がある。前者は積分方程式の核に含まれる対数特異性の処理がむずかしく，なかなか精度よい解が得られないため，最近の評価は芳しくない[1]。しかし MFM の mode function は殆んど揚力面の解析解とみなされるものが選ばれるので，欠点さえ処理できれば，少ない項数で VLM より遥かによい精度の解が得られるはずである。

本文は MFM の一つの欠点となっている翼端吹上げの特異性を除く方法について述べたものである。この問題は矩形翼端と円形翼端ではその性質にかなりの相違がある。筆者は前著[2]でこの問題を取上げたが，それは筆者の考案した積分方程式の解法[3]（核関数展開法と呼ぶことにする）に限定した解析で，しかも考えの基本に的をはずれたところがあったため翼端問題の解決になっていない。本文はそれらを撤回し，核関数展開法だけでなく，一般の MFM 法に適用できる翼端問題の解決法を示したものである。

<記号>

$x,\ y,\ z$　任意点の座標（揚力の働く方向を z 軸の正とする）

x',y',z'　揚力要素の座標

ρ　流体密度

Π　揚力分布密度

$\gamma=\Pi/(\rho V^2)$

$w=\dfrac{1}{V}\left.\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0}$　無次元吹上げ速度

---

*　運動性能部　原稿受付：昭和50年9月17日

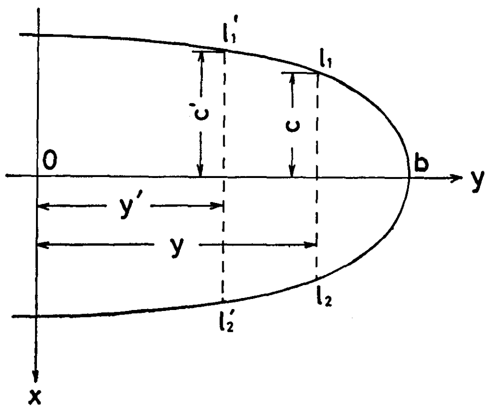

図-1

V	前進速度
b	半翼幅
l_1, l_2	y 位置の前後縁の x 座標
l_1', l_2'	y' 位置の前後縁の x 座標

$c=(l_2-l_1)/2,\ x_0=(l_1+l_2)/2$

$c'=(l_2'-l_1')/2,\ x_0'=(l_1'+l_2')/2$

$\xi=(x-x_0)/c,\ \xi'=(x'-x_0')/c'$

$\beta=c/c',\ \lambda=b/c'$

$\eta=y/b,\ \eta'=y'/b$

$Y=\lambda|\eta-\eta'|,\ Y_1=Y/2$

$X=(x-l_1')/(2c'),\ X'=(x'-l_1')/(2c')$

$\varphi=\cos^{-1}\eta$

$a(\eta)=c/\sqrt{1-\eta^2}$

$\lambda_n(\xi)$	翼弦方向 mode function。本文の中では運算の便宜上4種類のものを使いわけている。
Φ	速度ポテンシャル
ϕ	加速度ポテンシャル

1. mode function と翼端吹上げ

1.1 mode function

説明を簡単にするため解析を x 軸の負の方向に一定速度で進む定常直進揚力面の線型理論に限定する。更に特にことわらない限り揚力面の平面形は前後および左右それぞれに対称なものとする。

圧力分布の mode function としては，翼弦方向には Birnbaum 関数列，また翼幅方向には揚力線理論の Prandtl 関数列が用いられるのが一般である[4]。即ち無次元揚力分布密度 γ を

$$\gamma=A_0(\eta)\lambda_0(\xi)+A_1(\eta)\lambda_1(\xi)+A_2(\eta)\lambda_2(\xi)+\cdots \tag{1.1.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_0(\xi)=\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}},\quad \lambda_n(\xi)=\xi^{n-1}\sqrt{1-\xi^2}\quad(n\geq1)\\ &A_n(\eta)=\sqrt{1-\eta^2}\sum_{r=0}^{m}s_{nr}\eta^r\end{aligned}\right\} \tag{1.1.2}$$

のように表わす。この式は単に2次元薄翼と揚力線の理論結果を組合せたものである。Jordan[5] は円形揚力面の場合で，Birnbaum 関数列が極めてよい近似性をもつことを数値的に示したが，これまでこの関数列が最も完備したものであるかどうかの検討がなされた例は見当たらない。まず本節では圧力分布の基本形から調べてみる。

p を圧力とすると，線型理論では速度と加速度のポテンシャルは

$$V\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\phi=-\frac{p}{\rho} \tag{1.1.3}$$

の関係にある。揚力面の境界条件は

$$w=\frac{1}{V}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} \tag{1.1.4}$$

であるから，それに対応する加速度場の境界条件は

$$\frac{1}{V^2}\left.\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{\partial w}{\partial x}\quad（揚力面内）\tag{1.1.5}$$

$$\phi|_{z=0}=0\quad（揚力面外）\tag{1.1.6}$$

となる。

揚力面の流場を加速度場で考えると，不連続面は揚力面上だけにあり，その外では至るところ連続である。しかも ϕ は

$$\Delta\phi=0 \tag{1.1.7}$$

を満足するので，揚力面が特定の形状の場合には加速度場のポテンシャル問題としての取扱いが可能で，基礎的研究に有効に役立っている。

ポテンシャル論的揚力面理論が一般のポテンシャル論と異なるところは，その解が揚力面の周縁で0になるものばかりでなく，平板の場合，即ち (1.1.5) の右辺が0となる境界条件を満たす解として，周縁で無限大になるものを取上げる必要のあることである。前者は第1種ポテンシャル，後者は Kinner[6] の第2種ポテンシャルに相当するものであるが，MFMにおける問題点の多くはこの第2種ポテンシャルに由来している。

1.1.1 矩形翼端

Landahl[7]は asymptotic expansion の方法を用いて揚力面の前後縁附近の第2種ポテンシャルの形を求めた。微小量 ε を用いて前後縁附近の場を拡大した座標

$$\bar{x}=(x-l_1)/\varepsilon,\quad \bar{z}=z/\varepsilon \tag{1.1.8}$$

によると，(1.1.7) は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\bar{z}^2}=0 \tag{1.1.9}$$

と書かれる。$\partial/\partial z=\varepsilon^{-1}\partial/\partial\bar{z}$ であるから，(1.1.5), (1.1.6) は

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\right|_{\bar{z}=0}&=0, & \bar{x}&>0\\ \phi|_{\bar{z}=0}&=0, & \bar{x}&<0\end{aligned}\right\} \tag{1.1.10}$$

となる。この境界条件を満たす (1.1.9) の解は

$$\phi=C(y)Re\{(\bar{x}+i\bar{z})^{-m-1/2}\} \tag{1.1.11}$$

である。$C(y)$ は任意常数，m は整数である。

揚力面の後縁についても同様に

$$\bar{x}=(l_2-x)/\varepsilon,\quad \bar{z}=z/\varepsilon \tag{1.1.12}$$

によって座標拡大を行なうと，上と同じ方程式が得られるので，その解は(1.1.11)と同形になる。

後縁では Kutta の流出条件を満たす必要があるので，最低次の項は $m=-1$ であるが，前縁にはこのような拘束はない。外部領域即ち揚力面全体の解との matching によって最低次の $m=0$ が定まる。揚力面上の圧力分布は (1.1.11) で $\bar{z}=0$ と置いたものであるから，前後縁の解を合せたものが(1.1.2)の$\lambda_0(\xi)$であり，その第2項以下の $\lambda_n(\xi)$ は (1.1.11) の m の高次の解に対応する。

以上と同じ方法で翼端の解析を行なってみる。翼端の y 座標を b とし，その近傍で座標拡大するため

$$\bar{y}=(b-y)/\varepsilon,\quad \bar{z}=z/\varepsilon \tag{1.1.13}$$

と置くと，(1.1.7) は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\bar{y}^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial\bar{z}^2}=0 \tag{1.1.14}$$

となる。境界条件

$$\left.\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi}{\partial\bar{z}}\right|_{\bar{z}=0}&=0, & \bar{y}&>0\\ \phi|_{\bar{z}=0}&=0, & \bar{y}&<0\end{aligned}\right\} \tag{1.1.15}$$

を満たす解は

$$\phi=C(x)Re\{(\bar{y}+i\bar{z})^{-m-1/2}\} \tag{1.1.16}$$

である。この場合も $C(x)$ および m は揚力面の解との matching によって定まる。(1.1.1) では $m\leq-1$ となっているが，これの定め方は後節に示すようになかなかむずかしい。

1.1.2 円形翼端

円形翼端近傍の解の形は円形揚力面の Kinner の解析解と同じになると考えてよい。Kinner の第1種ポテンシャルによる圧力分布は

$$\begin{aligned}
\phi_1{}^0&=C_1{}^0\sqrt{1-r^2}=C_1{}^0\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\eta^2}\\
\phi_2{}^1&=C_2{}^1r\sqrt{1-r^2}\cos\psi=C^1{}_2\xi\ \sqrt{1-\xi^2}(1-\eta^2)\\
\phi_3{}^0&=C_3{}^0(2-5r^2)/3\cdot\sqrt{1-r^2}\\
&=C_3{}^0\{2-5\eta^2-5(1-\eta^2)\xi^2\}/3\\
&\quad\times\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\eta^2}\\
\phi_3{}^2&=C_3{}^2r^2\sqrt{1-r^2}\cos 2\psi\\
&=C_3{}^2\{(1-\eta^2)\xi^2-\eta^2\}\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\eta^2}
\end{aligned} \tag{1.1.17}$$

