向い波と細長船の干渉について

足　達　宏　之*

On the Interaction between Head Sea Waves and Slender Ship

By
Hiroyuki ADACHI

Abstract

The interaction between head sea waves and a slender ship is analyzed by the slender-body theory under the assumption that the wave length of the incident wave is of the same order as the beam of ship. Although the same problem has been treated by both Faltinsen[1] and Ursell[3], the complete explanation of the problem seems not to have been given. Especially, the rational radiation condition is taken into consideration in this paper.

The introduction of the concept of the interaction of the elementary waves, which are components of Kelvin ship wave pattern, with the ship hull gives a rational result for the diffraction problem of the steady ship motion. The same idea is also applicable to the problem of the interaction of a slender ship and wave which are generated by a given pulsating source distribution on some part of the body.

It has been found that Kelvin ship wave pattern is deformed and the transverse wave system decays in x^{-1} when Kelvin pattern travels along a slender body. And the waves of a pulsating part of hull also decay in x^{-1} when they travel along the rest of hull.

ま え が き

Simple harmonic な向い波が波の中に固定して置かれた船体に沿って伝播するとき変形を受ける。この向い波の変形によって船体の受ける力は向い波だけによる Froude-Krylov の力とは異なるものになる。船体と向い波の干渉の効果は累積的であり，向い波が船体に沿って船首より遠く伝播する程波の変形は大きくなる。

向い波と船体との干渉の問題は，船体の波の中での運動を考えるときに重要なものである。もし，向い波が船体により大きな変形を受けなければ，船体に作用する波の力は Froude-Krylov の力が最も優勢であるとして良く，strip method による船体運動の解析は良い近似を与える。そして向い波による力は，船体の長さ方向各部分の断面形状の違いによる Froude-Krylov の力の違いが表われるだけであり，船体の各部の相互影響，いわゆる3次元影響は表われない。しかし，向い波が船体に沿って伝播するとき変形を受けるならば，3次元影響を無視することは許されないであろう。

Simple harmonic な向い波と船体との干渉の問題は船体運動理論においては，それ自身が重要なものであるが，さらにこの問題の持つ意味は抽象化され，拡大されて，波と船体との干渉の問題一般に応用される。すなわち，simple harmonic な向い波を一つの elementary wave と見做せば，船に正対して入射してくる任意の波は，elementary wave の重ね合せとして表わすことができる。そして，入射波と船体との干渉は，elementary wave と船体との干渉の重ね合せとして表わされることが考えられる。

* 推進性能部　原稿受付：昭和52年1月12日

このような例として，静水中を定常航走している船の船首部分で生じた波が船体と干渉する場合が考えられる。また非常に長い物体が静水中に浮いているとき，その一部分が振動する場合を考えると，振動している部分は造波機として働き，波は振動していない部分に沿って伝播する。このような場合の波と物体の干渉も上に述べた例の一つであると考えられる。

以上の3つの問題の例の中で基本的なものは，simple harmonic な elementary wave と船体との干渉の問題であるが，これについては，Faltinsen[1](1971) と Maruo[2](1974) および Ursell[3](1975) が解析を試み，incident wave は船体により変形を受けることを明らかにした。

定常造波の問題については，Adachi[4](1974) が elementary wave の重ね合せという立場で解析を行った。Reed[5](1975) および Ursell[3](1975) も同じ問題の解析を試みたが，三者共に一致した結論は無く，この問題についての決定的な解決は未定であるとされている (Ogilvie[6](1976))。長い物体の一部が振動している問題については Ursell[3](1975) が扱ったが，その解析の approach の方法は彼の定常造波の場合と同じであり，定常造波の場合に決定的な解決がなされていないとするなら，この例についても解決は未定であるといえよう。

この報告では simple harmonic な素成波が incident wave として与えられた時，船体との干渉の問題を考え，次に定常造波の例と長い物体の一部が振動している例について素成波の重ね合せの考え方が合理的であり，simple harmonic な素成波と船体との干渉の解が基本的なものであることを示す。

解析は流体を理想流体として細長船理論の仮定を使う。船の slenderness を表わす parameter を ε とし，incident wave の波長の order を $O(\varepsilon)$ であると仮定する。さらに自由表面上の条件は線型化されたものとする。船体については簡単のために円形断面とし，船首部または振動部の長さの単位を l とする。船首部を除いた船体の部分は平行一様断面とし，十分長いものとする。問題の性質上船尾部については考察を行わない。

1. 向い波の中に置かれた船の問題の定式化

Simple harmonic な incident wave の potential を $\phi_B(x, y, z)e^{-i\omega t}$ とし，これが細長船へ head sea waves として作用する場合を考える。波と船体との干渉を表わす potential を $\phi_D(x, y, z)e^{-i\omega t}$ とすると，total potential は，2つの potential の和として定義されて，

$$\phi_T(x, y, z)e^{-i\omega t}=\phi_B e^{-i\omega t}+\phi_D e^{-i\omega t} \quad (1.1)$$

である。座標系は Fig. 1 のように取ることとする。

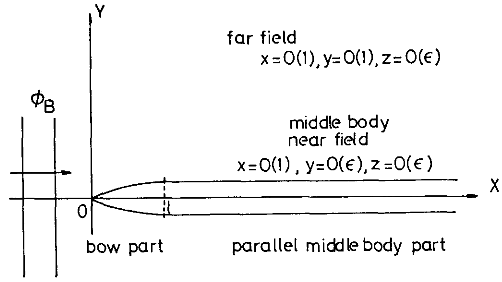

Fig. 1 Definition of regions and coordinates system, z-axis is positive upwards.

全ての potential は次の条件を満足する。

[L] Laplace equation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x, y, z)=0 \quad \text{in the fluid } z<0 \quad (1.2)$$

[F] Free surface condition

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\kappa\right)\phi(x, y, z)=0 \qquad \text{on } z=0 \quad (1.3)$$

ここで $\kappa=\dfrac{\omega^2}{g}=O(\varepsilon^{-1})$ である。Body boundary condition と radiation condition について考える。船体のはるか前方では incident wave しか存在しないと考えられるので，ϕ_T と ϕ_B は一致する。すなわち ϕ_D の影響があるとしても，それは ϕ_B より高次である。船体の平行部分を半径 $r=a$ なる一様断面とすると，$r=(y^2+z^2)^{1/2}=a$ なる面は船体平行部では船体表面を，船の前方では $r=a$ なる流体中の仮想面を表わす。よって船体の前方では，この仮想面上で

$$\text{[H]} \qquad \frac{\partial\phi_T}{\partial r}=\frac{\partial\phi_B}{\partial r} \qquad \text{on } r=a,\ x\ll 0 \quad (1.4)$$

である。$\dfrac{\partial}{\partial r}$ は y-z 面で船体表面での法線微分を表わす。さらに，$x>l$ なる船体表面上では固体面上での条件となるので

$$\text{[H]} \qquad \frac{\partial\phi_T}{\partial r}=0 \qquad \text{on } r=a,\ x>l \quad (1.5)$$

となる。(1.4) および (1.5) が ϕ_T に関する body boundary condition および radiation condition の一部である。

いま，次の関係により $\tilde{\phi}_D(x, y, z)e^{-i\omega t}$ なる potential を定義する。

$$\tilde{\phi}_D(x, y, z)=\frac{1}{2}\phi_B+\phi_D \qquad (1.6)$$

よって

$$\phi_T=\frac{1}{2}\phi_B+\tilde{\phi}_D \qquad (1.7)$$

である。$\tilde{\phi}_D$ に関する body boundary condition は (1.4), (1.5) および (1.7) より

$$[\mathrm{H}] \quad \frac{\partial\tilde{\phi}_D}{\partial r}=\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\phi_B}{\partial r} & \text{on } r=a,\ x\leqslant 0 \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\phi_B}{\partial r} & \text{on } r=a,\ x>l \end{cases} \qquad (1.8)$$

となる。さらに $\tilde{\phi}_D$ は (1.2) および (1.3) を満足する。Radiation condition [R] としては，$\tilde{\phi}_D$ は ϕ_B 以外に ϕ_D による波があるので，ϕ_D による波は船体より radiate され，far field で outgoing wave を表わすものを考える。

ここで incident wave potential ϕ_B の形は，simple harmonic な波であり，かつその波長は $\lambda=\dfrac{2\pi}{\kappa}=O(\varepsilon)$ となるとするので

$$\phi_B(x, y, z)e^{-i\omega t}=ce^{\kappa z}e^{i\kappa x-i\omega t} \qquad (1.9)$$

とする。これより ϕ_B の船体に及ぼす作用は，wave number κ で船体に沿うものであることがわかる。この作用は rapidly varying である。$\tilde{\phi}_D$ は ϕ_B の作用 (1.8) によって生ずるものであるので，これもやはり rapidly varying であると考えられる。

Faltinsen[1] と Ursell[3] は ϕ_D について以上に定式化された問題を解いた。Faltinsen は Matched asymptotic expansion method を利用し far field と near field の解を matching することにより，また Ursell は ϕ_D の x に関する Fourier transform $\phi_D^*(k, y, z)$ を取り，これについて解を求め ϕ_D^* の Fourier inverse transform より ϕ_D の性質を調べた。

ϕ_D の代りに $\tilde{\phi}_D$ を考えるとき Ursell の行った方法が適用され Faltinsen の求めた結果と同じものが得られることが示される。Ursell の ϕ_D に関する結果は (1.4) および (1.5) の条件と矛盾する部分があったが，その理由は $\tilde{\phi}_D$ を Ursell の方法で解析すると容易に明らかにすることができる。以下で $\tilde{\phi}_D$ についての解析を Ursell の方法で行うこととし，詳細を示す。

2. 向い波と細長船との干渉の問題 (Ursell[3] の解法)

$\tilde{\phi}_D(x, y, z)$ の x に関する Fourier transform を行い，それを次式で定義する。

$$\tilde{\phi}_D^*(k, y, z)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\phi}_D(x, y, z)e^{-ikx}dx \qquad (2.1)$$

$\tilde{\phi}_D^*$ に関する条件は次のように与えられる。

$$[\mathrm{L}] \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2\right)\tilde{\phi}_D^*(k, y, z)=0 \quad \text{in the fluid} \qquad (2.2)$$

$$[\mathrm{F}] \quad \left(\frac{\partial}{\partial z}-\kappa\right)\tilde{\phi}_D^*(k, y, z)=0 \quad \text{on } z=0 \qquad (2.3)$$

$$\begin{aligned}[\mathrm{H}] \quad \frac{\partial}{\partial r}\tilde{\phi}_D^*(k, y, z) &=-\frac{1}{2}c\left(\frac{\partial}{\partial r}e^{\kappa z}\right)\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{-i(k-\kappa)x}dx \\ &=-\frac{1}{2}c\left(\frac{\partial}{\partial r}e^{\kappa z}\right)H(k-\kappa) \quad \text{on } r=a \end{aligned} \qquad (2.4)$$

ここで $h(x)$ は

$$h(x)=\begin{cases} -1, & x\leqslant 0 \\ +1, & x\geqslant l \end{cases} \qquad (2.5)$$

であり，$0\leqslant x\leqslant l$ の船首部では十分滑らかな関数であると仮定する。また $H(k-\kappa)$ は部分積分を利用して $k=\kappa$ の近傍で変形すると

$$\begin{aligned} H(k-\kappa) &=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)e^{-i(k-\kappa)x}dx \\ &=\left[h(x)\frac{e^{i(\kappa-k)}-1}{i(\kappa-k)}\right]_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad -\int_0^l h'(x)\frac{e^{i(\kappa-k)}-1}{i(\kappa-k)}dx \\ &=\frac{2i}{\kappa-k}+\int_0^l xh'(x)dx+O(\kappa-k) \end{aligned} \qquad (2.6)$$

となり，$k=\kappa$ で1位の pole を持つことがわかる。

さらに [R] radiation condition は $\tilde{\phi}_D^*$ に対して $y\to\infty$ で outgoing wave を表わすことを要請するので (2.2) および (2.3) を満足する解は

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_D^*(k, y, z)&=p_0(k)\Psi_0(k, y, z) \\ &\quad +\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p_{2m}(k)}{K'_{2m}(ka)}\Psi_{2m}(k, y, z)\end{aligned} \qquad (2.7)$$

