

揚力面の翼端条件と数値解法 (その3 円形翼端理論の改訂)

花 岡 達 郎*

Tip Condition and Numerical Method Concerning Lifting-Surface Theory (3—Revised Theory of the Circular Wing Tip)

By
Tatsuro HANAOKA

Abstract

The theory presented in this paper is an improvement of the theory presented in the previous paper. The range of validity of lifting-surface theory is extended to include the wing tip. The theory is developed for both the collocation method and Hanaoka's method.

ま え が き

円形翼端をもつ揚力面の場合、翼端近傍で収束解を得る方法は未だ見出されていない。それは Kinner 法^{1),2)}, vortex-lattice 法³⁾, mode function 法⁴⁾ の計算例を見ればわかる。しかし原因はそれぞれ異なっていて、Kinner 法では一般解を Kutta の条件で束縛するところ、vortex-lattice 法では翼端の三日月形平面形を梯形渦格子で表わすところにそれぞれの難点がある。

揚力線理論では積分方程式の核関数に揚力面理論の場合と同様、2位の極があるが、翼端特異性は現われない。揚力線と揚力面の積分方程式での違いは核関数の特異性において、後者では更に対数特異性が加わることである。しかし円形翼端の場合、この対数特異性は翼端で消失するので、揚力線と同じ形の解ならば吹上げ特異性は現われないと考えてよいであろう。mode function 法における翼端の難間は核関数の対数特異性の係数が翼端で無限大になることで、これが収束解の得られない原因と思われる。それは丁度、対数特異性の係数が前縁で発散するため、Multhopp 法⁵⁾ では前縁近傍で収束解が得られないのと類似している。

本文は同名標題の研究^{6),7)} の三編目に該当するが、一連の報告書は一貫した研究を逐次報告したのではなく、それぞれが前の報告の欠陥の補正といういみあいのものである。第1編は円形翼端の特異性を数値計算の側だけで解決しようとしたもので、特異性の解析的追求はなされていない。第2編は矩形翼端も含めて、翼端特異性の解析的性質を調べ、数値計算に応用しようとしたものである。そこでは核関数の2位の極だけに着目し、吹上げ特異性を単に消去する方法をとったため、翼端近傍の圧力分布に強い制約が加わり、実用に向かない結果となった。本編では圧力の解析解、円形翼端における核関数の性質等を調査し、前著の結果を参酌して、円形翼端問題の処理を考えてみた。

ここでも定常直進揚力面を例にして解析を行う。

—記 号—

| | |
|---------------------------|------------------------------|
| x, y, z | 任意点の座標 (揚力の働く方向を z 軸の正とする) |
| x', y', z' | 揚力要素の座標 |
| ρ | 流体密度 |
| Π | 揚力分布密度 |
| V | 揚力面の前進速度 |
| $\gamma = \Pi/(\rho V^2)$ | |
| ϕ | 速度ポテンシャル |

* 運動性能部 原稿受付: 昭和51年7月27日

- ϕ 加速度ポテンシャル
- $w = \frac{1}{V} \frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{z=0}$ 無次元吹上げ速度
- b 半翼幅
- l_1, l_2 y 位置の前後縁の x 座標
- l'_1, l'_2 y' 位置の前後縁の x 座標
- $c = (l_2 - l_1)/2, x_0 = (l_1 + l_2)/2$
- $c' = (l'_2 - l'_1)/2, x'_0 = (l'_1 + l'_2)/2$
- $\xi = (x - x_0)/c, \xi' = (x' - x'_0)/c'$
- $\xi_1 = (x - x'_0)/c', \xi_m = (x_0 - x'_0)/c'$
- $\beta = c/c', \lambda = b/c'$
- $\eta = y/b, \eta' = y'/b$
- $Y = \lambda|\eta - \eta'|, Y_1 = Y/2$
- $X = (x - l_1)/(2c'), X' = (x' - l'_1)/(2c')$
- $\varphi = \cos^{-1} \eta$
- $a(\eta) = c\sqrt{1 - \eta^2}$
- $\lambda_N(\xi)$ 翼弦方向の mode function
- $H \int_{-1}^1 d\eta$ Hadamard の意味の発散積分の有限部分

1. mode function と核関数の翼端近傍の性質

1.1 円形揚力面周縁近傍の解析解

第2編で揚力面周縁が直線である場合の周縁近傍の解析解から mode function として Birnbaum⁸⁾ 関数列が妥当であることを知った。周縁が曲線の場合については Kinner の円板揚力面および Krienes⁹⁾ の楕円板揚力面の解析解を参照すればよいわけで、その問題を改めて解析するまでもないと思われるが、Kinner の示したものが第2種ポテンシャルとして唯一のものという保証はない。それで本節および次節において asymptotic expansion の方法によって円板および楕円板の周縁近傍の圧力の解析解を求めてみる。この方法によると第1種、第2種のポテンシャルに該当するものが同時に得られる。そして Kinner のものと著しく異なる第2種ポテンシャルは見出せそうもないことが明らかになる。結局、翼弦方向 mode function は Birnbaum 関数列がよいことがこの理論解析によって確かめられるわけである。

圧力と線型関係にある加速度ポテンシャル ϕ は Laplace の方程式を満足するので、ポテンシャル論を利用して揚力面の圧力分布を求めようというのが Kinner, Krienes 等のポテンシャル論的揚力面理論である。

Kinner にならって、直線座標 x, y, z と

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 + \eta^2} \cos \psi \\ y &= \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 + \eta^2} \sin \psi \\ z &= \mu\eta \end{aligned} \right\} \quad (1.1.1)$$

の関係にある扁平回転楕円面座標(スフェロイド座標) μ, η, ψ を用いる。ただし x, y, z は円板半径 c で無次元化してある。スフェロイド座標について Laplace の方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(1 + \eta^2) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] \\ + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \psi^2} \left(\frac{1}{1 - \mu^2} - \frac{1}{1 + \eta^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

のように書かれる。

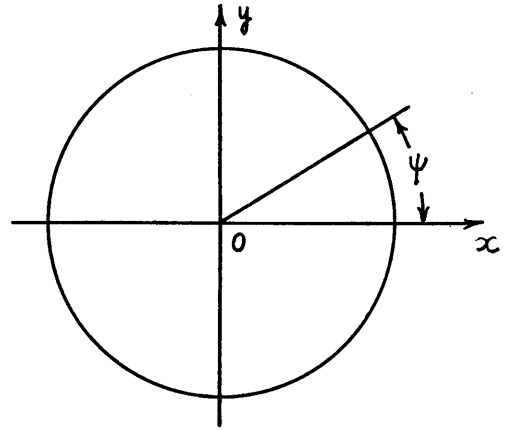


図-1

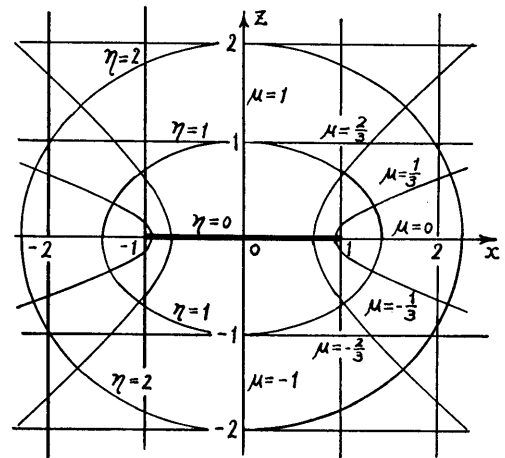


図-2

図-2 は x, z と μ, η の関係を図示したものである。この図に見られるように $\eta=0, \mu=0$ が円板周縁であるから、その極く近傍の場は

$$|\mu| \ll 1, \quad 0 \leq \eta \ll 1 \quad (1.1.3)$$

に対応する。 $0 < \varepsilon \ll 1$ の微小量 ε を用い、

$$\mu/\varepsilon = \bar{\mu}, \quad \eta/\varepsilon = \bar{\eta}$$

によって座標拡大を行い、 ε^2 以下の微小量を省略すると、(1.1.2) は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{\mu}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{\eta}^2} = 0 \quad (1.1.4)$$