であり，第2種ポテンシャルによる圧力分布は

$$\phi_n=C_n\frac{r^n}{\sqrt{1-r^2}}\cos n\Psi$$

即ち

$$\left.\begin{aligned}
\phi_0&=\frac{C_0}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\eta^2}}\\
\phi_1&=\frac{C_1\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\\
\phi_2&=\frac{C_2\{(1-\eta^2)\xi^2-\eta^2\}}{\sqrt{1-\xi^2}\sqrt{1-\eta^2}}\\
\phi_3&=\frac{C_3\{(1-\eta^2)\xi^3-3\eta^2\xi\}}{\sqrt{1-\xi^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{1.1.18}$$

である。これは (1.1.1) とはかなり異なる形である。前後反対称の圧力分布の η 方向の関数形は有理式で翼端吹上げに特異性はない。一方前後対称の圧力分布の η 方向の関数には $1/\sqrt{1-\eta^2}$ が含まれ，翼端吹上げ

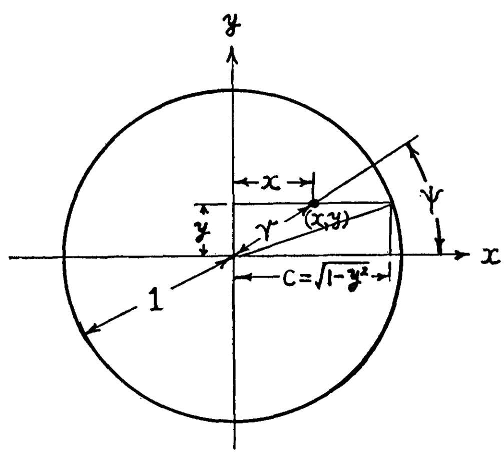

図-2

に特異性がある。

(1.1.18) の積み重ねでは平板翼に対する解は翼端で収束しないし[5]，また矩形翼の corner 部の解は (1.1.1) のような単純なものではない[7]。少ない数の mode function の積み重ねで翼端近傍まで精度よい数値解を得るには，mode function としては翼弦方向はそのままでよいとしても，翼幅方向は従来の形にとらわれない方がよいし，また (1.1.18) そのままの形がよいとも言えない。要はどうしたら翼端近傍で安定した数値解が得られるかということで，これが次節以下に述べる MFM の翼端問題の主題である。

1.2 翼端吹上げの特異性

圧力分布に対し mode function を定めると，解法に強い制限が加わるので，それの選定は MFM にとって極めて重要である。例えば mode function としてそれの翼端吹上げが有限になるものだけを選んだなら解は収束しない。したがって mode function として個々には翼端吹上げに特異性があってもよい。ただそれの有限個の組合せによって特異性が消去できるものであれば，(1.1.16) における m の低次のもの (m の低次のものほど翼端吹上げの特異性は高次となる) まで取上げておいた方が翼端附近での数値解の安定がよいであろう。ただどこまで低次のものをとったらよいかは経験に待つより外に方法がないが，それを支配するのは翼端吹上げである。最低次の m を推定する手掛りとして，mode function 個々の翼端吹上げの特異性を MFM の一つ，Multhopp 法[8] を利用して調べてみる。

mode function $\lambda_n(\xi)$ を用いると，揚力面の積分方程式は

$$-w(\xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=o}^{R}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}\times\frac{\mu_n(\eta')i_n(\xi,\eta\,;\eta')}{(\eta-\eta')^2}d\eta'$$

$$\mu_n(\eta)=c(\eta)A_n(\eta)/b \tag{1.2.1}$$

$$i_n(\xi,\eta;\eta')\equiv i_n(X,Y_1)=\int_0^1\lambda_n(\xi')\times\left\{1+\frac{X-X'}{\sqrt{(X-X')^2+Y_1{}^2}}\right\}dX'$$

$$X=(x-l_1')/(2c'),\quad X'=(x'-l_1')/(2c'),$$

$$Y_1=|\eta-\eta'|b/(2c') \tag{1.2.2}$$

のように書かれる。ただし $\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}d\eta'$ は Hadamard の意味の発散積分の有限部分を表わす。$i_n(X,Y_1)$ は influence function といわれ，Multhopp 系の MFM で支配的役割をする重要な因子である。

1.2.1 矩形翼

$i_0(X,Y_1)/Y_1{}^2$ は $Y_1=0$ のところに2位の極と対数特異点をもつことはよく知られている。Jordan[5] および Wagner[9] はそれが $X=0$ のところで 3/2 位と 1/2 位の極にかわることを示したが，それは矩形翼端の吹上げ特異性に重要な係わりをもっている。ここでは更に一般の n に対する $i_n(0,Y_1)/Y_1{}^2$ の特異性を簡潔に示す必要があるので，(1.1.2) の $\lambda_n(\xi)$ を組みかえ

$$\lambda_0(\xi)=\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}},\quad \lambda_1=\sqrt{1-\xi^2},\quad \lambda_2=\xi\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\lambda_3(\xi)=(1-\xi^2)^{3/2},\quad \lambda_4=\xi(1-\xi^2)^{3/2}\cdots\cdots \tag{1.2.3}$$

とする。(1.2.2) で $X=0$, $X'=Y_1s$ と置くと

$$i_0(0,Y_1)=Y_1{}^{1/2}f_0(Y_1) \tag{1.2.4}$$

$$f_0(Y_1)=\int_0^{1/Y_1}\sqrt{\frac{1-Y_1s}{s}}\left(1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)ds \tag{1.2.5}$$

と書かれる。

(1.2.5) の積分は $Y_1=0$ としても収束するので，この関数に特異性はない。よって $Y_1=0$ の近傍では

$$\left.\begin{aligned}&f_0(Y_1)=f_0(0)+Y_1f_0'(0)+\cdots\cdots\\&\text{ただし}\\&f_0(0)=\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{s}}\left(1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)ds\\&f_0'(0)=-\frac{1}{2}\int_0^\infty\sqrt{s}\times\left(1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)ds\end{aligned}\right\} \tag{1.2.6}$$

のように表わされる。これらの常数は

$$f_0(0)=\left[\frac{1}{k}\ \frac{dK(k)}{dk}\right]_{k=0.5}$$

または

$$f_0(0)=\frac{4\pi^{3/2}}{\{\Gamma(1/4)\}^2},\quad f_0'(0)=-\frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{12\sqrt{\pi}} \tag{1.2.7}$$

である (附録A参照)。

同じ運算を後縁について行なうと

$$i_0(1,Y_1)=-Y_1{}^{3/2}\int_0^{1/Y_1}\sqrt{\frac{s}{1-Y_1s}}\times\left\{1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right\}ds+\pi \tag{1.2.8}$$

であるから，$i_0(1, Y_1)/Y_1^2$ は $Y_1=0$ のところに2位と1/2位の極があることがわかる。

更に $n>0$ のときの前後縁における i_n/Y_1^2 の特異性を同じ方法で求めると

$$
\begin{aligned}
&i_n(0, Y_1)=Y_1^{n/2+1}f_n(Y_1) && n:\text{奇数}\\
&i_n(0, Y_1)=-Y_1^{(n+1)/2}h_n(Y_1) && n:\text{偶数}\\
&i_n(1, Y_1)=-Y_1^{n/2+1}f_n(Y_1)+\pi b_{n+1} && n:\text{奇数}\\
&i_n(1, Y_1)=-Y_1^{(n+1)/2}h_n(Y_1) && n:\text{偶数}
\end{aligned}
\tag{1.2.9}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
f_n(Y_1)&=2^n\int_0^{1/Y_1}\{s(1-Y_1s)\}^{n/2}\\
&\quad\times\left\{1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right\}ds\\
h_n(Y_1)&=2^{n-1}\int_0^{1/Y_1}(1-2Y_1s)\{s(1-Y_1s)\}^{(n-1)/2}\\
&\quad\times\left\{1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right\}ds
\end{aligned}
\tag{1.2.10}
$$

$$
b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^n}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi=
\begin{cases}
\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots\cdots(n=1)}{2\cdot4\cdot6\cdots\cdots n} & n:\text{偶数}\\
0 & n:\text{奇数}\\
1 & n=0
\end{cases}
\tag{1.2.11}
$$

であるから，i_n/Y_1^2 の特異性は

$$
\begin{aligned}
&i_1(0, Y_1)/Y_1^2\sim Y_1^{-1/2}f_1(0),\\
&i_2(0, Y_1)/Y_1^2\sim Y_1^{-1/2}h_2(0)\\
&i_1(1, Y_1)/Y_1^2\sim -Y_1^{-1/2}f_1(0)+\pi b_2/Y_1^2\\
&i_2(1, Y_1)/Y_1^2\sim -Y_1^{-1/2}h_2(0)
\end{aligned}
\tag{1.2.12}
$$

となる。その係数は

$$f_1(0)=h_2(0)=-4f_0'(0) \tag{1.2.13}$$

である。

(1.2.1) で (1.2.3) の $\lambda_n(\xi)$ に対応する吹上げを $w_n(\xi,\eta)$ の記号で表わすことにし，$\lambda_0(\xi)$ にかかる η 方向の mode function を

$$A_0(\eta)=F_0\sqrt{1-\eta^2} \tag{1.2.14}$$

と仮定すると，$\xi=-1$ の吹上げは

$$w_0(-1,\eta)=\frac{F_0f_0(0)}{2\sqrt{2A}\,\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\eta'^2}}{|\eta-\eta'|^{3/2}}d\eta'+\text{R.P.} \tag{1.2.15}$$