で与えられる。ここで

$$\Psi_0(|k|, y, z)=\begin{cases} -2\pi i\coth\gamma\,\mathcal{I}(|k|, y, z, \gamma) \\ \quad +2\mathcal{R}(|k|, y, z, \gamma) & |k|<\kappa \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\pi\cot\gamma_1 \mathcal{T}(|k|, y, z, i\gamma_1) \\ \quad +2\mathcal{R}(|k|, y, z, i\gamma_1) \quad |k|>\kappa \end{cases} \tag{2.8}$$

$$\mathcal{T}(|k|, y, z, \gamma)=e^{|k|z\cosh\gamma}\cos(|k|y\sinh\gamma) \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(|k|, y, z, \gamma) &= K_0(|k|r) \\ &+2\sum_1^\infty(-1)^{m-1}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}(I_\nu(|k|r)\cos\nu\theta\right]_{\nu=m} \\ &\times\sinh m\gamma\coth\gamma\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{2m}(|k|, y, z, \gamma) &= K_{2m}(|k|r)\cos 2m\theta \\ &+2\cosh\gamma K_{2m-1}(|k|r)\cos(2m-1)\theta \\ &+K_{2m-2}(|k|r)\cos(2m-2)\theta, \\ &\qquad m=1, 2, 3, \cdots\end{aligned} \tag{2.11}$$

であり，$I_{2m}(z)$, $K_{2m}(z)$ は modified Bessel function である。以上で parameter γ と γ_1 は次の式で定義される。

$$\kappa=\begin{cases}|k|\cosh\gamma & |k|<\kappa \\ |k|\cos\gamma_1 & |k|>\kappa\end{cases} \tag{2.12}$$

(2.7) の展開式を [H] condition (2.4) に代入し，係数関数 p_0, p_{2m}, $m=1, 2, \cdots$ を求めれば良い。しかし (2.6) より明らかなように body boundary condition (2.4) は $k=\kappa$ で singular なので，potential $\tilde{\phi}_D^*$ もまた $k=\kappa$ で singular になることが推察される。$\tilde{\phi}_D^*$ の Fourier inverse transform により potential $\tilde{\phi}_D(x, y, z)$ が定まることより，$\tilde{\phi}_D^*$ の k に関する singularity が $\tilde{\phi}_D$ の $|x|\to\infty$ のときの漸近的な性質を与えることから (Lighthill[7] (1958))，少なくとも $|x|\to\infty$ なるときの $\tilde{\phi}_D$ の性質を知るだけなら $\tilde{\phi}_D^*$ の k に関する singularity を調べればよい。

(2.4) と (2.7) より次の関係を得る。

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}cH(k-\kappa)\left\langle a\frac{\partial}{\partial r}e^{\kappa z}\right\rangle \\ =p_0(k)\left\langle a\frac{\partial\Psi_0}{\partial r}\right\rangle+\sum_1^\infty\frac{p_{2m}(k)}{K'_{2m}(ka)}\left\langle a\frac{\partial\Psi_{2m}}{\partial r}\right\rangle\end{aligned} \tag{2.13}$$

ここで $\langle\ \rangle$ は微分は $r=a$ での値を取ることを意味する。(2.13) で $|k|<\kappa$ のとき，(2.8), (2.9) および (2.10) より

$$\begin{aligned}&2\pi i\coth\gamma T(k, \theta)+2R(k, \theta) \\ &=-\frac{c}{2}\frac{H(k-\kappa)}{p_0(k)}\left\langle a\frac{\partial}{\partial r}e^{\kappa z}\right\rangle \\ &-\sum_1^\infty\frac{p_{2m}(k)}{p_0(k)}\frac{1}{K'_{2m}(ka)}\left\langle a\frac{\partial\Psi_{2m}}{\partial r}\right\rangle\end{aligned} \tag{2.14}$$

と書ける。

ここで

$$T(k, \theta)=\left\langle a\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{T}(|k|, y, z, \gamma)\right\rangle \tag{2.15}$$

$$R(k, \theta)=\left\langle a\frac{\partial}{\partial r}\mathcal{R}(|k|, y, z, \gamma)\right\rangle \tag{2.16}$$

である。(2.14) は左辺の関数は右辺の $\langle\ \rangle$ の関数の set による展開式であると見做すことができる。この関数の set は $k=\kappa$ で regular である。左辺の関数について $k=\kappa$ での性質を調べると，T については

$$T(k, \theta)=\left\langle a\frac{\partial}{\partial r}e^{\kappa z}\right\rangle+O(\kappa-k) \tag{2.17}$$

であることがわかる。また $R(k, \theta)$ は $k=\kappa$ で regular であるので $k=\kappa$ で regular な係数関数 $R_0(k)$, $R_{2m}(k)$ $(m=1, 2, 3, \cdots)$ を使って次のように展開される。

$$R(k, \theta)=R_0(k)\left\langle a\frac{\partial}{\partial r}e^{\kappa z}\right\rangle+\sum_1^\infty R_{2m}(k)\frac{1}{K'_{2m}(ka)}\left\langle a\frac{\partial\Psi_{2m}}{\partial r}\right\rangle \tag{2.18}$$

(2.17) と (2.18) を (2.14) へ代入し，$\langle\ \rangle$ の関数の set の係数を比較することにより次の関係が得られる。

$$-\frac{1}{2}c\frac{H(k-\kappa)}{p_0(k)}=2\pi i\coth\gamma+2R_0(k)+O(\kappa-k)^{1/2} \tag{2.19}$$

$$-\frac{p_{2m}(k)}{p_0(k)}=2R_{2m}(k)+O(\kappa-k)^{1/2} \tag{2.20}$$

これらを (2.7) へ代入することにより potential $\tilde{\phi}_D^*$ は $k=\kappa$ の近傍で

$$\begin{aligned}&\tilde{\phi}_D^*(k, y, z) \\ &=p_0(k)\{2\pi i\coth\gamma\mathcal{T}(k, y, z)+2\mathcal{R}(k, y, z)\} \\ &\quad+\sum_1^\infty\frac{p_{2m}(k)}{K'_{2m}(ka)}\Psi_{2m}(k, y, z) \\ &=-\frac{1}{2}c\frac{2\pi i\coth\gamma\mathcal{T}+2\mathcal{R}}{2\pi i\coth\gamma+2R_0+O(\kappa-k)^{1/2}}H(\kappa-k) \\ &\quad+\frac{1}{2}c\sum_1^\infty\frac{2R_{2m}+O(\kappa-k)}{2\pi i\coth\gamma+2R_0+O(\kappa-k)^{1/2}} \\ &\quad\times\frac{H(\kappa-k)}{K'_{2m}(ka)}\Psi_{2m}(k, y, z)\end{aligned} \tag{2.21}$$

と表わされる。さらに Ψ_{2m}, $\mathcal{T}$, $\mathcal{R}$, K'_{2m} および R_0, R_{2m} は $k=\kappa$ で regular であるから，その近傍で

Taylor 展開される。よって $k=\kappa$ の近傍では $H(\kappa-k)$ に (2.6) を代入して，$k<\kappa$ に注意すると

$$\tilde{\phi}_D^*(k,y,z)$$
$$=-\frac{ic}{\kappa-k}\mathcal{T}(\kappa,y,z)$$
$$-\frac{c}{\pi}\frac{\tanh\gamma}{\kappa-k}\Big\{\mathcal{R}(\kappa,y,z)-R_0(\kappa)\mathcal{T}(\kappa,y,z)$$
$$-\sum_1^\infty\frac{R_{2m}(\kappa)}{K'_{2m}(\kappa a)}\Psi_{2m}(\kappa,y,z)\Big\}+O(1) \qquad (2.22)$$

を得る。次の関係

$$\mathcal{T}(\kappa,y,z)=e^{\kappa z} \qquad (2.23)$$

$$\tanh\gamma=\frac{(\kappa^2-k^2)^{1/2}}{\kappa}\fallingdotseq\left(\frac{2}{\kappa}\right)^{1/2}(\kappa-k)^{1/2} \quad (2.24)$$

$$\Phi_0^*(\kappa,y,z)=2\mathcal{R}(\kappa,y,z)-2R_0(\kappa)\mathcal{T}(\kappa,y,z)$$
$$-2\sum_1^\infty\frac{R_{2m}(\kappa)}{K'_{2m}(\kappa a)}\Psi_{2m}(\kappa,y,z) \qquad (2.25)$$

を (2.22) に代入すると

$$\tilde{\phi}_D^*(k,y,z)=-\frac{ice^{\kappa z}}{\kappa-k}$$
$$-\frac{c}{\pi}\left(\frac{1}{2\kappa(\kappa-k)}\right)^{1/2}\Phi_0^*(\kappa,y,z)+O(1)$$
$$k<\kappa \qquad (2.26)$$

を得る。これが $\tilde{\phi}_D^*$ の singularity を示す式である。$\kappa>k$ のときも同じように解析されて

$$\tilde{\phi}_D^*(k,y,z)=-\frac{ice^{\kappa z}}{\kappa-k}$$
$$+i\frac{c}{\pi}\left(\frac{1}{2\kappa(k-\kappa)}\right)^{1/2}\Phi_0^*(\kappa,y,z)+O(1)$$
$$k>\kappa \qquad (2.27)$$

を得る。

これまで得られた結果は Ursell[3] (1957) の方法を追ったものであり，$\tilde{\phi}_D^*(k,y,z)$ は Ursell の解析した $\phi_D^*(k,y,z)$ の結果と全く同じである。このことは $\tilde{\phi}_D$ と ϕ_D が

$$\tilde{\phi}_D=\frac{1}{2}\phi_B+\phi_D \qquad (1.6)$$

の関係があるので Ursell の解析の結果はどこかおかしな点があるということになる。すなわち (1.6) の両辺を x に関して Fourier transform を取ると ϕ_B の Fourier transform は

$$\phi_B^*(k,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_B(x,y,z)e^{-ikx}dx$$
$$=ce^{\kappa z}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(k-\kappa)x}dx=2\pi ce^{\kappa z}\delta(k-\kappa) \qquad (2.28)$$

となるので，$\tilde{\phi}_D^*$ と ϕ_D^* は $\delta(k-\kappa)$ だけの singularity の違いがなければならないからである。

この違いは radiation condition に関係するものであると考えられる。radiation condition と body boundary condition を組み合せた形で (1.8) に $\tilde{\phi}_D$ に関する条件を求めた。同様に incident wave potential ϕ_B, およびこれと船体との干渉を表わす potential ϕ_D についての条件を示すと，$r=a$ で

$$[\mathrm{H}] \quad \frac{\partial\phi_B}{\partial r}=\frac{\partial\phi_B}{\partial r}1 \qquad -\infty<x<\infty \qquad (2.29)$$

$$[\mathrm{H}] \quad \frac{\partial\phi_D}{\partial r}=-\frac{\partial\phi_B}{\partial r}g(x) \qquad -\infty<x<\infty \qquad (2.30)$$

$$[\mathrm{H}] \quad \frac{\partial\tilde{\phi}_D}{\partial r}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\phi_B}{\partial r}h(x) \qquad -\infty<x<\infty \qquad (2.31)$$

である。ここで (2.29) の右辺の 1 は constant function を，$g(x)$ および $h(x)$ はそれぞれ

$$g(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ 1 & x\geqslant l\end{cases} \qquad (2.32)$$

$$h(x)=\begin{cases}-1 & x\leqslant 0\\ +1 & x\geqslant l\end{cases} \qquad (2.5)$$

である。Potential の Fourier transform が意味を持つために，上の constant function 1，そして関数 $g(x)$ および $h(x)$ を超関数と考えて potential を超関数として扱うのが便利である。これらの関数の基本的性質は次式の右辺の超関数

$$\left.\begin{array}{ll}1\to 1 & \text{constant function}\\ g(x)\to H(x) & \text{Heaviside's step function}\\ h(x)\to \mathrm{sgn}\,(x) & \text{sign function}\end{array}\right\} \qquad (2.33)$$

に対応する。

ϕ_B, ϕ_D および $\tilde{\phi}_D$ の Fourier transform に対応して [H] condition の Fourier transform は (2.33) の Fourier transform と密接な関係があると考えられる。すなわち，(Lighthill[7] (1958))

$$\int_{-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-ikx}dx=2\pi\delta(k) \qquad (2.34)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}H(x)e^{-ikx}dx=\pi\delta(k)-\frac{i}{k} \qquad (2.35)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sgn}\,(x)e^{-ikx}dx=-\frac{2i}{k} \qquad (2.36)$$

