

# 平面熱弾塑性応力問題に対する積分方程式の応用

天 田 重 庚\*

## Application of Integral Equation to Plane Elasto-plastic, Thermal stress Problems

By  
Shigeyasu AMADA

### Synopsis

The biharmonic equation governing elastic problems can be transformed into the dual Fredholm type integral equations throughout the Green's theorem and single-double layer potentials. Moreover, the dual integral equations are reduced to the system of the simultaneous linear equations, in which the unknowns consist of those on the boundary interested in.

The derivation above expressed was represented in the author's previous report<sup>1)</sup>. This report describes the elasto-plastic problems with the dual integral equations and the Prandtl-Reuss equation. The procedure of numerical analysis is based on the iteration.

### 1. ま え が き

弾塑性応力問題は材料の弾性限を越えた領域を扱うため支配方程式が非線形となる。材料の応力-ひずみ曲線が適当な初等関数によって表現できる場合には Regular Perturbation を用いて閉じた解を求めることができる<sup>4)</sup>。しかし、塑性応力状態が降伏点より進むにしたがって解の近似度は項数を増加させない限り悪化する。解の項数を増す場合、基本解（通常、線形解、すなわち弾性解）が簡単な形の場合にはそれほど問題はないが、複雑な基本解の場合には殆ど不可能に近い。そこで電子計算機の助けを借りて数値解を求めることになる。

領域の幾何学形状が複雑な場合は数値計算に頼らざるをえないが、そうでない場合に対して数値解が良いのか、あるいは解析解（多少精度の悪い）がよいのか大いに議論のあるところである。

前報<sup>1)</sup>では弾性問題を対象にして積分方程式を導くにあたって数学的な点に重きをおいた。本報告はその方法の弾塑性問題への拡張であり、特に数値計算につ

いて詳しく述べる。

前報<sup>1)</sup>にて scalar 調和関数  $\Phi$  により表現される Poisson 型微分方程式

$$\nabla^2 \Phi = f(x, y) \quad (1)$$

は二つの Fredholm 型積分方程式

$$\begin{aligned} \pi \Phi(p) = & \iint_D f(\hat{x}, \hat{y}) \log \rho_{pq} d\hat{x} d\hat{y} \\ & + \int_C \left[ \Phi \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (\log \rho_{ps}) \right\}_s - \log \rho_{ps} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] ds \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} 4\pi F(p) = & \iint_D r_{pq} f(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} \\ & + \int_C \left[ F \left\{ \frac{\partial (\nabla r_{ps})}{\partial n} \right\}_s - \frac{\partial F}{\partial n} \nabla r_{ps} \right. \\ & \left. + \Phi \left( \frac{\partial r_{ps}}{\partial n} \right)_s - r_{ps} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right] ds \end{aligned} \quad (3)$$

に帰着されることが示された。さらに、積分方程式、(2)、(3)は境界を適当な微小要素に分割し、それら分割要素内で  $F$ ,  $\partial F/\partial n$ ,  $\Phi$ ,  $\partial \Phi/\partial n$  を一定と仮定することによって線形連立方程式

$$A \hat{X} = \hat{B} \quad (4)$$

\* 機関開発部 原稿受付: 昭和51年4月27日

となった。したがって微分方程式 (1) を解く問題は、(4) 式で表わされる線形連立方程式を数値的に解く問題に置き換えられた。通常の差分方程式と異なるところは (4) 式の未知 vector  $\hat{X}$  はすべて境界上の値のみから構成されるところにある。

## 2. 弾塑性理論

体積力を  $X_i$  にて表わし、慣性項を無視するとつり合い式は

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (5)$$

となる。 $X_i$  が保存力ならば

$$X_i = -\Omega, \quad i \quad (6)$$

なる Scalar 関数  $\Omega$  が存在することから (5) 式は

$$\sigma_{ij,j} - \Omega, \quad i = 0 \quad (5')$$

にて表わされる。ここで次式に定義される応力関数  $F$  を導入する。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \Omega, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \Omega, \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式は恒等的につり合い式 (5') の二次元の場合を満足する。

微小変形 (ひずみ Tensor における 2 次項を無視) と等方、均一性の仮定により、適合条件式は<sup>2)</sup>

$$\varepsilon_{il, kl} + \varepsilon_{kl, ij} - \varepsilon_{ik, jl} - \varepsilon_{jl, ik} = 0 \quad (8)$$

となる。二次元問題では簡単に

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (8')$$

にて表わされる。

応力-ひずみ関係式は Duhamel-Neumann 則に塑性成分を加えて

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2 \mu \varepsilon_{ij} - \alpha (3 \lambda + 2 \mu) T \delta_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (9)$$

平面応力問題の場合、式 (9) は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu \sigma_y) / E + \varepsilon_x^p + \alpha T \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu \sigma_x) / E + \varepsilon_y^p + \alpha T \\ \varepsilon_z &= -\nu (\sigma_x + \sigma_y) / E - (\varepsilon_z^p + \varepsilon_y^p) + \alpha T \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy} + \varepsilon_{xy}^p \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

となる。ただし、上式において塑性域での非圧縮性が仮定されている。

(192)

式 (10) 中の塑性ひずみ成分  $\varepsilon_i^p$  は loading history の初期からの増分和によって表わされることから、現在の stage を  $N$  とすれば

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^p &= \sum_{n=1}^N \Delta \varepsilon_{ij}^p, \quad n = \sum_{n=1}^{N-1} \Delta \varepsilon_{ij}^p, \quad n + \Delta \varepsilon_{ij}^p, \quad N \\ &= \sum \Delta \varepsilon_{ij}^p + \Delta \varepsilon_{ij}^p \end{aligned} \quad (11)$$

式 (11) において右辺の第一項は現在の stage を除いた塑性ひずみ成分の増分和であり、第 2 項は現在の stage における増分である。それゆえ式 (10) は