となる。これは円板周縁付近で拡大した加速度場が満足すべき方程式である。又翼面の境界条件

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\eta}} \right|_{\bar{\eta}=0} = \mu \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad r < 1 \quad (1.1.5)$$

は、座標拡大をすると、 $\partial \phi / \partial \bar{\eta} |_{\bar{\eta}=0} = \varepsilon^2 \bar{\mu} \partial \phi / \partial z |_{z=0} \doteq 0$ である。又 $z=0$ の面上、翼面外では $\phi=0$ であるから、 ϕ の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\eta}} \Big|_{\bar{\eta}=0} &= 0, & |\bar{\mu}| > 0 \\ \phi &= 0, & \bar{\mu} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.6)$$

となる。(1.1.6) を満たす (1.1.4) の解は

$$\phi = \text{Re}(\bar{\mu} + i\bar{\eta})^{2m-1}, \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (1.1.7)$$

である。 $m < 0$ では遠場のポテンシャルが発散するので、それは棄てる。したがって揚力面では $\phi = \bar{\mu}^{2m-1}$ となる。 $m=0$ は Kinner の第2種ポテンシャル、 $m \geq 1$ は第1種ポテンシャルの中に含まれている。 $s = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - r$ と書くと、揚力面上では $\mu = \sqrt{1-r^2} \doteq \sqrt{2s}$ であるから、揚力面周縁近傍の圧力分布は

$$\phi_m = (2s)^{m-1/2} \quad (1.1.8)$$

のように表わされる。後縁側では Kutta の条件を満たす必要があるので、 $m \geq 1$ である。

1.2 楕円形揚力面周縁近傍の解析解

前節の解析で円形翼周縁の圧力は2次元翼の前後縁と同形であることが明らかになったが、周縁曲率の影響は不明である。その辺の様子をもう少し明確にするため、楕円形翼について同様の解析を行ってみる。

楕円板のポテンシャル問題は Whittaker & Watson¹⁰⁾ の参考書に記載されているので、それを利用してよいが、ここでは Krienes の記法を踏襲する。直線座標 (x, y, z) は楕円板の長半径 b によって無次元

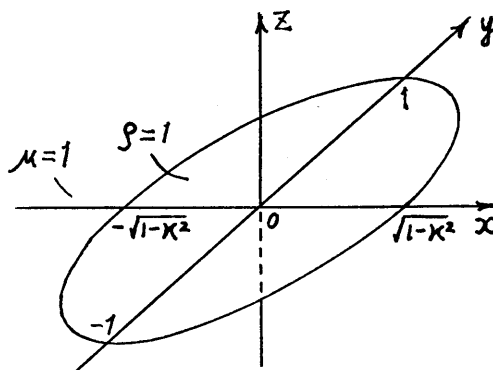


図-3

化したものを用いる。

$$0 \leq \nu^2 \leq \kappa^2 \leq \mu^2 \leq 1 \leq \rho^2 < \infty \quad (1.2.1)$$

とすると、直線座標 x, y, z は

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{\rho^2 - \kappa^2} + \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - 1} &= 1 & \dots\dots \text{楕円面} \\ \frac{x^2}{\mu^2 - \kappa^2} + \frac{y^2}{\mu^2} - \frac{z^2}{1 - \mu^2} &= 1 & \dots\dots \text{一葉双曲面} \\ -\frac{x^2}{\kappa^2 - \nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2} - \frac{z^2}{1 - \nu^2} &= 1 & \dots\dots \text{二葉双曲面} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2)$$

によって楕円座標 ρ^2, μ^2, ν^2 に変換される。(1.2.2) では一組の (ρ^2, μ^2, ν^2) に対し $(\pm x, \pm y, \pm z)$ の8通りが対応するが、 x, y, z 座標面によって分けられる8区分のそれぞれについては、 (ρ^2, μ^2, ν^2) は一つの (x, y, z) に対応する。図-4 は

$$f(\lambda^2) = \frac{x^2}{\lambda^2 - \kappa^2} + \frac{y^2}{\lambda^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - 1} - 1 \quad (1.2.3)$$

の方程式で、 x, y, z を固定したときの $f(\lambda^2)$ と λ^2 の関係を図示したものであるが、 ρ^2, μ^2, ν^2 の変域内

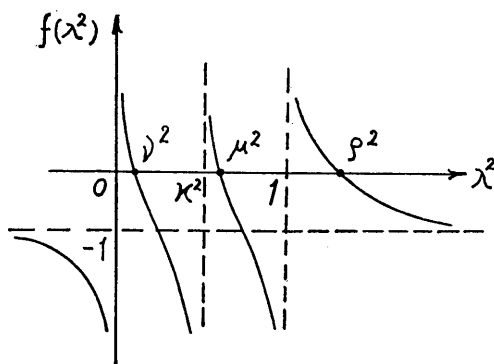


図-4

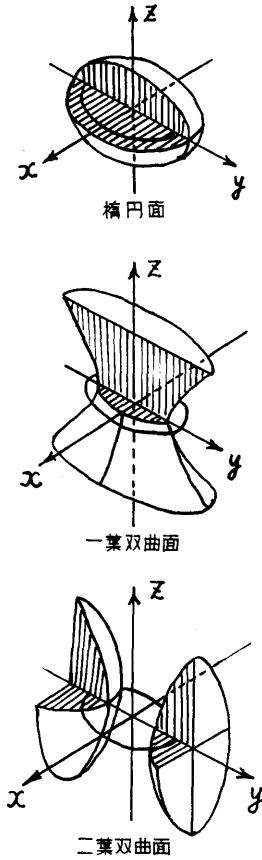


図-5

における概略の様子を知ることができる。(1.2.2) を x, y, z について解くと

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{(\rho^2 - \kappa^2)(\mu^2 - \kappa^2)(\kappa^2 - \nu^2)}{\kappa^2(1 - \kappa^2)}} \\ y &= \frac{\rho\mu\nu}{\kappa} \\ z &= \sqrt{\frac{(\rho^2 - 1)(1 - \mu^2)(1 - \nu^2)}{(1 - \kappa^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.4)$$

である。

xy 面上で楕円の輪郭内は $\rho=1$ に、外側は $\mu=1$ に対応する。(1.2.4) で $\rho=1, \mu=1$ と置き、第1式、第2式より ν を消去すると、楕円周縁の方程式

$$x = \sqrt{1 - \kappa^2} \sqrt{1 - y^2} \quad (1.2.5)$$

が得られる。即ち $\rho=1, \mu=1$ は楕円板の周縁に対応し、 κ はその楕円の離心率である。

楕円板の周縁で、その法線方向の距離 δn と μ の

関係を求めてみる。(1.2.4) で $\rho=1, \nu=\text{const.}$ とすると

$$\delta x = \frac{dx}{d\mu} \Big|_{\mu=1} \delta\mu = \frac{\sqrt{\kappa^2 - \nu^2}}{\kappa\sqrt{1 - \kappa^2}} \delta\mu$$

$$\delta y = \frac{dy}{d\mu} \Big|_{\mu=1} \delta\mu = \frac{\nu}{\kappa} \delta\mu$$

であるから

$$\delta n = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} = \sqrt{\frac{1 - \nu^2}{1 - \kappa^2}} \delta\mu \quad (1.2.6)$$