であり，それぞれ δ 関数および $\frac{1}{k}$ の特異性を持つことが明らかである。この (2.33) で表わされる対応

を基に考えると (2.31) の [H] condition の Fourier transform は $\frac{1}{k-\kappa}$ の特異性のみを持つことがわかる。すなわち $\tilde{\phi}_D^*$ は $\frac{1}{\kappa-k}$ の特異性を持つ。同様に (2.30) の Fourier transform は $\frac{1}{\kappa-k}$ の特異性だけでなく $\delta(\kappa-k)$ の特異性をも持つことがわかる。すなわち ϕ_D^* には $\delta(\kappa-k)$ の特異性がなければならない。このことより ϕ_D^* は (2.26), (2.27) でなく,

$$\phi_D^*(k,y,z)=-\frac{ice^{\kappa z}}{\kappa-k}-\pi ce^{\kappa z}\delta(\kappa-k)+\begin{cases}-\dfrac{c}{\pi}\left(\dfrac{1}{2\kappa(\kappa-k)}\right)^{1/2}\Phi_0^*(\kappa,y,z) & k<\kappa\\ +\dfrac{ic}{\pi}\left(\dfrac{1}{2\kappa(k-\kappa)}\right)^{1/2}\Phi_0^*(\kappa,y,z) & k>\kappa\end{cases}\tag{2.37}$$

とならなければならない。実際 (2.30) の [H] condition について Fourier transform を行うと, (2.6) を求めた時と同様にして

$$\begin{aligned}G(k-\kappa)&=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i(k-\kappa)x}dx\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{g(x)-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right\}e^{-i(k-\kappa)x}dx\\&=\left[\left\{g(x)-\frac{1}{2}\right\}\frac{e^{i(\kappa-k)}-1}{i(\kappa-k)}\right]_{-\infty}^{\infty}\\&\quad-\int_0^l g'(x)\frac{e^{i(\kappa-k)}-1}{i(\kappa-k)}dx+\pi\delta(k-\kappa)\\&=\frac{i}{\kappa-k}+\pi\delta(k-\kappa)-\int_0^l xg'(x)dx\\&\quad+O(k-\kappa)\end{aligned}\tag{2.38}$$

のように δ 関数の入った形に書ける。Ursell[3] の解析した ϕ_D^* の結果には $\delta(k-\kappa)$ の項を欠いていることがわかる。

ϕ_D^* として (2.37) を使って Fourier inverse transform を行うと

$$\begin{aligned}&\phi_D(x,y,z)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_D^*(k,y,z)e^{ikx}dk\\&=-\frac{1}{2\pi}ce^{\kappa z}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{i}{\kappa-k}+\pi\delta(k-\kappa)\right\}e^{ikx}dk\\&\quad+\frac{1}{2\pi}c\Phi_0^*(\kappa,y,z)\left\{\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\kappa}\left(\frac{1}{2\kappa(\kappa-k)}\right)^{1/2}e^{ikx}dk\right.\\&\quad\left.+\frac{i}{\pi}\int_{\kappa}^{\infty}\left(\frac{1}{2\kappa(k-\kappa)}\right)^{1/2}e^{ikx}dk\right\}\qquad(2.39)\\&=-ce^{\kappa z}e^{i\kappa x}H(x)\\&\quad-c\left(\frac{1}{2\pi\kappa x}\right)^{1/2}\Phi_0^*(\kappa,y,z)e^{i\kappa x-i\cdot\pi/4}H(x)\\&\quad+O(\kappa|x|)^{-3/2}\end{aligned}\tag{2.40}$$

となる。(2.40) の右辺第一項は $x>0$ で $-\phi_B$, $x<0$ で 0 となるので total potential ϕ_T は

$$\phi_T=\phi_B+\phi_D\qquad -\infty<x<\infty\tag{1.1}$$

であるので,

$$\phi_T=\begin{cases}\phi_B+O(\kappa|x|)^{-3/2} & x<0\\ -c\left(\dfrac{1}{2\pi\kappa x}\right)^{1/2}\Phi_0^*(\kappa,y,z)e^{ikx-i\cdot\pi/4}\\ \quad+O(\kappa|x|)^{-3/2} & x>0\end{cases}\tag{2.41}$$

となり合理的な結果を与える。$\tilde{\phi}_D^*$ についても逆変換を行うと

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_D(x,y,z)&=-\frac{1}{2}\phi_B\,\mathrm{sgn}(x)\\&\quad-c\left(\frac{1}{2\pi\kappa x}\right)^{1/2}\Phi_0^*(\kappa,y,z)e^{i\kappa x-i\cdot\pi/4}H(x)\end{aligned}\tag{2.42}$$

となり, (1.7) の定義式により (2.41) と同じ ϕ_T が得られる。

ここで得られた結果は Faltinsen によるものと同一の結果であり, incident wave は船体と干渉し変形を受けて, $x^{-1/2}$ で減衰するようになり, 位相が $\frac{\pi}{4}$ 変化する。さらに船体の断面形状の影響は (2.25) で定義される $\Phi_0^*(\kappa,y,z)$ によって表わされるので, 任意の断面形状の船体にも以上の解析の結果は適用される。($\Phi_0^*(\kappa,y,z)$ の性質は Appendix I に示される。)

(2.41) の結果より明らかなように total potential ϕ_T は $x=0$ に特異性がある。船首部における干渉の問題を解かなければならないことがわかる。ここで得られている解は bow near field に対して far field である middle body near field のものであり, これは bow near field での解と matching しなければならない。Bow part を含む形の解析を Maruo[2] (1974) が試みているが, その結果は多分 bow near field と middle body near field の解を含むものであると考えられる。しかしこの問題はもう少し詳しい解析が必要である。

3. 定常航走している船の Kelvin 波と船体との干渉

定常航走している船による造波の問題においても船首部で生じた波が船体を伝播する際に変形を受けることが知られている (Adachi[8),9)] (1973), (1976))。しか

しこれまでこの問題に対して厳密な定式化がなされてきたとは言い難い。特に船首部に生じた Kelvin pattern wave がどのように船体に作用するかについては合理的な説明がなされていない。この点に留意しつつ解析を行うことにする。

船体より遠く離れた far field の点では船体の攪乱による波動があり，さらに velocity potential は線型化された自由表面条件を満足するものと仮定する。また radiation condition も満足するとする。すなわち $R=(x^2+y^2)^{1/2}=O(1)$ である far field において potential $\phi(x, y, z)$ は次の条件を満足する。

$$[\mathrm{L}] \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x, y, z)=0 \quad \text{in the fluid} \tag{3.1}$$

$$[\mathrm{F}] \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi(x, y, z)=0 \quad \text{on } z=0 \tag{3.2}$$

[R] No waves at upstream side

ここで $\nu=\frac{g}{U^2}=O(\varepsilon^{-1})$ である。このことは船の造る波の波長の order は $O(\varepsilon)$ であることを意味する。Far field から船体を見るとき，その船体の詳細は見えず，もし船体が細長いとすると船体による攪乱の優勢な部分は船体中心線上に分布した source distribution によって表わされる。この source distribution を

$$\sigma(x) \qquad 0\leqslant x\leqslant l \tag{3.3}$$

と書くと，far field における potential は

$$\phi(x, y, z)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}dk e^{ikx}\sigma^*(k) \times\int_{-\infty \atop c}^{\infty}dl\frac{\exp(ily+\sqrt{k^2+l^2}\,z)}{\sqrt{k^2+l^2}-k^2/\nu} \tag{3.4}$$

で与えられる。ここで $\sigma^*(k)$ は $\sigma(x)$ の Fourier transform であり，また l に関する積分路 c は [R] 条件を満足するよう選ばれる。

Far-field potential の $y\to O(\varepsilon)$ となる inner expansion を調べることにより，船体近傍の流れ場の様子が推定できる。この目的のために (3.4) で $y\to O(\varepsilon)$ とする inner expansion を求めると，(Appendix II) $x>0$ のとき

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z)\sim&\underbrace{\frac{1}{\pi}\sigma(x)\ln r}_{O(\sigma\ln\varepsilon)}\\&\underbrace{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\sigma'(\xi)\ln(2|x-\xi|)\,\mathrm{sgn}(x-\xi)}_{O(\sigma)}\\&\underbrace{-\left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^{1/2}|\sigma^*(\nu)|e^{\nu z}\frac{\cos(\nu x-\pi/4+\beta)}{x^{1/2}}}_{O(\sigma^*(\nu)\varepsilon^{-1/2})}\\&+\text{higher order terms}\end{aligned} \tag{3.6}$$

(3.5)

となる。ここで

$$\sigma^*(\nu)=|\sigma^*(\nu)|e^{i\beta}=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(x)e^{-i\nu x}dx \tag{3.7}$$

とした。一般に $\sigma^*(\nu)=O(\varepsilon\sigma)$ であると仮定してもよいと思われるので，(3.6) の波動を表わす項は (3.5) に比べ $O(\varepsilon^{1/2})$ だけ高次である。

(3.5) を $\phi_1(x, y, z)$ と書くと，この項は near field ($x=O(1)$, $y=O(\varepsilon)$, $z=O(\varepsilon)$) で次の条件を満足することがわかる。

$$[\mathrm{L}] \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_1(x, y, z)=0 \quad \text{in the fluid} \tag{3.8}$$

$$[\mathrm{F}] \qquad \frac{\partial\phi_1}{\partial z}=0 \quad \text{on } z=0 \tag{3.9}$$

このことより near field での potential の第1項 ϕ_1 は2次元的な性質を持っているといえる。Body boundary condition の first order term は slender body theory の仮定により

$$[\mathrm{H}] \qquad \frac{\partial\phi_1}{\partial n}=-\frac{Uf_x}{\sqrt{1+f_y^2}} \quad \text{on } z=f(x, y) \tag{3.10}$$

となる。ここで $\frac{\partial}{\partial n}$ は y-z 面で船体表面上での法線微分を表わし，$z=f(x, y)=O(\varepsilon)$ は船体の形状を表わす関数である。

Near field での potential の first order term ϕ_1 は 2-D rigid wall problem の解であり，[H] 条件および (3.5) との matching の条件から解が確定する。すなわち $\sigma(x)$ を定めることができる。

Near field における second order term $\phi_2(x, y, z)$ は (3.6) で表わされる波動の性質を持っていることが考えられる。しかもこの項は x で2回微分すると $O(\varepsilon^{-2})$ だけ order が下がる。したがって支配方程式は 3-D の Laplace equation であることが仮定される。自由表面条件は線型化された (3.2) の [F] 条件を満足するので，$\phi_2(x, y, z)$ に関する条件は次のようになる。

$$[\mathrm{L}] \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_2(x, y, z)=0 \quad \text{in the fluid} \tag{3.11}$$

$$[\mathrm{F}] \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial}{\partial z}\right)\phi_2(x, y, z)=0 \quad \text{on } z=0 \tag{3.12}$$

Body boundary condition に関しては (3.6) の transverse wave が near field における incident wave として作用するので，この incident wave potential (3.6) を $\phi_B(x,y,z)$ と書くと，

$$[\mathrm{H}] \qquad \frac{\partial\phi_2}{\partial n}=-\frac{\partial\phi_B}{\partial n} \qquad \text{on } z=f(x,y) \quad (3.13)$$

となる。

Near field での total potential を次式で定義する。

$$\phi_T=\phi_1+\phi_B+\phi_2 \qquad (3.14)$$

この potential は $\nu=O(\varepsilon^{-1})$ の条件の下で $O(\sigma\varepsilon^{1/2})$ まで consistent な条件を満足する。そしてこの potential は船首部より離れた船体近傍でのものであり，船首部に近くなると問題はさらに複雑になる。ここでは船首部の問題については考察しない。

$\phi_2(x,y,z)$ の問題を解くに際し，$\phi_B(x,y,z)$ について考察を加えておく。この potential は Appendix II より明らかなように，$x\gg 0$ で次の表わし方が可能である。

$$\begin{aligned}\phi_B(x,y,z)&\\ =&-i\int_{-\nu-\rho}^{-\nu}\left(\frac{\nu}{-2(k+\nu)}\right)^{1/2}\sigma^*(k)e^{-kz+ikx}dk\\ &-\int_{-\nu}^{-\nu+\rho}\left(\frac{\nu}{2(k+\nu)}\right)^{1/2}\sigma^*(k)e^{-kz+ikx}dk\\ &-\int_{\nu-\rho}^{\nu}\left(\frac{\nu}{2(\nu-k)}\right)^{1/2}\sigma^*(k)e^{kz+ikx}dk\\ &+i\int_{\nu}^{\nu+\rho}\left(\frac{\nu}{2(k-\nu)}\right)^{1/2}\sigma^*(k)e^{kz+ikx}dx\end{aligned} \qquad (3.15)$$