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu \sigma_y) / E + \sum \Delta \varepsilon_x^p + \Delta \varepsilon_x^p + \alpha T \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu \sigma_x) / E + \sum \Delta \varepsilon_y^p + \varepsilon_y^p + \alpha T \\ \varepsilon_z &= -\nu (\sigma_x + \sigma_y) / E - (\sum \Delta \varepsilon_z^p + \sum \Delta \varepsilon_y^p) \\ &\quad - (\Delta \varepsilon_z^p + \Delta \varepsilon_y^p) + \alpha T \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy} + \sum \Delta \varepsilon_{xy}^p + \Delta \varepsilon_{xy}^p \end{aligned} \right\} \quad (10)'$$

von Mises の降伏条件と流れ則を用いたひずみ増分理論から Prandtl-Reuss の応力-ひずみ増分式<sup>3)</sup> が導かれる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon_x^p &= \frac{\Delta \varepsilon_e^p}{2 \sigma_e} (2 \sigma_x - \sigma_y) \\ \Delta \varepsilon_y^p &= \frac{\Delta \varepsilon_e^p}{2 \sigma_e} (2 \sigma_y - \sigma_x) \\ \Delta \varepsilon_z^p &= -\frac{\Delta \varepsilon_e^p}{2 \sigma_e} (\sigma_x + \sigma_y) \\ \Delta \varepsilon_{xy}^p &= \frac{3}{2} \frac{\Delta \varepsilon_e^p}{\sigma_e} \sigma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_e^p &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\Delta \varepsilon_x^p)^2 + (\Delta \varepsilon_y^p)^2 + \Delta \varepsilon_z^p \cdot \Delta \varepsilon_y^p + (\Delta \varepsilon_{xy}^p)^2} \\ \sigma_e &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \sigma_{xy}^2} \end{aligned}$$

適合条件式に応力-ひずみ式 (10)' を代入し、つり合い式を考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= \\ &= -E \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_x^p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^p}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}^p}{\partial x \partial y} \right) \\ &\quad - E \alpha \gamma T \end{aligned}$$

となる。さらに上式に式 (7) を代入すれば

$$\begin{aligned} \rho^2 F &= -\gamma (\alpha E T + \Omega) \\ &\quad - E \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_x^p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^p}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}^p}{\partial x \partial y} \right) \\ &= -\gamma (\alpha E T + \Omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -E \left[ \left( \frac{\partial^2 \Sigma \Delta \varepsilon_y^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Sigma \Delta \varepsilon_x^p}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Sigma \Delta \varepsilon_{xy}^p}{\partial x \partial y} \right) \right. \\
& \left. + \left( \frac{\partial^2 \Delta \varepsilon_y^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Delta \varepsilon_x^p}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Delta \varepsilon_{xy}^p}{\partial x \partial y} \right) \right] \\
& = f \tag{13}
\end{aligned}$$

となる。ただし

$$\begin{aligned}
\nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\
\nabla^4 &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}
\end{aligned}$$

ここで

$$\Phi = DF \tag{14}$$

とおくと、式 (13) は

$$\nabla^2 \Phi = f \tag{15}$$

となる。

### 3. 積分方程式とその線形連立方程式

調和関数  $\Phi$  に対して Green の定理を用い、領域内部での Singularities を除去すると、

$$\begin{aligned}
\pi \Phi(p) &= \iint_D f(\hat{x}, \hat{y}) \log \rho_{pq} d\hat{x} d\hat{y} \\
&+ \int_C \left[ \Phi \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (\log \rho_{ps}) \right\}_s - \log \rho_{ps} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] ds \tag{16}
\end{aligned}$$

重調和関数  $F$  に対して同様に

$$\begin{aligned}
4\pi F(p) &= \iint_D r_{pq} f(\hat{x}, \hat{y}) d\hat{x} d\hat{y} \\
&+ \int_C \left[ F \left\{ \frac{\partial (\nabla r_{ps})}{\partial n} \right\}_s - \frac{\partial F}{\partial n} \nabla r_{ps} + \Phi \left( \frac{\partial r_{ps}}{\partial n} \right)_s \right. \\
&\quad \left. - r_{ps} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right] ds \tag{17}
\end{aligned}$$

ただし、 $\rho, r$  は Fig. 1 を参照すると

$$\begin{aligned}
\rho_{pq} &= \sqrt{(\xi - \hat{x})^2 + (\eta - \hat{y})^2} \\
r_{pq} &= [(\xi - \hat{x})^2 + (\eta - \hat{y})^2] \log \sqrt{(\xi - \hat{x})^2 + (\eta - \hat{y})^2}
\end{aligned}$$

にて与えられる。

連立積分方程式 (16), (17) を数値解析によって解くため、Fig. 2 のように境界  $C$  を微少要素に分割する。分割された要素内で  $F, \partial F/\partial n, \Phi, \partial \Phi/\partial n$  を一定と仮定するとにより、(16), (17) の積分方程式は線形連立方程式に変換される。

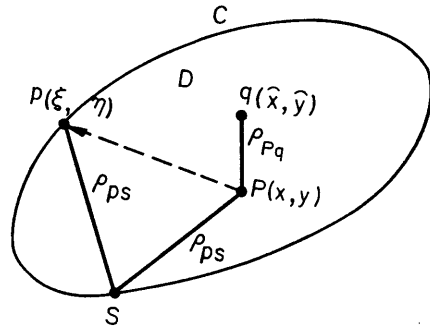


Fig. 1 Geometrical Explanation about  $\rho$

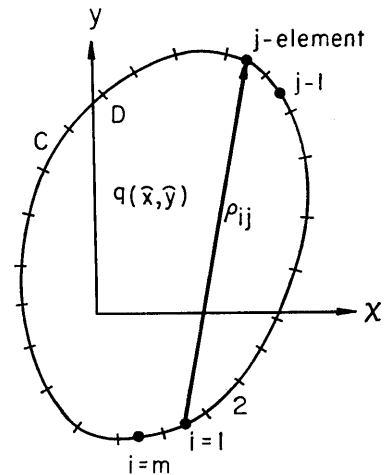


Fig. 2 Division of Boundary

$$\left. \begin{aligned}
\pi \Phi_i &= \sum_{j=1}^m (a_{ij} \Phi_j + b_{ij} \Phi'_j) + h_i \\
4\pi F_i &= \sum_{j=1}^m (C_{ij} \Phi_j + d_{ij} \Phi'_j + e_{ij} F_j \\
&\quad + f_{ij} F'_j) + k_i, i=1, 2, \dots, m
\end{aligned} \right\} \tag{18}$$