である。(1.2.4) の第2式で $\rho=1, \mu=1$ とすると $\nu = \kappa y$ であるから、この ν を (1.2.6) に代入すると

$$\delta n \sqrt{\frac{1 - \kappa^2}{1 - \kappa^2 y^2}} = \delta\mu$$

である。即ち $\delta\mu$ と δn との比例係数は翼中央で短半径、翼端で長半径に等しくなる。

楕円板周縁の曲率半径を求めておく。楕円周縁の方程式は (1.2.4) で $\rho=1, \mu=1$ とした

$$x = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{\kappa}\right)^2}, \quad y = \frac{\nu}{\kappa}$$

である。ただし $c_0 = \sqrt{1 - \kappa^2}$ とする。 $x' = dx/d\nu, x'' = d^2x/d\nu^2, y' = dy/d\nu$ としたときの曲線の曲率半径 R の公式

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - x''y'|}$$

を用いると

$$R = \frac{(1 - \nu^2)^{3/2}}{\sqrt{1 - \kappa^2}} \quad \text{即ち} \quad (c_0 R)^{1/3} = \sqrt{1 - \nu^2} \quad (1.2.7)$$

が得られる。

次に楕円座標 ρ^2, μ^2, ν^2 を

$$\left. \begin{aligned} \wp(u) &= \rho^2 - \frac{1}{3}(1 + \kappa^2) \\ \wp(v) &= \mu^2 - \frac{1}{3}(1 + \kappa^2) \\ \wp(w) &= \nu^2 - \frac{1}{3}(1 + \kappa^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.2.8)$$

によって新しい座標 u, v, w に変える。ただし $\wp(u)$ 等は Weierstrass の \wp 関数とする。 \wp 関数の定義により

$$\begin{aligned} u &= \int_{\infty}^{\wp(w)} \frac{dp}{2\sqrt{(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3)}} \\ &= \int_{\infty}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - 1)(\rho^2 - \kappa^2)}} \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

$$\begin{aligned}
 u &= \int_{\infty}^{e_1} \frac{dp}{2\sqrt{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}} \\
 &= \int_{\infty}^1 \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-1)(\rho^2-\kappa^2)}} = \omega_1 \quad (1.2.10)
 \end{aligned}$$

である。ただし $2\omega_1$ は \wp 関数の一つの基本週期，ここでは実数である。他の変数についても同様の式が書かれる。ここで

$$e_1 = \frac{1}{3}(2-\kappa^2), \quad e_2 = \frac{1}{3}(2\kappa^2-1), \quad e_3 = -\frac{1}{3}(1+\kappa^2)$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1 > e_2 > e_3$$

$$\sqrt{e_1 - e_2} = \sqrt{1 - \kappa^2}, \quad \sqrt{e_2 - e_3} = \kappa, \quad \sqrt{e_1 - e_3} = 1$$

である。 u, v, w の座標では Laplace の方程式は

$$\begin{aligned}
 [\wp(v) - \wp(w)] \frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} + [\wp(w) - \wp(u)] \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} \\
 + [\wp(u) - \wp(v)] \frac{\partial^2 \phi}{\partial w^2} = 0 \quad (1.2.11)
 \end{aligned}$$

のように表わされる。

$\rho \geq 1, \mu \geq 1$ の ρ, μ に対する u, v を

$$\left. \begin{aligned}
 u - \omega_1 &= \int_{e_1}^{\wp(u)} \frac{dp}{2\sqrt{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}} \\
 &= \int_1^\rho \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2-1)(\rho^2-\kappa^2)}} = \eta, \quad \rho \geq 1 \\
 v - \omega_1 &= \int_{e_1}^{\wp(v)} \frac{dp}{2\sqrt{(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}} \\
 &= \int_1^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-1)(\mu^2-\kappa^2)}} = i\xi, \quad \kappa \leq \mu \leq 1
 \end{aligned} \right\} \quad (1.2.12)$$

のように書くことにする。 η, ξ は実数で、 $\rho=1$ のとき $\eta=0$ 、 $\mu=1$ のとき $\xi=0$ であるから、 $0 < \varepsilon \ll 1$ とすると、楕円板周縁の極く近傍の場合は $0 < \eta < \varepsilon$ 、 $0 < \xi < \varepsilon$ に対応する。それで

$$\eta/\varepsilon = \bar{\eta}, \quad \xi/\varepsilon = \bar{\xi} \quad (1.2.13)$$

によって座標拡大を行い、 ε の 2 次以上の項は微小として省略する。

$\wp(u)$ は偶関数、且つ $\wp''(\omega_1)=0$ 、 $\wp'(\omega_1) \neq 0$ であるから、 $u=\omega_1$ 、 $v=\omega_1$ における $\wp(u)$ 、 $\wp(v)$ の展開式の $(u-\omega_1)$ 、 $(v-\omega_1)$ の最低次は 2 次である。したがって ε の 2 次以上を省略するという上記の仮定に従うと、楕円の周縁では $\wp(u) \doteq \wp(v)$ としてよいから、(1.2.11) は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial v^2} = 0$$

となる。更に (1.2.12)、(1.2.13) により変数変換を

行うと

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{\xi}^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \bar{\eta}^2} = 0 \quad (1.2.14)$$

が得られる。

ここで η, ξ と ρ, μ の関係を求めておく。(1.2.12) の積分変数 ρ を、 $\rho^2=1+\tau^2$ によって τ に変えらる

$$\eta = 2 \int_0^{\sqrt{\rho^2-1}} \frac{d\tau}{\sqrt{(1+\tau^2)(1-\kappa^2+\tau^2)}}$$

である。これの右辺を $\sqrt{\rho^2-1}$ について Taylor 展開して、第 1 項だけとると

$$\eta \doteq \frac{\sqrt{2}\sqrt{\rho-1}}{\sqrt{1-\kappa^2}} \quad (1.2.15)$$

である。 $\eta < \varepsilon$ の範囲ではこれで充分である。これによると

$$\frac{d\eta}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\kappa^2}\sqrt{\rho-1}} \quad (1.2.16)$$

である。 ξ については、(1.2.12) を

$$\xi = - \int_1^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\kappa^2}}$$

と書き、 $\mu^2=1-\tau^2$ と置くと、 ρ の場合と同様に

$$\xi \doteq \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\mu}}{\sqrt{1-\kappa^2}} \quad (1.2.17)$$

が得られる。

境界条件は次のようにする。座標変換に対して

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = h_1^2 \frac{\partial z}{\partial \rho}, \quad h_1^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} \quad (1.2.18)$$

の公式がある。 μ, ν についてはこの式の ρ を μ 又は ν に変えた式を用いる。(1.2.4) より $\partial z/\partial \mu|_{\rho=1} = 0$ 、 $\partial z/\partial \nu|_{\rho=1} = 0$ であるから、(1.2.18) より

$$\frac{\partial \mu}{\partial z} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial z} \Big|_{\rho=1} = 0 \quad (1.2.19)$$

である。したがって揚力面上の境界条件は

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \Big|_{\rho=1} = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \Big|_{\rho=1} \quad (1.2.20)$$

である。(1.2.4) より

$$h_1^2 = \frac{(\rho^2 - \kappa^2)(\rho^2 - 1)}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}, \quad \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{\rho \sqrt{(1 - \mu^2)(1 - \nu^2)}}{\sqrt{(1 - \kappa^2)(\rho^2 - 1)}}$$

であるから、これを (1.2.18) に適用すると、(1.2.20) は

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{\rho=1} = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \frac{\rho(\rho^2 - \kappa^2)\sqrt{(\rho^2 - 1)(1 - \mu^2)(1 - \nu^2)}}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)\sqrt{1 - \kappa^2}} \Big|_{\rho=1} \quad (1.2.21)$$