ここで $\rho=O(\varepsilon)=\text{small constant}$ である。この式は

$$A(k)e^{|k|z+ikx} \qquad (3.16)$$

の形の表成波の重ね合せを表わすものと見ることができる。(3.13) の body boundary condition から ϕ_B の作用により船体が near field に生ずる攪乱 ϕ_2 もやはり potential ϕ_B の component potential

$$\Phi_B(x,y,z,k)=(3.16) \qquad (3.17)$$

に対応する成分 $\Phi_2(x,y,z,k)$ を持つことが考えられる。すなわち ϕ_2 に関する条件は線型であるので，素成波成分 $\Phi_2(x,y,z,k)$ の存在を仮定する。このとき Φ_2 に関する境界値問題は次のように書ける。

$$[\mathrm{L}] \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_2(x,y,z,k)=0 \qquad \text{in the fluid} \quad (3.18)$$

$$[\mathrm{F}] \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x_2}+|k|\frac{\partial}{\partial z}\right)\Phi_2(x,y,z,k)=0 \qquad \text{on } z=0 \quad (3.19)$$

$$[\mathrm{H}] \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}=-\frac{\partial\Phi_B}{\partial n} \qquad \text{on } z=f(x,y) \quad (3.20)$$

Φ_2 は near field の解であるので far field の解との matching が radiation condition に相当する。ここでは Φ_2 による攪乱は far field で outgoing wave を表わすものを取るという条件とする。(3.18)～(3.20)で設定された境界値問題は，向い波の中に置かれた船の場合と同じ形をしている。自由表面条件の形が少し異なるだけであり，本質的に Φ_2 と向い波の場合の diffraction potential ϕ_D は同じである。

ここで ϕ_B は

$$\phi_B\sim\begin{cases}0 & x\ll 0\\ -\left(\dfrac{2\nu}{\pi}\right)^{1/2}|\sigma^*(\nu)|e^{\nu z}\cos\left(\nu x-\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)\dfrac{1}{x^{1/2}} & x\gg 0\end{cases} \qquad (3.12)$$

の如く radiation condition を満足する。しかし ϕ_B の component potential Φ_B は次のように表わすことができ

$$\Phi_B(x,y,z,k)=\begin{cases}-i\left(\dfrac{\nu}{-2(k+\nu)}\right)^{1/2}\sigma^*(k)e^{-kz+ikx} & -\nu-\rho<k<-\nu\\ -\left(\dfrac{\nu}{2(k+\nu)}\right)^{1/2}\sigma^*(k)e^{-kz+ikx} & -\nu<k<-\nu+\rho\\ -\left(\dfrac{\nu}{2(\nu-k)}\right)^{1/2}\sigma^*(k)e^{kz+ikx} & \nu-\rho<k<\nu\\ i\left(\dfrac{\nu}{2(k-\nu)}\right)^{1/2}\sigma^*(k)e^{kz+ikx} & \nu<k<\nu+\rho\end{cases} \qquad (3.22)$$

$-\infty<x<\infty$ で定義される potential である。したがって Φ_2 の body boundary condition [H] (3.20) は次のように書ける。

$$[\mathrm{H}] \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}=-g(x)\frac{\partial\Phi_B}{\partial n} \qquad \text{on } z=f(x,y) \quad (3.23)$$

ここで

$$g(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ 1 & x\geqslant l\end{cases} \qquad (2.32)$$

である。

Φ_2 に関する問題は Adachi[4] (1974) により Matched asymptotic expansion method によって解析されているが，ここでは §2 で行った Ursell[3] の解析を適用

する。

Φ_2 の x に関する Fourier transform を行い，それを

$$\Phi_2^*(\lambda, y, z, k)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2(x, y, z, k)e^{-i\lambda x}dx \tag{3.24}$$

とする。Φ_2^* に関する条件は

[L] $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}-\lambda^2\right)\Phi_2^*(\lambda, y, z, k)=0$ in the fluid (3.25)

[F] $\left(\dfrac{\partial}{\partial z}-\dfrac{\lambda^2}{|k|}\right)\Phi_2^*(\lambda, y, z, k)=0$ on $z=0$ (3.26)

[H]
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}\Phi_2^*(\lambda, y, z, k)&=-A(k)\left(\frac{\partial}{\partial n}e^{|k|z}\right)\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-i(\lambda-k)x}dx\\&=-A(k)\left(\frac{\partial}{\partial n}e^{|k|z}\right)G(\lambda-k)\end{aligned}$$
on $r=a$ (3.27)

[R] Outgoing wave at $y=\infty$

(3.25)，(3.26) および radiation condition を満足する一般解は

$$\Phi_2^*(\lambda, y, z, k)=p_0^{(2)}(\lambda, k)\Psi_0^{(2)}(\lambda, y, z, \alpha)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{p_{2m}(\lambda, k)}{K_{2m}'(\lambda a)}\Psi_{2m}(\lambda, y, z, \alpha) \tag{3.28}$$

で与えられる。ここで

$$\Psi_0^{(2)}(\lambda, y, z, \alpha)=\begin{cases}2\pi i\coth\alpha\mathcal{T}(\lambda, y, z, \alpha)+2\mathcal{R}(\lambda, y, z, \alpha) & \lambda>|k|\\ 2\pi\cot\alpha_1\mathcal{T}(\lambda, y, z, i\alpha_1)+2\mathcal{R}(\lambda, y, z, i\alpha_1) & -|k|<\lambda<|k|\\ -2\pi i\coth\alpha\mathcal{T}(\lambda, y, z, \alpha)+2\mathcal{R}(\lambda, y, z, \alpha) & \lambda<-|k|\end{cases} \tag{3.29}$$

である。$\mathcal{T}$，$\mathcal{R}$ および Ψ_{2m} は (2.9)，(2.10) および (2.11) に定義される関数である。parameter α と α_1 は次式で定義される。

$$|\lambda|=\begin{cases}|k|\cosh\alpha & |\lambda|>|k|\\ |k|\cos\alpha_1 & |\lambda|<|k|\end{cases} \tag{3.30}$$

(3.28) の展開式を [H] 条件に代入して $p_0^{(2)}(\lambda, k)$ および $p_{2m}^{(2)}(\lambda, k)$, $m=1, 2, 3, \cdots$ を求めれば良い。$\lambda=\pm|k|$ の近傍のとき係数関数は §2 の場合と全く同じようにして求めることができる。

$\nu-\rho<k<\nu+\rho$ のとき $0<k$, よって Φ_2^* は $\lambda=k$ の近傍のみで singular になるので次の式を得る。

$$\Phi_2^*(\lambda, y, z, k)=-A(k)\frac{i}{k-\lambda}e^{kz}-A(k)\pi\delta(\lambda-k)e^{kz} \tag{3.31}$$

$$+\begin{cases}-\dfrac{1}{\pi}A(k)\left(\dfrac{1}{2k(\lambda-k)}\right)^{1/2}\Phi_0^*(k, y, z) & \lambda>k\\ -\dfrac{i}{\pi}A(k)\left(\dfrac{1}{2k(k-\lambda)}\right)^{1/2}\Phi_0^*(k, y, z) & \lambda<k\end{cases} \tag{3.32}$$

となる。これの Fourier inverse transform をとると，

$$\Phi_2(x, y, z, k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_2^*(\lambda, y, z, k)e^{i\lambda x}d\lambda \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}&=-\frac{A(k)}{2\pi}e^{kz}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{k-\lambda}e^{i\lambda x}+\pi\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\lambda-k)e^{i\lambda x}d\lambda\right\}\\&\quad-\frac{1}{\pi}A(k)\frac{\Phi_0^*}{(2k)^{1/2}}\left\{i\int_{-\infty}^{k}\frac{e^{i\lambda x}}{(k-\lambda)^{1/2}}d\lambda+\int_{k}^{\infty}\frac{e^{i\lambda x}}{(\lambda-k)^{1/2}}d\lambda\right\}\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}&=-A(k)e^{kz}e^{ikx}H(x)\\&\quad-\frac{1}{\pi}A(k)\left(\frac{1}{2\pi kx}\right)^{1/2}\Phi_0^*(k, y, z)e^{ikx+i\cdot\pi/4}H(x)\end{aligned} \tag{3.35}$$

となる。(3.35) の右辺第一項は $-\Phi_BH(x)$ であり，total component potential Φ_T を次式で定義すると

$$\Phi_T=\Phi_B+\Phi_2 \tag{3.36}$$

$$=\begin{cases}\Phi_B & x<0\\ -\dfrac{1}{\pi}A(k)\left(\dfrac{1}{2\pi kx}\right)^{1/2}\Phi_0^*(k, y, z)e^{ikx+i\cdot\pi/4} & x>l\end{cases} \tag{3.37}$$

と書くことができる。

$-\nu-\rho<k<-\nu+\rho$ のとき $k<0$, よって Φ_2^* は $\lambda=-|k|$ の近傍で singular になる。結果のみを記すと

$$\Phi_T=\begin{cases}\Phi_B & x<0\\ -\dfrac{1}{\pi}A(k)\left(\dfrac{1}{2\pi|k|x}\right)^{1/2}\Phi_0^*(|k|, y, z)e^{ikx+i\cdot\pi/4} & x>l\end{cases} \tag{3.38}$$

である。

Bow component potential は (3.22) で表わされて

おり，$A(k)$ は (3.22) の指数関数部 $e^{|k|z+ikx}$ を除いたもので定義されている。Total component potential を k について積分を行うと，

$$\phi_T-\phi_1\sim\int_{-\nu-\rho}^{-\nu+\rho}\Phi_T(3.38)dk+\int_{\nu-\rho}^{\nu+\rho}\Phi_T(3.37)dk$$

$$=\begin{cases} O(|x|)^{-3/2} & x<0 \\ \dfrac{2}{\pi}|\sigma^*(\nu)|\Phi_0^*(\nu,y,z)\dfrac{\cos(\nu x+\beta)}{x} & \\ \qquad +O(x)^{-3/2} & x>l \end{cases} \tag{3.39}$$

となることがわかる。

(3.39)は船首部より遠く離れた船体近傍での potential を与える。船体の前方では ϕ_B (3.21) と一致し，後方では船首波 ϕ_B と船体との干渉の結果 potential は x^{-1} で減衰し，船首波と比べ $\dfrac{\pi}{4}$ だけ位相が進んでいる波動が見られることがわかる。(3.39) は船の前方には $O(|x|)^{-3/2}$ の波動しか存在しないという radiation condition を満足している。

4. 長い船体の一部分が振動するときの Diffraction 問題

非常に長い船体の一部分が調和振動しているとき，この振動部によって生じた波は振動していない船体部分に伝播すると干渉を起こす。この振動による velocity potential $\phi(x,y,z)e^{-i\omega t}$ は far field において次の条件を満足するとする。

[L] $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi(x,y,z)=0 \quad \text{in the fluid} \tag{4.1}$$

[F] $$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\kappa\right)\phi(x,y,z)=0 \quad \text{on } z=0 \tag{4.2}$$

[R] Outgoing wave from the oscillating part

ここで $\kappa=\dfrac{g}{\omega^2}=O(\varepsilon^{-1})$ であるとする。Far field から船体を見るとき，振動部が $-l\leqslant x\leqslant l$ にあるとし，撹乱は船体中心線上に分布した pulsating source distribution $\sigma(x)e^{-i\omega t}$ で表わされるとしてよい。このとき far field における potential は time factor $e^{-i\omega t}$ を落として

$$\phi(x,y,z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\sigma(\xi)\times\oint_0^\infty dk\frac{ke^{kz}}{k-\kappa}J_0(k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}) \tag{4.3}$$

で表わされる。$y\to O(\varepsilon)$ となる inner expansion は Ogilvie and Tuck[10] (1969) によると，$-l\leqslant x\leqslant l$ で

$$\phi(x,y,z)\sim i\sigma(x)e^{\kappa z+i\kappa y} \tag{4.4}$$

であり，これは near field における問題に対する radiation condition を与えるものである。すなわち細長船理論の仮定の下で near field における potential の first order term ϕ_1 は2次元的であり次の条件を満足する。

