

## 向い波と細長船の干渉について(その2)

### (船体に働く波浪外力の計算法)

足 達 宏 之\*

## On the Interaction between Head Sea Waves and Slender Ship: Part 2 (Calculation Method for Wave Induced Forces)

by

Hiroyuki ADACHI

### Abstract

The interaction between head sea waves and a slender ship is analyzed by the slender-body theory under the assumption that the wave length of the incident wave is of the same order as the beam of ship. The main purpose of this paper is to derive a solution that is valid at the vicinity of the bow, where the asymptotic solution by Faltinsen<sup>1)</sup> showed  $x^{-1/2}$  singular behavior. Since the bow part is singular region for the midship solution, the introduction of the bow part near field is effective to obtain a solution which will be valid at the bow.

The problem is treated as consistently as possible. The final integral equation turns out to be similar one as Maruo<sup>2)</sup> derived. In order to calculate the pressure distribution on hull near the bow, an approximated formula is given and the boundary value problem which has the Helmholtz equation as the governing equation instead of the Laplace equation in the strip method is also discussed.

### 1. ま え が き

向い波の中に固定して置かれた船体に働く力の計算は strip method によって行うことができる。しかしこの波浪外力の計算に対して strip method が合理的な近似法であるかどうかについて幾つかの疑点がある。特に向い波の波長が短い時、向い波と船体との相互干渉は船体の縦軸方向に波長の order で変化し、向い波の変形が生じ、その結果縦軸方向に変化する波浪外力を船体は受けることになる。この波の変形には船首に近い所では小さく、船体に沿って波が伝播するに従い累積的に大きくなるという3次元的な効果\*\*がある。

向い波の中に置かれた船体に働く力の計算を、向い

波の波長が船幅と同じ order であるという仮定の下に行ったのは Faltinsen<sup>1)</sup> (1971), 丸尾<sup>2)</sup> (1974), Ursell<sup>3)</sup> (1975) および足達<sup>4)</sup> (1977) であった。

Faltinsen は matched asymptotic expansion method を利用して向い波と船体との相互干渉を解析した。船体より遠く離れた far field では相互干渉は船体中心線上に分布した pulsating source によって表わされるとし、船体近傍の near field では相互干渉を表わす potential は船の縦軸方向に向い波と同じ周波数で振動するものとし、振巾は3次元影響を表わし得る関数形とした。この関数は船体の縦軸 ( $x$ -軸) 方向には slowly varying であると仮定され、この関数の性質により流れ場が計算できることが示された。船体近傍では細長船の仮定により場の支配方程式

\* 推進性能部 原稿受付: 昭和52年5月4日

\*\*  $y$ - $z$  面のみならず  $x$  軸方向にも変化する。

が 2-D Helmholtz equation となることが導かれ、potential の満足すべき条件として線型化された自由表面条件と細長体近似による船体表面条件が与えられた。この境界値問題の解は Ursell<sup>9)</sup> (1968b) によって無限に長い cylinder を伝播する波動の diffraction 問題の解として与えられているので、これを near field における解として採用し、これと far field での potential との matching により解を確定した。

Faltinsen の解は振巾が船の縦軸方向に  $x^{-1/2}$  でゆっくり変化し、wave number  $\kappa$  で周期運動  $e^{i\kappa x}$  を行い、向い波が船体を伝播するにつれて変化することを示している。しかしこの解は船首で  $O(x^{-1/2})^*$  の特異性を持っており、そこでは成立しない解であることは明らかである。

Faltinsen の問題を異なった手法で行ったのは Ursell<sup>9)</sup> であった。Potential を Fourier transform を利用して求め、その逆変換の Fourier integral の  $|x| \rightarrow \infty$  の時の漸近的な性質を調べ、Faltinsen の結果と全く同じものを導いた。この問題に関して足達<sup>4)</sup> により radiation condition についての考察が行われた。いずれにしても、これらの解析の結果は船首を離れた点において有効なものであり、船首では成立しないものである。

船首部において diffraction potential が特異性を示さない形で解析を行ったのは丸尾であった<sup>2)</sup>。丸尾は far field potential の near field に対する inner expansion において、Faltinsen の first order term より  $O(\epsilon^{1/2})$  だけ高次の項を含めたものと、near field problem の wave free potential との和を near field solution として船体表面条件を満足させて解を確定した。この結果丸尾の解は船首部分において発散しない解となることが示された。また、この解の数値計算結果は実験と比較して良好なものであり、船首部では圧力は Froude-Krylov の仮定によるものと一致し、船体後半部では Faltinsen の結果と一致する傾向を示した。

しかし丸尾の解析では far field potential を与える船体中心線上に分布された pulsating source が船体の局所的な性質の情報 (keel line 上の船体 off-sets) により定められており、解析が不自然である。さらに far field solution の inner expansion で何故に高次の項まで入れなければならないのかがはっきりとしていない。

\* O-symbol, o-symbol は位数記号を表わす。

これらの事は、単に理論に対する説明の仕方の問題に過ぎず、丸尾の解析は向い波の中に置かれた細長船に働く波浪外力が船首で特異性を持たない形で、すなわち Faltinsen の解析の拡張として重要な意味を持つものであると思われる。

この論文では、向い波の中に置かれた細長船に働く波浪外力の問題を、合理的な仮定の下に説明し直すことが何らかの意義を持つと考え、Matched Asymptotic Expansion Method の立場から解析し直し、確かに船首部で特異性の無い形の解が得られること、およびこの解が Faltinsen の解と matching することを示した。さらに、丸尾の解にあった船体断面の局所的性質を利用する形でなく、船体断面の全体的性質を利用する形での積分方程式を導き、これが丸尾のものと同じであることを示す。

## 2. Bow near field における potential

船体中央部分で船首からの距離が  $x=O(1)$  としたとき、ここでの船体近傍の解を求めると、この解は  $x \rightarrow 0$  とするとき、すなわち船首で、特異性を示す。特異性は  $O(x^{-1/2})$  で発散する形であり、船首部分では、解が成立しないことを示している。そこで船首部においては、船首からの距離を  $x=O(\epsilon)$  であるとし、船首部分を局所的に拡大する。この拡大の意味は、船体形状がこの領域で急激に変化をしているということではなく、この領域でも船体形状の  $x$  方向の変化は  $y-z$  面の変化に較べ高次であるという slender body assumption が成立するとし、ただ向い波の作用する船首領域を拡大するということである。向い波の波長は  $O(\epsilon)$  であると仮定されるので、 $x=O(\epsilon)$  の船首近傍は向い波の一波長が作用する領域であるとされる。この仮定により、船体形状に関しては slender body assumption が成立し、向い波と船首部との作用は potential および速度成分の微分に関して order が  $O(\epsilon^{-1})$  だけ変化するものと考ええる。さらに、この作用は向い波と同じ形の sinusoidal part  $e^{i(\omega t - \kappa x)}$  を slowly varying function  $\Psi(x, y, z)$  で modulate した形で表わされるとする。すなわち、

$$\Psi(x, y, z) e^{i(\omega t - \kappa x)}$$

の形であるとする。  $\Psi(x, y, z)$  については slender body assumption に従い、船体形状の変化と  $\Psi$  による流れの変化は同じ order であるとする。

このようにすると bow near field ( $x=O(\epsilon)$ ,  $y=O(\epsilon)$ ,  $z=O(\epsilon)$ ) において、  $\Psi(x, y, z)$  に関する境界

値問題は midship near field ( $x=O(1)$ ,  $y=O(\epsilon)$ ,  $z=O(\epsilon)$ ) のものと同じ形になることがわかる。しかし matching condition が異なる。Far field ( $x=O(1)$ ,  $y=O(1)$ ,  $z=O(\epsilon)$ ) で向い波と船体との干渉を見るとき、これは  $\gamma(x)e^{-i\kappa x}$  で船体縦軸方向に密度が変化し、時間的に  $e^{i\omega t}$  で変化する pulsating line source distribution で表わすことができる。Far field solution はこの line source distribution で表わされ、線型化した自由表面条件を満足し、さらに適当な radiation condition を満足するものとして求めることができる。この far field solution は bow near field および midship near field の解との matching が可能でなければならず、また2つの near field の解も互いに matching しなければならない。