と書かれる。

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\rho}$$

であるから、これに (1.2.16) を適用すると

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{\rho=1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mu^2}\sqrt{1 - \nu^2}} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}, \quad \xi > 0 \quad (1.2.22)$$

が得られる。(1.2.17) を参照しながら、(1.2.13) の座標拡大を行うと

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \bar{\eta}} \right|_{\bar{\eta}=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{\rho=1} \cdot \sqrt{1 - \kappa^2} \sqrt{1 - \nu^2} \bar{\xi} \varepsilon^2 \doteq 0, \quad \bar{\xi} > 0 \quad (1.2.23)$$

である。一方 $\mu=1$ は $z=0$ の面上で楕円の外側に対応し、そこでは $\phi=0$ であるから

$$\phi=0, \quad \bar{\xi}=0 \quad (1.2.24)$$

である。(1.2.23), (1.2.24) の境界条件に対する (1.2.14) の解は

$$\phi = \operatorname{Re}(\bar{\xi} + i\bar{\eta})^{2m-1} \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (1.2.25)$$

である。 $m < 0$ にすると遠場でポテンシャルが発散するので除外する。揚力面上では $\phi = \xi^{2m-1}$ である。この ξ を (1.2.17) によって μ に変え、更に (1.2.6) によって δn に変えると

$$\phi_m = \left\{ \frac{2\delta n}{\sqrt{1 - \kappa^2}\sqrt{1 - \nu^2}} \right\}^{m-1/2} \quad (1.2.26)$$

が得られる。 δn は楕円の長半径で無次元化してある。短半径で無次元化した距離 s とは $\delta n = s\sqrt{1 - \kappa^2}$ の関係にある。(1.2.26) に曲率の表示式 (1.2.7) を代入し、 s の関数として表わすと

$$\phi_m = \left\{ \frac{2s}{(c_0 R)^{1/3}} \right\}^{m-1/2} \quad (1.2.27)$$

となる。 $\kappa=0, \nu=0$ は円板の場合であるが、それは (1.1.8) と一致する。 $\nu=0$ は楕円板の長径の中央線、即ち短径上に対応する。(1.2.7) によると $\kappa \rightarrow 1$ のとき $c_0 \rightarrow 0, R \rightarrow \infty$ であるが $c_0 R$ は有限確定である。2次元翼はこれに該当する。何れにしても周縁曲率の影響は一義的ではない。

非定常翼の場合でも加速度場は複素数で表わされるだけで、Laplace の方程式、境界条件、Kutta の流出

条件等は同等になるので、同じ解析によって、(1.2.27) と同じ結果が得られる。

1.3 核関数の翼端近傍の展開式 ($|\eta - \eta'| > c'/b$)

前節の解析で揚力面の翼弦方向 mode function は Birnbaum 関数列でよいことがわかったので、圧力分布を

$$\begin{aligned} \gamma = & \bar{A}^{(0)}(\eta)\bar{\lambda}_0(\xi) + \bar{A}^{(1)}(\eta)\bar{\lambda}_1(\xi) + \bar{A}^{(2)}(\eta)\bar{\lambda}_2(\xi) + \dots \\ & + \hat{A}^{(0)}(\eta)\hat{\lambda}_0(\xi) + \hat{A}^{(1)}(\eta)\hat{\lambda}_1(\xi) + \hat{A}^{(2)}(\eta)\hat{\lambda}_2(\xi) + \dots \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_0(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}, & \hat{\lambda}_0(\xi) &= \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \\ \bar{\lambda}_N &= \xi^{2(N-1)}\sqrt{1 - \xi^2}, & \hat{\lambda}_N &= \xi^{2N-1}\sqrt{1 - \xi^2} \\ & & (N=1, 2, 3, \dots) & \end{aligned} \right\} \quad (1.3.2)$$

と置く。これを積分方程式に代入して Multhopp の形に整理すると

$$\begin{aligned} -w(\xi, \eta) = & -\frac{1}{2\pi b} \sum_{N=0}^R \mathbf{H} \int_{-1}^1 \frac{c(\eta')\{\bar{A}^{(N)}(\eta')i_{N'}(\xi, \eta; \eta') \\ & + \hat{A}^{(N)}(\eta')i_{N'}(\xi, \eta; \eta')\}}{(\eta - \eta')^2} d\eta' \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

$$\left. \begin{aligned} i_{N'}(\xi, \eta; \eta') & \\ & \equiv i_{N'}(X, Y) \\ & = \int_0^1 \lambda_{N'}(\xi') \left\{ 1 + \frac{X - X'}{\sqrt{(X - X')^2 + Y_1^2}} \right\} dX' \\ & = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \lambda_{N'}(\xi') \left\{ 1 + \frac{\xi_1 - \xi'}{\sqrt{(\xi_1 - \xi')^2 + Y^2}} \right\} d\xi' \end{aligned} \right\} \quad (1.3.4)$$

と書かれる。ただし

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{x - l_1'}{2c'}, & X' &= \frac{x' - l_1'}{2c'}, & Y_1 &= \frac{|\eta - \eta'|b}{2c'} \\ X &= \frac{1 + \xi_1}{2}, & X' &= \frac{1 + \xi'}{2}, & Y &= \lambda|\eta - \eta'|, \\ \lambda &= \frac{b}{c'} \end{aligned} \right\} \quad (1.3.5)$$

である。 $i_{N'}$ は $\bar{\lambda}_{N'}$, $\hat{\lambda}_{N'}$ を区別しないで表わすときの記号で、 $i_{N'}$, $i_{N'}$ はそれぞれ $i_{N'}$ の被積分関数に $\bar{\lambda}_{N'}$, $\hat{\lambda}_{N'}$ を含むものを表わすことにする。

$\eta' \rightarrow \pm 1$ のとき

$$\begin{aligned} i_{N'}(\xi, \eta; \eta') &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \bar{\lambda}_{N'}(\xi') d\xi' \\ &+ \frac{1}{2Y} \int_{-1}^1 \bar{\lambda}_{N'}(\xi') \frac{\xi_1 - \xi'}{\sqrt{(\xi_1 - \xi')^2 + Y^2 + 1}} d\xi' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \bar{\lambda}_N d\xi' + \frac{c'\xi_1}{2b|\eta-\eta'|} \int_{-1}^1 \bar{\lambda}_N d\xi' \\
&\quad - \frac{c'^3}{4b^3|\eta-\eta'|^3} \int_{-1}^1 \bar{\lambda}_N (\xi_1^3 + 3\xi_1\xi'^2) d\xi' \\
&\quad + \frac{3c'^5}{16b^5|\eta-\eta'|^5} \\
&\quad \times \int_{-1}^1 \bar{\lambda}_N (\xi_1^5 + 10\xi_1^3\xi'^2 + 5\xi_1\xi'^4) d\xi' \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

である。 $x_0' = (l_1' + l_2')/2$ とすると $c'\xi_1 = x - x_0'$ であるから、上式の右辺は

$$i_N(\xi, \eta; \eta') = g_{N0} + g_{N2} \left(\frac{c'}{b}\right)^2 + g_{N4} \left(\frac{c'}{b}\right)^4 + \dots \quad (1.3.6)$$

のように c'/b の偶関数となる。そして

$$\begin{aligned}
g_{N0} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \bar{\lambda}_N d\xi' \left\{ 1 + \frac{x-x_0^*}{b|\eta'-\eta|} - \frac{(x-x_0^*)^3}{2b^3|\eta'-\eta|^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3(x-x_0^*)^5}{8b^5|\eta'-\eta|^5} - \dots \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \bar{\lambda}_N d\xi' \\
&\quad \times \left\{ 1 + \frac{\xi - \xi_{0m}}{\sqrt{(\xi - \xi_{0m})^2 + (\eta' - \eta)^2 b^2/c^2}} \right\} \Big|_{\eta'=\pm 1}
\end{aligned} \quad (1.3.7)$$