である。ただし $A=b/c$, R.P. は regular part を意味する。この式から $\eta=1$ の近傍の w_0 を求めてみる。

$1-h\ll1$ とすると

$$
\begin{aligned}
w_0(-1,\eta)&=\frac{F_0f_0(0)}{2\pi\sqrt{A}}\boldsymbol{H}\int_h^1\frac{\sqrt{1-\eta'}}{|\eta-\eta'|^{3/2}}d\eta'+\text{R.P.}\\
&=\frac{F_0f_0(0)}{2\pi\sqrt{A}}\boldsymbol{H}\left\{\int_h^\eta\frac{\sqrt{1-\eta'}}{(\eta-\eta')^{3/2}}d\eta'\right.\\
&\quad\left.+\int_\eta^1\frac{\sqrt{1-\eta'}}{(\eta'-\eta)^{3/2}}d\eta'\right\}+\text{R.P.}
\end{aligned}
\tag{1.2.16}
$$

となる。部分積分を行なうなどして有限部分を求めると

$$w_0(-1,\eta)=-\frac{F_0f_0(0)}{2\pi\sqrt{A}}\ln(1-\eta)+\text{R.P.} \tag{1.2.17}$$

が得られる。即ち前縁 corner の吹上げに特異性が現われる。(1.2.7) の $f_0(0)$ を用いると (1.2.17) は Garner and Miller[10] の示した式と一致する。ここでは corner の特異性を前縁吹上げから求めたが，Garner and Miller は翼端吹上げによって求めている。

$n=1,2$ の場合，$i_n(0, Y_1)/Y_1^2$ の特異性は $Y_1^{-1/2}$ であるから，$A_n(\eta)$ の分布形が (1.2.14) と同じならば，翼前縁 corner には吹上げの特異性がないことは同様の計算で確かめられる。これは既に Ray and Miller[11] が数値計算で確認している。また

$$A_0(\eta)=(1-\eta^2)^{m/2}\quad m\geq3 \tag{1.2.18}$$

として $w_0(-1,\eta)$ を計算しても前縁 corner に特異性は現われない。次に

$$A_n(\eta)=\frac{F_n}{\sqrt{1-\eta^2}}\qquad n\geq1 \tag{1.2.19}$$

として $n>0$ の $w_n(\xi,\eta)$ を計算してみる。

(1.2.1) の核関数は前後縁以外のところでは $\eta=\eta'$ に2位の極と対数特異点があるので，それに対応する (1.2.19) の圧力分布の翼端吹上げを調べてみる。

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|\eta-\eta'|}{\sqrt{1-\eta'^2}}d\eta'=-\ln2$$

であるから核関数の対数特異性による翼端吹上げは有限である。よって2位の極だけを取上げると

$$w_n(\xi,\eta)=\frac{F_ni_n(X,0)}{2\sqrt{2}\,\pi A}\boldsymbol{H}\int_h^1\frac{d\eta'}{\sqrt{1-\eta'}(\eta-\eta')^2}+\text{R.P.} \tag{1.2.20}$$

である。これの運算を行なうと

$$w_n(\xi,\eta)=\frac{F_ni_n(X,0)}{2\sqrt{2}\,\pi A}\boldsymbol{H}\left\{\int_h^1\frac{\sqrt{1-\eta'}}{(\eta-\eta')^2}d\eta'\right.$$

$$-\int_h^1 \frac{d\eta'}{\sqrt{1-\eta'}(\eta-\eta')}\Bigg\}\frac{1}{1-\eta}+\text{R. P.}$$

$$=\frac{F_n i_n\,(X,0)}{2\sqrt{2}\,\pi A}\left\{\left[\frac{\sqrt{1-\eta'}}{\eta-\eta'}\right]_h^1+\int_h^1 \frac{d\eta'}{\sqrt{1-\eta'}(\eta-\eta')}-\int_h^1 \frac{d\eta'}{\sqrt{1-\eta'}(\eta-\eta')}\right\}$$

$$\times\frac{1}{1-\eta}+\text{R. P.} \qquad (1.2.21)$$

であるから，(1.2.19) の圧力分布に対し前後縁を除けば翼端吹上げに特異性のないことがわかる。その前後縁を調べてみる。(1.2.12) で示したように $n=1,2$ に対して $i_n\ (X, Y_1)/Y_1^2$ は前後縁に $1/\sqrt{|\eta-\eta'|}$ の特異性があるので，それに対応する翼端吹上げを計算すると

$$w_1(-1,\eta)=\frac{\sqrt{A}F_1 f_1(0)}{8\pi}\left\{\int_h^\eta \frac{d\eta'}{\sqrt{(\eta-\eta')(1-\eta')}}+\int_\eta^1 \frac{d\eta'}{\sqrt{(\eta'-\eta)(1-\eta')}}\right\}+\text{R. P.}$$

$$=\frac{\sqrt{A}F_1 f_1(0)}{8\pi}\ln(1-\eta)+\text{R. P.} \quad (1.2.22)$$

のように前縁 corner に (1.2.17) と同じ形の吹上げ特異性が現われる。同様にして w_2 等の吹上げ特異性を求めることができる。$i_1(1, Y)/Y_1^2$ には $Y_1^{-1/2}$ の外に Y_1^{-2} の特異性が加わるが，2位の極からは吹上げに特異性が生じないことは(1.2.21)で示した通りである。よって

$$w_2(-1,\eta)=-\frac{\sqrt{A}F_2 f_1(0)}{8\pi}\ \ln(1-\eta)+\text{R. P.}$$

$$w_1(1,\eta)=-\frac{\sqrt{A}F_1 f_1(0)}{8\pi}\ \ln(1-\eta)+\text{R. P.}$$

$$w_2(1,\eta)=-\frac{\sqrt{A}F_2 f_1(0)}{8\pi}\ \ln(1-\eta)+\text{R. P.}$$

$$(1.2.23)$$

となる。

1.2.2 楕円翼

(1.2.2) の変数 X, X' を $X=(1+\xi_1)/2$, $X'=(1+\xi')/2$ によって ξ_1, ξ' に変えると

$$i_n\left(\frac{1+\xi_1}{2},\ Y_1\right)=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \lambda_n(\xi')\times\left\{1+\frac{\xi-\xi'}{\sqrt{(\xi-\xi')^2+Y^2}}\right\}d\xi' \qquad (1.2.24)$$

である。これを

$$l_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \lambda_n(\xi')d\xi'$$

$$j_n(\xi, Y)=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \lambda_n(\xi')\frac{\xi-\xi'}{\sqrt{(\xi-\xi')^2+Y^2}}d\xi'$$

$$i_n\left(\frac{1+\xi}{2},\ Y_1\right)=l_n+j_n(\xi, Y)$$

$$Y=2Y_1=\lambda|\eta-\eta'|$$

$$(1.2.25)$$

と書き，$\lambda_n(\xi)$ については

$$\lambda_{-1}=-1/\sqrt{1-\xi^2},\ \ \lambda_0(\xi)=-\xi/\sqrt{1-\xi^2},$$

$$\lambda_1(\xi)=\sqrt{1-\xi^2},\ \ \lambda_2(\xi)=\xi\sqrt{1-\xi^2},$$

$$\lambda_n=\xi^{n-1}\sqrt{1-\xi^2}$$

$$(1.2.26)$$

のように前後対称と反対称のものに分けてしまうと，l_n は対称分布，$j_n(0, Y)$ には反対称分布だけが関与する。それで吹上げもこの2つの系列に分けて考える。

1.2.2.1 対称分布

n が偶数のとき $l_n=0$ で奇数のときは

$$l_{-1}=-\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=-\frac{\pi}{2}b_0$$

$$l_0=0$$

$$l_{2n-1}=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 \frac{\xi^{2n-2}-\xi^{2n}}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi=\frac{\pi}{2}(b_{2n-2}-b_{2n})$$

$$(1.2.27)$$

となる。b_n は (1.2.11) に示す常数である。

これに対する吹上げは Kinner が揚力線と言っているものに該当する。

$$c(\eta)=a\sqrt{1-\eta^2} \qquad (1.2.28)$$

$$\check{A}_{2n-1}=\frac{\check{F}_{2n-1}}{\sqrt{1-\eta^2}} \qquad (1.2.29)$$

とする。$b/a=A$ と書くと

$$\check{w}_{2n-1}(\eta)=\frac{\check{F}_{2n-1}l_{2n-1}}{2\pi A}\boldsymbol{H}\int_{-1}^1 \frac{d\eta'}{(\eta-\eta')^2}$$

$$=-\frac{\check{F}_{2n-1}l_{2n-1}}{\pi A}\ \frac{1}{1-\eta^2} \qquad (1.2.30)$$

となり，吹上げは翼端に1位の極をもつ。また

$$\hat{A}_{2n-1}=\hat{F}_{2n-1}\sqrt{1-\eta^2} \qquad (1.2.31)$$

とすると，翼端吹上げは

$$\hat{w}_{2n-1}(\eta)=\frac{\hat{F}_{2n-1}l_{2n-1}}{2\pi A}\boldsymbol{H}\int_{-1}^1 \frac{1-\eta'^2}{(\eta-\eta')^2}d\eta'$$

$$=\frac{\hat{F}_{2n-1}l_{2n-1}}{\pi A}\boldsymbol{H}\int_\eta^1 \frac{1-\eta'}{(\eta-\eta')^2}d\eta'+\text{R. P.}$$

$$=-\frac{\hat{F}_{2n-1}l_{2n-1}}{\pi A}\ln\,(1-\eta)+\text{R. P.}$$

$$(1.2.32)$$

のように対数特異点をもつことになる。

1.2.2.2 反対称分布

翼端吹上げの特異性は翼弦中点における吹上げから求めると計算が容易である。対称分布に対して $j_n(0, Y)=0$ であるから，n が偶数の場合だけ取上げる。

(1.2.1) の右辺の積分から吹上げに特異性が現われるとすれば，それは j_n/Y^2 の $Y=0$ における極および対数項に由来する。$\eta=\cos\varphi$ と置くと，(1.2.28) で表わされる半弦長は $c(\eta)=a\sin\varphi$ である。$\eta=1$ で $|\eta-\eta'|\to 0$ のとき

$$\lim_{|\eta-\eta'|\to 0} Y=\lim_{\varphi'\to 0}\frac{b|1-\cos\varphi'|}{a\sin\varphi'}=0 \qquad (1.2.33)$$