ただし、 $(\quad)' = \partial/\partial n$

係数は

$$\left. \begin{aligned}
a_{ij} &= \int_j \frac{\partial (\log \rho_{ij})}{\partial n} ds \\
b_{ij} &= - \int_j (\log \rho_{ij}) ds \\
C_{ij} &= \int_j \frac{\partial (r_{ij})}{\partial n} ds \\
d_{ij} &= - \int_j r_{ij} ds \\
e_{ij} &= \int_j \frac{\partial (\nabla r_{ij})}{\partial n} ds
\end{aligned} \right\} \tag{19}$$

$$\left. \begin{aligned} f_{ij} &= - \int_j r r_{ij} ds \\ h_i &= \iint_D f(\hat{x}, \hat{y}) \log \rho_{iq} d\hat{x} d\hat{y} \\ k_i &= \iint_D f(\hat{x}, \hat{y}) r_{iq} d\hat{x} d\hat{y} \end{aligned} \right\}$$

となる。

領域内部での点,  $i(x_i, y_i)$  における応力は Fig. 3 を参照すると次式によって与えられる。

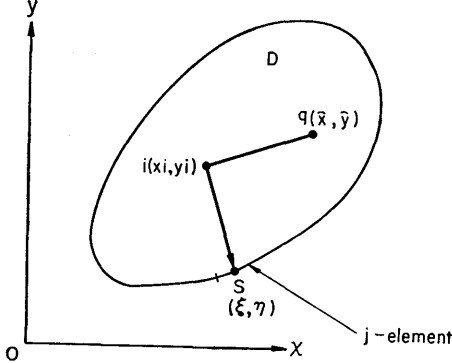


Fig. 3 General Relation to Obtain Stresses at Interior Points

$$8\pi\sigma_x(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^m (E_{ij} F_j + F_{ij} F'_j + C_{ij} \Phi_j + D_{ij} \Phi'_j) + \bar{K}_i \quad (20)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} E_{ij} &= 4 \int_i \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{(x_i - \xi)^2 - (y_i - \eta)^2}{[(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2]^2} \right\} ds \\ F_{ij} &= 4 \int_j \left\{ \frac{(y_i - \eta)^2 - (x_i - \xi)^2}{[(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2]^2} \right\} ds \\ C_{ij} &= \int_j \frac{\partial}{\partial n} \left\{ 1 + \log [(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2] + \frac{2(y_i - \eta)^2}{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2} \right\} ds \\ D_{ij} &= - \int_j \left\{ 1 + \log [(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2] + \frac{2(y_i - \eta)^2}{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2} \right\} ds \\ \bar{K}_i &= \iint_D \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} [(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2] \times \log \sqrt{(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} (y_i - \hat{y}) [1 + \log \langle (x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2 \rangle] + f [1 + \log \langle (x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2 \rangle + \frac{2(y_i - \hat{y})^2}{(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2}] \right\} d\hat{x} d\hat{y} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(194)

$$8\pi\sigma_y(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^m (-E_{ij} F_j - F_{ij} F'_j + \bar{C}_{ij} \Phi_j + \bar{D}_{ij} \Phi'_j) + \bar{K}_i \quad (22)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \bar{C}_{ij} &= \int_i \frac{\partial}{\partial n} \left\{ 1 + \log [(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2] + \frac{2(x_i - \xi)^2}{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2} \right\} ds \\ \bar{D}_{ij} &= - \int_j \left\{ 1 + \log [(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2] + \frac{2(x_i - \xi)^2}{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2} \right\} ds \\ \bar{K}_i &= \iint_D \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} [(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2] \log \sqrt{(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} (x_i - \hat{x}) [1 + \log \langle (x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2 \rangle] + f [1 + \log \langle (x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2 \rangle + \frac{2(x_i - \hat{x})^2}{(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2}] \right\} d\hat{x} d\hat{y} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

$$-8\pi\sigma_{xy}(x_i, y_i) = \sum_{j=1}^m (\bar{E}_{ij} F_j + \bar{F}_{ij} F'_j + \bar{C}_{ij} \Phi_j + \bar{D}_{ij} \Phi'_j) + \bar{K}_i \quad (24)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_{ij} &= -8 \int_j \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{(x_i - \xi)(y_i - \eta)}{[(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2]^2} \right\} ds \\ \bar{F}_{ij} &= 8 \int_j \frac{(x_i - \xi)(y_i - \eta)}{[(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2]^2} ds \\ \bar{C}_{ij} &= 2 \int_j \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{(x_i - \xi)(y_i - \eta)}{[(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2]^2} \right\} ds \\ \bar{D}_{ij} &= -2 \int_j \frac{(x_i - \xi)(y_i - \eta)}{[(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2]^2} ds \\ \bar{K}_i &= \iint_D \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} [(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2] \times \log \sqrt{(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2} + \frac{\partial f}{\partial y} (x_i - \hat{x}) [1 + \log \langle (x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2 \rangle] + (y_i - \hat{y})^2 \right\} + \frac{\partial f}{\partial x} (y_i - \hat{y}) [1 + \log \langle (x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2 \rangle] + 2f \frac{(x_i - \hat{x})(y_i - \hat{y})}{(x_i - \hat{x})^2 + (y_i - \hat{y})^2} \right\} d\hat{x} d\hat{y} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

#### 4. 数値解析

式 (13) の基礎方程式において、 $f=0$  の場合は計算過程で領域内部での応力を計算する必要はないが、非同次項が存在する場合はそれらを考慮しなければならない。しかも、非同次項の塑性ひずみ成分は Prandtl-Reuss 式からわかるように非線形であり反復計算に頼らざるをえない。