で与えられる。ただし $\xi_{0m} = (x_0^* - x_0)/c$, x_0 は η 断面の翼弦中点の x 座標, x_0^* は翼先端の x 座標である。

i_N についても同様の計算を行うと, $\eta' = \pm 1$ の近傍では

$$i_N(\xi, \eta; \eta') = g_{N1} \left(\frac{c'}{b}\right) + g_{N3} \left(\frac{c'}{b}\right)^3 + \dots \quad (1.3.8)$$

$$\begin{aligned}
g_{N1} &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \xi' \bar{\lambda}_N d\xi' \\
&\quad \times \frac{b^3(\eta' - \eta)^2}{c^3 \{(\xi - \xi_{0m})^2 + (\eta' - \eta)^2 b^2/c^2\}^{3/2}} \Big|_{\eta'=\pm 1}
\end{aligned} \quad (1.3.9)$$

のように c'/b の奇関数となる。

1.4 翼端における核関数の特異性

核関数 $c(\eta')i_N(X, Y_1)/\{b(\eta-\eta')^2\}$ は $\eta-\eta'=0$ の近傍で

$$\begin{aligned}
&\frac{c(\eta')i_N(X, Y_1)}{b(\eta-\eta')^2} \\
&= \frac{c(\eta')i_N(X, 0)}{b(\eta-\eta')^2} - \frac{d\lambda_N}{dX} \frac{b}{4c} \ln|\eta-\eta'| + \dots
\end{aligned} \quad (1.4.1)$$

のように展開される。即ち核関数は $\eta=\eta'$ に 2 位の極と対数特異性があり, しかも対数特異性の係数は前縁ばかりでなく, 円形翼端のときその先端にも特異点をもつ。しかし前縁上では対数特異性は消失し, 代って現われる $3/2$ 位の極は係数が有限であるから, 前縁に標点をとれば収束解が得られる¹²⁾。円形翼端で数値解が収束しない原因は核関数の対数特異性の係数にあると思われるので, 円形翼端の先端上で対数特異性がどんな形をとるか。これは収束解を得る鍵になると思われるので, 以下でその解析を行う。

揚力面理論では常に $|\eta| < 1$ とするので, 翼端を考えると, 翼面内の点が翼端に近づく極限をとる。したがって, $\eta > 0$ のとき $\eta < \eta'$, $\eta < 0$ のとき $\eta > \eta'$ として運算を行う。先ず変数 η を

$$\eta = \cos \varphi \quad (1.4.2)$$

によって φ に変える。 $c(\eta)$ を φ の関数として

$$\frac{c}{b} = a(\varphi) \sin \varphi \quad (1.4.3)$$

のように表わし, 特に $a(0)$ は単に a と書くと

$$a = \frac{1}{b} \cdot \frac{dc}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} \neq 0 \quad (1.4.4)$$

であるから, $\eta' \rightarrow 1$ で $|\eta-\eta'| \rightarrow 0$ のとき

$$\lim_{|\eta-\eta'| \rightarrow 0} Y = \lim_{\substack{\varphi' \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow 0}} \frac{2 \sin(\varphi + \varphi')/2 \sin|\varphi - \varphi'|/2}{a \sin \varphi'} = 0 \quad (1.4.5)$$

となる。

$i_N(X, Y_1)$ の X, Y_1 を前縁に沿って翼端に近づける。

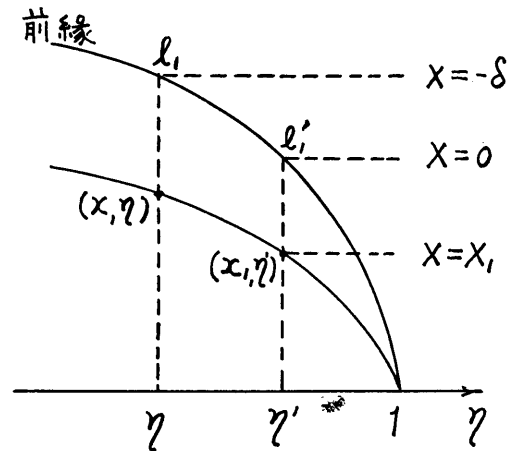


図-6

$$\delta = \frac{l_1' - l_1}{2c'} > 0$$

$$i_0 - i_0 = i_0$$

と書くことにすると

$$\begin{aligned} i_0(-\delta, Y_1) &= \int_0^1 \sqrt{\frac{1-X'}{X'}} \left\{ 1 - \frac{\delta+X'}{\sqrt{(\delta+X')^2 + Y_1^2}} \right\} dX' \end{aligned}$$

である。ここで

$$\frac{\delta}{Y_1} = L, \quad \frac{X'}{Y_1} = s$$

と置くと

$$\begin{aligned} i_0(-\delta, Y_1) &= \sqrt{Y_1} \int_0^{1/Y_1} \sqrt{\frac{1-Y_1 s}{s}} \left\{ 1 - \frac{L+s}{\sqrt{(L+s)^2 + 1}} \right\} ds \\ &\quad (1.4.6) \end{aligned}$$

と書かれる。翼端近傍で前縁を $l_1 = ba_1 \sin \varphi$ ($a_1 < 0$)

と置くと

$$\begin{aligned} \lim_{|\eta-\eta'| \rightarrow 0} L &= \lim_{\substack{\varphi' \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow 0}} \frac{a_1(\sin \varphi' - \sin \varphi)}{|\cos \varphi' - \cos \varphi|} \\ &= \lim_{\varphi' \rightarrow 0} -\frac{a_1 \cos(\varphi + \varphi')/2}{\sin(\varphi + \varphi')/2} \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

であるから、(1.4.6)の被積分関数は0、したがって $\eta'=1$, $|\eta-\eta'| \rightarrow 0$ のとき

$$i_0 = 0 \quad (1.4.8)$$

である。これは i_0 , i_0 の個々についてばかりでなく、一般の i_N についても同様の結果が得られる。即ち前縁翼端では核関数の極、対数特異性共に消失する。

同様の方法によって翼面内の点が翼端に近付くときの i_N の特異性を求めてみる。この極限計算を行うのに翼端近傍の点 (x, η) は $x = ba_x \sin \varphi$ の径路を通して $\eta=1$ に近づくように考える(図-6 参照)。ただしこの場合の x 軸の原点は翼先端の x 座標線上におく。

$$\delta_1 = \frac{x - l_1'}{2c'} \quad (1.4.9)$$

と書くと

$$\begin{aligned} i_0(\delta_1, Y_1) &= \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1-X'}{X'}} \left\{ 1 + \frac{\delta_1 - X'}{\sqrt{(\delta_1 - X')^2 + Y_1^2}} \right\} dX' \\ &\quad + \int_{x_1}^1 \sqrt{\frac{1-X'}{X'}} \left\{ 1 + \frac{\delta_1 - X'}{\sqrt{(\delta_1 - X')^2 + Y_1^2}} \right\} dX' \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

である。

(1.4.10)の右辺第1項, 第2項の積分変数をそれ

(236)

ぞれ $X' = Y_1 s$, $(X' - X_1) = Y_1 s$ によって s 変えると

$$\begin{aligned} i_0(\delta_1, Y_1) &= Y_1 \int_0^{x_1/Y_1} \sqrt{\frac{1-Y_1 s}{Y_1 s}} \left\{ 1 + \frac{L_1 - s}{\sqrt{(L_1 - s)^2 + 1}} \right\} ds \\ &\quad + Y_1 \int_0^{(1-x_1)/Y_1} \sqrt{\frac{1-X_1 - Y_1 s}{X_1 + Y_1 s}} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{L_2 + s}{\sqrt{(L_2 + s)^2 + 1}} \right\} ds \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