Faltinsen の解析は far field solution と midship near field solution との matching により得られたものであり、midship near field での first order の解は incident wave potential と同じで、符号のみが異なるものであり、互いに cancel し second order term が残ることになる。この項は first order term より  $O(\epsilon^{1/2})$  だけ高次であり、さらに  $O(x^{-1/2})$  で減衰する性質を持つ。この項は  $x \rightarrow O(\epsilon)$  とするとき order が first order term と同じになることがわかる。

Bow near field において first order term は、midship near field の問題における first order term と second order term との和と同じ形になっており、このことから far field solution の inner expansion は夫々の near field に対して異なる形の expansion を持つことがわかる。しかし inner expansion の基本的な形は変化してないために、船首部での流れ場は船体中央部と比較して大きな変化はなく、steady motion における slender ship theory のような流れ場の性質の変化と対称的である<sup>6)</sup>。

最後に次のことを述べておく。船首部における向い波と船体との干渉は簡単な形で近似されることがわかるので、船体断面形状を  $x$  軸方向に幾つかとって、2-D Helmholtz equation を支配方程式とする strip method による計算を行うことにより、波浪外力を容易に求めることができる。このようにして求められる波浪外力は、船首部では Froude-Krylov force によるものと一致し、船体後方では3次元影響を受けた Faltinsen によるものと一致する。

### 3. Bow near field problem

細長船が  $x$  軸の正の方向に伝播する規則波の中に、波に正対して運動を固定されて置かれているとする。静止自由表面上に船首の位置が原点となるようにし、 $z$  軸を鉛直上向きに取る。

流体は非圧縮性であり、流れ場は非回転的であるとする。この時速度 potential  $\phi(x,y,z,t)$  が存在し、次の条件を満足する。

$$[L] \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in fluid} \quad (3.1)$$

船体は運動を制限されているので、船体表面上での境界条件は  $z=h(x,y)$  を船体表面を表わす方程式として

$$[H] \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } z=h(x,y) \quad (3.2)$$

である。 $\frac{\partial}{\partial n}$  は船体表面より流体中に向けた法線方向の微分を示す。自由表面を  $z=\zeta(x,y,t)$  と表わすとき、この面上で  $\phi$  が満足すべき条件は

$$[A] \quad g\zeta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad \text{on } z=\zeta(x,y,t) \quad (3.3)$$

および、

$$[B] \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=\zeta(x,y,t) \quad (3.4)$$

である。さらに  $\phi$  は radiation condition [R] を満足しなくてはならない。これについては後で考察を加える。流体は無限の広がりを持ち、船の他には物体が存在していないことを仮定する。

規則的な向い波を表わす potential  $\phi_I$  は、線型化された自由表面条件を満足するためのあらゆる性質を持つことが仮定される。このとき incident wave potential  $\phi_I$  は

$$\phi_I(x,y,z,t) = c e^{\kappa z} e^{-i(\kappa x - \omega t)} \quad (3.5)$$

$$c = \frac{ga}{\omega} \quad g = \text{gravitational constant} \quad (3.6)$$

と表わすことができる。ここで  $a$  = wave amplitude,  $\omega$  = wave frequency,  $\kappa$  = wave number であり、 $\kappa$  は incident wave の波長  $\lambda$  と wave frequency  $\omega$  と

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega^2}{g} \quad (3.7)$$

の関係がある。

Incident wave potential の time dependent part は  $e^{-i\omega t}$  であるので total potential  $\phi$  の time dependent part も  $e^{-i\omega t}$  で与えられるとする。このことは  $-\frac{\partial}{\partial t}$  の operator は  $-i\omega$  をかけることと同じことを意味する。

船体は slender body assumption を満足する。そして slenderness を表わす parameter は  $\varepsilon$  である。Incident wave の波長は

$$\lambda = O(\varepsilon) \text{ or } \omega = O(\varepsilon^{-1/2}) \quad (3.8)$$

であることを仮定する。

以上より potential  $\phi$  について線型化を行うと (Appendix I),  $\phi$  の満足すべき条件は次のようになる。

$$[L] \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0 \text{ in fluid} \quad (3.9)$$

$$[F] \quad -\omega^2 \phi + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.10)$$

$$[H] \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } z=h(x,y) \quad (3.11)$$

[R] Radiation condition

Potential  $\phi$  は次のように書くことができる。

$$\phi = \phi_I + \phi_D \quad (3.12)$$

$\phi_D$  は  $\phi_I$  と船体との相互干渉を表わす diffraction potential である。以上の条件を満足する  $\phi_D$  を Matched Asymptotic Expansion Method によって求める。 $x=O(1)$  としたときの解析は Faltinsen によって行われているので, bow near field  $x=O(\varepsilon)$  での解を求め, 全ての領域で成立する解を作り上げる。

Far field で  $\phi_D$  の満足する条件は [H] に関する制限が無くなるだけである。 $\phi_D$  が線体中心線上に分布した pulsating source  $\gamma(x)e^{-i\kappa x+i\omega t}$  によって表わされるとすると,  $\phi_D$  は far field で

$$\phi_D(x,y,z,t) = -\frac{1}{4\pi^2} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F\{\gamma(x)e^{-i\kappa x}\} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{e^{ily+z\sqrt{k^2+l^2}}}{\sqrt{k^2+l^2}-\kappa} \quad (3.13)$$

と表わされる。ここで

$$F\{\gamma(x)e^{-i\kappa x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} \gamma(x) e^{-i\kappa x} = \gamma^*(k+\kappa) \quad (3.14)$$

である。(3.13) の  $l$  に関する積分は  $\phi_D$  が無限遠方で outgoing waves を表わすという [R] 条件を満足するよう積分路  $c$  を取る。この far field poten-

tial の  $x=O(1)$  である midship near field への inner expansion は two terms までとると,

$$\begin{aligned} \phi_D(x,y,z,t) &\sim e^{i(\omega t - \kappa x)} e^{\kappa z} \left[ -\kappa e^{-i\pi/4} \right. \\ &\times \int_0^x \frac{d\xi \gamma(\xi)}{\sqrt{2\pi\kappa(x-\xi)}} + \kappa |y| \gamma(x) - e^{-i\pi/2} \frac{\gamma(x)}{2} \left. \right] \\ &\quad O(\kappa^{1/2}\gamma) \quad O(\gamma) \quad O(\gamma) \end{aligned} \quad (3.15)$$

となり, leading order term は  $O(\varepsilon^{-1/2}\gamma)$  であり, second order term は  $O(\gamma)$  であることがわかる。この expansion の形は  $x=O(1)$  のときだけでなく  $x=O(\varepsilon)$  としても同じ形になることが確かめられる (Appendix II)。すなわち bow near field への far field potential の inner expansion は,

$$\begin{aligned} \phi_D(x,y,z,t) &\sim e^{i(\omega t - \kappa x)} e^{\kappa z} \left[ -\kappa e^{-i\pi/4} \right. \\ &\times \int_0^x \frac{d\xi \gamma(\xi)}{\sqrt{2\pi\kappa(x-\xi)}} + \kappa |y| \gamma(x) - e^{-i\pi/2} \frac{\gamma(x)}{2} \left. \right] \\ &\quad O(\gamma) \quad O(\gamma) \quad O(\gamma) \end{aligned} \quad (3.16)$$

となる。(3.15) と異なることは, bow near field で同じ形の expansion が, leading order term が  $O(\gamma)$  ( $x=O(\varepsilon)$ ) である, one term expansion になることである。

次に bow near field における問題を考えることとする。ここでは

$$x=O(\varepsilon), y=O(\varepsilon), z=O(\varepsilon) \quad (3.17)$$

である。また diffraction potential  $\phi_D$  は  $e^{i(\omega t - \kappa x)}$  で変動する性質を持つとする。この仮定は船首部分でも物理的に正しいと思われる。すなわち incident wave の作用に比例する形の干渉があるであろうということは, 船首部で少なくとも干渉の主要な部分として, 正しいと思われるからである。そこで diffraction potential を次の形であるとする。

$$\phi_D(x,y,z,t) = e^{i(\omega t - \kappa x)} \Psi(x,y,z) \quad (3.18)$$

$\Psi(x,y,z)$  は船体形状の diffraction potential に関係する factor であると考えることができる。そして  $\Psi(x,y,z)$  は slender body assumption に従うものとされる。すなわち  $\Psi$  は船体に関して transverse 方向の変化と同じ order で変化し, longitudinal 方向についても同じであるとする。そして transverse 面における  $\Psi$  の変化の割合は船体の transverse dimension の order の大きさによって支配され, longitudinal 方向は transverse 面のそれよりもゆっくりとした order で変化する。