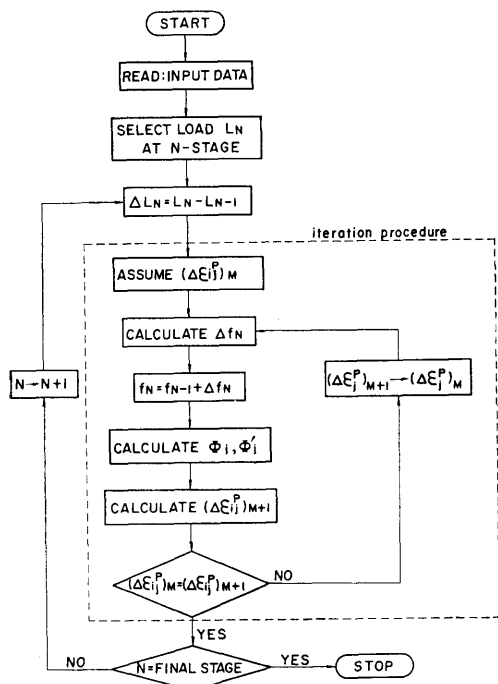


Fig. 4 Main Flow Chart

計算手順の Scheme を Fig. 4 に示す。(N-1)-Stage までの値はすべて既知であるとして、N-stage における各値を求めるために外力荷重  $L_N$  を選ぶ。熱負荷の場合は  $T_N$ 、物体力の場合にはそれぞれ  $\Omega_N$  を選ぶ。ただし、外力荷重の場合は  $L_N$  にともなって境界条件  $F_j$  と  $F'_j$  が変化する。 $L_N$  から荷重増分  $\Delta L_N$  が求まれば、この  $\Delta L_N$  に相当する塑性ひずみ増分を各点、 $i$  にて仮定する。仮定した塑性ひずみ増分を用いて非同次項  $f_N$  を計算し、これから線形連立方程式を解いて  $\Phi_j, \Phi'_j$  が得られる。さらに  $\Phi_j, \Phi'_j$  を用いて塑性ひずみ増分が求め、これと先に仮定したものと比較し収束するまでこれらの手順を反復することによって、応力とひずみ成分は決定できる。

Fig. 4 の Flow Chart において点線で囲まれた反

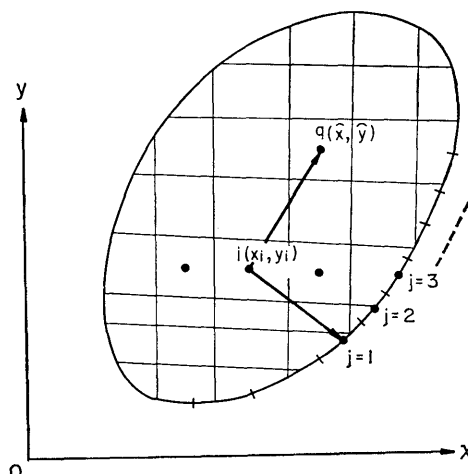


Fig. 5 Division of Interior Region

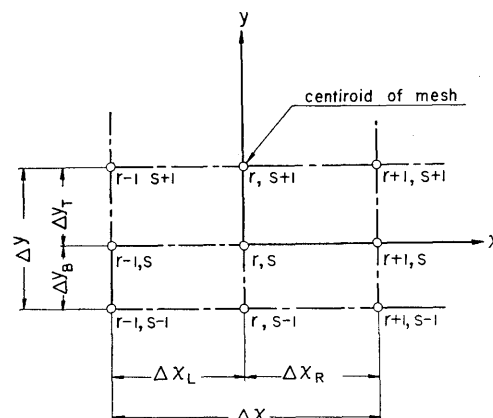


Fig. 6 Finite Difference of Interior Region

復計算について詳しくは次の手順ようになる。 $f$  の計算の便利のように領域  $D$  を Fig. 5 のごとく適当な粗さの Mesh に分割する。点  $i$  を各 Cell の図心にとり、各 Cell 内での  $f$  をこの点にて代表させる。すなわち、各 Cell 内で  $f$  は場所によって変化しないとする。

関数  $f$  を Fig. 6 を参照して、点  $(r, s)$  について差分形にて表わそう。Potential  $\Omega$  について、

$$\begin{aligned} f\Omega = & \beta_{r-1, s} (\Omega_{r-1, s} - \Omega_{r, s}) \\ & + \beta_{r+1, s} (\Omega_{r+1, s} - \Omega_{r, s}) \\ & + \beta_{r, s-1} (\Omega_{r, s-1} - \Omega_{r, s}) \\ & + \beta_{r, s+1} (\Omega_{r, s+1} - \Omega_{r, s}) \end{aligned} \quad (26-1)$$

温度  $T$  について、

$$\begin{aligned} \nabla \alpha E T = & \alpha E \{ \beta_{r-1, s} (T_{r-1, s} - T_r, s) \\ & + \beta_{r+1, s} (T_{r+1, s} - T_r, s) \\ & + \beta_{r, s-1} (T_{r, s-1} - T_r, s) \\ & + \beta_{r, s+1} (T_{r, s+1} - T_r, s) \} \end{aligned} \quad (26-2)$$

塑性ひずみ成分について

$$\begin{aligned} E \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xx}^p + \Delta \varepsilon_{xx}^p) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\Sigma \Delta \varepsilon_{yy}^p + \Delta \varepsilon_{yy}^p) \right. \\ \left. - 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xy}^p + \Delta \varepsilon_{xy}^p) \right] \\ = E \{ [\beta_{r-1, s} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xx}^p + \Delta \varepsilon_{xx}^p)_{r-1, s} \\ - (\beta_{r-1, s} + \beta_{r+1, s}) (\Sigma \Delta \varepsilon_{xx}^p + \Delta \varepsilon_{xx}^p)_{r, s} \\ + \beta_{r+1, s} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xx}^p + \Delta \varepsilon_{xx}^p)_{r+1, s}] \\ + [\beta_{r, s-1} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xx}^p + \Delta \varepsilon_{xx}^p)_{r, s-1} \\ - (\beta_{r, s-1} + \beta_{r, s+1}) (\Sigma \Delta \varepsilon_{xx}^p + \Delta \varepsilon_{xx}^p)_{r, s} \\ + \beta_{r, s+1} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xx}^p + \Delta \varepsilon_{xx}^p)_{r, s+1}] \\ - 2 [\gamma_{r-1, s-1} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xy}^p + \Delta \varepsilon_{xy}^p)_{r-1, s-1} \\ + \gamma_{r-1, s} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xy}^p + \Delta \varepsilon_{xy}^p)_{r-1, s} \\ + \gamma_{r-1, s+1} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xy}^p + \Delta \varepsilon_{xy}^p)_{r-1, s+1} \\ + \gamma_{r, s-1} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xy}^p + \Delta \varepsilon_{xy}^p)_{r, s-1} \\ + \gamma_{r, s} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xy}^p + \Delta \varepsilon_{xy}^p)_{r, s} \\ + \gamma_{r, s+1} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xy}^p + \Delta \varepsilon_{xy}^p)_{r, s+1} \\ + \gamma_{r+1, s-1} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xy}^p + \Delta \varepsilon_{xy}^p)_{r+1, s-1} \\ + \gamma_{r+1, s} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xy}^p + \Delta \varepsilon_{xy}^p)_{r+1, s} \\ + \gamma_{r+1, s+1} (\Sigma \Delta \varepsilon_{xy}^p + \Delta \varepsilon_{xy}^p)_{r+1, s+1}] \} \end{aligned} \quad (26-3)$$