ただし

$$L_1 = \frac{\delta_1}{Y_1}, \quad L_2 = \frac{X_1 - \delta_1}{Y_1}$$

と書かれる。 $\eta' \rightarrow 1$ で $|\eta - \eta'| \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{|\eta-\eta'| \rightarrow 0 \\ \eta' \rightarrow 1}} L_1 &= \lim_{\substack{\varphi' \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow 0}} \frac{x - l_1'}{b |\cos \varphi - \cos \varphi'|} \\ &= \lim_{\varphi' \rightarrow 0} \frac{a_x \sin \varphi - a_l \sin \varphi'}{2 \sin(\varphi - \varphi')/2 \sin(\varphi + \varphi')/2} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{|\eta-\eta'| \rightarrow 0 \\ \eta' \rightarrow 1}} L_2 &= \lim_{\substack{\varphi' \rightarrow 0 \\ \varphi \rightarrow 0}} \frac{x - x_1}{b |\cos \varphi - \cos \varphi'|} \\ &= \lim_{\varphi' \rightarrow 0} \frac{a_x \sin(\varphi - \varphi')/2 \cos(\varphi + \varphi')/2}{\sin(\varphi - \varphi')/2 \sin(\varphi + \varphi')/2} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

であるから、(1.4.11)の被積分関数で第1項のものは2, 第2項のものは0になる。よって

$$\lim_{\substack{|\eta-\eta'| \rightarrow 0 \\ \eta' \rightarrow 1}} i_0(X, Y_1) = 2 \int_0^x \sqrt{\frac{1-X'}{X'}} dX'$$

となる。他の i_N についても同様の結果が得られる。即ち翼端では積分方程式(1.3.3)の核関数の対数特異性は消失し, 2位の極だけが残り, その係数は翼面の内点上における極の係数と等しく

$$i_N(X, 0) \equiv i_N(\xi) = \int_{-1}^{\xi} \lambda_N(\xi') d\xi' \quad (1.4.12)$$

である。

1.5 翼端近傍の圧力分布と mode function

1.1節および1.2節の加速度場の解析で周縁近傍の圧力が $s^{m-1/2}$ の形をとることを知ったが, それを揚力面の速場から見れば, 一般解のようなものである。Kinnerの解でも明らかなように圧力の一般解には翼幅方向分布関数に $1/\sqrt{1-\eta^2}$, $\sqrt{1-\eta^2}$ の項が含まれるため, 吹上げは翼端で無限大になる⁷⁾。Kinnerの解の項数を多くとって翼端附近の圧力を精密に計算したJordan¹¹⁾の結果を見ると, $A^{(N)}(\eta)$ は翼端で一定値に落着くように見える。この結果を得るのに77項もの

して書き表わすことにする。

γ の mode function は (1.3.1), (1.3.2) のような奇関数と偶関数に分けることはしない

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= A^{(0)}(\eta)\lambda_0(\xi) + A^{(1)}(\eta)\lambda_1(\xi) + A^{(2)}(\eta)\lambda_2(\xi) + \dots \\ \lambda_0(\xi) &= \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}}, \quad \lambda_N(\xi) = \xi^{N-1}\sqrt{1-\xi^2}, \\ &\quad (N=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1)$$

とする。このときの吹上げを Multhopp と同じに

$$\left. \begin{aligned} -w(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \mathbf{H} \int_{-1}^1 \frac{a(\eta')A^{(N)}(\eta')}{(\eta-\eta')^2} \times i_N(\xi, \eta; \eta') \sqrt{1-\eta'^2} d\eta' \\ i_N(\xi, \eta; \eta') &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') \left\{ 1 + \frac{\xi_1 - \xi'}{\sqrt{(\xi_1 - \xi')^2 + Y^2}} \right\} d\xi' \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

と書く。これの変数 η, η' を

$$\eta = \cos \varphi, \quad \eta' = \cos \varphi'$$

によって φ, φ' に変え、 $a(\eta')A^{(N)}(\eta')i_N(\xi, \eta; \eta')$ を φ' の有限 Fourier 余弦級数

$$\left. \begin{aligned} F(\varphi') &= \frac{2}{m+1} \sum_{s=0}^{m+1} \varepsilon_s F(\varphi_s) \sum_{r=0}^{m+1} \varepsilon_r \cos r\varphi_s \cos r\varphi' \\ \varphi_s &= \frac{s\pi}{m+1}, \quad \varepsilon_s = \begin{cases} 1/2, & s=0, m+1 \\ 1, & s \neq 0, m+1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

で置き変える。 φ' の積分を行うと

$$-w_\nu(\xi) = \sum_{N=0}^R \sum_{s=0}^{m+1} a_s A_s^{(N)} i_{N\nu s} S_{\nu s} \quad (2.1.4)$$

のように (2.1.1) は代数方程式の形になる。ただし

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\nu &= \frac{\nu\pi}{m+1}, \quad w_\nu(\xi) = w(\xi, \cos \varphi_\nu), \quad a_s = a(\cos \varphi_s) \\ A_s^{(N)} &= A^{(N)}(\cos \varphi_s), \quad i_{N\nu s} = i_N(\xi, \cos \varphi_\nu; \cos \varphi_s) \\ S_{\nu s} &= -\frac{\varepsilon_s}{m+1} \sum_{r=0}^{m+1} \varepsilon_r \cos r\varphi_s R_r(\varphi_\nu) \\ R_r(\varphi) &= \frac{1}{\pi} \mathbf{H} \int_0^\pi \frac{\cos r\varphi' \sin^2 \varphi'}{(\cos \varphi - \cos \varphi')^2} d\varphi' \end{aligned} \right\} \quad (2.1.5)$$

とする。演算子 $S_{\nu s}$ は整理すると

$$\left. \begin{aligned} S_{\nu s} &= \frac{\varepsilon_s}{2(m+1)} \left[(-1)^{s+\nu} - \frac{\{1 - (-1)^{s+\nu}\} \sin^2 \varphi_s}{(\cos \varphi_\nu - \cos \varphi_s)^2} \right], \\ &\quad \nu \neq 0, m+1 \quad (2.1.6) \\ S_{\nu\nu} &= \left\{ \frac{m+1}{4} + \frac{1}{2(m+1)} \right\}, \quad \nu \neq 0, m+1 \end{aligned} \right\} \quad (238)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{0s} &= \frac{\varepsilon_s}{2(m+1)} \left[1 - \frac{2\{1 - (-1)^s\}}{1 - \cos \varphi_s} \right] \\ S_{m+1, s} &= \frac{\varepsilon_s}{2(m+1)} \left[1 - \frac{2\{1 - (-1)^s\}}{1 + \cos \varphi_s} \right] \\ S_{00} = S_{m+1, m+1} &= \frac{m+1}{2} + \frac{1}{4(m+1)} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.7)$$

のように表わされる。(2.1.6), (2.1.7) は $s=0, s=m+1$ の場合にも適用される。

翼端の $a(0)$ の値は (1.4.4) により計算する。1.3 節で示したように、 $\eta \neq \eta'$ ならば $\lambda_N(\xi)$ が奇関数のとき i_N は φ' が 0 又は π で 0 になるが、それが偶関数のときは (1.3.6) より $i_N(\xi, \eta; 0) = g_{N0}$ である。 $i_N(X, 0)$ は $\nu=0, m+1$ でも翼面内と同じに (1.4.12) で与えられる。このようにすれば、積分方程式 (2.1.2) は翼端を含めた代数方程式に変換される。翼端の吹上げは $\lim_{\eta \rightarrow \pm 1} w(\xi, \eta)$ の外挿によって計算すればよい。その値の精度は解の結果にあまり影響はない。