このとき bow near field での  $\phi_D$  に関する条件より,  $\Psi$  について次の条件を得る。

$$[L] \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \kappa^2 \Psi - i\kappa \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0$$

$$O(\varepsilon^{-2}\Psi) \quad O(\varepsilon^{-2}\Psi) \quad O(\varepsilon^{-2}\Psi) \quad (3.19)$$

$$[F] \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \kappa \Psi = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.20)$$

$$O(\varepsilon^{-1}\Psi) \quad O(\varepsilon^{-1}\Psi)$$

$$[H] \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = -c \frac{\partial}{\partial n} e^{\kappa z} \quad \text{on } z=h(x,y) \quad (3.21)$$

[H] 条件に関して, 船体に立てた法線 の方向余弦を  $(n_1, n_2, n_3)$  とすると,

$$n_1 = o(1), \quad n_2 = O(1), \quad n_3 = O(1) \quad (3.22)$$

であるので,

$$[H] \quad \left[ n_2 \frac{\partial \Psi}{\partial y} + n_3 \frac{\partial \Psi}{\partial z} - i\kappa n_1 \Psi + n_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right]$$

$$O(\varepsilon^{-1}\Psi) \quad O(\varepsilon^{-1}\Psi) \quad O(\varepsilon^{-1}n_1\Psi)$$

$$= -ce^{\kappa z} \cdot (i\kappa n_1 - \kappa n_3)$$

$$O(\varepsilon^{-1}cn_1) \quad O(\varepsilon^{-1}c) \quad \text{on } z=h(x,y) \quad (3.23)$$

と書くことができる。さらに  $\Psi$  は bow near field で次の形の漸近展開式を持つと仮定する。

$$\Psi(x,y,z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x,y,z;\varepsilon)$$

where  $\Psi_{n+1} = o(\Psi_n)$  as  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\text{for fixed } (x,y,z) \quad (3.24)$$

これを (3.19), (3.20) および (3.23) に代入して, leading order term  $\Psi_1$  についての条件を求めると

$$[L] \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \kappa^2 \right) \Psi_1(x,y,z;\varepsilon) = 0 \quad (3.25)$$

$$[F] \quad \left( \frac{\partial}{\partial z} - \kappa \right) \Psi_1(x,y,z;\varepsilon) = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.26)$$

$$[H] \quad n_2 \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + n_3 \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = ce^{\kappa z} \kappa n_3 \quad \text{on } z=h(x,y) \quad (3.27)$$

あるいは, 船体断面内  $(y,z)$  面での法線微分を  $\frac{\partial}{\partial N}$  で表わすと,

$$[H] \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial N} = -c \frac{\partial}{\partial N} e^{\kappa z} \quad \text{on } z=h(x,y) \quad (3.28)$$

となる。この条件より  $\Psi_1 = O(c)$  であることがわかる。もしそうでないとしたら,  $\Psi_1$  は homogeneous な船体表面条件を満足しなくてはならなくなるが, そのような場合の解は, 他の領域との解との matching が不可能である。 $\Psi_1$  に関する条件は上のものの外に他の領域の解との matching の条件[M]が課せられる。

$\Psi_1$  に関する問題は  $y \rightarrow O(1)$  になるとき  $|y|^M$

( $M =$  任意の正整数) で大きくなる解を許すと, 一般解として

$$\Psi_1(x,y,z;\varepsilon) = -ce^{\kappa z} + \bar{A}(x) \{ e^{\kappa z} + \int_{c(x)} \kappa \mu(s,\kappa) [G(\kappa y, \kappa z; \kappa \eta, \kappa \zeta) + G(\kappa y, \kappa z; -\kappa \eta, \kappa \zeta)] ds \} \quad (3.29)$$

となる。(Ursell(1968 b)) ここで

$$G(\kappa y, \kappa z; \kappa \eta, \kappa \zeta) = K_0 \{ \kappa [(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2} + \frac{1}{4} \left( \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \right) \frac{\cosh \mu}{\cosh \mu - 1} \times e^{i\kappa(y-\eta) \sinh \mu + i\kappa(z+\zeta) \cosh \mu} d\mu \quad (3.30)$$

である。(3.29) の  $s$  に関する積分は船体断面  $c(x)$  の contour に沿って行われる。(3.29) の  $\bar{A}(x)$  は未知関数であり,  $\bar{A}(x) = O(c)$  である。また  $y \rightarrow O(1)$  になるとき  $\Psi_1$  は

$$\Psi_1(x,y,z;\varepsilon) \sim ce^{\kappa z} + \bar{A}(x) \left[ \frac{e^{\kappa z} - 4\pi \kappa y e^{\kappa z}}{O(c)} + \int_{c(x)} \kappa \mu(s,\kappa) e^{\kappa \zeta(s)} ds \right] \quad (3.31)$$

となる。これは  $\Psi_1$  の far field への outer expansion である。Far field solution の inner expansion (3.16) と上の expansion との matching により次の関係を得る。

$$-4\pi \bar{A}(x) \int_{c(x)} \kappa \mu(s,\kappa) e^{\kappa \zeta(s)} ds = \gamma(x) \quad (3.32)$$

および,

$$\{-c + \bar{A}(x)\} = -\kappa e^{-i\pi/4} \int_0^x \frac{d\xi \gamma(\xi)}{\sqrt{2\pi \kappa(x-\xi)}} - e^{-i\pi/2} \frac{\tilde{\gamma}(x)}{2} \quad (3.33)$$

すなわち

$$E(\kappa, x) = \int_{c(x)} \kappa \mu(s,\kappa) e^{\kappa \zeta(s)} ds \quad (3.34)$$

と置くと

$$\bar{A}(x) = -\frac{\gamma(x)}{4\pi E(\kappa, x)} \quad (3.35)$$

であり, これを (3.33) へ代入すると  $\gamma(x)$  に関する積分方程式が得られる。

$$\left\{ \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-i\pi/4} \int_0^x \frac{d\xi \gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} + \left\{ \frac{e^{-i\pi/2}}{2} - \frac{1}{4\pi E(\kappa, x)} \right\} \gamma(x) - c = 0 \right. \quad (3.36)$$

この Volterra 型積分方程式は  $E(\kappa, x)$  がわかると解くことができ  $\gamma(x)$  が確定する。 $\gamma$  の order は (3.35) より  $\gamma = O(\bar{A}) = O(c)$  であることがわかる。

以上の解析は bow near field におけるものである

ので、ここでの解と midship near field の解が matching するかの吟味を行う。Midship near field の解析は Faltinsen により次のように行われた。Potential は次のように展開される。

$$\Psi(x, y, z) \sim \sum_{n=1} \Psi_n(x, y, z; \varepsilon), \quad \Psi_{n+1} = o(\Psi_n) \\ \text{as } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ for fixed } (x, y, z) \quad (3.37)$$

$\Psi_1$  に関する条件は

$$[L] \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \kappa^2 \right) \Psi_1 = 0 \quad (3.38)$$

$$[F] \left( \frac{\partial}{\partial z} - \kappa \right) \Psi_1 = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.39)$$

$$[H] \frac{\partial}{\partial N} \Psi_1 = -c \frac{\partial}{\partial N} e^{\varepsilon z} \quad \text{on } z=h(x, y) \quad (3.40)$$

であり、bow near field における  $\Psi_1$  と全く同じ boundary value problem になっているが、[M] matching 条件が異なる。 $\Psi_1$  は (3.15) の leading order term と matching することより incident wave potential を cancel する形で与えられる。すなわち

$$\Psi_1(x, y, z; \varepsilon) = -c e^{\varepsilon z} = O(c) \quad (3.41)$$

である。この解と far field solution との matching より  $\gamma(x)$  を定める積分方程式は Abel 型の積分方程式となる。

$$\left( \frac{\kappa}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-i\pi/4} \int_0^x \frac{d\xi \gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} = c \quad (3.42)$$