[L] $$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_1(x,y,z)=0 \quad \text{in the fluid} \tag{4.5}$$

[F] $$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\kappa\right)\phi_1(x,y,z)=0 \quad \text{on } z=0 \tag{4.6}$$

[H] $$\frac{\partial}{\partial n}\phi_1=V(x,y,z) \quad \text{on } z=f(x,z) \tag{4.7}$$

[R] $$\phi_1\sim i\sigma(x)e^{\kappa z+i\kappa y} \quad \text{as } y\to\infty \tag{4.8}$$

これは 2-D boundary value problem として解くことができ，$\sigma(x)$ は [H] 条件に関連して定められる。(4,7) の $V(x,y,z)$ は与えられる条件式であり，x 方向に slowly varying であるとする。

振動部より離れている船体部 ($|x|\gg l$) での船体近傍の流れ場は ϕ_1 の問題で定まる $\sigma(x)$ を (4.3) に代入したときの potential の inner expansion の性質によって推察できる (Appendix III)。すなわち，$y\to O(\varepsilon)$ のとき

$$\phi(x,y,z)\sim\begin{cases} -\left(\dfrac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2}\sigma^*(-\kappa)\dfrac{e^{\kappa z}e^{-i\kappa x+i\pi/4}}{|x|^{1/2}} & x\ll 0 \\ -\left(\dfrac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2}\sigma^*(\kappa)\dfrac{e^{\kappa z}e^{i\kappa x-i\pi/4}}{|x|^{1/2}} & x\gg 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

であり，x に関して rapidly varying function である。よって near field での Laplace equation は2次元的でなく3次元的であると考えられる。自由表面条件は線型化された条件を満足するので $|x|\gg l$ での near field potential を ϕ_2 とするとき，ϕ_2 は次の条件を満足すると思われる。

[L] $$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\phi_2(x,y,z)=0 \quad \text{in the fluid} \tag{4.10}$$

[F] $$\left(\frac{\partial}{\partial z}-\kappa\right)\phi_2(x,y,z)=0 \quad \text{on } z=0 \tag{4.11}$$

Body boundary condition に関しては (4.9) で与えら

れる波動が incident wave potential として作用するので，incident potential を $\phi_B(x,y,z)$ と書くと船体表面上で

$$[\mathrm{H}] \qquad \frac{\partial\phi_2}{\partial n}=-\frac{\partial\phi_B}{\partial n} \qquad \text{on } z=f(x,y) \qquad (4.12)$$

となる。このとき $|x|\gg l$ での near field における total potential ϕ_T は

$$\phi_T=\phi_B+\phi_2 \qquad (4.13)$$

で定義される。

Incident potential ϕ_B は Appendix III より明らかなように，$A(k)e^{|k|z+ikx}$ の形の重ね合せで表わすことができる。

$$\begin{aligned}\phi_B(x,y,z)&\\ =-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{1/2}&\left\{i\int_{\kappa-\alpha}^{\kappa}\frac{\sigma^*(k)}{(\kappa-k)^{1/2}}e^{kz+ikx}dk\right.\\ &\left.+\int_{\kappa}^{\kappa+\alpha}\frac{\sigma^*(k)}{(k-\kappa)^{1/2}}e^{kz+ikx}dk\right\} \qquad (4.14)\end{aligned}$$

ここで $\alpha=O(\varepsilon)=$small constant である。すなわち，ここで扱う問題は§3の定常航走している細長船のものと全く同じ形をしている。ϕ_B と ϕ_2 の component potential を $\Phi_B(x,y,z,k)$ および $\Phi_2(x,y,z,k)$ と書くと，Φ_2 についての境界値問題は次のようになる。$\kappa-\alpha<k<\kappa+\alpha$ となる k に対して，

$$[\mathrm{L}] \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi_2(x,y,z,k)=0 \quad \text{in the fluid} \qquad (4.15)$$

$$[\mathrm{F}] \qquad \left(\frac{\partial}{\partial z}-k\right)\Phi_2(x,y,z,k)=0 \quad \text{on } z=0 \qquad (4.16)$$

$$[\mathrm{H}] \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}=-\frac{\partial\Phi_B}{\partial n}, \quad x>0 \quad \text{on } z=f(x,y) \qquad (4.17)$$

[R] Outgoing wave from the hull

この問題では $x>0$ での船体と incident wave との作用を考えているので (4.17) は

$$[\mathrm{H}] \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}=-g(x)\frac{\partial\Phi_B}{\partial n} \qquad \text{on } z=f(x,y) \qquad (4.18)$$

となる。ここで

$$g(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 0\\ 1 & x\geqslant l\end{cases} \qquad (2.32)$$

である。

$\Phi_2(x,y,z,k)$ の問題は§1の ϕ_D と全く同じであるので§2の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\Phi_2&(x,y,z,k)\\ &=-\Phi_B(x,y,z,k)H(x)\\ &\quad -A(k)\left(\frac{1}{2\pi kx}\right)^{1/2}\Phi_0^*(k,y,z)e^{ikx+i\cdot\pi/4}H(x)\end{aligned} \qquad (4.19)$$

となる。ここで $H(x)$ は Heaviside's step function であり，$A(k)$ は

$$A(k)=\begin{cases}-\dfrac{i}{2\pi}\left(\dfrac{\kappa}{2}\right)^{1/2}\dfrac{\sigma^*(k)}{(\kappa-k)^{1/2}} & \kappa-\alpha<k<\kappa\\ -\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\kappa}{2}\right)^{1/2}\dfrac{\sigma^*(k)}{(k-\kappa)^{1/2}} & \kappa<k<\kappa+\alpha\end{cases} \qquad (4.20)$$

で定義される。Total component potential Φ_T は $x>0$ で

$$\begin{aligned}\Phi_T&(x,y,z,k)\\ &=-A(k)\left(\frac{1}{2\pi kx}\right)^{1/2}\Phi_0^*(k,y,z)e^{ikx-i\cdot\pi/4}\end{aligned} \qquad (4.21)$$

で与えられる。これは total potential ϕ_T の component であるので重ね合せを行うと

$$\begin{aligned}\phi_T&(x,y,z)\\ &\sim\int_{\kappa-\alpha}^{\kappa+\alpha}\Phi_T(x,y,z,k)dk\\ &=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\pi x}\right)^{1/2}\Phi_0^*(\kappa,y,z)\sigma^*(\kappa)\\ &\quad\times\left\{e^{i\cdot\pi/4}\int_{\kappa-\alpha}^{\kappa}dk\frac{e^{ikx}}{(\kappa-k)^{1/2}}+e^{-i\cdot\pi/4}\int_{\kappa}^{\kappa+\alpha}dk\frac{e^{ikx}}{(k-\kappa)^{1/2}}\right\}\\ &=\frac{1}{2\pi}\Phi_0^*(\kappa,y,z)\sigma^*(\kappa)\frac{e^{i\kappa x}}{x}\end{aligned} \qquad (4.22)$$

となる。$x<0$ の部分についても全く同じようにできる。非常に長い船体の一部が振動しているときも，残りの船体との干渉により波は x^{-1} で減衰する。また ϕ_B の波と位相は $\frac{\pi}{4}$ だけ異なる。

あ と が き

Rapidly varying な向い波が incident wave potential として船体に作用する場合について考察を行った。そして，波は船体を伝播するとき船体との相互作用で変形を受けること，またその変形の具体形を解析的に明らかにすることができた。

Simple harmonic な向い波は船体を伝播するとき，振幅が $x^{-1/2}$ で減少し，Kelvin ship wave pattern は x^{-1} で，そして船体の一部が造波機として振動する場合も船体に沿って波は x^{-1} で減衰する。いずれの場合も船体の影響で波はより強い減衰を受ける。

ここで解析した Kelvin ship wave pattern の場合は Adachi (1974) のものと一致しているが, Ursell (1975) の結果は波が $x^{-3/2}$ で減衰するということで異なっている。船体の一部が振動している場合も Ursell は $x^{-3/2}$ で減衰する結果であり，ここで得られたものとは異なる。Kelvin pattern の問題の場合 incident wave として simple harmonic な素成波の重ね合せの形の波が far-field potential の inner expansion として合理的に得られており，また素成波と船体との相互作用がやはり重ね合せ可能であれば，ここに得られた結果は妥当なものであるといえよう。さらに，radiation condition に関して矛盾の無い解が導びけたことは重要である。

これまで扱われた diffraction 問題は，船首より離れた船体近傍におけるものであるので，さらに船首部における問題の解析が必要とされる。特に Kelvin pattern の場合船首部の問題は重要であるので解決が急がれるものである。

参　考　文　献

1) O. M. Faltinsen: Wave Forces on Restrained Ship in Head-Sea Waves, Doctoral Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan (1971)
2) 丸尾　孟，佐々木敬之: 向い波の中の細長い物体に働く波圧について，日本造船学会論文集 第136号 (1974)
3) F. Ursell: The Refraction of Head Seas by a Long Ship, J. Fluid Mech. Vol. 67 (1975)
4) 足達宏之: 長い中央平行部による船首波の干渉について，日本造船学会論文集 第135号(1974)
5) A. M. Reed: Wave Making: A Low-Speed Slender-Body Theory, Report No. 169, Department of Naval Archtecture and Marine Engineering, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan (1975)
6) T. F. Ogilvie: Wave-Length Scales in Slender-Ship Theory, International Seminar on Ship Technology, Seoul, Korea (1976)
7) M. J. Lighthill: *Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press (1958)
8) 足達宏之: 非常に長い中央平行部を持つ船型の波形解析について，船舶技術研究所報告，第10巻，第4号 (1973)
9) H. Adachi: Some Consideration on the Sheltering Effect of a Ship with Long Parallel Middle Body, International Seminar on Wave Resistance, Tokyo and Osaka, Japan (1976)
10) T. F. Ogilvie and E. O. Tuck: A Rational Strip Theory of Ship Motions: Part I, Report No. 013, Department of Naval Archtecture and Marine Engineering, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan (1969)
11) F. Ursell: The Expansion of Water-Wave Patentials at Great Distances, Proc. Camb. Phil. Soc. Vol. 64 (1968)
12) E. O. Tuck: The Application of Slender Body Theory to Steady Ship Motion, David Taylor Model Basin, Report 2008 (1965)
13) G. N. Ward: *Linearized Theory of Steady High-Speed Flow*, Cambridge University Press (1955)
14) E. Erdélyi: *Asymptotic Expansions*, New York, Dover Publications, Inc. (1956)
15) F. Ursell: Slender Oscillating Ship at Zero Forward Speed, J. Fluid Mech. Vol. 14 (1962)

〔Appendix I〕

Helmholtz wave source potential Φ_0^* の性質

$\Phi_0^*(k, y, z)$ は次の条件を満足する関数である。

[L] $$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2\right)\Phi_0^*(k, y, z)=0$$
in the fluid　(I-1)

[F] $$\left(\frac{\partial}{\partial z}-|k|\right)\Phi_0^*(k, y, z)=0$$
on $z=0$　(I-2)

[H] $$\frac{\partial}{\partial r}\Phi_0^*(k, y, z)=0$$
on $r=a,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$　(I-3)

この境界値問題の解は $|y|\to\infty$ で $|y|^M$ (M は任意整数$\geqslant 0$) で大きくなるものを許すと unique に

$$\Phi_0^*(k, y, z)=\Psi_{00}(|k|, y, z)+p_1(k)e^{|k|z}+\sum_{m=1}^{\infty}p_{2m}\frac{\Psi_{2m}(|k|, y, z)}{K'_{2m}(|k|a)} \quad (\text{I-4})$$

と定まる (Ursell[11](1968))。ここで

$$\Psi_{00}(|k|, y, z)=\frac{1}{2}\left(\oint_{-\infty}^{\infty}+\oint_{-\infty}^{\infty}\right)\frac{\cosh\mu}{\cosh -1}e^{|k|z\cosh\mu}\times\cos(|k|y\sinh\mu)d\mu \quad (\text{I-5})$$

である。積分は double pole $\mu=0$ を上下に迂回する積分路で行われる。Φ_0^* は $|y|\to\infty$ のとき

$$\Phi_0^*(|k|, y, z)\sim -2\pi|ky|e^{|k|z}\quad \text{as } |ky|\to\infty \quad (\text{I-6})$$