であるから，翼端吹上げの特異性は j_n/Y^2 の極および対数特異項だけについて調査すればよい。計算を行なってみると対数項は翼端特異性に関係ないことが確かめられるので，核の対数項関係の運算は省略する。$j_n(0, Y)/Y^2$ の2位の極の係数 $j_n(0,0)$ は

$$j_0(0,0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi=\frac{\pi}{2}b_2$$

$$j_{2n}(0,0)=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^{2n}(1-\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi$$

$$=-\frac{\pi}{2}(b_{2n}-b_{2n+2}) \qquad (1.2.34)$$

のように表わされる。

(1.2.29) および (1.2.31) と同じに

$$\check{A}_{2n}=\frac{\check{F}_{2n}}{\sqrt{1-\eta^2}} \qquad (1.2.35)$$

$$\hat{A}_{2n}=\hat{F}_{2n}\sqrt{1-\eta^2} \qquad (1.2.36)$$

と仮定すると，それに対応する翼端近傍の吹上げは

$$\check{w}_{2n}(\eta)=-\frac{\check{F}_{2n}j_{2n}}{\pi A}\,\frac{1}{1-\eta^2}+\mathrm{R.P.} \qquad (1.2.37)$$

$$\hat{w}_{2n}(\eta)=-\frac{\hat{F}_{2n}j_{2n}}{\pi A}\,\ln(1-\eta)+\mathrm{R.P.} \qquad (1.2.38)$$

となる。

Kinner の解 (1.1.17), (1.1.18) と同じように，$A_{2n}(\eta)$ を η の有理式で表わすと，翼端吹上げに特異性は現われない。

1.3 翼端吹上げ有限の条件

前節に示した翼端吹上げの特異性を避ける最も単純な方法は，そのような mode function を (1.1.1) から除外することである。例えば矩形状翼の場合

$$A_n(\eta)=(1-\eta^2)^{m/2}\sum_{r=0}^{\infty}s_{nr}\eta^r \qquad (1.3.1)$$

とし，$n=0$ では $m=3$, $n\geq 1$ では $m=1$ というように m の次数を増せばよいし，また楕円翼では $A_n(\eta)$ をすべて有理式で表わすようにすればよい。しかしこうすると数値計算で収束解がなかなか得られないという不都合に出合う。それで解析解を参照して最低次の m を定め，それによって生じる翼端吹上げの特異性は互に消し合うように A_n の組合せを選ぶ。この方法は既に Kinner の理論の中に見られるが，数値解法で取上げた例は無い。以下に翼端吹上げの特異性を消す方法，即ち翼端吹上げ有限の条件について述べる。

1.3.1 矩形翼端

(1.1.16) を参考にして翼幅方向の圧力分布を

$$\left.\begin{aligned}A_0(\eta)&=\sqrt{1-\eta^2}\,F_0(\eta)\\ A_n(\eta)&=\frac{F_n(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}}, \qquad n\geq 1\end{aligned}\right\} \qquad (1.3.2)$$

のように置く。

この圧力分布に対する翼端前後縁近傍の吹上げは，(1.2.22), (1.2.23) を参照すると

$$w(-1,\eta)=-\frac{F_0f_0(0)}{2\pi\sqrt{A}}\ln(1-\eta)+\frac{\sqrt{A}f_1(0)}{8\pi}\times(F_1-F_2)\ln(1-\eta)+\mathrm{R.P.} \qquad (1.3.3)$$

$$w(1,\eta)=-\frac{\sqrt{A}f_1(0)}{8\pi}(F_1+F_2)\ln(1-\eta)+\mathrm{R.P.} \qquad (1.3.4)$$

のように表わされる。ただし $F_n=F_n(\pm 1)$ である。

$$F_1=-F_2 \qquad (1.3.5)$$

ならば後縁 corner の吹上げの特異性はなくなる。更に

$$4F_0f_0(0)-Af_1(0)\cdot(F_1-F_2)=0 \qquad (1.3.6)$$

ならば前縁 corner の吹上げの特異性もなくなる。(1.3.5), (1.3.6) および (1.2.7), (1.2.13) により

$$\frac{F_1}{F_0}=-\frac{F_2}{F_0}=\frac{24\pi^2}{A\{\Gamma(1/4)\}^4}\fallingdotseq\frac{1.370}{A} \qquad (1.3.7)$$

が得られる。即ち，矩形翼端では吹上げを有限にするには，そこで圧力が無限大になるような項が必要で，それは縦横比に逆比例して増加する。$A=b/c$ の c は翼端における半弦長をとる。

1.3.2 円形翼端

Kinner の解を見ると，前後対称分布にかかる翼幅方向分布形は $F_n(\eta)/\sqrt{1-\eta^2}$, これには翼端吹上げ

に特異性がある。一方，反対称分布にかかる翼幅方向分布形は η の有理式で，吹上げに翼端特異性はない。したがって基本解の吹上げ特異性の消去は対称分布の中だけで行なうわけで，完全には消えない[12]。数値解法の場合にこのようにすると収束が悪くて実用にならないから，反対称分布の翼幅方向分布形も対称分布のものと同形にし，両方で吹上げ特異性を消去することを考えてみる。

$$A_n(\eta)=\frac{F_n(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}},\quad F_n(\eta)=\sum_{r=0}^{\infty}s_{nr}(1-\eta^2)^r \tag{1.3.8}$$

と置くと，(1.2.30) と (1.2.37) とより翼端近傍の吹上げは

$$w(0,\eta)=-\frac{1}{\pi A}\ \frac{1}{1-\eta^2}\left\{\sum_{n=0}^{q}F_{2n-1}l_{2n-1}+\sum_{n=0}^{q}F_{2n}j_{2n}\right\}+\mathrm{R.P.}$$

ただし $F_n=s_{n0}$

のように表わされる。したがって

$$\sum_{n=0}^{q}F_{2n-1}l_{2n-1}+\sum_{n=0}^{q}F_{2n}j_{2n}=0 \tag{1.3.9}$$

とすれば翼端吹上げの特異性は除かれる。

$$F_{2n-1}=F_{-1},\quad F_{2n}=F_0 \tag{1.3.10}$$

とすると，(1.2.27)，(1.2.34) により

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{q}F_{2n-1}l_{2n-1}=-\frac{\pi}{2}b_{2q}F_{-1}\\&\sum_{n=0}^{q}F_{2n}j_{2n}=\frac{\pi}{2}b_{2q+2}F_0\end{aligned}\right\} \tag{1.3.11}$$

となる。b_n は収束の悪い数列であるから，項数を多くとるだけで吹上げ特異性を消すのはなかなかである。

(1.3.9) を厳密に満たすためには翼弦方向 mode function の最終項に

$$\lambda_{2q+1}=\frac{\xi^{2q}}{\sqrt{1-\xi^2}},\qquad \lambda_{2q+2}=\frac{\xi^{2q+1}}{\sqrt{1-\xi^2}} \tag{1.3.12}$$

を配置すればよい。これの翼幅方向分布関数が翼端で

$$F_{2q+1}=F_{-1},\qquad F_{2q+2}=F_0 \tag{1.3.13}$$

ならば，

$$\sum_{n=0}^{q+1}F_{2n-1}l_{2n-1}=0,\qquad \sum_{n=0}^{q+1}F_{2n}j_{2n}=0$$

となり，(1.3.9) が満足される。更に $F_0=-F_{-1}$ とすると，λ_{-1}，λ_0 および λ_{2q+1}，λ_{2q+2} による翼弦方向の圧力分布は

$$F_0\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}},\qquad -F_0\xi^{2q}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}$$

となり，Kutta の流出条件が満足される。

以上を見ると少ない項数で Kutta の条件と翼端条件の両方を満足させるには，反対称分布についても翼幅方向分布形が (1.3.8) の形をとることの必要性がわかる。