これは容易に解けて

$$\gamma(x) = c e^{i\pi/4} \left( \frac{2}{\pi \kappa x} \right)^{1/2} = O(c \varepsilon^{1/2}) \quad (3.43)$$

となる。これによると  $x=O(1)$  の midship near field で source density function は  $\gamma=O(c \varepsilon^{1/2})$  であり、bow near field で求まる  $\gamma (=O(c) \text{ where } x=O(\varepsilon))$  より  $O(\varepsilon^{1/2})$  だけ高次になっている。(3.43) で  $x \rightarrow O(\varepsilon)$  とすると  $\gamma \rightarrow O(c)$  と order が変化することがわかる。次に second order solution  $\Psi_2(x, y, z; \varepsilon)$  について見ると、これは次の条件を満足している。

$$[L] \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \kappa^2 \right) \Psi_2(x, y, z; \varepsilon) = 0 \quad (3.44)$$

$$[F] \left( \frac{\partial}{\partial z} - \kappa \right) \Psi_2 = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.45)$$

$$[H] \frac{\partial}{\partial N} \Psi_2 = 0 \quad \text{on } z=h(x, y) \quad (3.46)$$

この解は

$$\Psi_2 = A(x) \left[ e^{\varepsilon z} + \int_{c(x)} \kappa \mu(s, \kappa) [G_+ + G_-] ds \right] \quad (3.47)$$

で与えられ、far field solution との matching より

(364)

$$A(x) = \frac{\gamma(x)}{4\pi E(\kappa, x)} = O(\gamma) \quad (3.48)$$

として  $A(x)$  が定まる。 $A(x)$  の order は  $\gamma(x)$  と同じであり、 $x \rightarrow O(\varepsilon)$  となるとき  $A(x)$  は  $O(\varepsilon^{1/2} c) \rightarrow O(c)$  と order が変化する。

Bow near field の  $\tilde{A}(x)$  ( $x=O(\varepsilon)$ ) と midship near field の  $A(x)$  ( $x=O(1)$ ) が matching することは、bow near field で  $\gamma(x)$  を定める積分方程式 (3.36) が  $x \rightarrow O(1)$  のとき midship near field の Abel 型積分方程式 (3.42) に変化することよりわかる (Appendix II)。

以上より bow near field で  $\gamma(x)$  を定める式は Volterra 型の積分方程式で与えられ、船首で発散しない source density function を求めることができる。Bow near field で  $\gamma(x)$  は slowly varying function であることを考えると (3.33) は次のように近似される。すなわち

$$\int_0^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} \doteq \gamma(x_0) \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} \\ = 2\gamma(x_0) \sqrt{x} \quad 0 < x_0 < x \quad (3.49)$$

が許されるとするとき、(3.36) で  $x=x_0$  で置き代えると

$$\gamma(x) = \frac{c}{2 \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-i\pi/4} x^{1/2} + \frac{1}{2} e^{-i\pi/2} - \frac{1}{4\pi E(\kappa, x)}} \quad (3.50)$$

これにより  $\gamma(x)$  の船首に近い所での性質を知ることができる。

#### 4. 丸尾の解との関係

向い波の中に細長い船体が固定して置かれたとき、diffraction potential を

$$\phi_D(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z) e^{i(\omega t - \kappa x)} \quad (4.1)$$

とすると、 $\Psi$  に関する leading order の境界値問題は

$$[L] \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \kappa^2 \right) \Psi(x, y, z) = 0 \quad \text{in fluid} \quad (4.2)$$

$$[F] \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \kappa \Psi = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (4.3)$$

となる。無限遠方で 0 となり、かつ (4.3) を満足する Helmholtz equation (4.2) の基本解の組合せは、物体が左右対称として  $y$  軸に関して対称なものと

$$\begin{aligned} \Psi_n(x, y, z) = & K_{2n-2}(\kappa r) \cos(2n-2)\theta \\ & + 2K_{2n-1}(\kappa r) \cos(2n-1)\theta + K_{2n}(\kappa r) \cos 2n\theta \\ & n=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

である。ここで  $K_{2n}(z)$  は Modified Bessel function であり、

$$z = -r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (4.5)$$

である。しかしこの形の解の一次結合のみで  $\phi_D$  を表わすことはできない。欠けている項は  $x$  軸に沿って source density が  $\gamma(x)e^{i(\omega t - \kappa x)}$  なる pulsating source distribution を考えると、(4.2), (4.3) を満足し outgoing wave を表わす potential によって与えられる。すなわちこの potential を  $\chi(x, y, z)e^{i\omega t}$  とすると、

$$\begin{aligned} \chi(x, y, z) = & 2i\kappa e^{\kappa z} \int_{-\kappa}^{\kappa} dk e^{ikx} \gamma^*(k + \kappa) \frac{e^{-iy\sqrt{\kappa^2 - k^2}}}{\sqrt{\kappa^2 - k^2}} \\ & - 2\kappa e^{\kappa z} \left( \int_{-\infty}^{-\kappa} + \int_{\kappa}^{\infty} \right) dk e^{ikx} \gamma^*(k + \kappa) \frac{e^{-iy\sqrt{k^2 - \kappa^2}}}{\sqrt{k^2 - \kappa^2}} \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \gamma^*(k + \kappa) \int_{|k|}^{\infty} dl e^{-ly} \\ & \times \left\{ \frac{e^{iz\sqrt{l^2 - k^2}}}{\sqrt{l^2 - k^2 + i\kappa}} + \frac{e^{-iz\sqrt{l^2 - k^2}}}{\sqrt{l^2 - k^2 - i\kappa}} \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

である。 $\kappa = O(\varepsilon^{-1})$  として、 $y = O(\varepsilon)$ ,  $z = O(\varepsilon)$  のとき、この potential は漸近展開され  $O(\varepsilon\gamma)$  以上の項を省略すると

$$\begin{aligned} \chi \sim & -(2\kappa)^{1/2} e^{\kappa z - i\kappa x} (1-i) \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \gamma(\xi + x) \\ & \times \int_0^{\kappa} dp \frac{\cos p\xi - \sin p\xi}{p^{1/2}} - (2\kappa)^{1/2} e^{\kappa z - i\kappa x} (1-i) \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \gamma(\xi + x) e^{-i2\kappa\xi} \int_0^{\kappa} dp \frac{\cos p\xi + \sin p\xi}{p^{1/2}} \\ & + 2e^{-i\kappa x} \int_{-\kappa}^{\kappa} dp e^{ipy} \gamma^*(k) \left[ \kappa y e^{\kappa z} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dv \frac{v}{(v^2+1)^{3/2}} e^{-\kappa y(v^2+1)^{1/2}} (v \cos \kappa z v \right. \\ & \left. + \sin \kappa z v) \right] \end{aligned} \quad (4.7)$$

が得られる。さらに Fresnel integral に対し漸近展開を行うと最終的に two term expansion として

$$\begin{aligned} \chi \sim & -2(2\pi\kappa)^{1/2} e^{\kappa z - i\kappa x} e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} \\ & + 4\pi\gamma(x) e^{-i\kappa x} \left\{ e^{\kappa z} \left( \kappa y - \frac{e^{-i\pi/2}}{2} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dv \frac{v}{(v^2+1)^{3/2}} e^{-\kappa y(v^2+1)^{1/2}} \right. \end{aligned}$$

$$\left. \times (v \cos \kappa z v + \sin \kappa z v) \right\} \quad (4.8)$$

となる\*。始めの項が leading order term  $O(\varepsilon^{-1/2}\gamma)$  ( $x = O(1)$  のとき) である。

丸尾は (4.8) の第 2 項が第 1 項に比べてたかだか  $O(\varepsilon^{1/2})$  だけ高次であるに過ぎないので、これを微小量として無視することは、大きな誤差を生ずる原因となることが予想されるとして、この第 2 項を含んだ形の (4.8) と基本解 (4.4) との線型結合でもって流体運動を表現しようとした。(4.8) において

$$\begin{aligned} \Psi_R(y, z) = & \kappa y e^{\kappa z} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dv \frac{v}{(v^2+1)^{3/2}} \\ & \times e^{-\kappa y(v^2+1)^{1/2}} (v \cos \kappa z v + \sin \kappa z v) \end{aligned} \quad (4.9)$$