2.2 核関数展開法¹⁴⁾

この方法でも連立積分方程式を代数方程式に変える運算は前節のものと同様で変りない。前著で核関数の翼端特異性として $(c/c')^\nu$ に着目したが、 $\eta - \eta' \rightarrow 0, \eta \rightarrow 1$ では $c/c' \rightarrow 1$ であるから、翼端に標点をとれば、それを特異性として取上げないで済む。

連立積分方程式は

$$\left. \begin{aligned} -w^{(M)}(\eta) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \int_{-1}^1 A^{(N)}(\eta') K^{(MN)}(\eta, \eta') d\eta' \\ w^{(0)}(\eta) &= w(0, \eta), \quad w^{(k)}(\eta) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^k w(\xi, \eta) \Big|_{\xi=0} \\ K^{(0N)}(\eta, \eta') &= \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') \\ &\quad \times \frac{1}{Y^2} \left\{ 1 - \frac{\xi' - \xi_m}{\sqrt{(\xi' - \xi_m)^2 + Y^2}} \right\} d\xi' \\ K^{(MN)}(\eta, \eta') &= \frac{\lambda(-\beta)^M}{2} \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') \left(\frac{\partial}{\partial \xi'} \right)^M \\ &\quad \times \left[\frac{\xi' - \xi_m}{Y^2 \sqrt{(\xi' - \xi_m)^2 + Y^2}} \right] d\xi' \end{aligned} \right\} \quad (2.2.1)$$

である。ただし $\lambda = b/c', \beta = c/c'$ とする。

$K^{(MN)}$ は $\eta = \eta'$ に 2 位の極をもち、その係数は

$$\left. \begin{aligned} (\eta - \eta')^2 K^{(0N)}(\eta, \eta') \Big|_{\eta=\eta'} &= \frac{c'}{b} \int_{-1}^0 \lambda_N(\xi') d\xi' \\ (\eta - \eta')^2 K^{(MN)}(\eta, \eta') \Big|_{\eta=\eta'} &= \frac{c'}{b} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^{M-1} \lambda_N(\xi) \Big|_{\xi=0} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2)$$

である。 $\eta - \eta' \rightarrow 0$, $\eta' \rightarrow \pm 1$ のとき $Y \rightarrow 0$ であるから、翼端の極でもその係数は上記のものが適用される。(1.4.1) に示すように $K^{(MN)}$ には対数特異性がある。その係数についても (2.2.2) と同様の表示式を作ることができる。 $K^{(MN)}$ の $\ln|\eta - \eta'|$ の係数を $f^{(MN)}$ の記号で表わすと

$$\left. \begin{aligned} f^{(0N)} &= -\frac{b}{4c} \frac{d\lambda_N}{dx} \Big|_{\xi=0} = -\frac{b}{2c} \frac{d\lambda_N}{d\xi} \Big|_{\xi=0} \\ f^{(MN)} &= -\frac{b}{2c} \left(\frac{d}{d\xi} \right)^{M+1} \lambda_N \Big|_{\xi=0} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.3)$$

である。(2.2.2), (2.2.3) は (1.4.1) を参照すると容易に得られる。

$$\frac{b}{c'} (\eta - \eta')^2 K^{(MN)}(\eta, \eta') = \bar{K}^{(MN)}(\eta, \eta') \quad (2.2.4)$$

と書くことにすると

$$\begin{aligned} -w^{(M)}(\varphi) &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \int_0^\pi \frac{a(\varphi') A^{(N)}(\varphi')}{(\cos \varphi - \cos \varphi')^2} \times \bar{K}^{(MN)}(\varphi, \varphi') \sin^2 \varphi' d\varphi' \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

となる。 $a(\varphi') A^{(N)}(\varphi') K^{(MN)}(\varphi, \varphi')$ を (2.1.3) で置き換え、代数方程式の形にする

$$-w_\nu^{(M)} = \sum_{N=0}^R \sum_{s=0}^{m+1} a_s A_s^{(N)} K_{\nu_s}^{(MN)} S_{\nu_s} \quad (2.2.6)$$

のように書かれる。これが $A_s^{(N)}$ の連立方程式である。 $\bar{K}_{\nu_0}^{(MN)}$, $\bar{K}_{\nu, m+1}^{(MN)}$ は (1.3.7) を利用するとその表示式が得られる。即ち

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{\nu_0}^{(MN)} &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^M g_{N0} \right]_{\eta'=1} \\ \bar{K}_{\nu, m+1}^{(MN)} &= \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^M g_{N0} \right]_{\eta'=-1} \end{aligned} \right\} \quad (2.2.7)$$

である。 $w_0^{(M)}$, $w_{m+1}^{(M)}$ の値は $\eta \rightarrow \pm 1$ の外挿によって求める。

あとがき

揚力面理論において、その周縁近傍で解を正確に算出することは、現在の進んだ計算技術をもってしてもなかなかむづかしい。前縁については一応 Wagner および Jordan によって解かれているが、核関数の対数特異性の問題が完全に解決されているわけではないから、翼弦標点数を普通以上に増すと、解は発散に向うものと思う。

本文に述べた翼端問題の解法にも同様の欠点が残っている。しかし vortex-lattice 法、有限要素法にして

も、厳密解そのものに特異性があるので、要素を増したからといって結果が厳密解に近づくものではなく、実用上充分とみなされる結果が得られればよいとされる。この意味からすれば、本文の方法は翼端問題の解決にはなっているわけである。何れにしても数値計算による検証は必要である。

参考文献

- 1) Kinner, W.: "Die Kreisförmige Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage", Ing.-Arch. 8, (1937)
- 2) Jordan, P. F.: "Remarks on Applied Subsonic Lifting Surface Theory", WGLR-DGRR Annual Meeting, Karlsruhe, Oct. (1967)
- 3) Giesing, J. P.: "Lifting Surface Theory for Wing-Tuselage Combinations", Report DAC-67212 Vol. 1 McDonnell Douglas Aircraft Co. (1968)
- 4) 小山鴻一: "揚力面の数値計算について", 船舶技術研究所報告, 第13巻, 第1号, 昭和51年
- 5) Multhopp, H.: "Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting-Surface Theory)", R&M No. 2884, (1950)
- 6) 花岡達郎: "揚力面の翼端条件と数値解法", 船舶技術研究所報告, 第11巻, 第2号, 昭和49年
- 7) 花岡達郎: "揚力面の翼端条件と数値解法(続)", 船舶技術研究所報告, 第13巻, 第1号, 昭和51年
- 8) Birnbaum, W.: "Die Tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie", ZAMM, Bd. 3, (1923)
- 9) Krienes, K.: "Die elliptische Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage", ZAMM, Bd. 20, (1940)
- 10) Whittaker, E. T. and Watson, G. N.: "A Course of Modern Analysis", Cambridge Univ. Press, (1935)
- 11) Jordan, P. F.: "The Parabolic Wing Tip in Subsonic Flow", AIAA Paper No. 71-10, 1971
- 12) Wagner, S.: "On the Singularity Method of Subsonic Lifting-Surface Theory", J. Aircraft, Vol. 6, No. 6 (1969)
- 13) Jordan, P. F.: "Wing-Edge Pivot Points in Subsonic Lifting Surface Analysis", RIAS-TR-69-17C, Martin Marietta Corp. Baltimore, Maryland (1969)
- 14) 花岡達郎: "揚力面の積分方程式の新しい数値解法", 船舶技術研究所報告, 第6巻, 第1号, 昭和44年
- 15) Mangler, K. W. and Spencer, B. F. R.: "Some Remarks on Multhopp's Lifting-Surface Theory", R&M No. 2926 (1952)