ただし、差分形の係数  $\beta, \gamma$  は次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \beta_{r-1, s} &= 2/\Delta x \Delta x_L, \quad \beta_{r+1, s} = 2/\Delta x \Delta x_R \\ \beta_{r, s-1} &= 2/\Delta y \Delta y_B, \quad \beta_{r, s+1} = 2/\Delta y \Delta y_T \\ \gamma_{r-1, s-1} &= (\Delta x_R/\Delta x \Delta x_L) (\Delta y_T/\Delta y \Delta y_B) \\ \gamma_{r-1, s+1} &= -(\Delta x_R/\Delta x \Delta x_L) (\Delta y_B/\Delta y \Delta y_T) \\ \gamma_{r+1, s-1} &= -(\Delta y_T/\Delta y \Delta y_B) (\Delta x_L/\Delta x \Delta x_R) \\ \gamma_{r+1, s+1} &= (\Delta x_L/\Delta x \Delta x_R) (\Delta y_B/\Delta y \Delta y_T) \\ \gamma_{r-1, s} &= -\gamma_{r-1, s-1} - \gamma_{r-1, s+1} \\ \gamma_{r, s-1} &= -\gamma_{r-1, s-1} - \gamma_{r+1, s-1} \\ \gamma_{r, s+1} &= -\gamma_{r-1, s+1} - \gamma_{r+1, s+1} \\ \gamma_{r+1, s} &= -\gamma_{r+1, s-1} - \gamma_{r+1, s+1} \\ \gamma_{r, s} &= \gamma_{r-1, s-1} + \gamma_{r-1, s+1} + \gamma_{r+1, s-1} \\ &\quad + \gamma_{r+1, s+1} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

#### 反復計算の手順

I)  $\Delta L_i$  に対して、各  $(v, s)$  点での塑性ひずみ増分  $\Delta \varepsilon_{xx}^p, \Delta \varepsilon_{yy}^p, \Delta \varepsilon_{xy}^p$  at  $i(r, s)$

(196)

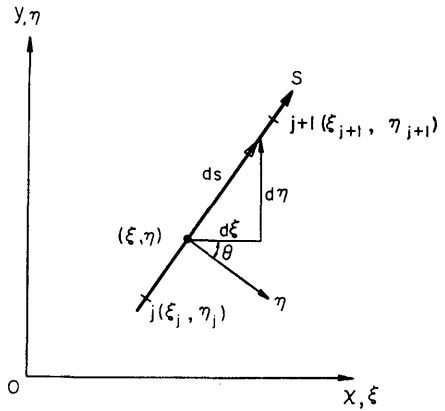


Fig. 7 Straight Boundary Segment

を仮定する。

II) (26-1) ~ (26-3) 式より関数  $f_i$  が求まる。

III) 領域内にて  $f_i$  が求まれば式 (18) の連立方程式の係数が計算できるが、これについて詳しく説明しよう。

$a_{ij} \sim f_{ij}$  までの係数は一般に、 $(x_i, y_i)$  を  $i$  番目の Node とすると、

$$\int_{(\xi_j, \eta_j)}^{(\xi_{j+1}, \eta_{j+1})} f(\rho) ds, \quad \rho = \sqrt{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2}$$

or

$$\int_{(\xi_j, \eta_j)}^{(\xi_{j+1}, \eta_{j+1})} f(r) ds, \quad r = \rho^2 \log \rho$$

の形をしている。ここで境界の分割された要素は Fig. 7 のように直線にて近似できるとする。幾何学的関係より outer normal  $n$  の  $x, y$  軸に対する成分を  $l_j, m_j$  にて表わすことにより次式が得られる。

$$\begin{aligned} l_j &= \cos(\eta, x) = \cos \theta \\ m_j &= \cos(\eta, y) = -\sin \theta \\ ds &= -m_j d\xi + l_j d\eta \\ \frac{\partial}{\partial n} &= l_j \frac{\partial}{\partial \xi} + m_j \frac{\partial}{\partial \eta} \end{aligned}$$

それ故、式 (19) で与えられる各係数は上式の関係を用いると次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= - \int_j \left\{ \frac{x_i - \xi}{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2} l_j \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_i - \eta}{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2} m_j \right\} \\ &\quad \times (-m_j d\xi + l_j d\eta) \\ b_{ij} &= - \int_j (\log \sqrt{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2}) \\ &\quad (-m_j d\xi + l_j d\eta) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned}
 C_{ij} &= - \int_j \{ 1 + \log [(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2] \} \\
 &\quad \times [(x_i - \xi) l_j + (y_i - \eta) m_j] \\
 &\quad \quad (-m_j d \xi + l_j d \eta) \\
 d_{ij} &= - \int_j [(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2] \\
 &\quad \quad (\log \sqrt{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2}) \\
 &\quad \quad \times (-m_j d \xi + l_j d \eta) \\
 e_{ij} &= 4 a_{ij} \\
 f_{ij} &= - 4 \int_j (-m_j d \xi + l_j d \eta) + 4 b_{ij}
 \end{aligned} \right\}$$

さらに,

$$\eta = \left( -\frac{l_j}{m_j} \right) \xi + \left( \eta_j + \frac{l_j}{m_j} \xi_j \right) \quad (29)$$

$$\xi = \left( -\frac{m_j}{l_j} \right) \eta + \left( \frac{m_j}{l_j} \right) \eta_j + \xi_j \quad (30)$$

なる幾何学的関係式が得られる。したがって、式 (29), (30) のいずれかを用いて式 (28) の積分を行えばよい。例えば、境界が  $x$  軸に平行ならば  $m_j = \pm 1$ ,  $l_j = 0$  となり、式 (29) を用いて式 (28) を書きなおせばよい。

係数  $h_i, k_i$  については積分を次のように行う。Fig. 8 のように領域  $D$  を  $M$  個の Cell に分割する。各 Cell 内で関数  $f_q$  は一定である近似、点  $q$  をその Cell の図心に選ぶ。すると