とすると、流体運動を表わす potential  $\Psi$  は

$$\begin{aligned} \Psi(x, y, z) = & \chi(x, y, z) e^{i\kappa x} + 4\pi\gamma(x) \sum_{m=1}^{\infty} p_m \Psi_m \\ = & -2(2\pi\kappa)^{1/2} e^{-i\pi/4} e^{\kappa z} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} \\ & + 4\pi\gamma(x) \left( \Psi_R + \frac{i}{2} e^{\kappa z} + \sum_{m=1}^{\infty} p_m \Psi_m \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

と表わされる。

この potential の満足すべき船体表面条件は、slender body assumption により (3.28) と同じ形になる。すなわち

$$[\text{H}] \quad \frac{\partial \Psi}{\partial N} = -c \frac{\partial}{\partial N} e^{\kappa z} \quad \text{on } z = h(x, y) \quad (4.12)$$

である。(4.11) を [H] 条件に代入して  $\gamma(x)$  を定めることが可能である。ここで

$$\frac{\partial \Psi_R}{\partial N} = V_R(y, z) \quad \text{on } z = h(x, y) \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \Psi_m}{\partial N} = V_m(y, z) \quad \text{on } z = h(x, y) \quad (4.14)$$

とすると、(4.11), (4.12) より

$$\begin{aligned} & \left\{ -2(2\pi\kappa)^{1/2} e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} + c + 2\pi i \gamma(x) \right\} \\ & = -4\pi\gamma(x) \left\{ V_R + \sum_{m=1}^{\infty} p_m V_m \right\} / \frac{\partial}{\partial N} e^{\kappa z} \\ & \quad \text{on } z = h(x, y) \end{aligned} \quad (4.15)$$

の関係を得る。この式の左辺は  $(y, z)$  の値によらない量であるので、固定した  $x$  の値に対して右辺は定数とならなければならない。すなわち

\* この式は丸尾<sup>(2)</sup>の与えた式と少し異なる。丸尾の式では  $(\kappa y + \frac{i}{4})$  になっている。漸近式にこの項と同じ order の項が丸尾の式でぬけている。

$$V_R(y, z) + \sum_{m=1}^{\infty} p'_m V_m(y, z) = p_0 \frac{\partial}{\partial N} e^{\kappa z} \quad \text{on } z = h(x, y) \quad (4.16)$$

と書ける。 $p_0(x)$  は固定した  $x$  に関して  $(y, z)$  に関係しない定数である。船体断面上いくつかの点  $(y, z)$  について上式が成立するように最小自乗法を用いて  $p_0, p'_m (m=1, 2, \dots)$  の連立方程式を導き、これを解いて  $p_0, p'_m$  を決定することができる。したがって (4.15) は

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} - \left\{p_0 + \frac{i}{2}\right\} \gamma(x) \\ & = \frac{c}{4\pi} \end{aligned} \quad (4.17)$$

となり、これは  $\gamma(x)$  に関して第2種 Volterra 型積分方程式であり数値的に  $\gamma(x)$  を求めることが可能である。上式は (3.36) と全く同じであり、丸尾の  $\Psi(x, y, z)$  は bow near field の解と一致する。(Appendix III)

$p_0(x)$  を求めるのに丸尾は船体の局所的な点  $(y_0, z_0)$  (例えば keel 上の点等) を使って

$$p_0(x) = \left\{ V_R(y_0, z_0) + \sum_{m=1}^{\infty} p'_m V_m(y_0, z_0) \right\} / \frac{\partial}{\partial N} e^{\kappa z_0} \quad (4.18)$$

とし、 $p'_m$  は (4.16) より

$$\begin{aligned} & V_R(y, z) / \frac{\partial}{\partial N} e^{\kappa z} - V_R(y_0, z_0) / \frac{\partial}{\partial N} e^{\kappa z_0} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} p'_m \left\{ V_m(y, z) / \frac{\partial}{\partial N} e^{\kappa z} \right. \\ & \left. - V_m(y_0, z_0) / \frac{\partial}{\partial N} e^{\kappa z_0} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

として  $p'_m$  を船体断面上のいくつかの点を使って最小自乗法によって求めた。 $p_0(x)$  は (4.16) で求めても (4.19) として求めても同等であり、計算を行うときは簡単な方法を選べば良い。

以上により丸尾の解析は §3 に述べた bow near field における解析と同じであることがわかる。確かにこの解は  $x \rightarrow O(1)$  で Faltinsen による結果と一致するものであるので (4.10) で表わされる  $\chi$  と  $\Psi_m$  の線型結合による potential は、向い波の中に置かれた細長船による流体運動を船首を含む全ての船体部分で表わすものであると言える。

## 5. 変動圧力の計算

船体に働く波浪外力は、変動圧力として計算される。圧力はこれまでなされてきている境界条件の線型化の仮定の下に船体表面上で

$$p = -\rho \frac{\partial}{\partial t} (\phi_I + \phi_D) \quad (5.1)$$

で計算される。Incident wave potential は

$$\phi_I = c e^{\kappa z} e^{i(\omega t - \kappa x)} \quad (5.2)$$

であり、diffraction potential  $\phi_D$  は、

bow near field  $x = O(\varepsilon)$  で

$$\begin{aligned} \phi_D(x, y, z, t) & = e^{i(\omega t - \kappa x)} [-c e^{\kappa z} + \bar{A}(x)] \\ & \times \left\{ e^{\kappa z} + \int_{c(x)} \kappa \mu(s, \kappa) [G_+ + G_-] ds \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

midship near field  $x = O(1)$  で

$$\begin{aligned} \phi_D(x, y, z, t) & = e^{i(\omega t - \kappa x)} [-c e^{\kappa z} + A(x)] \left\{ e^{\kappa z} \right. \\ & \left. + \int_{c(x)} \kappa \mu(s, \kappa) [G_+ + G_-] ds \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

で与えられる。ここで  $\bar{A}(x)$  および  $A(x)$  はそれぞれ

$$x = O(\varepsilon); \bar{A}(x) = -\frac{\gamma(x)}{4\pi E(\kappa, x)} = O(c) \quad (5.5)$$

$$x = O(1); A(x) = -\frac{\gamma(x)}{4\pi E(\kappa, x)} = O(\varepsilon^{1/2} c) \quad (5.6)$$

で表わされ、 $\gamma(x)$  は

$$\begin{aligned} x = O(\varepsilon); & \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-i\pi/4} \int_0^x \frac{d\xi \gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} \\ & + \left\{ \frac{1}{2} e^{-i\pi/2} - \frac{1}{4\pi E(\kappa, x)} \right\} \gamma(x) = c \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$x = O(1); \left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-i\pi/4} \int_0^x \frac{d\xi \gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} = c \quad (5.8)$$

の積分方程式を解いて得られる。

圧力  $p$  は

$$\begin{aligned} p & = i\rho\omega \frac{\gamma(x)}{4\pi E(\kappa, x)} e^{i(\omega t - \kappa x)} \left\{ e^{\kappa z} \right. \\ & \left. + \int_{c(x)} \kappa \mu(s, \kappa) [G_+ + G_-] ds \right\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

で計算される。 $\gamma(x)$ 、および  $E(\kappa, x)$  を知ることでより圧力が求まる。 $x = O(1)$  のとき (5.8) は explicit な形で解けて

$$\begin{aligned} p & = i\rho\omega c e^{i\pi/4} \left(\frac{2}{\pi\kappa x}\right)^{1/2} \frac{1}{4\pi E(\kappa, x)} \\ & \times e^{i(\omega t - \kappa x)} \left\{ e^{\kappa z} + \int_{c(x)} \kappa \mu(s, \kappa) [G_+ + G_-] ds \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

となる。船体中央部で  $E(\kappa, x)$  は変化は少なく圧力  $p$  は  $x^{-1/2}$  で減少していくことがわかる。さらに incident



wave による波圧力は

$$p_I = -i\rho\omega c e^{i(\omega t - \kappa x)} e^{\kappa z} \quad (\text{Froude-Krylov force}) \quad (5.11)$$