結局，圧力分布の mode function 表示としては

$$\gamma=\sum_{n=0}^{2q+1}\lambda_nA_n(\eta)=\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}\sum_{n=0}^{2q+1}\lambda_nF_n(\eta) \tag{1.3.14}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_0=\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}},\quad \lambda_1=\sqrt{1-\xi^2},\quad \lambda_2=\xi\sqrt{1-\xi^2},\\&\lambda_3=\xi^2\sqrt{1-\xi^2},\quad \lambda_{2q}=\xi^{2q-1}\sqrt{1-\xi^2},\\&\lambda_{2q+1}=\xi^{2q}\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

のように表わし，

$$F_n(\pm1)=(-1)^nF_0 \tag{1.3.16}$$

とすれば翼端吹上げの特異性は除かれる。λ_n の n が偶数で終るときも同じで，(1.3.15) の最終項の mode function は $\lambda_n=\xi^{n-1}\sqrt{(1-\xi)/(1+\xi)}$ とする。(1.3.15) と (1.3.16) によると

$$\sum_{n=0}^{R}\lambda_n(\xi)F_n(\pm1)=0 \tag{1.3.17}$$

が得られる。これが翼端吹上げ有限の第1の条件である。

$F_n(\eta)$ は η の有理関数と仮定しているので $\eta=1$ の近傍では $\sum\lambda_nF_n(\eta)$ は $1-\eta$ に比例し，したがって γ は $\sqrt{1-\eta}$ に比例することになる。即ち個々の $A_n(\eta)$ は翼端で無限大であるが，それの総和（揚力係数）は翼端で0になる。

以上のようにすると翼端吹上げ特異性のうち極の部分は除かれるが，まだ対数特異性が残っている。(1.3.8) の $1-\eta^2$ の係数 s_{n1} について (1.3.16) と同じに

$$s_{n1}=(-1)^ns_{01} \tag{1.3.18}$$

になるように s_{n1} を定めれば，吹上げの対数特異性は消える。s_{n1} についても (1.3.17) と同じに

$$\sum_{n=0}^{R}\lambda_n(\xi)s_{n1}=0 \tag{1.3.19}$$

が成立つ。これが翼端吹上げ有限の第2の条件である。

2. 数値解法と翼端問題

2.1 Multhopp 法における翼端問題の処理

従来，MFM では $A_n(\eta=\pm 1)=0$ と仮定し，翼端吹上げの特異性は無視している。既に前章で説明したように，この mode function によると制約が強過ぎて翼端附近で解が安定しない。そこで前章の解析結果に基づき翼端附近の解が精度よく求められる解法を組立ててみる。矩形翼端と円形翼端とでは少し計算法が異なるが，ここでは円形翼端の場合だけを取上げる。

前章では半翼弦長 c を (1.2.28) のように書き a を一定と仮定したが，一般には

$$c(\eta)/b=a(\eta)\sqrt{1-\eta^2} \tag{2.1.1}$$

である。この $a(\eta)$ を $\lambda_N(\xi)$ にかかる η 方向分布関数 $A^{(N)}(\eta)$ と組みにして

$$a(\eta)A^{(N)}(\eta)=\frac{F^{(N)}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \tag{2.1.2}$$

と書き，$F^{(N)}(\eta)$ を前章の $F_n(\eta)$ と同じに取扱う。$a(\eta)$ は $\eta=\pm 1$ で有限確定値をとり，それは

$$a(1)=\lim_{\varphi\to 0}\frac{c(\varphi)}{b\sin\varphi}=\frac{1}{b}\left.\frac{dc}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}$$

から求められるものとする。ただし $\eta=\cos\varphi$ である。

$$G^{(N)}(\varphi,\varphi')=F^{(N)}(\eta')i_N(\xi,\eta\,;\eta') \tag{2.1.3}$$

と書くと，(1.2.1) は

$$-w(\xi,\eta)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\boldsymbol{H}\int_0^{\pi}$$

$$\times\frac{G^{(N)}(\varphi,\varphi')\sin\varphi'}{(\cos\varphi-\cos\varphi')^2}d\varphi' \tag{2.1.4}$$

のように表わされる。この核関数には対数特異性があるので，実用計算ではここで Mangler and Spencer [13]のようにしてそれを精度よく積分する演算を挿入しなければならないが，理論の明確さを保つため，それを行なわないまま解析を進める。(2.1.4) の φ' について部分積分を行なうと

$$-w(\xi,\eta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\left\{\frac{G^{(N)}(\varphi,\pi)}{1+\varepsilon+\eta}+\frac{G^{(N)}(\varphi,0)}{1+\varepsilon-\eta}\right\}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\boldsymbol{H}\int_0^{\pi}\frac{(\partial/\partial\varphi')G^{(N)}(\varphi,\varphi')}{\cos\varphi-\cos\varphi'}d\varphi' \tag{2.1.5}$$

である。翼端条件 (1.3.17) により，右辺第1項は0とみなす。

$$G^{(N)}(\varphi,\varphi')=\frac{2}{m+1}\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_s G^{(N)}(\varphi,\varphi_s)$$

$$\times\sum_{r=0}^{m+1}\varepsilon_r\cos r\varphi_s\cos r\varphi' \tag{2.1.6}$$

と置いて (2.1.5) の積分を行なう。ただし

$$\varphi_s=s\pi/(m+1),\quad \varepsilon_{s,r}=\begin{cases}1/2, & s,r=0,\ m+1\\ 1, & s,r\neq 0,\ m+1\end{cases}$$

とする。

$$w(\xi_p,\eta)\equiv w^{(p)}(\varphi),\quad G^{(N)}(\varphi,\varphi_s)=G_s^{(N)}(\varphi) \tag{2.1.7}$$

$$S_n(\varphi)=\oint_0^{\pi}\frac{\sin n\varphi'}{\cos\varphi-\cos\varphi'}d\varphi'$$

と書くと，(2.1.5) は

$$-w^{(p)}(\varphi)=\frac{1}{\pi(m+1)}\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_s G_s^{(N)}(\varphi)$$

$$\times\sum_{r=1}^{m+1}\varepsilon_r r\cos r\varphi_s S_r(\varphi) \tag{2.1.8}$$

となる。

$S_n(\varphi)$ は $\eta=\pm 1$ に対数特異点をもつ関数で，$\eta=1$ の近傍では

$$\lim_{\eta\to 1}S_n(\varphi)\simeq n\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}+V_n \tag{2.1.9}$$

のように表わされる（附録B参照）。$\varphi\to 0$ のとき $-w^{(p)}(\varphi)$ の中の $\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}$ を係数にもつ項を $-w^{(p)*}$ で表わすと

$$\lim_{\varphi\to 0}-w^{(p)*}(\varphi)=\frac{1}{\pi(m+1)}\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_s G_s^{(N)}(\varphi)$$

$$\times\sum_{r=1}^{m+1}\varepsilon_r r^2\cos r\varphi_s\ln\frac{1+\eta}{1-\eta} \tag{2.1.10}$$

である。 右辺の $\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}$ の係数は(2.1.6)を φ' で2回微分して $\varphi'=0$ とした式に相当するので

$$\lim_{\varphi\to 0}-w^{(p)*}(\varphi)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\frac{\partial^2}{\partial\varphi'^2}$$

$$G^{(N)}(0,\varphi')|_{\varphi'=0}\cdot\ln\frac{1+\eta}{1-\eta} \tag{2.1.11}$$

と書かれる。

(1.3.8) の第2式によると

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}F^{(N)}(\varphi)|_{\varphi=0}=s_{n1}$$

であるから，(1.3.17)，(1.3.19) の翼端条件を用いると

$$\sum_{N=0}^{R}\frac{\partial^2}{\partial\varphi'^2}G^{(N)}(0,\varphi')|_{\varphi'=0}=0$$

が得られる。結局

$$-w^{(p)}(0)=\frac{1}{\pi(m+1)}\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_s G_s{}^{(N)}(0)$$

$$\times\sum_{r=1}^{m+1}\varepsilon_r r^2\cos r\varphi_s\cdot V_r \qquad (2.1.12)$$

となる。$-w^{(p)}(\pi)$ についても同じ方法によって同形の表示式が得られる。

以上，前章で導いた翼端条件が数値解法の中でどのように使われるかを具体的に示した。

両翼端では (1.3.16) の関係があるので，そこでは $F^{(0)}(0)$, $F^{(0)}(\pi)$ がわかれば他は定まる。$\varphi=\varphi_\nu=\nu\pi/(m+1)$ とすると，$F^{(N)}(\varphi_\nu)$ の未知数の数は $m\times(R+1)+2$ であるから，(2.1.8) と (2.1.12) の連立方程式からそれらが得られる。$F^{(0)}(0)$, $F^{(0)}(\pi)$ は単に他の位置の $F^{(N)}(\varphi_\nu)$ を求めるために必要な量で，最終解として表面に現われることはない。したがって，$w^{(p)}(0)$ としては，p をいずれか一つ定め，翼形状から $\lim_{\varphi\to 0}w^{(p)}(\varphi)$ を求めたものを用いればよい。

2.2 核関数展開法における円形翼端の特殊性と対応策

核関数展開による数値解法では核関数を展開したために，円形翼端の場合，一般の MFM とはまた別の新たな特異性が翼端に加わることになる。これは核関数展開法特有の翼端問題であるが，これまでそれの処理を特に考えなかった。一般の翼端問題に入る前にまず本節ではその問題について，従来の mode function を用いた場合の対応策を考えてみる。ただし矩形翼端では従来のままでよい。