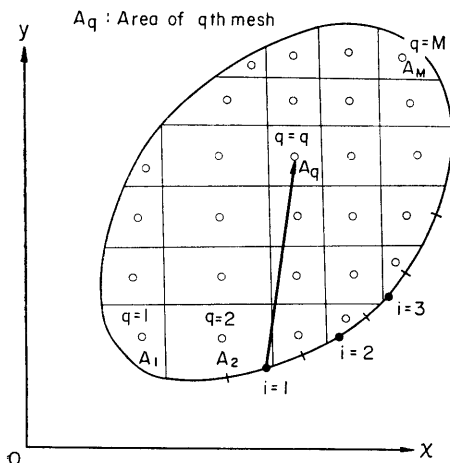


Fig. 8 Approximation of Function  $f_i$  and Its Integration

$$\left. \begin{aligned}
 h_i &= \iint_D f(\hat{x}, \hat{y}) \log \rho_{iq} d\hat{x} d\hat{y} \\
 &\approx \sum_{q=1}^M f(x_q, y_q) A_q \\
 &\quad \log \sqrt{(x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2} \\
 k_i &= \iint_D f(\hat{x}, \hat{y}) r_{iq} d\hat{x} d\hat{y} \\
 &\approx \sum_{q=1}^M f(x_q, y_q) A_q [(x_i - x_q)^2 \\
 &\quad + (y_i - y_q)^2] \\
 &\quad \times \log \sqrt{(x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2}
 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

となる。ただし、 $A_q$  は  $q$  番目の Cell の図心、 $(x_q, y_q)$  は図心の座標である。

式 (28), (31) によって式 (18) の係数が計算できるが、式 (18) を数値計算に便利のように変形する。

$$\mathbf{A} \hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{R}} \quad (32)$$

ただし,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} [a_{ii} - \delta_{ij} \pi] & [b_{ij}] \\ m \times m & m \times m \\ [C_{ij}] & [d_{ij}] \\ m \times m & m \times m \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{R}} = - \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ m \times m & m \times m \\ [e_{ij} - \delta_{ij} 4 \pi] & [f_{ij}] \\ m \times m & m \times m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [F_i] \\ m \times 1 \\ [F'_i] \\ m \times 1 \end{Bmatrix}$$

$$- \begin{Bmatrix} [h_i] \\ m \times 1 \\ [k_i] \\ m \times 1 \end{Bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} [\Phi_i] \\ m \times 1 \\ [\Phi'_i] \\ m \times 1 \end{Bmatrix}$$

したがって、 $2m \times 2m$  ( $m$  は境界の分割要素数) の Matrix の演算によって境界上の  $\Phi_j, \Phi'_j$  が求まる。

IV) 境界上の  $\Phi_j, \Phi'_j$  用いる応力成分は次式によって得られる。

境界上の応力

境界条件は境界上の応力 Vector  $\hat{T}$  によって与えられる。

$$\hat{T}_i = \sigma_{ij} \nu_j \quad (\nu_j: \text{方向余弦})$$

すなわち,

$$\begin{aligned} T_x &= \sigma_{xx} \nu_x + \sigma_{xy} \nu_y \\ T_y &= \sigma_{xy} \nu_x + \sigma_{yy} \nu_y \end{aligned}$$

3つの成分のうち2つは境界条件によって与えられ、残りの応力成分は次式のいずれかにより求められる。

$$\left. \begin{aligned} &4\pi\sigma_x(x_i, y_i) \\ &= \sum_{q=1}^M \left\{ \log \sqrt{(x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(y_i - y_q)^2}{(x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2} + 1 \right\} \\ &\quad \times f(x_q, y_q) A_q \\ &+ \sum_{j=1}^m (E_{ij} F_j + F_{ij} F'_j + C_{ij} \Phi_j + D_{ij} \Phi'_j) \\ &4\pi\sigma_y(x_i, y_i) \\ &= \sum_{q=1}^M \left\{ \log \sqrt{(x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(x_i - x_q)^2}{(x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2} + 1 \right\} \\ &\quad \times f(x_q, y_q) A_q \\ &+ \sum_{j=1}^m (-\bar{E}_{ij} F_j - \bar{F}_{ij} F'_j + \bar{C}_{ij} \Phi_j \\ &\quad + \bar{D}_{ij} \Phi'_j) \\ &-4\pi\sigma_{xy}(x_i, y_i) \\ &= \sum_{q=1}^M \left\{ \frac{2(x_i - x_q)(y_i - y_q)}{((x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2)} \right\} \\ &\quad \times f(x_q, y_q) A_q \\ &+ \sum_{j=1}^m (\bar{E}_{ij} F_j + \bar{F}_{ij} F'_j + \bar{C}_{ij} \Phi_j + \bar{D}_{ij} \Phi'_j) \end{aligned} \right\} (33)$$

ただし、 $F_j, F'_j, \Phi_j, \Phi'_j$ の係数は式(25)によって与えられるがそれらの計算については後述される。

#### 領域内部における応力

$$\left. \begin{aligned} &8\pi\sigma_x(x_i, y_i) \\ &= \sum_{q=1}^M \left\{ \log \sqrt{(x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(y_i - y_q)^2}{(x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2} + 1 \right\} \\ &\quad \times f(x_q, y_q) A_q \\ &+ \sum_{j=1}^m (E_{ij} F_j + F_{ij} F'_j + C_{ij} \Phi_j + D_{ij} \Phi'_j) \\ &8\pi\sigma_y(x_i, y_i) \\ &= \sum_{q=1}^M \left\{ \log \sqrt{(x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(x_i - x_q)^2}{(x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2} + 1 \right\} \\ &\quad \times f(x_q, y_q) A_q \\ &+ \sum_{j=1}^m (-E_{ij} F_j - F_{ij} F'_j - \bar{C}_{ij} \Phi_j \\ &\quad + \bar{D}_{ij} \Phi'_j) \end{aligned} \right\} (34)$$

$$\left. \begin{aligned} &-8\pi\sigma_{xy}(x_i, y_i) \\ &= \sum_{q=1}^M \left\{ \frac{2(x_i - x_q)(y_i - y_q)}{((x_i - x_q)^2 + (y_i - y_q)^2)} \right\} \\ &\quad \times f(x_q, y_q) A_q \\ &+ \sum_{j=1}^m (\bar{E}_{ij} F_j + \bar{F}_{ij} F'_j + \bar{C}_{ij} \Phi_j + \bar{D}_{ij} \Phi'_j) \end{aligned} \right\}$$