であるので(5.10)の  $p$  は(5.11)と  $\arg(-e^{i\pi/4} \text{sgn}(E))$  の位相の差があることがわかる。Bow near field  $x=O(\varepsilon)$  のときは  $\gamma(x)$  は(5.7)を数値的に解かなければならないが §3 で行ったように  $\gamma(x)$  が次のように近似されるとする。

$$\gamma(x) = \frac{c}{2 \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-i\pi/4} x^{1/2} + \frac{1}{2} e^{-i\pi/2} - \frac{1}{4\pi E(\kappa, x)}} \quad x=O(\varepsilon) \quad (5.12)$$

このとき、圧力は

$$p = \frac{-i\rho\omega c e^{i(\omega t - \kappa x)} \left\{ \frac{e^{\kappa z} + \int \kappa \mu(s, \kappa) [G_+ + G_-] ds}{c(x)} \right\}}{1 - \left\{ 2 \left( \frac{\kappa}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-i\pi/4} x^{1/2} + \frac{1}{2} e^{-i\pi/2} \right\} 4\pi E(\kappa, x)} \quad (5.13)$$

で与えられる。船首の極く近くでは  $\mu(s, \kappa) \doteq 0$ ,  $E(\kappa, x) \doteq 0$  になると考えられるので,  $x \rightarrow 0$  のとき  $\mu(s, \kappa) \rightarrow 0$ ,  $E(\kappa, x) \rightarrow 0$  として

$$p \doteq -i\rho\omega c e^{i(\omega t - \kappa x)} e^{\kappa z} \quad \text{as } x \rightarrow 0 \quad (5.14)$$

となり, これは(5.11)の Froude-Krylov force と同じである。すなわち船首部分では波圧力は Froude-Krylov force に等しく, 船首より離れるに従い(5.10)で与えられる Faltinsen の結果になることがわかる。このことは実験によっても確かめられている<sup>2)</sup>。

## 6. あとがき

向い波の中に置かれた細長船による diffraction problem は bow near field を考えることにより, 船首部を含む船体全領域で, 合理的な解を作り上げることが可能であることが示された。ここで考えている細長船とは, 船首部においても船体の  $x$  方向の形状変化は transverse 方向に対してゆるやかであるものをいう。さらに船首は blunt でないとしているので, 向い波が船体に及ぼす力は船首部では Froude-Krylov force になっていることが容易に推察できる。しかし船首を離れて船体中央部に行くにつれて diffraction 効果は大きくなり, いわゆる 3次元影響は無視できなくなる。

この 3次元影響を計算することは, Volterra 型の積分方程式を解かねばならないが, 数値計算には本質的な困難は無く, 計算は比較的容易である。船体形状の特性函数  $E(\kappa, x)$  (又は  $p_o(\kappa, x)$ (4.16)) の計算は 2-D

Helmholtz equation を支配方程式とする境界値問題を解かねばならないが, これは strip method において Laplace equation を支配方程式とする境界値問題を解かねばならないことと同じである。

## 参 考 文 献

- 1) O.M. Faltinsen: Wave Forces on Restrained Ship in Head-Sea Waves, Doctoral Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, Michigan (1971), also: A Rational Strip Theory of Ship Motions: Part 2; Report No. 113, Dept. of Naval Arch. & Mar. Eng., The University of Michigan. (1971)
- 2) 丸尾孟, 佐々木敬之: 向い波の中の細長い物体に働く波圧について, 日本造船学会論文集第 136 号, (1974)
- 3) F. Ursell: The Refraction of Head Seas by a Long Ship, J. Fluid Mech., Vol. 67, (1975)
- 4) 足達宏之: 向い波と細長船による干渉について, 船舶技術研究所報告, 第14巻, 第4号, (1977)
- 5) F. Ursell: On Head Seas Travelling Along a Horizontal Cylinder, J. Inst. Maths Applica., Vol. 4, (1968b)
- 6) T.F. Ogilvie: The Wave Generated by a Fine Ship Bow, 9th, Sympos. Naval Hydrodynamics, Paris, (1972)
- 7) F. Ursell: The Expansion of Water-Wave Potentials at Great Distances, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. 64. (1968a)
- 8) F. Ursell: On the Heaving Motion of Circular Cylinder on the Surface of Fluid, Q.J. M & A.M., Vol. 2, (1949)
- 9) 渡辺巖: 二次元造波理論の二つの解法の関連について, 第22回船舶技術研究所発表会, 講演概要, (1974)
- 10) F. Ursell: Slender Oscillating Ships at Zero Forward Speed, J. Fluid Mech., Vol. 14, (1962)
- 11) O. Grim: A Method for a More Precise Computation of Heaving and Pitching Motion Both in Smooth Water and in Waves, 3rd Sympos. on Naval Hydrodynamics, (1960)

### Appendix I 自由表面条件の線型化

Incident wave potential  $\phi_I$  が線型化された自由表面条件を満足するとしているので, wave slope は  $o(1)$  であるとして良い。

$$\phi_I = ce^{\kappa z} e^{i(\omega t - \kappa x)} \quad \kappa = O(\varepsilon^{-1}), \quad z = O(\varepsilon) \quad (\text{I-1})$$

とすると, 波高  $\zeta$  は

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_I}{\partial t} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} (ce^{\kappa z} e^{i(\omega t - \kappa x)}) \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{i\omega}{g} ce^{i(\omega t - \kappa x)} \end{aligned} \quad (\text{I-2})$$

であり, 波長  $\lambda$  は

$$\lambda = \frac{2\pi}{\kappa} = \frac{2\pi g}{\omega^2} = O(\varepsilon) \quad (\text{I-3})$$

よって wave slope は

$$\frac{|\zeta|}{\lambda} = \frac{\omega/g \cdot c}{\lambda} = o(1) = O(\varepsilon^3) \quad \delta = \text{small constant} \quad (\text{I-3})$$

と表わすことができる。これより

$$c = O\left(\frac{g}{\omega} \lambda \varepsilon^3\right) = O(\varepsilon^{3/2+\delta}) \quad (\text{I-4})$$

である。すなわち

$$\phi_I = O(\varepsilon^{3/2+\delta}) \quad (\text{I-5})$$

である。これが  $\phi_I$  が線型化されるときの order である。このことは incident wave の波長が  $O(\varepsilon)$  のとき正しいといえる。 $\phi_I$  と船体との作用によって生ずる disturbance potential の波動は, far field において  $\phi_I$  と同じ線型化された自由表面条件を持つことが容易にわかる。Near field での条件を考えることにする。ここでは slender body assumption により, diffraction potential の transverse 方向の微分の order は

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial y} = O(\varepsilon^{-1} \phi_D), \quad \frac{\partial \phi_D}{\partial z} = O(\varepsilon^{-1} \phi_D) \quad (\text{I-6})$$

であり, また, 船体の longitudinal 方向の微分については船首部で船体の形状変化が  $O(\varepsilon^{-1+\rho})$  であり, また  $0 < \rho < 1$  であれば  $\phi_I$  の作用が  $x$  に関して rapidly varying であるので,

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial x} = -i\kappa \phi_D = O(\varepsilon^{-1} \phi_D) \quad (\text{I-7})$$

である。これは bow near field でも midship near field でも成立する。また時間微分については  $i\omega$  の factor が掛かることになるので

$$-\frac{\partial \phi_D}{\partial t} = O(\varepsilon^{-1/2} \phi_D) \quad (\text{I-8})$$

である。船体表面条件は

$$\frac{\partial}{\partial n} (\phi_D + \phi_I) = 0 \quad (\text{I-9})$$

とするので,  $\phi_D$  の order は

$$\phi_D = O(\phi_I) = O(\varepsilon^{3/2+\delta}) \quad (\text{I-10})$$

と考えられる。このとき自由表面条件は

$$\begin{aligned} [\text{A}] \quad g\zeta + \frac{\partial \phi_D}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \phi_D}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_D}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi_D}{\partial z} \right)^2 \right] \\ O(\zeta) \quad O(\varepsilon^{1+\delta}) \quad O(\varepsilon^{1+2\delta}) \\ = 0 \quad \text{on } z = \zeta(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{I-11})$$