で大きくなる。また（Ⅰ-5）の potential は

$$\Psi_{00}(|k|,y,z)=2\mathcal{R}(|k|,y,z,0) \quad (\text{I}-7)$$

であることが示されるので(2.25)で定義される potential

$$\Phi_0^*(\kappa,y,z)=2\mathcal{R}(\kappa,y,z,0)-2R_0(\kappa)e^{\kappa z}$$
$$-2\sum_{m=1}^{\infty}R_{2m}(\kappa)\frac{\Psi_{2m}(\kappa,y,z)}{K'_{2m}(\kappa a)} \quad (2.25)$$

は，条件（Ⅰ-1)～(Ⅰ-3) を満足し（Ⅰ-6）の outer expansion を持つことがわかる。

〔Appendix II〕

Kelvin source potential の inner expansion

定常航走している細長船による攪乱を表わす potential は far field においては，船体中心線上に置かれた Kelvin source distribution $\sigma(x)$ で表わすことができる。この potential を $\phi(x,y,z)$ とすると

$$\phi(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(\xi)\phi_0(x-\xi,y,z)d\xi \quad (\text{II}-1)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{ikx}\sigma^*(k)\phi_0^*(k,y,z) \quad (\text{II}-2)$$

と書ける。ここで

$$\sigma^*(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma(x)e^{-ikx}dx \quad (\text{II}-3)$$

であり，そして $\phi_0^*(k,y,z)$ は次のように表わされる。

$$\phi_0^*(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_0(x,y,z)e^{-ikx}dx \quad (\text{II}-4)$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\frac{t\exp(-y\sqrt{t^2+k^2})}{\sqrt{t^2+k^2}}\times\frac{e^{-itz}}{t-i\cdot k^2/\nu}+ \quad (\text{II}-5)$$

$$+\begin{cases} i\dfrac{k}{\sqrt{k^2-\nu^2}}\times\exp\left(\dfrac{k^2}{\nu}z-iy\dfrac{k}{\nu}\sqrt{k^2-\nu^2}\right) & k<-\nu \\ -\dfrac{|k|}{\sqrt{\nu^2-k^2}}\times\exp\left(\dfrac{k^2}{\nu}z-y\dfrac{|k|}{\nu}\sqrt{\nu^2-k^2}\right) & -\nu<k<\nu \\ i\dfrac{k}{\sqrt{k^2-\nu^2}}\times\exp\left(\dfrac{k^2}{\nu}z-iy\dfrac{k}{\nu}\sqrt{k^2-\nu^2}\right) & k>\nu \end{cases} \quad (\text{II}-6)$$

$\phi(x,y,z)$ は far field ($x=O(1)$, $y=O(1)$ そして $z=O(\varepsilon)$) での potential を表わすものである。この potential の $y\rightarrow O(\varepsilon)$ となるときの性質を調べる。ここで留意しなければならないことは $\nu=O(\varepsilon^{-1})$ であることである。$\nu=O(1)$ の場合の inner expansion は Tuck[12] (1965) によって次のように与えられている。

$$\phi(x,y,z)\sim\frac{1}{\pi}\sigma(x)\ln r$$
$$O(\sigma\ln\varepsilon)$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\sigma'(\xi)\ln 2|x-\xi|\,\mathrm{sgn}\,(x-\xi)$$
$$O(\sigma)$$
$$-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\sigma'(\xi)[\boldsymbol{H}_0(\nu(x-\xi))$$
$$O(\sigma)$$
$$+(2+\mathrm{sgn}\,(x-\xi))Y_0(\nu|x-\xi|)]$$
$$+\text{higher order terms} \quad (\text{II}-7)$$

ここで $\boldsymbol{H}_0(z)$ は Struve function, $Y_0(z)$ は Bessel function of the first kind である。上の展開は $\sigma(x)$ が x に関して slowly varying function であることが仮定される。(Ⅱ-7) の右辺各式の下にあるのが各項の order を示すもので，右辺第一項が lowest order term $O(\sigma\ln\varepsilon)$ であることがわかる。

$\nu=O(\varepsilon^{-1})$ の条件の下での inner expansion は Reed (1975) によって試みられているが，その結果には疑問の点がある。ここでは解析の便宜のために inner expansion を新らしく導びくこととする。

始めに（Ⅱ-5）で表わされる積分を含む項について考察する。この（Ⅱ-5）で $-\dfrac{1}{2\pi}$ の factor を取って

$$-2\pi\times(\text{II}-5)$$
$$=2\int_0^{\infty}dt\frac{\exp(-y\sqrt{t^2+k^2})}{\sqrt{t^2+k^2}}\cos(tz)$$
$$+i\frac{k^2}{\nu}\int_{-\infty}^{\infty}dt\frac{\exp(-y\sqrt{t^2+k^2})}{\sqrt{t^2+k^2}}\frac{e^{-itz}}{t-i\cdot k^2/\nu^2}$$
$$=2K_0(|k|r)+i\frac{k^2}{\nu}I(k,y,z,\nu) \quad (\text{II}-8)$$

と書ける。$K_0(z)$ は Modified Bessel function である。さらに I は

$$I(k,y,z,\nu)=i\int_{-\infty}^{\infty}dt\frac{\exp(-y\sqrt{t^2+k^2})}{\sqrt{t^2+k^2}}\times\frac{k^2/\nu\cos tz-t\sin tz}{t^2+k^4/\nu^2} \quad (\text{II}-9)$$

と変形される。(II-5) の積分による potential は (II-2), (II-8) により,

$$\phi_1(x, y, z)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}\sigma^*(k)K_0(|k|r) \quad (\text{II-10})$$

$$\phi_2(x, y, z)=-\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{\nu}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}\sigma^*(k)k^2 \times\int_0^{\infty} dt \frac{\exp(-y\sqrt{t^2+k^2})}{\sqrt{t^2+k^2}} \times\frac{k^2/\nu \cos tz-t\sin tz}{t^2+k^4/\nu^2} \quad (\text{II-11})$$

と二つの部分に分けて書くことができる。ϕ_1 については Ward[13](1955) にならって $y\to O(\varepsilon)$ での inner expansion は

$$\phi_1(x, y, z) \sim\frac{1}{\pi}\sigma(x)\ln r -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\sigma'(\xi)\ln 2|x-\xi|\operatorname{sgn}(x-\xi) +O(\varepsilon\ln\varepsilon\sigma) \quad (\text{II-12})$$

となる。

ϕ_2 は $y=O(1)$ で $\varepsilon\to 0$ のとき exponentially small な部分を持つので,その部分を potential より取り除いておく。すなわち

$$\left|\int_0^{\infty} dt \frac{\exp(-y\sqrt{t^2+k^2})}{\sqrt{t^2+k^2}}\frac{k^2/\nu\cos tz-t\sin tz}{t^2+k^4/\nu^2}\right| <\frac{\nu}{k^2}K_0(|k|y)$$

であるので,もし $k=O(\varepsilon^{-\delta_1})$ (δ_1=small constant) であるなら,$\varepsilon\to 0$ のとき $|ky|=O(\varepsilon^{-\delta_1})$ であり,$K_0(z)$ の $z\to\infty$ の漸近的な性質より $K_0(|k|y)\sim e^{-\varepsilon^{-\delta_1}}$ as $\varepsilon\to 0$ であるので k の積分で $|k|>\varepsilon^{-\delta_1}=\alpha_1$ の部分は ϕ_2 に対して exponentially small な寄与しかしない。さらに t に関する積分において,$\varepsilon^{-\delta_2}=\alpha_2$ (δ_2=small constant) とおくと,$t>\alpha_2$ の積分は

$$\left|\int_{\alpha_2}^{\infty} dt \frac{\exp(-y\sqrt{t^2+k^2})}{\sqrt{t^2+k^2}}\frac{k^2/\nu\cos tz-t\sin tz}{t^2+k^4/\nu^2}\right| <\int_{\alpha_2}^{\infty} dt\frac{e^{-yt}}{t}=E_1(y\alpha_2)$$

で制限される。$E_1(z)$ は Exponential integral である。$y\alpha_2=O(\varepsilon^{-\delta_2})$ であるので $E_1(z)$ の $z\to\infty$ の漸近的性質より $E_1(y\alpha_2)\sim\varepsilon^{\delta_2}e^{-\varepsilon^{-\delta_2}}$ as $\varepsilon\to 0$ であり exponentially small である。よって ϕ_2 は far field で

$$\phi_2\sim-\frac{1}{2\pi^2\nu}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} dk e^{ikx}\sigma^*(k)k^2 \times\int_0^{\alpha_2} dt\frac{\exp(-y\sqrt{t^2+k^2})}{\sqrt{t^2+k^2}} \times\frac{k^2/\nu\cos tz-t\sin tz}{t^2+k^4/\nu^2} \quad (\text{II-13})$$

となる。次に $y\to O(\varepsilon)$ とする場合の展開を考える。このとき,$y\sqrt{t^2+k^2}\leqslant\alpha_3=O(\varepsilon^{1-\delta_3})$ (δ_3=small constant) および $zt\leqslant\alpha_4=O(\varepsilon^{1-\delta_2})$ であり,これらは $\varepsilon\to 0$ のとき 0 に近づく。よって $\exp(-y\sqrt{t^2+k^2})$ および $\genfrac{}{}{0pt}{}{\cos}{\sin}tz$ を series expansion して lowest order terms だけとると

$$\phi_2\sim-\frac{1}{2\pi^2\nu}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} dk e^{ikx}\sigma^*(k)k^2 \times\int_0^{\alpha_2} dt\frac{1}{\sqrt{t^2+k^2}}\frac{k^2/\nu-t^2z}{t^2+k^4/\nu^2} \quad (\text{II-14})$$

となる。t に関する積分は次の関係,

$$\int_0^{\alpha_2} dt\frac{1}{\sqrt{t^2+k^2}(t^2+k^4/\nu)} =\frac{\nu}{|k|^3(1-k^2/\nu^2)^{1/2}}\tan^{-1}\alpha_5,$$

$$\alpha_5=\frac{\nu\alpha_2}{|k|}\left(\frac{1-k^2/\nu^2}{\alpha_2^2+k^2}\right)^{1/2}$$

$$\int_0^{\alpha_2} dt\frac{1}{\sqrt{t^2+k^2}}=\ln|\alpha_2+\sqrt{\alpha_2^2+k^2}|$$

を利用して,

$$\left(\frac{k^2}{\nu}+z\frac{k^4}{\nu^2}\right)\frac{\nu}{|k|^3(1-k^2/\nu^2)^{1/2}}\tan^{-1}\alpha_5 -z\ln|\alpha_2+\sqrt{\alpha_2^2+k^2}| \quad (\text{II-15})$$

となる。さらに $\alpha_5=O(\varepsilon^{-1+\delta_5})$ (δ_5=small constant) であるので $\tan\alpha_5=\frac{\pi}{2}-O(\varepsilon^{1-\delta_5})$ および $\ln|\alpha_2+\sqrt{\alpha_2^2+k^2}|=-\delta_2\ln\varepsilon+O(\varepsilon^{\delta_2})$ を (II-15) に代入して lowest order term を取ると $\frac{\pi}{2|k|}$ であるので,これを (II-14) の t に関する積分の代りに代入すると,ϕ_2 の lowest order term として次式を得る。

$$\phi_2\sim-\frac{1}{4\pi\nu}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} dk e^{ikx}\sigma^*(k)|k| \quad (\text{II-16})$$

$$=-\frac{1}{4\pi\nu}\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx}\sigma^*(k)k \times\operatorname{sgn}(k)H(k+\alpha_1)H(\alpha_1-k) \quad (\text{II-17})$$

ここで $H(k)$ は Heaviside's step function である。$x\gg 0$ のとき (II-17) の漸近的性質は,(Lighthill (1958))

$$-\frac{1}{4\pi\nu}\left\{2\alpha_1|\sigma^*(\alpha_1)|\frac{\cos(\alpha_1 x+\pi/2+\beta)}{x}-2\frac{\sigma^*(0)}{x^2}\right\} \tag{II-18}$$

であり，また，$\sigma^*(0)=O(\sigma)$，$|\sigma^*(\alpha_1)|=O(\alpha_1^{-1}\sigma)$ であるとして良いと思われるので，$\phi_2=O(\nu^{-1}\sigma)$ であると考えられる。