揚力面の積分方程式を核関数の Taylor 展開によつて連立積分方程式に書き改めると

$$-w^{(M)}(\eta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}$$

$$\times A^{(N)}(\eta')K^{(MN)}(\eta,\eta')d\eta' \qquad (2.2.1)$$

ただし

$$w^{(0)}(\eta)=w(0,\eta),\ w^{(k)}(\eta)=\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^k w(\xi,\eta)|_{\xi=0} \qquad (2.2.2)$$

$$K^{(0N)}(\eta,\eta')=\frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\lambda_N(\xi')}{Y^2}\left\{\frac{\xi'}{\sqrt{Y^2+\xi'^2}}-1\right\}d\xi'$$

$$K^{(MN)}(\eta,\eta')=-\frac{(-1)^M\lambda\beta^M}{2}\int_{-1}^{1}$$

$$\times\lambda_N(\xi')\left(\frac{\partial}{\partial\xi'}\right)^M\frac{\xi'}{Y^2\sqrt{Y^2+\xi'^2}}d\xi' \qquad (2.2.3)$$

である。この式の $A^{(N)}(\eta)$ は (1.1.1) の $A_n(\eta)$ と同じ意味の mode function とする。$\lambda_N(\xi)$ を (1.1.2) と同じに Birnbaum 関数列とすると，核関数 $K^{(MN)}$ は次に示すように $Y=0$ に2位の極と対数特異点をもつ。即ち

$$\left.\begin{aligned}
K^{(00)}&\sim\lambda\left\{-\frac{1}{Y^2}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\ln Y\right\}\\
K^{(01)}&=-\frac{\pi}{4}\frac{\lambda}{Y^2}\\
K^{(02)}&\sim\frac{\lambda}{3}\left(\frac{1}{Y^2}+\frac{3}{2}\ln Y\right)\\
K^{(10)}&\sim\lambda\beta\left(\frac{1}{Y^2}-\frac{1}{2}\ln Y\right)\\
K^{(11)}&\sim\lambda\beta\left(\frac{1}{Y^2}+\frac{1}{2}\ln Y\right)\\
K^{(20)}&\sim\lambda\beta^2\left(\frac{1}{Y^2}-\frac{3}{2}\ln Y\right)\\
K^{(22)}&\sim\lambda\beta^2\left(\frac{1}{Y^2}+\frac{3}{2}\ln Y\right)\\
K^{(30)}&\sim\lambda\beta^3\left(\frac{1}{Y^2}-\frac{9}{2}\ln Y\right)\\
K^{(31)}&\sim\lambda\beta^3\left(\frac{1}{Y^2}-\frac{3}{2}\ln Y\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.4)$$

である[3]。(2.2.4) からわかるように核関数 $K^{(MN)}$ の特異性は $Y=0$ におけるもののほかに翼端に $1/c'$ の高次のものが加わる。これは mode function として低次のものをとったのと同じ効果をもっているので，それを無視し，形式的に数値積分を行なったのでは翼端附近で解が安定しない。それでそれらの特異性を分離して

$$K^{(MN)}=\frac{\beta^M k^{(MN)}}{\lambda(\eta-\eta')^2}=\frac{\{a(\eta)\}^M}{\{a(\eta')\}^{M-1}}$$

$$\times\frac{(1-\eta^2)^{M/2}}{(1-\eta'^2)^{(M-1)/2}}\frac{k^{(MN)}(\eta,\eta')}{(\eta-\eta')^2} \qquad (2.2.5)$$

のように表わし，(2.2.1) に適用すると

$$-w^{(M)}(\eta)=\frac{\{a(\eta)\}^M}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}(1-\eta^2)^{M/2}$$

$$\times\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}\frac{A^{(N)}(\eta')k^{(MN)}(\eta,\eta')}{\{a(\eta')\}^{M-1}(1-\eta'^2)^{(M-1)/2}(\eta-\eta')^2}d\eta' \qquad (2.2.6)$$

と書かれる。

運算をしやすくするため，上式の被積分関数の一部を

$$H^{(MN)}(\varphi,\varphi')=\frac{A^{(N)}(\eta')}{\{a(\eta')\}^{M-1}}\frac{k^{(MN)}(\eta,\eta')}{(1-\eta'^2)^{(M-1)/2-k}},$$

$$k=\frac{1}{2}\left\{M-\frac{1-(-1)^M}{2}\right\} \tag{2.2.7}$$

と書き，これを

$$H^{(MN)}(\varphi,\varphi')=\frac{2}{m+1}\sum_{s=1}^{m}H^{(MN)}(\varphi,\varphi_s)$$

$$\times\sum_{r=1}^{m}\sin r\varphi_s\sin r\varphi' \tag{2.2.8}$$

で置きかえ，η' の積分を行なう。

$\varphi=\varphi_\nu=\nu\pi/(m+1)$

とすると

$$-w^{(M)}(\varphi_\nu)=\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=1}^{m}\{a(\varphi_\nu)\}^M$$

$$\times H^{(MN)}(\varphi_\nu,\varphi_s)C_{\nu s}^{(M)} \tag{2.2.9}$$

と書かれる。この式の $C_{\nu s}^{(M)}$ は

$$C_{\nu s}^{(M)}=\frac{1}{m+1}\sum_{r=1}^{m}\sin r\varphi_s I_r^{(M)}(\varphi_\nu) \tag{2.2.10}$$

$$I_r^{(M)}(\varphi)=\frac{(1-\eta^2)^{M/2}}{\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}$$

$$\times\frac{\sin r\varphi'}{(1-\eta'^2)^k(\eta-\eta')^2}d\eta' \tag{2.2.11}$$

によって与えられる。

$M=0, 1$ に対しては

$$C_{\nu s}^{(M)}=\frac{1-(-1)^{s-\nu}}{2(m+1)}\frac{\sin\varphi_s(\sin\varphi_\nu)^M}{(\cos\varphi_\nu-\cos\varphi_s)^2},\quad \nu\neq s$$

$$C_{\nu\nu}^{(M)}=-\frac{m+1}{4}(\sin\varphi_\nu)^{M-1} \tag{2.2.12}$$

である。

$M\geq2$ に対しては，(2.2.11) の被積分関数に

$$\frac{1}{(1-\eta'^2)(\eta-\eta')^2}=\frac{1}{1-\eta^2}\frac{1}{(\eta-\eta')^2}$$

$$-\frac{1}{1-\eta^2}\frac{\eta+\eta'}{(1-\eta'^2)(\eta-\eta')} \tag{2.2.13}$$

の恒等式を適用すると，常用の方法で発散積分の有限部分を求めることができる。

$H^{(MN)}(\varphi,\varphi')$ は $\eta=\eta'$ に対数特異点があるので，それに対する補正演算を挿入する必要があるが，それは (2.2.13) の右辺第1項に対応する所だけで行なえばよい。

$M=2, 3$ の場合

$$D_{\nu s}^{(M)}=\frac{1}{m+1}\sum_{r=1}^{m}\sin r\varphi_s J_r^{(M)}(\varphi_\nu) \tag{2.2.14}$$

$$J_r^{(M)}(\varphi)=\frac{(\sin\varphi)^{M-2}}{\pi}\oint_{-1}^{1}\frac{\sin r\varphi'\cdot(\eta+\eta')}{(1-\eta'^2)(\eta-\eta')}d\eta' \tag{2.2.15}$$

とすると，

$$C_{\nu s}^{(M)}=C_{\nu s}^{(M-2)}-D_{\nu s}^{(M)} \tag{2.2.16}$$

である。$J_r^{(M)}(\varphi)$ には

$$J_0^{(M)}(\varphi)=0,\ J_1^{(M)}(\varphi)=-(\sin\varphi)^{M-2}$$

$$J_{r+1}^{(M)}(\varphi)-J_{r-1}^{(M)}(\varphi)=-4(\sin\varphi)^{M-3}$$

$$\times\sin r\varphi\cos\varphi \tag{2.2.17}$$

の漸化式があるから，逐次値が求められ，(2.2.14)によって $D_{\nu s}^{(M)}$ を計算することができる。

$M>3$ のときは (2.2.13) の恒等式を更に重ねて行なうことになるので，運算は少し繁雑になる。

2.3 核関数展開法における翼端問題の処理

(1.2.24) の i_n は揚力面の翼弦方向の吹上げの分布形を表わす関数である。このうち (1.2.25)の l_n は翼弦方向に一定であるのに対し，j_n は ξ の関数となっている。そしてこれには

$\lambda_{2n}(-\xi)=-\lambda_{2n}(\xi)$ のとき

$j_{2n}(-\xi,Y)=j_{2n}(\xi,Y)$

$\lambda_{2n-1}(-\xi)=\lambda_{2n-1}(\xi)$ のとき

$$j_{2n-1}(-\xi,Y)=-j_{2n-1}(\xi,Y) \tag{2.3.1}$$

の性質がある。$l_{2n-1}\neq0$ で，これに対応する吹上げ w_{2n-1} は前後対称であり，また j_{2n} に対応する吹上げ w_{2n} も前後対称である。(1.2.30)，(1.2.32) および (1.2.37)，(1.2.38) に示すようにこの2組の前後対称の吹上げに対してのみ翼端に吹上げの特異性がある。したがって η 方向 mode function を (2.1.2) の形に仮定すると，(2.2.1) の M が偶数のとき翼端に特異性が現われるはずである。以下これに対する処理法を示す。