であり, lowest order term は  $O(\varepsilon^{1+\delta})$  であることがわかる。よって

$$\begin{aligned} [\text{A}] \quad \zeta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_D(x, y, z, t)}{\partial t} = O(\varepsilon^{1+\delta}) = o(\varepsilon) \\ \text{on } z = \zeta(x, y, t) \end{aligned} \quad (\text{I-12})$$

であるので

$\phi_D(x, y, z, t)$  を  $z=0$  のまわりで展開して最終的に lowest order term として

$$[\text{A}] \quad g\zeta + \frac{\partial \phi_D}{\partial t} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (\text{I-13})$$

となる。自由表面での kinematic condition は

$$\begin{aligned} [\text{B}] \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \phi_D}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \phi_D}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \phi_D}{\partial z} = 0 \\ O(\varepsilon^{1/2+\delta}) \quad O(\varepsilon^{1/2+2\delta}) \quad O(\varepsilon^{1/2+2\delta}) \quad O(\varepsilon^{1/2+\delta}) \\ \text{on } z = \zeta(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (\text{I-14})$$

であるので, lowest order term については

$$[\text{B}] \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \phi_D}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (\text{I-15})$$

となる。(I-13) と (I-15) を結びつけて

$$[\text{F}] \quad \left( -\frac{\partial}{\partial z} - \kappa \right) \phi_D = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (\text{I-16})$$

が  $\phi_D$  に関する lowest order term の自由表面条件となる。

以上より near field において (I-9) を満足する potential は (I-6), (I-7) および (I-8) の性質を持つとき自由表面条件は far field における線型化された波動を表わす条件と同じになっていることがわかる。

### Appendix II Bow field への Inner expansion

Midship near field への outer solution の inner expansion は two term までとると

$$\begin{aligned} \phi_D(x, y, z, t) \sim e^{i(\omega t - \kappa x)} e^{\kappa z} \\ \times \left[ -\left( \frac{\kappa}{2\pi} \right)^{1/2} e^{-i\pi/4} \int_0^x \frac{d\xi \gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} \right. \\ O(\varepsilon^{-1/2} \gamma) \\ \left. + \kappa |y| \gamma(x) - e^{-i\pi/2} \gamma \left( \frac{x}{2} \right) \right] \\ O(\gamma) \quad O(\gamma) \end{aligned} \quad (\text{II-1})$$

で与えられることを Faltinsen が示した。Bow part near field への outer solution の inner expansion の leading order term については (II-1) で  $x \rightarrow O(\epsilon)$  とすることで得られる。source density function  $\gamma(x)$  は slowly varying であるから  $0 < \xi < x$  で平均値の定理を使って (II-1) の第一項の積分は

$$\int_0^x \frac{d\xi \gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} = \gamma(x_0) \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{x-\xi}} = 2\gamma(x_0) \sqrt{x} \quad 0 < x_0 < x \quad (\text{II-2})$$

と書ける。Bow part near field では  $x = O(\epsilon)$  であるので、この積分は  $O(\epsilon^{1/2}\gamma)$  であることがわかる。すなわち、bow near field において、outer solution の one term inner expansion は

$$\phi_D(x, y, z, t) \sim e^{i(\omega t - \kappa x)} e^{\kappa z} \left[ -\left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-i\pi/4} \times \int_0^x \frac{d\xi \gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} + \kappa |y| \gamma(x) - e^{-i\pi/2} \frac{\dot{\gamma}(x)}{2} \right] \quad (\text{II-3})$$

$O(\gamma) \quad O(\gamma) \quad O(\gamma)$

であり、(II-1) と同じ形の式となる。(II-3) で  $x \rightarrow O(1)$  とすると (II-1) になることは明らかである。Faltinsen が行った方法で直接 (II-3) の形の bow near field の inner expansion を求めることもできる。

Midship near field と bow part near field で leading order term の order が  $O(\epsilon^{1/2})$  だけ異なるが、leading order term は、それぞれの領域で incident wave potential と同じ order になるので  $\gamma(x)$  の order が領域によって異なることになる。Midship near field の点  $p_m$  と bow part near field の点  $p_b$  との距離  $p_m - p_b$  の order は  $O(\epsilon)$  であるので

$$\frac{\dot{\gamma}_m - \dot{\gamma}_b}{p_m - p_b} = O(\epsilon^{-1/2}) \quad (\text{II-4})$$

である。 $\gamma(x)$  が slowly varying としたが、bow part から midship near field にかけては  $\gamma(x)$  の変化は  $O(\epsilon^{-1/2})$  であることになる。しかし source distribution は

$$\Gamma(x) = \gamma(x) e^{-i\kappa x} \quad (\text{II-5})$$

であるので  $\Gamma(x)$  の変化率は  $O(\epsilon^{-1})$  であり、 $\gamma(x)$  に較べて rapidly varying となっている。 $\gamma(x)$  は、それぞれの領域の中では変化率は  $O(\epsilon^{-1/2})$  よりも小さくより slowly varying であると考えられる。

### Appendix III 向い波と船体の干渉の問題の解について

向い波と船体との干渉を表わす potential は次の境界値問題の解によって表わされる。

$$[\text{L}] \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \kappa^2 \right) \Psi(\kappa, y, z) = 0 \quad \text{in fluid} \quad (\text{III-1})$$

$$[\text{F}] \quad \left( -\frac{\partial}{\partial z} - \kappa \right) \Psi(\kappa, y, z) = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (\text{III-2})$$

$$[\text{H}] \quad \frac{\partial}{\partial N} \Psi(\kappa, y, z) = 0 \quad \text{on } z=h(x, y) \quad (\text{III-3})$$

そして  $r = (y^2 + z^2)^{1/2}$  とするとき

$$[\infty] \quad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right| < A r^M, \quad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right| < A r^M$$

as  $r \rightarrow \infty$  where  $A = \text{arbitrary}$   
const. and  $M: \text{integer} \quad (\text{III-4})$

となる potential は unique に定まる。(Ursell<sup>7)</sup> 1968a) 特に船体断面  $z=h(x, y)$  ( $x = \text{const.}$ ) が円形であるとき、 $\Psi$  は次の展開式で表わされる。

$$\Psi(\kappa, y, z) = e^{\kappa z} + A_0 S_0(y, z) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m O_m(y, z) \quad (\text{III-5})$$

ここで  $S_0(y, z)$  は原点におかれた wave source potential であって [L], [F], [ $\infty$ ] 条件を満たし、次式で与えられる。

$$S_0(y, z) = \frac{1}{4} \left( \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \right) \frac{\cosh \mu}{\cosh \mu - 1} \times e^{\kappa z \cosh \mu + i\kappa y \sinh \mu} d\mu \quad (\text{III-6})$$

また  $O_m(y, z)$  は [L], [F] 条件を満足し  $r \rightarrow \infty$  のとき  $O_m(y, z) \rightarrow 0$  となる wave free potential である。

$$O_m(y, z) = K_{2m-2}(\kappa r) \cos(2m-2)\theta + 2K_{2m-1}(\kappa r) \cos(2m-1)\theta + K_{2m}(\kappa r) \cos 2m\theta$$

$(m=1, 2, 3, \dots)$  (III-7)

[H] 条件を満足するよう未知の係数函数  $A_0, A_1, A_2, \dots$  を定めることが可能である。(III-5) で表わされる system は 2-D 造波理論における場合によく似ている

(Ursell<sup>8)</sup> 1949)。(III-5) の展開式は船体断面が円形に近い場合には良い近似を与えると思われるが、任意の断面形状には適用されないであろう。そのような場合にも適用される方法として、断面の境界上に wave source を分布させる方法がある。この時 potential は

$$\Psi(\kappa, y, z) = e^{\kappa z} + \int_{C(+)} \kappa \sigma(s', \kappa) \times \{ G[\kappa y, \kappa z; \kappa \eta(s'), \kappa \zeta(s')] + G[\kappa y, \kappa z; -\kappa \eta(s'), \kappa \zeta(s')] \} ds' \quad (\text{III-8})$$

で表される。(Ursell 1968b) ここで

$$G(\kappa y, \kappa z; \kappa \eta, \kappa \zeta) = K_0 \{ \kappa [(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2} \} \\ + \frac{1}{4} \left( \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \right) \frac{\cosh \mu + 1}{\cosh \mu - 1} \\ \times e^{i\kappa(y-\eta) \sinh \mu + i\kappa(z+\zeta) \cosh \mu} d\mu \quad (\text{III-9})$$