次に（II-6）で表わされる potential について考える。始めに $|k|<\nu$ である時の potential を ϕ_3 とすると，

$$\phi_3(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\nu}^{0}+\int_{0}^{\nu}\right)dke^{ikx}\sigma^*(k)\frac{-|k|}{\sqrt{\nu^2-k^2}}\times\exp\left(\frac{k^2}{\nu}z-y\frac{|k|}{\nu}\sqrt{\nu^2-k^2}\right)=\frac{1}{2\pi}(I_{31}+I_{32}) \tag{II-19}$$

と書ける。I_{32} において $\nu-k=t$ で変数を t に変換すると，

$$I_{32}=-e^{i\nu x+\nu z}\int_0^{\nu}dte^{-itx}\sigma^*(\nu-t)\frac{\nu-t}{\sqrt{t(2\nu-t)}}\times\exp\left(-\frac{t(2\nu-t)}{\nu}z-y\frac{\nu-t}{\nu}\sqrt{t(2\nu-t)}\right)$$

となる。ここで $\rho=\varepsilon^{1-\delta}$ (δ=small constant) なる ρ を考えると，$\rho<t<\nu$ では $y\frac{\nu-t}{\nu}\sqrt{t(2\nu-t)}=O(\varepsilon^{-\delta/2})$ であるので被積分関数は $\varepsilon\to 0$ のとき exponentially small であることがわかる。よって far field で

$$I_{32}\sim -e^{i\nu x+\nu z}\int_0^{\rho}dte^{-itx}\sigma^*(\nu-t)\frac{\nu-t}{\sqrt{t(2\nu-t)}}\times\exp\left(-\frac{t(2\nu-t)}{\nu}z-y\frac{\nu-t}{\nu}\sqrt{t(2\nu-t)}\right) \tag{II-20}$$

である。次に $y\to O(\varepsilon)$ となるとき，$y\frac{\nu-t}{\nu}\sqrt{t(2\nu-t)}=O(\varepsilon^{1-\delta/2})$ であるので，

$$\frac{\nu-t}{\sqrt{t(2\nu-t)}}\exp\left(-\frac{t(2\nu-t)}{\nu}z-y\frac{\nu-t}{\nu}\sqrt{t(2\nu-t)}\right)=\sqrt{\frac{\nu}{2t}}-\nu y+\cdots \tag{II-21}$$

I_{32} の lowest order term は変数を $\nu-t=k$ で k にすると

$$I_{32}\sim-\int_{\nu-\rho}^{\nu}dk\sqrt{\frac{\nu}{2(\nu-k)}}\sigma^*(k)e^{kz+ikx} \tag{II-22}$$

で与えられる。同様にして I_{31} の lowest order term は

$$I_{31}\sim-\int_{-\nu}^{-\nu+\rho}dk\sqrt{\frac{\nu}{2(\nu+k)}}\sigma^*(k)e^{-kz+ikx} \tag{II-23}$$

となる。

次に $|k|>\nu$ の場合について inner expansion の lowest order term を求める。この場合の potential を ϕ_4 とすると

$$\phi_4(x,y,z)=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-\nu}+\int_{\nu}^{\infty}\right)dke^{ikx}\sigma^*(k)\frac{ik}{\sqrt{k^2-\nu^2}}\times\exp\left(\frac{k^2}{\nu}z-iy\frac{k}{\nu}\sqrt{k^2-\nu^2}\right)=\frac{1}{2\pi}(I_{41}+I_{42}) \tag{II-24}$$

である。$\exp\left(-iy\frac{k}{\nu}\sqrt{k^2-\nu^2}\right)$ の factor は振動するため ϕ_3 に適用した方法が使えないので別の方法で行う。

I_{42} において $k=\nu\sec\theta$ で変数を θ に換えると

$$I_{42}=i\nu\int_0^{\pi/2}d\theta\sigma^*(\nu\sec\theta)\sec^2\theta e^{\nu z\sec^2\theta}\times e^{i\nu\sec^2\theta(x\cos\theta-y\sin\theta)} \tag{II-25}$$

である。$y\to O(\varepsilon)$ のとき，$x=R\cos\gamma$，$y=R\sin\gamma$ とすると $R=\sqrt{x^2+y^2}=O(1)$，$\tan\gamma=\frac{y}{x}=O(\varepsilon)$ であり，

$$h(\theta)=\sec^2\theta\cos(\theta+\gamma) \tag{II-26}$$

と置くと（II-25）は

$$I_{42}=\int_0^{\pi/2}d\theta f(\theta)e^{i\nu Rh(\theta)} \tag{II-27}$$

と書ける。ここで

$$f(\theta)=i\nu\sigma^*(\nu\sec\theta)\sec^2\theta e^{\nu z\sec^2\theta} \tag{II-28}$$

である。$\nu R=O(\varepsilon^{-1})$ であるので（II-27）の積分は $f(\theta)$ が slowly varying function であれば（変動の波数が $o(\nu)$ であれば）stationary phase method[14] が適用される。しかし（II-28）を見ると $\sigma^*(\nu\sec\theta)$ のために必ずしも slowly varying であるとはいえない。したがって I_{42} を次のように書いて考える。

$$I_{42}=\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\sigma(\xi)\int_0^{\pi/2}d\theta f_1(\theta)e^{i\nu R_1h(\theta)} \tag{II-29}$$

ここで，$R_1=\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}$，$\gamma_1=\tan^{-1}\frac{y}{x-\xi}$，そして $f_1(\theta)$ は

$$f_1(\theta)=i\nu\sec^2\theta e^{\nu z\sec^2\theta} \tag{II-30}$$

である。$f_1(\theta)$ は slowly varying function であるので stationary phase method が適用される。stationary points は

$$\frac{dh}{d\theta}=\sec^3\theta\{-\sin\gamma_1+\sin\theta\cos(\theta+\gamma_1)\}=0$$

となる点であり

$$2\tan^2\theta-\tan\theta\cot\gamma_1+1=0$$

の根で与えられる。すなわち

$$\tan\frac{\theta_1}{\theta_2}=\frac{1}{4}\cot\gamma_1\{1\pm\sqrt{1-8\tan^2\gamma_1}\}$$

である。この式は $\tan\gamma_1=\dfrac{y}{x-\xi}=a<\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる $(x-\xi, y)$ の領域で stationary points が存在することを示す。

$\tan\gamma_1=a=O(\varepsilon)$ であるので

$$\tan\theta_1=a+O(\varepsilon^3), \qquad \tan\theta_2=\frac{1}{4a}+O(\varepsilon)$$

であり，$\varepsilon\to0$ のとき $\theta_1\to0$, そして $\theta_2\to\dfrac{\pi}{2}$ に近づく。$\theta_2\to\dfrac{\pi}{2}$ のとき $f_1(\theta_2)\to0$ exponentially であるので $\theta_1\to0$ となる部分のみを考えれば良い。stationary point $\theta=0$ は積分の end point と一致する。したがって積分は次のように近似される。

$$\int_0^{\pi/2}d\theta f_1(\theta)e^{i\nu R_1h(\theta)}\sim\int_0^{\rho_1}d\theta f_1(\theta)e^{i\nu R_1h(\theta)} \tag{II-31}$$

ここで $\rho_1=O(\varepsilon^{1-\delta})>a$ (δ=small constant) なる constant である。(II-29) で θ に関する積分を (II-31) で置き換え積分の順序を変えると

$$I_{42}\sim\int_0^{\rho_1}d\theta f_1(\theta)\sigma^*(\nu\sec\theta)e^{i\nu Rh(\theta)} \tag{II-32}$$

と書くことができる。$k=\nu\sec\theta$ で変数を k に戻すと

$$I_{42}\sim\int_\nu^{\nu\sec\rho_1}dke^{ikx}\sigma^*(k)\frac{ik}{\sqrt{k^2-\nu^2}}\times\exp\left(\frac{k^2}{\nu}z-iy\frac{k}{\nu}\sqrt{k^2-\nu^2}\right)$$

となる。$\sec\rho_1=1+\dfrac{\rho_1^2}{2}+O(\rho_1^4)$ であるので

$$\nu\sec\rho_1=\nu+\rho_2, \qquad \rho_2=O(\varepsilon^{1-2\delta}) \tag{II-33}$$

であり，また $k-\nu=O(\varepsilon^{1-2\delta})$, $y=O(\varepsilon)$ であるから

$$\frac{ik}{\sqrt{k^2-\nu^2}}\exp\left(\frac{k^2}{\nu}z-iy\frac{k}{\nu}\sqrt{k^2-\nu^2}\right)\sim ie^{kz}\sqrt{\frac{\nu}{2(k-\nu)}}-ie^{kz}\nu y+\cdots$$

と展開される。よって I_{42} の lowest order term は

$$I_{42}\sim i\int_\nu^{\nu+\rho_2}dk\sqrt{\frac{\nu}{2(k-\nu)}}\sigma^*(k)e^{kz+ikx} \tag{II-34}$$

となる。I_{41} についても同様にして lowest order term は

$$I_{41}\sim-i\int_{-\nu-\rho_2}^{-\nu}dk\sqrt{\frac{\nu}{-2(k+\nu)}}\sigma^*(k)e^{-kz+ikx} \tag{II-35}$$

となる。以上より

$$\phi_3+\phi_4=\frac{1}{2\pi}(I_{31}+I_{32}+I_{41}+I_{42})$$

であるので，それの $|x|\to\infty$ の漸近式は

$$\phi_3+\phi_4\sim\begin{cases}O(|x|)^{-3/2} & x<0\\ -\left(\dfrac{2\nu}{\pi}\right)^{1/2}|\sigma^*(\nu)|e^{\nu z}\dfrac{\cos(\nu x-\pi/4+\beta)}{x^{1/2}} & x>0\end{cases} \tag{II-36}$$

となる。ここで $\sigma^*(\nu)=|\sigma^*(\nu)|e^{i\beta}$ と置いた。

一般に $\sigma^*(\nu)=O(\nu^{-1}\sigma)$ となる場合が多いと思われるので，このとき $\phi_3+\phi_4=O(\varepsilon^{1/2}\sigma)$ となる。したがってこの項は $\phi_2=O(\varepsilon\sigma)$ より $O(\varepsilon^{-1/2})$ だけ lower order term であることがわかる。よって far field potential の inner expansion は $O(\varepsilon^{1/2}\sigma)$ までとると

$$\phi(x,y,z)\sim\frac{1}{\pi}\sigma(x)\ln r-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\sigma'(\xi)\ln2|x-\xi|\operatorname{sgn}(x-\xi)-\left(\frac{2\nu}{\pi}\right)^{1/2}|\sigma^*(\nu)|e^{\nu z}\frac{\cos(\nu x-\pi/4+\beta)}{x^{1/2}} \qquad x>0 \tag{II-37}$$

で表わされる。上式の右辺第3項が波動を表わす項であり，この項を与える I_{31}, I_{32}, I_{41} および I_{42} は

$$I_{31}=(\text{II-23}), \qquad I_{32}=(\text{II-22})$$
$$I_{41}=(\text{II-35}), \qquad I_{42}=(\text{II-34})$$

において $A(k)e^{|k|z+ikx}$ の形の素成波の重ね合せとして表わされている。

〔Appendix III〕

Pulsating source potential の inner expansion

非常に長い船が静水中に浮いているとき，船体のある部分だけが調和振動する場合について考える。Far field からこの振動部を見るとき，この部分は船体中心線上に分布した pulsating source $\sigma(x)e^{-i\omega t}$ によって置き換えることができる。Far field において potential は次のように表わされる。

$$\phi(x,y,z)e^{-i\omega t}=-\frac{1}{2\pi}e^{-i\omega t}\int_{-l}^{l}d\xi\sigma(\xi)\times\int_{0\smile}^{\infty}\frac{kdk}{k-\kappa}e^{kz}J_0(k\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}) \tag{III-1}$$

積分は singularity $k=\kappa$ を下に迂回するものを取る。ここで $\kappa=\dfrac{\omega^2}{g}$ であり，$J_0(z)$ は Bessel function である。

Ursell[15] (1962) は $\kappa=O(1)$ の仮定の下に $\phi(x, y, z)$ の $y\to O(\varepsilon)$ のときの inner expansion を次のように与えた。$-l\leqslant x\leqslant l$ で