(2.1.2) の記号を用いると，(2.2.7) の $H^{(MN)}$ は

$$H^{(MN)}(\varphi,\varphi')=\frac{F^{(N)}(\eta')k^{(MN)}(\eta,\eta')}{\{a(\eta')\}^M(1-\eta'^2)^{M/2-k}} \tag{2.3.2}$$

と書かれる。

$M=0$ のときは $k^{(0N)}(\eta,\eta')$ は $i_N(0,\eta;\eta')$ に等しいから，**2.1** 節の運算をそのまま利用することができる。(2.1.8)，(2.1.12) の $G^{(N)}{}_s(\varphi)$ を $H^{(0N)}(\varphi,\varphi_s)$ で置きかえたものが $w^{(0)}(\varphi)$ に対応する。即ち

$$-w^{(0)}(\varphi)=\frac{1}{\pi(m+1)}\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_s H_s{}^{(0N)}(\varphi)$$

$$\times\sum_{r=1}^{m+1}\varepsilon_r r\cos r\varphi_s S_r(\varphi)$$

$$-w^{(0)}(0)=\frac{1}{\pi(m+1)}\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_s H_s{}^{(0N)}(0)$$

$$\times\sum_{r=1}^{m+1}\varepsilon_r r^2\cos r\varphi_s V_r \tag{2.3.3}$$

である。ただし $H_s{}^{(MN)}(\varphi)\equiv H^{(MN)}(\varphi,\varphi_s)$ とする。

M が奇数のとき，$H^{(MN)}$ には $1/\sqrt{1-\eta'^2}$ がかかっているので，

$$L^{(MN)}(\varphi,\varphi')=\{\sqrt{1-\eta'^2}\}^{\{1-(-1)^M\}/2}H^{(MN)}(\varphi,\varphi') \tag{2.3.4}$$

と置くと，$L^{(MN)}(\varphi,\varphi')$ は翼面上の至るところで有限である。それを (2.1.6) の Fourier 余弦級数で置きかえて (2.2.1) の η' の積分を行なう。$w^{(1)}$ は翼端に特異性がないので運算は単純で，

$$-w^{(1)}(\varphi)=a(\eta)\sqrt{1-\eta^2}$$

$$\times\sum_{N=0}^{R}\sum_{s=0}^{m+1}\varepsilon_s L_s{}^{(1N)}(\varphi)M_s(\varphi) \tag{2.3.5}$$

のように表わされる。ただし

$$M_s(\varphi)=\frac{1}{m+1}\sum_{r=1}^{m+1}\varepsilon_r\cos r\varphi_s m_r(\varphi) \tag{2.3.6}$$

$$m_r(\varphi)=-\frac{1}{\pi}\boldsymbol{H}\int_0^{\pi}\frac{\cos r\varphi'}{(\cos\varphi-\cos\varphi')^2}d\varphi' \tag{2.3.7}$$

である。$m_r(\varphi)$ は漸化式を用いると逐次その値を求めることができる。$\sqrt{1-\eta^2}m_r(\varphi)|_{\varphi=0}=0$ であるから，$w^{(1)}(\varphi)$ は $\varphi=0,\pi$ に特異性はない（附録C参照）。

$M=2$ のとき

$$-w^{(2)}(\varphi)=\frac{\{a(\eta)\}^2}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}(1-\eta^2)\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}$$

$$\times\frac{H^{(2N)}(\varphi,\varphi')}{(1-\eta'^2)(\eta-\eta')^2}d\eta' \tag{2.3.8}$$

である。(2.2.13) を用いると

$$-w^{(2)}(\varphi)=\frac{\{a(\eta)\}^2}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}\frac{H^{(2N)}(\varphi,\varphi')}{(\eta-\eta')^2}$$

$$\times\ d\eta'-\frac{\{a(\eta)\}^2}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}$$

$$\times\frac{H^{(2N)}(\varphi,\varphi')(\eta+\eta')}{(1-\eta'^2)(\eta-\eta')}d\eta' \tag{2.3.9}$$

と書かれる。右辺第1項は $w^{(0)}$ の場合と同じようにすると $\eta=\pm1$ でも有限な値が得られないが，第2項は

$$\frac{1}{(1-\eta'^2)(\eta-\eta')}=\frac{1}{1-\eta^2}\left\{\frac{1}{\eta-\eta'}-\frac{\eta+\eta'}{1-\eta'^2}\right\} \tag{2.3.10}$$

の恒等式をあてはめてみると容易にわかるように特異性が現われる。即ち**1.3**節の翼端条件だけでは吹上げの微分値まで有限にすることはできない。$M>0$ では翼端で境界条件を与える必要がないので，$\eta=\pm1$ で $w^{(2)}(\varphi)$ が発散するような式を作ったとしても計算に支障はない。あるいは第2項の $H^{(2N)}(\varphi,\varphi')$ を Fourier 正弦級数で表わしておけば，両端ははじめから除かれているし，演算子の計算も容易である。(2.3.9) の右辺第1項の η' について部分積分し，翼端条件を入れると

$$-w^{(2)}(\varphi)=\frac{\{a(\eta)\}^2}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\oint_{-1}^{1}$$

$$\times\frac{(\partial/\partial\eta')H^{(2N)}(\varphi,\varphi')}{\eta-\eta'}d\eta'$$

$$-\frac{\{a(\eta)\}^2}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}\frac{H^{(2N)}(\varphi,\varphi')(\eta+\eta')}{(1-\eta'^2)(\eta-\eta')}d\eta' \tag{2.3.11}$$

となる。ここで $H^{(2N)}(\varphi,\varphi')$ を (2.1.6) で置きかえて η' の積分を行なうようにするとよい。

$M=3$ のときも (2.2.13) を用いると

$$-w^{(3)}(\varphi)=\frac{\{a(\eta)\}^3}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\sqrt{1-\eta^2}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}$$

$$\times\frac{L^{(3N)}(\varphi,\varphi')}{\sqrt{1-\eta'^2}(\eta-\eta')^2}d\eta'$$

$$-\frac{\{a(\eta)\}^3}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\sqrt{1-\eta^2}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}$$

$$\times\frac{L^{(3N)}(\varphi,\varphi')(\eta+\eta')}{(1-\eta'^2)^{3/2}(\eta-\eta')}d\eta' \tag{2.3.12}$$

と書かれる。

(2.3.10) によると

$$I=\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}\frac{\cos r\varphi'}{(1-\eta'^2)^{3/2}(\eta-\eta')}d\eta'$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\eta^2}}\oint_{-1}^{1}\frac{\cos r\varphi'}{\sqrt{1-\eta'^2}(\eta-\eta')}d\eta'$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{1-\eta^2}}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}\frac{\cos r\varphi'(\eta+\eta')}{(1-\eta'^2)^{3/2}}d\eta'$$

と書かれる。r の奇数値に対し

$$\sqrt{1-\eta^2}I=-\frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}-\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{H}\int_0^\pi \times\left\{\frac{1}{1-\cos\varphi'}-\frac{1}{1+\cos\varphi'}\right\}\cos r\varphi' d\varphi' =-\frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}-\frac{1}{2}\left\{-\frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}\bigg|_{\varphi=0} -\frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}\bigg|_{\varphi=\pi}\right\}$$

r の偶数値に対し

$$\sqrt{1-\eta^2}I=-\frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}-\frac{\eta}{2\pi}\boldsymbol{H}\int_0^\pi \times\left\{\frac{1}{1-\cos\varphi'}+\frac{1}{1+\cos\varphi'}\right\}\cos r\varphi' d\varphi' =-\frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}-\frac{\eta}{2}\left\{-\frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}\bigg|_{\varphi=0} +\frac{\sin r\varphi}{\sin\varphi}\bigg|_{\varphi=\pi}\right\}$$

であるから，$\varphi\to 0$ のとき $I=0$ となる。また附録Cによると (2.3.7) で定義される関数は $\sqrt{1-\eta^2}\,m_r(\varphi)|_{\varphi=0}=0$ である。したがって (2.3.12) の$H^{(3N)}(\varphi,\varphi')$ を (2.1.6) の Fourier 級数で置きかえて積分したものは $\varphi=0,\pi$ のとき0になり，$M=2$ の場合のような不都合はない。

以上のように円形翼端をもつ揚力面に対して翼端を正確に計算しようとすると，核関数展開法による数値解法はなかなか繁雑で取扱いにくい。

あとがき

前著は数値解法の中だけで不都合と思われるものをさがし，それを除くことを考えたもので，問題点の所在を誤り，実用には役立たないものとなった。現著は問題点の根元から解析を進め，それを数値解法に応用したもので，明快な結果に到達している。

翼の流場を線型揚力面模型によって解析することは実用的に極めて有効な手段であるが，翼端近傍となると模型と現実の現象との間にかなりの食い違いがあり，そこを正確に計算することの実用的意義は少ないように見える。しかし揚力面全体として正確な解が得られるようにしておくことは理論を発展させる上に重要である。翼端問題はその目的に沿う一つの課題で，翼弦方向 mode function の項数を定め，圧力分布を計算したとき，翼端近傍で安定した解を得るようにする。即ち，翼幅方向の標点数をある個数以上とれば解が定まる方法を見出す。これが翼端問題を解決することの実用的意義である。翼端問題の解法はほかにも方法が考えられるはずである。例えば翼幅方向分布関数をすべて η の有理関数に仮定すれば，翼端吹上げは有限になる。しかしこの mode function から予想される結果は従来計算で知られたのとは異なるものになりそうである。数値解法の適否は殆んど経験によって定まる。小山君[15]は揚力面の計算をいくつか行なって，その結果を見せてくれた。本文をまとめる上に大変参考になった。記して感謝の意を表す。

