

## 細長体理論による船体運動の解析(その1)

(細長体理論に含まれるパラメーターのオーダーの変化の影響の考察)

足達 宏之\*・大松 重雄\*\*

Analysis of Ship Motion by Slender Body Theory  
(Consideration on the influence of the change of the order of  
magnitude of parameters appeared in the slender body theory)

by

Hiroyuki ADACHI, Shigeo OHMATSU

### Abstract

The effort of analyzing the ship motion by the slender body theory began around the early sixties. Since then many theoretical attempts have been examined for their validity, and the theory has become refined. The slender body theory for the ship motion has in itself several length scales, for instance the wave length, ship dimensions and ship speed, and so forth. The assumption of the order of magnitude of these length scales governs the structure of the theory. And the theory has developed according to the effort of making the order of magnitude of the length scales changed.

It can be said that the slender body theory is a more rational theory than the strip theory for ship motion. And the strip theory can find its position in the hierarchy of the slender body theory. This situation will be made clear when investigating the slender body theory under the assumption that the wave length generated by ship motion is same order as ship beam.

In this paper, by systematic and consistent treatment, the slender body theory of many kinds of assumption of the parameters are discussed.

### 1. はし が き

Slender body theory によって船体運動を解析しようとする試みが精力的に始められたのは1960年代の始め頃からであった。丁度その頃 strip theory による船体運動の計算と実験の比較が行われており、波浪中の船体運動を解析的に解明する可能性が開かれつつあった。以来、理論的に consistent な slender body

theory による結果と strip theory との間にある関係について明らかにすべく多くの努力が払われてきたが、これは strip theory が驚く程良く実験結果を説明している理由を明らかにして置く必要が感じられていたからであろう。さらに strip theory に内在している種々の欠陥を補うものとして slender body theory に期待が持たれていたからでもあろう。しかし初期の slender body theory の結果はあまり芳ばしいものではなかった。

理論的に不完全であると考られる strip theory と

\* 推進性能部 \*\* 運動性能部  
原稿受付 昭和52年5月4日

理論的にはより完備しているが実験との間に大きな差がある slender body theory との間にある関係を廻る理論の発展の過程が、そのまま slender body theory による船体運動理論の発展と見ることができる。しかし strip theory との関係が明らかにされた後も、さらに slender body theory の発展は続いている。

Slender body theory による船体運動の解析は、船体運動に表われる幾つかの物理量を parameter として行われる。これらの parameter は主として複雑な非線型境界条件を線型化する目的のために、その order について様々な仮定がなされる。また船体については slender body assumption により船長方向の船体変化率は transverse 方向の変化率に較べ higher order であるとされる。船長  $L$  に比較し船幅  $B$  および吃水  $d$  が微小であるとし、 $B, d/L = \varepsilon$  を slenderness parameter として船体の幾何形状に関する量の変化が考えられることになる。さらに船体運動に関する物理量として、船が平均一様速度  $U$  で frequency  $\omega$  の harmonic な incident wave の中を微小調和振動しながら進んでいる場合を考えると、船体運動の中で定常前進運動によるものは  $U$  によって規定される。また、船体運動は incident wave によって励起されるとするとき、 $\omega$  は非定常運動を規定する量である。波によって励起される船体運動の振巾は、incident wave の振巾  $\delta$  に比例すると考えられるので  $\delta$  もやはり非定常運動を規定する parameter である。

Slender body theory はここに現われた物理的 parameter  $U$ ,  $\omega$  および  $\delta$  と幾何的 parameter  $\varepsilon$  との関係によって異なる様相を示す。これまでに船体運動を解析したのも、これらの4つの parameter の関係の組合せで行われたものが多い。

Slender body theory をこれらの parameter の関係について年代順に見ると大略 Table 1 のようになるであろう。

この表に含まれないものも多くあると思われるが、slender body theory による船体運動解析の発展の大略をたどることができるであろう。船体運動に含まれる parameter の order の仮定についての考察は、この表に見られる如く重要なものである。特に  $U$  および  $\omega$  と船の幾何的 parameter  $\varepsilon$  との関係は、また、 $\frac{2\pi U^2}{g}$  および  $\frac{2\pi g}{\omega^2}$  によって表わされる船体運動により生じる波長との関係でもある。波長の length scale に関する考察を行ったものには、Newman 19) (1970),