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z)\sim&\frac{1}{\pi}\sigma(x)\ln r\\&+\frac{i\kappa}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\sigma(\xi)H_0^{(1)}(\kappa|x-\xi|)\\&-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\sigma'(\xi)\ln 2|x-\xi|\operatorname{sgn}(x-\xi)\\&-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\sigma'(\xi)s_3(\kappa|x-\xi|)\operatorname{sgn}(x-\xi)\\&+O(r\ln r)\end{aligned}\qquad(\text{III-2})$$

ここで $H_0^{(1)}(z)$ は Hankel function であり，$s_3(|\eta|)$ は

$$s_3(|\eta|)=\int_0^{\infty}dw\frac{1-e^{-|\eta|w}}{w(1+w^2)^{1/2}}$$

で定義される関数である。

$\kappa=O(\varepsilon^{-1})$ の仮定での inner expansion は Ogilvie and Tuck[10] (1969) によって与えられた。

$$\phi(x, y, z)\sim i\sigma(x)e^{\kappa z+i\kappa y}\qquad -l\leqslant x\leqslant l\qquad(\text{III-3})$$

この場合 inner expansion によって表わされる流れは，$y-z$ 面で y 方向への outgoing wave を表わす。$\kappa=O(\varepsilon^{-1})$ である場合 outgoing wave は波長 $\lambda=O(\varepsilon)$ であり，物理的に考えても $\kappa=O(\varepsilon^{-1})$ となるような早い振動をしている船体の近くでは y 方向に伝播する2次元波が見られることが容易に予想される。

以上で $\sigma(x)$ は slowly varying function であることが暗黙の中に仮定されていたが，$\sigma(x)$ が rapidly varying function の場合は (III-3) と異なる inner expansion となる。

非常に長い船体の場合，その一部 $(-l\leqslant x\leqslant l)$ が振動しているとき，振動していない船体部分 $(|x|>l)$ での potential (III-1) の $y\to O(\varepsilon)$ のときの inner expansion を求める。Potential ϕ は次のように Fourier convolution integral の形に書ける。

$$\phi(x, y, z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dke^{ikx}\sigma^*(k)\phi_0^*(k, y, z)\qquad(\text{III-4})$$

ここで，$\sigma(x)=0$, $|x|>l$ として $\sigma(x)$ の Fourier transform を求めている。$\phi_0^*(k, y, z)$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}\phi_0^*(k, y, z)=&-\frac{1}{2\pi}\int_{|k|}^{\infty}dle^{-ly}\left\{\frac{\exp(iz\sqrt{l^2-k^2})}{\sqrt{l^2-k^2}+i\kappa}\right.\\&\left.+\frac{\exp(-iz\sqrt{l^2-k^2})}{\sqrt{l^2-k^2}-i\kappa}\right\}\qquad(\text{III-5})\\&-\begin{cases}\dfrac{i\kappa}{\sqrt{\kappa^2-k^2}}\exp(\kappa z+iy\sqrt{\kappa^2-k^2}) & |k|<\kappa\\ \dfrac{\kappa}{\sqrt{k^2-\kappa^2}}\exp(\kappa z-y\sqrt{k^2-\kappa^2}) & |k|>\kappa\end{cases}\qquad(\text{III-6})\end{aligned}$$

(III-5) の積分については，

$$\left|\int_{|k|}^{\infty}dl\frac{\exp(-ly\pm iz\sqrt{l^2-k^2})}{\sqrt{l^2-k^2}\pm i\kappa}\right|\leqslant\frac{1}{\kappa}\int_{|k|}^{\infty}dle^{-ly}=\frac{e^{-|k|}}{\kappa y}=O(\varepsilon e^{-|k|})\qquad(\text{III-7})$$

であり，上限が $O(\varepsilon e^{-|k|})$ であることがわかる。$|k|=\kappa=O(\varepsilon^{-1})$ のとき (III-7) は exponentially small である。$|k|<\kappa$ のとき $|k|=o(\varepsilon^{-1})$ とすると (III-6) の項は

$$\frac{i\kappa}{\sqrt{\kappa^2-k^2}}\exp(\kappa z+iy\sqrt{\kappa^2-k^2})=ie^{\kappa z+i\kappa y}(1+o(1))\qquad(\text{III-8})$$

であるので ϕ_0^* の dominant term は (III-6) である。これを (III-4) へ代入して

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z)=&-\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-\kappa}+\int_{\kappa}^{\infty}\right)dke^{ikx}\sigma^*(k)\frac{\kappa}{\sqrt{k^2-\kappa^2}}\\&\times\exp(\kappa z-y\sqrt{k^2-\kappa^2})\qquad(\text{III-9})\\&-\frac{i}{2\pi}\int_{-\kappa}^{\kappa}dke^{ikx}\sigma^*(k)\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2-k^2}}\\&\times\exp(\kappa z+iy\sqrt{\kappa^2-k^2})\qquad(\text{III-10})\end{aligned}$$

とし，さらに

$$(\text{III-9})=-\frac{\kappa}{2\pi}e^{\kappa z}(I_1+I_2)\qquad(\text{III-11})$$

とする。I_1 において $t=\kappa-k$ で変数を t に変換すると

$$\begin{aligned}I_1=e^{-i\kappa x}\int_0^{\infty}dt&\frac{\sigma^*(-t-\kappa)}{\sqrt{t(t+2\kappa)}}\\&\times\exp(-itx-y\sqrt{t(t+2\kappa)})\end{aligned}\qquad(\text{III-12})$$

と書ける。ここで $t>\alpha_1=O(\varepsilon^{1-\delta})$ (δ=small constant) とすると $y=O(1)$ であるから，このとき被積分関数は $\varepsilon\to 0$ となるとき exponentially small になる。よって

$$\begin{aligned}I_1\sim e^{-i\kappa x}\int_0^{\alpha_1}dt&\frac{\sigma^*(-t-\kappa)}{\sqrt{t(t+2\kappa)}}\\&\times\exp(-itx-y\sqrt{t(t+2\kappa)})\end{aligned}$$

である。$y\to O(\varepsilon)$ となると $y\sqrt{t(t+2\kappa)}=O(\varepsilon^{1-\delta/2})$

となるので被積分関数を展開して lowest order term をとると

$$I_1 \sim e^{-i\kappa x}\int_0^{\alpha_1} dt e^{-itx}\sigma^*(-t-\kappa)\frac{1}{\sqrt{2\kappa t}}$$

$$=\int_{-\kappa-\alpha_1}^{-\kappa} dk \frac{\sigma^*(k)}{\sqrt{-2\kappa(k+\kappa)}}e^{ikx} \qquad (\text{III-13})$$

これが inner expansion の leading term である。I_2 についても全く同じようにして

$$I_2 \sim \int_{\kappa}^{\kappa+\alpha_1} dk \frac{\sigma^*(k)}{\sqrt{2\kappa(k-\kappa)}}e^{ikx} \qquad (\text{III-14})$$

を得る。

次に (III-10) の積分において

$$I_3=\int_{-\kappa}^{\kappa} dk e^{ikx}\sigma^*(k)\frac{\exp iy\sqrt{\kappa^2-k^2}}{\sqrt{\kappa^2-k^2}} \qquad (\text{III-15})$$

と置く。$k=\kappa\sin\theta$ により変数を θ に変換すると

$$I_3=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta\sigma^*(\kappa\sin\theta)e^{i\kappa x\sin\theta+i\kappa y\cos\theta} \qquad (\text{III-16})$$

となる。$\sigma^*(\kappa\sin\theta)$ が slowly varying function であれば (III-16) は stationary phase method[14] で近似式が得られるが，必ずしもそうでないと思われるので，

$$I_3=\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\sigma(\xi)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta e^{i\kappa(x-\xi)\sin\theta+i\kappa y\cos\theta} \qquad (\text{III-17})$$

として，θ に関する積分に stationary phase method を適用する。$y\to O(\varepsilon)$ の場合を考える。このとき (III-17) の θ に関する積分を

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta e^{i\kappa Rh(\theta)} \qquad (\text{III-18})$$

とする。ここで $x-\xi=R\cos\alpha$，$y=R\sin\alpha$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x-\xi}$ とし，

$$h(\theta)=\sin(\theta+\alpha) \qquad (\text{III-19})$$

である。$\kappa R=O(\varepsilon^{-1})$ であるから (III-18) の被積分関数は $h(\theta)$ の変化のゆるやかな所以外では激しく振動する。stationary となる点は

$$h'(\theta)=\cos(\theta+\alpha)=0 \qquad (\text{III-20})$$

となる点である。$\alpha\to 0$ (as $\varepsilon\to 0$) のとき $\theta_1\to -\dfrac{\pi}{2}-0$，$\theta_2\to\dfrac{\pi}{2}-0$ が stationary points である。よって (III-18) は次のように近似される。

$$\int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\rho_1} d\theta e^{i\kappa Rh(\theta)}+\int_{\pi/2-\rho_2}^{\pi/2} d\theta e^{i\kappa Rh(\theta)} \qquad (\text{III-21})$$

ここで $\rho_1=O(\varepsilon^{1-\delta})$，$\rho_2=O(\varepsilon^{1-\delta})$ ($\delta=$small constant) なる constants である。(III-21) を (III-17) へ代入し積分の順序を変えると

$$I_3\sim\int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\rho} d\theta\sigma^*(\kappa\sin\theta)e^{i\kappa x\sin\theta+i\kappa y\cos\theta}$$
$$+\int_{\pi/2-\rho}^{\pi/2} d\theta\sigma^*(\kappa\sin\theta)e^{i\kappa x\sin\theta+i\kappa y\cos\theta} \qquad (\text{III-22})$$

となる。このとき $\kappa y\cos\theta=O(\varepsilon^{1-\delta})$ であるので $e^{i\kappa y\cos\theta}=1+O(\varepsilon^{1-\delta})$ とし，さらに $k=\sin\theta$ で変数を k に戻すと

$$I_3\sim\int_{-\kappa}^{-\kappa+\alpha_2} dk e^{ikx}\frac{\sigma^*(k)}{\sqrt{2\kappa(k+\kappa)}}$$
$$+\int_{\kappa-\alpha_2}^{\kappa} dk e^{ikx}\int\frac{\sigma^*(k)}{\sqrt{2\kappa(\kappa-k)}} \qquad (\text{III-23})$$

となり，これが leading order term である。上の式の α_2 は $O(\varepsilon^{1-\delta})$ の constant である。

以上より potential $\phi(x,y,z)$ の inner expansion の lowest order term は

$$\phi(x,y,z)\sim-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{1/2}e^{\kappa z}$$
$$\times\left\{\int_{-\kappa-\alpha_1}^{-\kappa} dk\frac{\sigma^*(k)}{(-k-\kappa)^{1/2}}e^{ikx}+i\int_{-\kappa}^{-\kappa+\alpha_2} dk\frac{\sigma^*(k)}{(k+\kappa)^{1/2}}e^{ikx}+i\int_{\kappa-\alpha_2}^{\kappa} dk\frac{\sigma^*(k)}{(\kappa-k)^{1/2}}e^{ikx}+\int_{\kappa}^{\kappa+\alpha_1} dk\frac{\sigma^*(k)}{(k-\kappa)^{1/2}}e^{ikx}\right\} \qquad (\text{III-24})$$

となる。$x\gg 0$ のとき (III-24) の第1，2項の漸近式は打ち消し合うので，このとき

$$\phi(x,y,z)\sim-\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{1/2}e^{\kappa z}\times\left\{i\int_{\kappa-\alpha_2}^{\kappa} dk\frac{\sigma^*(k)}{(\kappa-k)^{1/2}}e^{ikx}+\int_{\kappa}^{\kappa+\alpha_1} dk\frac{\sigma^*(k)}{(k-\kappa)^{1/2}}e^{ikx}\right\} \qquad (\text{III-25})$$

が inner expansion の lowest order term である。$x\ll 0$ のときは (III-24) の第3，4項が打ち消し合う。$|x|\to\infty$ のとき potential の漸近形は

$$\phi(x,y,z)\sim\begin{cases}-\left(\dfrac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2}\sigma^*(-\kappa)\dfrac{e^{\kappa z}e^{-i\kappa x+i\cdot\pi/4}}{|x|^{1/2}} & x<0\\[2ex] -\left(\dfrac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2}\sigma^*(\kappa)\dfrac{e^{\kappa z}e^{i\kappa x-i\cdot\pi/4}}{x^{1/2}} & x>0\end{cases} \qquad (\text{III-26})$$

で与えられる。