各係数については境界の分割要素が直線近似できると次のように変形できる。

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{8}{m_j} \left[ x_j l_j - \left( y_i - \tau_j - \frac{l_j}{m_j} \xi_j \right) m_j \right] \\ &\quad \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\ &= \frac{16 l_j}{m_j} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\ &= \frac{16}{m_j} \{ x_i l_j + [y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j] \} \{ < x_i^2 - [y_i \\ &= -\tau_j - (l_j/m_j) \xi_j]^2 > \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^3} \\ &= -2 < x_i + (l_j/m_j) [y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j] > \\ &\quad \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^3} \\ &+ [1 - (l_j/m_j)^2] \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi^2 d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^3} \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} E_1 &= x_i^2 + [y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j]^2 \\ E_2 &= -2 \{ x_i - (l_j/m_j) [y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j] \} \\ E_3 &= 1 + (l_j/m_j)^2 \\ F_{ij} &= \frac{4}{m_j} \left\{ < x_i^2 - [y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j]^2 > \right. \\ &\quad \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\ &= -2 < x_i + (l_j/m_j) [y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j] > \\ &\quad \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\ &+ [1 - (l_j/m_j)^2] \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi^2 d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \left. \right\} \\ C_{ij} &= \frac{2}{m_j} \{ x_i l_j + [y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j] \} m_j \\ &\quad \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2} \\ &+ \frac{4}{m_j} x_i [y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j] \{ x_i m_j \\ &= -[y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j] l_j \} \\ &\quad \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{m_j} \left\{ [x_i^2 + \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle^2] l_j \right. \\
& - \frac{2}{m_j} x [y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j] \left. \right\} \\
& \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\
& - 4 \left\{ \frac{2l_j}{m_j^2} [x_i m_j - \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle l_j] \right. \\
& + \left[ x_i \left( \frac{l_j}{m_j} \right)^3 - \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle \right] \left. \right\} \\
& \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi^2 d\xi}{E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2} + \frac{4l_j}{m_j^3} \\
& \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi^3 d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\
D_{ij} = & \frac{1}{m_j} \left\{ \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \log(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2) d\xi \right. \\
& + 2 \left[ \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle^2 \right. \\
& \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2} \\
& + 2 \frac{l_j}{m_j} \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle \\
& \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi d\xi}{E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2} \\
& + \left. \left( \frac{l_j}{m_j} \right)^2 \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi^2 d\xi}{E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2} \right] + D\xi_j \left. \right\} \\
\bar{C}_{ij} = & \frac{2}{m_j} [x_i l_j + \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle m_j] \\
& \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2} \\
& - \frac{4}{m_j} x_i \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle [x_i m_j \\
& - \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle l_j] \\
& \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\
& - \frac{4}{m_j} \left\{ [x_i^2 + \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle^2] l_j \right. \\
& - \frac{2}{m_j} x_i \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle \left. \right\} \\
& \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\
& + 4 \left\{ \frac{2l_j}{m_j^2} [x_i m_j - \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle l_j] \right. \\
& + \left[ x_i \left( \frac{l_j}{m_j} \right)^3 - \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle \right] \left. \right\} \\
& \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi^2 d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\
& - \frac{4l_j}{m_j^3} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi^3 d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{ij} = & \frac{1}{m_j} \left\{ \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \log(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2) d\xi \right. \\
& + 2 \left[ x_i^2 \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2} \right. \\
& - 2 x_i \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi d\xi}{E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2} \\
& + \left. \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi^2 d\xi}{E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2} \right] + D\xi_j \left. \right\} \\
\bar{E}_{ij} = & - \frac{8}{m_j} [x_i m_j + \langle y_i - \tau_j \\
& - (l_j/m_j) \xi_j \rangle l_j] \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\
& + 8 \left[ 1 - \left( \frac{l_j}{m_j} \right)^2 \right] \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\
& + \frac{32 x_i \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle}{m_j} \left[ x_i l_j + \langle y_i \right. \\
& - \tau_j - \left. \left( \frac{l_j}{m_j} \right) \xi_j \rangle m_j \right] \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2} \\
& + \frac{32}{m_j^2} [(x_i l_j)^2 - \langle y_i - \tau_j \\
& - (l_j/m_j) \xi_j \rangle^2 m_j^2] \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^3} \\
& - \frac{32}{m_j^2} [x_i l_j + \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle m_j] \\
& \times \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi^2 d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^3} \\
\bar{F}_{ij} = & - \frac{8}{m_j} x_i \langle y_i - \tau_j \\
& - (l_j/m_j) \xi_j \rangle \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\
& - \frac{8}{m_j^2} [x_i l_j - \langle y_i - \tau_j \\
& - (l_j/m_j) \xi_j \rangle m_j] \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\
& + \frac{8l_j}{m_j^2} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi^2 d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\
\bar{C}_{ij} = & \frac{2}{m_j} [x_i m_j + \langle y_i - \tau_j \\
& - (l_j/m_j) \xi_j \rangle l_j] \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2} \\
& - 2 \left[ 1 - \left( \frac{l_j}{m_j} \right)^2 \right] \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi d\xi}{E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2} \\
& - \frac{4 x_i \langle y_i - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle}{m_j} [x_i l_j + \langle y_i \\
& - \tau_j - (l_j/m_j) \xi_j \rangle m_j] \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{(E_1 + E_2 \xi + E_3 \xi^2)^2} \\
& - \frac{4}{m_j^2} [(x_i l_j)^2 - \langle y_i - \tau_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(l_j/m_j)\xi_j > 2m_j^2 \int_{\xi_j}^{\xi_{j+2}} \frac{\xi d\xi}{(E_1 + E_2\xi + E_3\xi^2)^2} \\
& + \frac{4l_j}{m_j^2} [x_i l_j + < y_i - \tau_j \\
& -(l_j/m_j)\xi_j > m_j] \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi^2 d\xi}{(E_1 + E_2\xi + E_3\xi^2)^2} \\
\bar{D}_{i,j} = & \frac{2}{m_j} x_i < y_i - \tau_j \\
& -(l_j/m_j)\xi_j > \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{d\xi}{E_1 + E_2\xi + E_3\xi^2} \\
& + \frac{2}{m_j^2} [x_i l_j - < y_i - \tau_j \\
& -(l_j/m_j)\xi_j > m_j] \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi d\xi}{E_1 + E_2\xi + E_3\xi^2} \\
& - \frac{2l_j}{m_j} \int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \frac{\xi^2 d\xi}{E_1 + E_2\xi + E_3\xi^2}
\end{aligned}$$