である。 $y=\eta(s), z=\zeta(s)$  は断面  $c(+)$  ( $y>0, z<0$ ) を表す parametric equation である。そして積分は  $c(+)$  に沿って行われる。Source density  $\sigma(s; \kappa)$  を適当に選ぶことにより (III-1)~(III-4) を満足する解が得られる。船体表面条件に (III-8) を代入すると  $\sigma(s; \kappa)$  に関する第2種 Fredholm equation

$$\pi \sigma(s, \kappa) - \int_{c(+)} \sigma(s', \kappa) \left[ \frac{\partial}{\partial N} G(s_+, s'; \kappa) \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial N} G(s_-, s'; \kappa) \right] ds' = \frac{\partial}{\partial N} \left( \frac{e^{\kappa \zeta(s)}}{\kappa} \right) \quad (\text{III-10})$$

が得られ、これを解いて  $\sigma(s, \kappa)$  を求めることができる。

(III-5) の展開式を使うか、または (III-10) を解いて (III-8) で potential を求めるかは自由であるが、形式の異なる2つの方法の間にある関係について考察を行うことは、何かの役に立つと思われる。2-D 造波の問題に関して渡辺<sup>9)</sup>(1793) は、Ursell (1949) の解法と積分方程式法の間にある関係の考察を行った。ここでも同様な考察を 2-D Helmholtz equation を基礎方程式とする potential  $\Psi$  について行う。

(III-9) の Green function を (III-8) に代入して整理すると、

$$\Psi(\kappa, y, z) = e^{\kappa z} + \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{\kappa z \cosh \mu + i\kappa y \sinh \mu} \\ \times \int_{c(+)} \kappa \sigma(s', \kappa) \text{Re} \{ e^{\kappa \rho \cosh(\mu+i\beta)} - e^{-\kappa \rho \cosh(\mu+i\beta)} \} ds' \\ + \left( \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \right) d\mu \frac{\cosh \mu}{\cosh \mu - 1} e^{\kappa z \cosh \mu + i\kappa y \sinh \mu} \\ \times \int_{c(+)} \kappa \sigma(s', \kappa) \text{Re} e^{-\kappa \rho \cosh(\mu+i\beta)} ds' \quad (\text{III-11})$$

ここで

$$K_0 \{ \kappa (y^2 + z^2)^{1/2} \} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{\kappa z \cosh \mu + i\kappa y \sinh \mu} \quad (\text{III-12})$$

の関係を使っている。また

$$\eta = \rho \sin \beta, \quad \zeta = -\rho \cos \beta \quad (\text{III-13})$$

である。(III-11) の  $\text{Re}$  は real part を取ることを意味する。次の関係

$$(370)$$

$$\text{Re} e^{-\kappa \rho \cosh(\mu+i\beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n!(2m)!} (\kappa \rho)^{n+2m} \\ \cdot \cos^n \beta \sin^{2m} \beta \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} (\cosh \mu)^{n+2m-2r} \quad (\text{III-14})$$

$$\text{Re} e^{\kappa \rho \cosh(\mu+i\beta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{n!(2m)!} (\kappa \rho)^{n+2m} \\ \cdot \cos^n \beta \sin^{2m} \beta \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} (\cosh \mu)^{n+2m-2r} \quad (\text{III-15})$$

を (III-11) に代入し、

$$\frac{\cosh^k \mu}{\cosh \mu - 1} = \frac{1}{\cosh \mu - 1} + \sum_{s=0}^{k-1} \cosh^s \mu \quad (\text{III-16})$$

を利用すると、

$$\Psi(\kappa, y, z) = e^{\kappa z} + \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{\kappa z \cosh \mu + i\kappa y \sinh \mu} \\ \times \int_{c(+)} ds' \kappa \sigma(s', \kappa) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \{1 - (-1)^n\}}{n!(2m)!} \\ \times (\kappa \rho)^{n+2m} \cos^n \beta \sin^{2m} \beta \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \\ \times (\cosh \mu)^{n+2m-2r} + \left( \int_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \right) d\mu \\ \times e^{\kappa z \cosh \mu + i\kappa y \sinh \mu} \int_{c(+)} ds' \kappa \sigma(s', \kappa) \left[ \frac{\cosh \mu}{\cosh \mu - 1} \right. \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\kappa \rho)^n \cos^n \beta + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n!(2m)!} \\ \times (\kappa \rho)^{n+2m} \cos^n \beta \sin^{2m} \beta \sum_{r=0}^m \sum_{s=1}^{(2m-2r+n)} (-1)^r \binom{m}{r} \\ \left. \times \cosh^s \mu \right] \quad (\text{III-17})$$

を得る。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (\kappa \rho)^n \cos^n \beta = e^{-\kappa \rho \cos \beta} \quad (\text{III-18})$$

であるので上式はさらに

$$\Psi(\kappa, y, z) = e^{\kappa z} + S_0(y, z) 4 \int_{c(+)} ds' \kappa \sigma(s', \kappa) e^{-\kappa \rho \cos \beta} \\ + 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{\kappa z \cosh \mu + i\kappa y \sinh \mu} \int_{c(+)} ds' \kappa \sigma(s', \kappa) \\ \times \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2n)!(2m)!} (\kappa \rho)^{2n+2m} \cos^{2n} \beta \sin^{2m} \beta \right. \\ \left. \times \left( 1 - \frac{\kappa \rho \cos \beta}{2n+1} \right) \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \sum_{s=1}^{(2n+2m-2r)} \cosh^s \mu \right\} \quad (\text{III-19})$$

が得られる。第3項が (III-7) の  $O_m(y, z)$  で表されることは次のようにしてわかる。すなわち、

$$\sum_{s=1}^{2\nu} \cosh^s \mu = (1 + \cosh \mu) \sum_{s=1}^{\nu} (\cosh \mu)^{2s-1} \quad (\text{III-20})$$

と書けるので (III-19) の第 3 項の  $\mu$  に関する積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mu e^{\kappa z \cosh \mu + i\kappa y \sinh \mu} (1 + \cosh \mu) (\cosh \mu)^{2s-1} \quad (\text{III-21})$$

となる。この式は Ursell<sup>10)</sup>(1962) の (2-41) 式を利用すると

$$\begin{aligned} (\text{III-21}) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2s-2} \sum_{k=1}^s \frac{(2s-1)!}{(s-k)!(s+k-1)!} \{K_{2k}(\kappa r) \\ &\quad \cos 2k\theta + 2K_{2k-1}(\kappa r) \cos(2k-1)\theta \\ &\quad + K_{2k-2}(\kappa r) \cos(2k-2)\theta\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2s-2} \sum_{k=1}^s \frac{(2s-1)!}{(s-k)!(s+k-1)!} O_k(y, z) \end{aligned} \quad (\text{III-22})$$

であり、よって

$$\Psi(\kappa, y, z) = e^{\kappa z} + S_0(y, z) 4 \int_{c(+)} d s' \kappa \sigma(s', \kappa) e^{-\kappa \rho \cos \beta}$$

$$\begin{aligned} &+ \int_{c(+)} d s' \kappa \sigma(s', \kappa) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2n)!(2m)!} (\kappa \rho)^{2n+2m} \\ &\cos^{2n} \beta \sin^{2m} \beta \left(1 - \frac{\kappa \rho \cos \beta}{2n+1}\right) \sum_{r=0}^m (-1)^r \binom{m}{r} \\ &\sum_{s=1}^{n+m-r} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s-1} \sum_{k=1}^s \frac{(2s-1)!}{(s-k)!(s+k-1)!} O_k(y, z) \end{aligned} \quad (\text{III-23})$$

となり、これは (III-5) と同じであることがわかる。

Wave source potential の係数の比較より

$$A_0 = 4 \int_{c(+)} d s' \kappa \sigma(s', \kappa) e^{\kappa z (s')} \quad (\text{III-24})$$

であり、これは 2-D 造波問題の Kochin function と類似の式である。また (III-22) の形で  $O_k(y, z)$  を使う代わりに、(III-21) の積分形のまま potential を表わすことも可能であり、この場合は 2-D 造波の問題では Grim<sup>11)</sup> (1960) の表示式と対応するものである。