参考文献

1) Langan, T.J. and Wang, H.T., "Evaluation of Lifting-Surface Programs for Computing the Pressure Distribution on Planar Foils in Steady Motion", NSRDC Report 4021, (1973)

2) 花岡達郎，"揚力面の翼端条件と数値解法"，船舶技術研究所報告，第11巻，第2号，(昭和49年)

3) 花岡達郎，"揚力面の積分方程式の新しい数値解法"，船舶技術研究所報告，第6巻，第1号，(昭和44年)

4) Hsu, Pao-Tan, "Some Recent Developments in the Flutter Analysis of Low-Aspect-Ratio Wings", Proceedings of the National Specialists Meeting on Dynamics and Aeroelasticity, Inst. of Aero. Sci., (1958)

5) Jordan, P. F., "Remarks on Applied Subsonic Lifting Surface Theory", WGLR-DGRR Annual Meeting, Karlsruhe, Oct. (1967)

6) Kinner, W., "Die kreisförmige Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage", Ing.-Arch. 8, (1937)

7) Landahl, M., "Pressure-Loading Functions for Oscillating Wings with Control Surfaces", AIAA Journal, Vol. 6, No. 2, (1968)

8) Multhopp, H., "Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting-Surface Theory)", R & M No. 2884, (1950)

9) Wagner, S., "On the Singularity Method of Subsonic Lifting-Surface Theory", J. Aircraft Vol. 6 No.6, (1969)

10) Garner, H. C. and Miller, G. F., "Analytical and Numerical Studies of Downwash over Rectangular Planforms", Roy. Aero. Soc. Aero. Quart., (1972)

11) Ray, V. A. and Miller, G. F., "Numerical

Evaluation of the Downwash Integral for a Lifting Rectangular Planform'', NPL Maths 90, (1970)

12) Jordan, P. F., ''Exact Solutions for Lifting Surfaces'', AIAA Journal Vol. 11 No. 8, (1973)

13) Mangler, K. W. and Spencer, B. F. R., ''Some Remarks on Multhopp's Lifting-Surface Theory'', R & M No. 2926, (1952)

14) 花岡達郎, ''揚力面の数値解における問題点'', 日本航空宇宙学会誌, 第23巻, 第262号, (1975)

15) 小山鴻一, ''揚力面の数値計算について'', 船舶技術研究所報告, 第13巻, 第1号, (昭和51年)

附録―A f_0, f_0' の計算法

$$f_0=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{s}}\left(1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)ds \tag{A-1}$$

の計算法を示す。

(A-1) で部分積分を行なうと

$$f_0=2\int_0^\infty \frac{\sqrt{s}}{(1+s^2)^{3/2}}ds \tag{A-2}$$

となる。

$$1+s^2=1/\alpha \tag{A-3}$$

と置くと

$$f_0=4\int_0^1\frac{d\alpha}{\{\alpha(1-\alpha)\}^{1/4}}=\frac{4\pi^{3/2}}{\{\Gamma(1/4)\}^2} \tag{A-4}$$

である。

また (A-2) で

$$1+s=2/(1+\xi)$$

と置くと

$$f_0=\sqrt{2}\int_{-1}^1\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{(1+\xi^2)^{3/2}}d\xi$$

となる。$\xi=\cos\theta$ と置くと

$$f_0=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\theta}{(1-0.5\sin^2\theta)^{3/2}}d\theta \tag{A-5}$$

である。$K(k)$ を k を母数とする第1種完全楕円積分とすると

$$f_0=\left[\frac{1}{k}\frac{dK(k)}{dk}\right]_{k=0.5} \tag{A-6}$$

となる。

次に

$$f_0'=-\frac{1}{2}\int_0^\infty \sqrt{s}\left(1-\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right)ds \tag{A-7}$$

の計算法を示す。s について部分積分を2回行なうと

$$f_0'=-\frac{1}{6}\int_0^\infty\frac{ds}{\sqrt{s}(1+s^2)} \tag{A-8}$$

となる。(A-3) の置きかえをすると

$$f_0'=-\frac{1}{12}\int_0^1\frac{d\alpha}{\{\alpha(1-\alpha)\}^{3/4}}=-\frac{\{\Gamma(1/4)\}^2}{12\sqrt{\pi}} \tag{A-9}$$

となる。

附録-B S_n の $=\pm1$ の近傍の関数形

$$S_n(\eta)=\oint_0^\pi\frac{\sin n\varphi'}{\cos\varphi-\cos\varphi'}d\varphi' \tag{B-1}$$

で定義される関数は次の性質をもつ。ただし$\eta=\cos\varphi$ とする。

$$S_1=\oint_{-1}^1\frac{d\eta'}{\eta-\eta'}=\ln\frac{1+\eta}{1-\eta} \tag{B-2}$$

$$S_{n+1}+S_{n-1}=2\oint_0^{\pi}\frac{\sin n\varphi'\cos\varphi'}{\cos\varphi-\cos\varphi'}d\varphi'$$

$$=\frac{2}{n}\{(-1)^n-1\}+2\eta S_n \qquad (\text{B-3})$$

である。したがって

$$S_{n+1}-\eta S_n=\eta S_n-S_{n-1}+\frac{2}{n}\{(-1)^n-1\} \qquad (\text{B-4})$$

$n=1$ とすると

$$S_2-\eta S_1=\eta S_1-4=\eta\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}-4 \qquad (\text{B-5})$$

$\eta\fallingdotseq 1$ として，(B-5) を (B-4) に逐次代入していくと

$$S_{n+1}-S_n\fallingdotseq\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}-4\left[1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{2n}\{1-(-1)^n\}\right] \qquad (\text{B-6})$$

となる。この式を $n=1$ から $n-1$ までならべて辺々加えると，$\eta\fallingdotseq 1$ のとき

$$S_n\fallingdotseq n\ln\frac{1+\eta}{1-\eta}+V_n \qquad (\text{B-7})$$

となる。ただし

$$V_n=-4\left\{n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}\right)-\frac{n}{2}\right\} \quad n：偶数$$

$$V_n=-4\left\{n\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots\cdots+\frac{1}{n-2}\right)-\frac{n-1}{2}\right\} \quad n：奇数$$

(B-8)

である。

次に $S_n(-\eta)$ と $S_n(\eta)$ の関係を求める。

(B-1) で η を $-\eta$ で置きかえ，変数を $\varphi'=\pi-\varphi''$ と置くと

$$S_n(-\eta)=\cos n\pi\oint_0^{\pi}\frac{\sin n\varphi''}{\cos\varphi-\cos\varphi''}d\varphi''$$

$$=(-1)^nS_n(\eta) \qquad (\text{B-9})$$

が得られる。

附録-C　$m_r(\varphi)$ の計算法

$$m_r(\varphi)=\frac{1}{\pi}\boldsymbol{H}\int_0^{\pi}\frac{\cos r\varphi'}{(\cos\varphi-\cos\varphi')^2}d\varphi' \qquad (\text{C-1})$$

の値は次のようにして求める。

$$m_0(\varphi)=\frac{1}{\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-\eta'^2}}{(1-\eta'^2)(\eta-\eta')^2}d\eta'$$

である。これに(2.2.13)，(2.3.10)を適用して因数分解し，各項ごとに積分を行なうと

$$\left.\begin{aligned} &m_0(\varphi)=0\\ &m_1(\varphi)=-\frac{1}{\pi}\oint_0^{\pi}\frac{d\varphi'}{\cos\varphi-\cos\varphi'}\\ &\quad+\cos\varphi\cdot m_0(\varphi)=0\end{aligned}\right\} \qquad (\text{C-2})$$

が得られる。

$$m_{k+1}+m_{k-1}=\frac{2\sin k\varphi}{\sin\varphi}+2\cos\varphi\cdot m_k \qquad (\text{C-3})$$

であるから，(C-2) をこれに適用して逐次 m_k を求めると

$$m_2=2,\quad m_3=\frac{4\sin 2\varphi}{\sin\varphi},\quad m_4=\frac{6\sin 3\varphi}{\sin\varphi}+2$$

$$m_5=\frac{8\sin 4\varphi}{\sin\varphi}+\frac{4\sin 2\varphi}{\sin\varphi}$$

などとなる。

＜第13巻第1号＞

揚力面の翼端条件と数値解法（続）

花　岡　達　郎

正　誤　表

誤	正
P.57（1.2.34）式	
$j_0(0,0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi=\frac{\pi}{2}b_2$	$j_0(0,0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{d\xi}{\lvert\xi\rvert}=\frac{\pi}{2}b_2^*$
$j_{2n}(0,0)=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^{2n}(1-\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}}d\xi$	$j_{2n}(0,0)=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^{2n}(1-\xi^2)}{\sqrt{1-\xi^2}}\frac{d\xi}{\lvert\xi\rvert}$
$=-\frac{\pi}{2}(b_{2n}-b_{2n+2})$	$=-\frac{\pi}{2}(b^*_{2n}-b^*_{2n+2})$
P.58（1.3.11）式	
$\sum_{n=0}^{q}F_{2n}\,j_{2n}=\frac{\pi}{2}b_{2q+2}F_0$	$\sum_{n=0}^{q}F_{2n}\,j_{2n}=\frac{\pi}{2}b^*_{2q+2}F_0$