V) 前 step にて得られた応力を用いて応力ひずみ関係式 (10) より全ひずみが得られる。これらの値から相当全ひずみ

$$\epsilon_{el} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + (\epsilon_y - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_x)^2 + 6\epsilon_{xy}^2} \quad (35)$$

が計算できる。

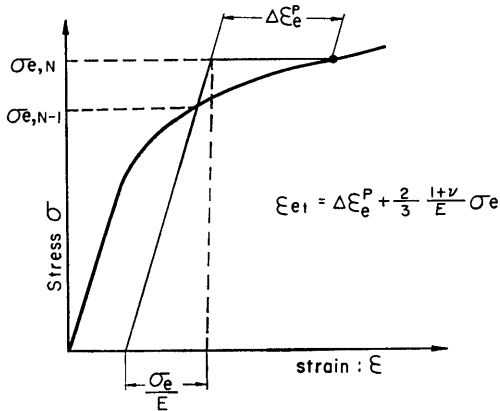


Fig. 9 Relation between  $\epsilon_{el}$ ,  $\sigma_e$  and  $\Delta\epsilon_e^p$

VI) 材料の引張試験により Fig. 9 のとき応力ひずみ曲線が得られたとする。相当応力  $\sigma_e$  を荷重履歴の  $N-1$  stage における値  $\sigma_{e, N-1}$  について Taylor Expansion すると

$$\sigma_e = \sigma_{e, N-1} + \left( \frac{d\sigma_e}{d\epsilon_e^p} \right)_{N-1} \Delta\epsilon_e^p + \dots$$

となり、高次項を無視して Prandtl-Reuss の  $\sigma_e \sim d\epsilon_e^p$  式 (3) に代入することにより

(200)

$$\Delta\epsilon_e^p = \frac{\epsilon_{el} - \frac{2}{3} \frac{1+\nu}{E} \sigma_{e, N-1}}{1 + \frac{2}{3} \frac{1+\nu}{E} \left( \frac{d\sigma_e}{d\epsilon_e^p} \right)_{N-1}} \quad (36)$$

が求まる。したがって、 $N-1$  stage での応力-ひずみ曲線の傾きと相当応力からひずみ増分  $\Delta\epsilon_e^p$  が得られる。

VI) Prandtl-Reuss 式 (12) より第 2 回目の塑性ひずみ増分の近似が得られる。これと第 1 回目の近似値との差が適当な指定値以下になるまで前述の手順をくり返す。

以上が反復計算の手順であり、収束したならば次の荷重増分を決めて同様の計算を行い所要の荷重についての応力、ひずみ成分を求める。

## 5. おわりに

基礎方程式が同次式にて表わせる場合、すなわち、 $f=0$  の場合や、 $f=f(T, \Omega)$  にて弾性域の場合には比較的簡単な手順のみで解が得られるが、 $f=f(\Sigma \Delta\epsilon_{ij}^p, \Delta\epsilon_{ij}^p)$  の場合には反復手順が必要である。この場合、他の方法 (差分法や FEM) と比較は計算精度の問題や計算時間の問題を考慮しないと不可能であるので、具体的な問題に本方法を適用してからその優劣について検討したい。

さらに本法の特徴として Crack 問題における応力拡大係数を Crack tip の近傍のみ境界分割を密にすることにより比較的精度よく求められよう。

最後に多くの御指導をいただいたミシガン大学応用力学教授 W.H. Yang, A.H. Weinemann, アメリカ航空宇宙局 (NASA) の Lewis Research Center の Dr. Walter Rzanicki に感謝の意を表したい。

## 6. 記号

- $\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}^p$  : 応力, 全ひずみ, 塑性ひずみ Tensor
- $\lambda, \mu$  : Lamé の定数
- $\delta_{ij}$  : kronecker の Delta
- $\Theta$  :  $\epsilon_{ii} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$
- $X_i$  : 物体力
- $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$  : 応力成分
- $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy}$  : 全ひずみ成分
- $\Omega$  : (6) 式
- $F$  : Airy の応力関数
- $\nu$  : Poisson 比

$E$	: Young 率
$\alpha$	: 線膨張係数
$T$	: 温度
$\varepsilon_x^p, \varepsilon_y^p, \varepsilon_z^p, \varepsilon_{xy}^p$	: 塑性ひずみ成分
$\Delta\varepsilon_x^p, \Delta\varepsilon_y^p, \Delta\varepsilon_z^p, \Delta\varepsilon_{xy}^p$	: $N$ -stage での塑性ひずみ増分
$\Delta\varepsilon^p$	: 相当塑性ひずみ増分
$\varepsilon_{et}$	: 相当全ひずみ, (35) 式
$\sigma_e$	: 相当応力
$\sigma_{e,N}$	: $N$ -stage での $\sigma_e$
$\Phi$	: (14) 式
$p$	: 境界上の点
$q$	: 領域内部の点
$(\hat{x}, \hat{y})$	: 領域内部の動点
$(x_q, y_q)$	: 点 $q$ の座標
$s$	: 境界上の動点
$(\xi, \eta)$	: 点 $s$ の座標
$n$	: 境界の Outer normal
$(r, s)$	: 領域内で分割された Cell の番号
$\beta, \gamma$	: (27) 式
$(\xi_j, \eta_j), (\xi_{j+1}, \eta_{j+1})$	: 境界上の分割要素の両端の $x, y$ 座標
$l_j, m_j$	: $n$ の $x, y$ 軸に対する方向余弦

## 参 考 文 献

- 1) 天田重庚: “弾性問題に対する積分方程式の応用” 船舶技術研究所報告, 第 12 卷, 第 4 号 (1875)
- 2) I. S. Sokolnikoff: “Mathematical Theory of Elasticity” McGraw-Hill (1956)
- 3) A. Mendelson: “Plasticity-Theory and Applications” Macmillan (1968)
- 4) Shigeyasu AMADA: “Non-linear Boundary value Problem of Elasto-plasticity in Centrifugal Force Field” 1975 Joint JSME-ASME Applied Mechanics Western Conference at Honolulu, Hawaii (March 24~27, 1975)