〔附録 I〕 $S_{\nu s}$

$$S_{\nu s} = -\frac{\varepsilon_s}{m+1} \sum_{r=0}^{m+1} \varepsilon_r \cos r\varphi_s R_r(\varphi_\nu) \quad (\text{A}\cdot 1)$$

$$R_r(\varphi) = \frac{1}{\pi} \mathbf{H} \int_0^\pi \frac{\cos r\varphi' \sin^2 \varphi'}{(\cos \varphi - \cos \varphi')^2} d\varphi' \quad (\text{A}\cdot 2)$$

である。

(A・2) は部分積分を行って Cauchy の主値をとる。

 $r=0$ のとき

$$R_0 = \frac{1}{\pi} \oint_0^\pi \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} d\varphi' = -1 \quad (\text{A}\cdot 3)$$

 $r \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} R_r(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \oint_0^\pi \frac{(r+1) \cos (r+1)\varphi' - (r-1) \cos (r-1)\varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} d\varphi' \\ &= -r \cos r\varphi - \frac{\sin r\varphi \cos \varphi}{\sin \varphi} \quad (\text{A}\cdot 4) \end{aligned}$$

である。(A・3), (A・4) を (A・1) に代入し

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=1}^{m+1} \varepsilon_r r \cos r x \\ = -\frac{1 - \cos (m+1)x - (m+1) \sin (m+1)x \sin x}{4 \sin^2 (x/2)} \\ \sum_{r=1}^{m+1} \varepsilon_r r \sin r x = \frac{\{1 - \cos (m+1)x\} \sin x}{4 \sin^2 (x/2)} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}\cdot 5)$$

の公式を利用して r についての総和を行う。 $\nu \neq s, \nu \neq 0, m+1$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{S_{\nu s}}{\varepsilon_s} &= \frac{1}{2(m+1)} \\ &\quad \times \sum_{r=1}^{m+1} \varepsilon_r r \{ \cos r(\varphi_s - \varphi_\nu) + \cos r(\varphi_s + \varphi_\nu) \} \\ &\quad + \frac{\cos \varphi_\nu}{2(m+1) \sin \varphi_\nu} \\ &\quad \times \sum_{r=1}^{m+1} \varepsilon_r \{ \sin r(\varphi_s + \varphi_\nu) - \sin r(\varphi_s - \varphi_\nu) \} \\ &\quad + \frac{1}{2(m+1)} \\ &= -\frac{1 - (-1)^{s+\nu}}{8(m+1)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\varphi_s - \varphi_\nu}{2} \right)} + \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\varphi_s + \varphi_\nu}{2} \right)} \right\} \\ &\quad + \frac{\{1 - (-1)^{s+\nu}\} \cos \varphi_\nu}{8(m+1) \sin \varphi_\nu} \end{aligned}$$

(240)

$$\begin{aligned} &\quad \times \left\{ \frac{\sin (\varphi_s + \varphi_\nu)}{\sin^2 \left(\frac{\varphi_s + \varphi_\nu}{2} \right)} - \frac{\sin (\varphi_s - \varphi_\nu)}{\sin^2 \left(\frac{\varphi_s - \varphi_\nu}{2} \right)} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2(m+1)} \\ &= -\frac{1 - (-1)^{s+\nu}}{2(m+1)} \frac{\sin^2 \varphi_s}{(\cos \varphi_\nu - \cos \varphi_s)^2} + \frac{(-1)^{s+\nu}}{2(m+1)} \end{aligned} \quad (\text{A}\cdot 6)$$

である。

次に $\nu \neq 0, m+1$ のときの $S_{\nu\nu}$ を求める。

$$\begin{aligned} S_{\nu\nu} &= \frac{1}{2(m+1)} \\ &\quad \times \sum_{r=1}^{m+1} \varepsilon_r \left\{ r(1 + \cos 2r\varphi_\nu) + \frac{\sin 2r\varphi_\nu \cos \varphi_\nu}{\sin \varphi_\nu} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2(m+1)} \\ &= \frac{1}{2(m+1)} \sum_{r=1}^{m+1} \varepsilon_r r + \frac{1}{2(m+1)} \\ &= \frac{m+1}{4} + \frac{1}{2(m+1)} \quad (\text{A}\cdot 7) \end{aligned}$$

である。

 $\nu=0, m+1$ のときは次のようにする。(A・4) より

$$\left. \begin{aligned} R_r(0) &= \lim_{\varphi \rightarrow 0} R_r(\varphi) = -2r \\ R_r(\varphi_{m+1}) &= \lim_{\varphi \rightarrow \pi} R_r(\varphi) = -2r \cos r\pi \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}\cdot 8)$$

である。これを (A・1) に代入して、総和すると

$$\left. \begin{aligned} S_{0s} &= \frac{\varepsilon_s}{2(m+1)} \left[1 - \frac{2\{1 - (-1)^s\}}{1 - \cos \varphi_s} \right] \\ S_{m+1, s} &= \frac{\varepsilon_s}{2(m+1)} \left[1 - \frac{2\{1 - (-1)^{m+1+s}\}}{1 + \cos \varphi_s} \right] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A}\cdot 9)$$

が得られる。

(A・8) を (A・1) に代入し、 $\varphi_s=0, \varphi_s=\pi$ と置くと

$$S_{00} = S_{m+1, m+1} = \frac{m+1}{2} + \frac{1}{4(m+1)} \quad (\text{A}\cdot 10)$$

が得られる。

(A・6) の $S_{\nu s}$ は又

$$\begin{aligned} \frac{S_{\nu s}}{\varepsilon_s} &= -\frac{1 - (-1)^{s+\nu}}{2(m+1)} \frac{1 - 2 \cos \varphi_s \cos \varphi_\nu + \cos^2 \varphi_\nu}{(\cos \varphi_s - \cos \varphi_\nu)^2} \\ &\quad + \frac{1}{2(m+1)} \quad (\text{A}\cdot 11) \end{aligned}$$

とも書かれる。これを (A・9) と比較すると、 $\nu=0, \nu=m+1$ の場合でも、特に (A・9) にたよらず、 $S_{\nu s}$ の表示式をそのまま使ってよいことがわかる。

昭和51年11月

各位殿

船舶技術研究所

船舶技術研究所報告7号の廃止について

船舶技術研究所報告7号は、当該年に所外発表した論文等の再録集として発行し、ご利用いただいておりますが、都合により昭和51年より7号は廃止することになりました。

なお、7号に代わるものとして、所外発表論文等の概要を各号（1号～6号）に発表の都度掲載することといたしましたので、ここにお知らせいたします。

〔附録 II〕 対数補正

(2.1.2) の η' の積分に対数補正を行う場合の運算は Mangler-Spencer¹⁵⁾ の方法を踏襲して、次のようにする。

$$a(\eta')A^{(N)}(\eta')i_N(\xi, \eta; \eta') + \frac{d\lambda_N}{dX} \frac{b}{4c(\eta)} A^{(N)}(\eta) \frac{(\eta-\eta')^2 \ln|\eta-\eta'|}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

を φ' の有限 Fourier 余弦級数 (2.1.3) で置き換えて

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 d\eta' \frac{\sqrt{1-\eta'^2}}{(\eta-\eta')^2}$$

の積分を行い、それに

$$-\frac{d\lambda_N}{dX} \frac{b}{4c} \frac{A^{(N)}(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta'^2} \ln|\eta-\eta'| d\eta'$$

を加える。翼端では対数補正の必要がないから、 $\eta = \pm 1$ のときは本文の運算そのままでもよい。