Ogilvie 20) (1974),

Ogilvie 21) (1974), Maruo 12) (1974) および Ogilvie 22) (1976) がある。

これまで主として解析されてきた例は、船体運動問題に関するものだけを考えると次の4つの case であると云える。

$$\text{case 1. } U=O(1), \quad \omega=O(1)$$

$$\text{case 2. } U=O(\varepsilon^{1/2}), \quad \omega=O(\varepsilon^{-1/2})$$

$$\text{case 3. } U=O(1), \quad \omega=O(\varepsilon^{-1/2})$$

$$\text{case 4. } U=O(\varepsilon^{1/2}), \quad \omega=O(1)$$

また以上は全て forward speed の例であるが、zero speed case は case 2, および case 4 の  $U \rightarrow 0$  の極限として考えることができる。

この論文は以上の4つの場合について、できる限り consistent な態度で matched asymptotic expansions の手法により、統一的な解析を試みたものである。この論文に含まれているものは、今までに求められていたものと同じものが多いが、新しい解釈が可能となった解がいくつか含まれている。また、この論文では potential についてのみ論じており、船体運動解析に必要な力とモーメントについては触れていない。

## 2. 問題の定式化

無限の広がりを持つ水面を、船が一様な平均速度  $U$  で船の長手方向に規則波浪の中を進行している場合を考える。波の進行方向と船の進行方向は簡単のため一致しているとする。これによる船の運動は船の平均位置周りの微小振動であるとする。

船体の周期運動は規則波浪により誘起されると考えられるので、船体運動の振動振巾および周期は規則波浪によりその大きさが定まるとされる。また波浪により励起された船体の周期運動により船体自身が流体中に造る攪乱があるが、この攪乱の性質は船体の形状および運動の振巾、周期等によって定まる。同様なことが規則波浪と船体の干渉の効果による攪乱についても言える。他に船体が一様な平均速度  $U$  で航走するための非周期的な運動による攪乱が考えられる。この攪乱は船の定常運動によるものであり、船体の形状および船速  $U$  によりその性質が定まるものとする。

ここで考えている流体は、非粘性、非圧縮性そして非回転的なものとする。また、船体の運動は longitudinal motion の中で、heaving および pitching に限るものとする。規則波浪については、その波長  $\lambda$  に

Table 1

Order of Parameters	Motion	Name
$U=0, \omega=O(1)^*, \delta=O(\varepsilon)$	zero speed, pure oscillation	Ursell 1) (1962)
$U=O(1), \omega=0, \delta=0$	steady motion	Tuck 2) (1963)
$U=0, \omega=O(1), \delta=O(\varepsilon)$	zero speed incident wave+pure oscillation	Newman 3) (1964)
$U=O(1), \omega=O(1), \delta=O(\varepsilon)$	forward speed, pure oscillation	Newman & Tuck 4) (1964) and Joosen 5) (1964)
$U=O(\varepsilon^{1/2}), \omega=O(\varepsilon^{-1/2}), \delta=o(\varepsilon)^*$	forward speed, pure oscillation	Joosen 5) (1964)
$U=O(1), \omega=O(1), \delta=O(\varepsilon)$	forward speed incident wave+pure oscillation	Maruo 6) (1967)
$U=0, \omega=O(\varepsilon^{-1/2}), \delta=o(\varepsilon)$	zero speed, pure oscillation	Ogilvie & Tuck 7) (1969)
$U=O(1), \omega=O(\varepsilon^{-1/2}), \delta=o(\varepsilon)$	forward speed, pure oscillation	Ogilvie & Tuck 7) (1969)
$U=O(1), \omega=O(\varepsilon^{-1/2}), \delta=o(\varepsilon)$	forward speed incident wave+pure oscillation**	Salvesen, Tuck & (1970) Faltinsen 8)
$U=0, \omega=O(\varepsilon^{-1/2}), \delta=o(\varepsilon)$	zero speed, pure oscillation**	Maruo 9) (1970)
$U=0, \omega=O(\varepsilon^{-1/2}), \delta=o(\varepsilon)$	zero speed, incident wave	Faltinsen 10) (1971)
$U=O(\varepsilon^{1/2-a}), \omega=O(\varepsilon^{-1/2-a}), \delta=o(\varepsilon)$	forward speed, incident wave	Faltinsen 10) (1971)
$U=0, \omega=O(\varepsilon^{-1/2}), \delta=o(\varepsilon)$	zero speed, incident wave	Maruo 11) (1974)
$U=O(\varepsilon^{1/2}), \omega=O(1), \delta=O(\varepsilon)$	forward speed, pure oscillation	Maruo 12) (1974)
$U=O(\varepsilon^{1/2}), \omega=0, \delta=0$	steady motion	Adachi 13) (1974)
$U=0, \omega=O(\varepsilon^{-1/2}), \delta=0$	zero speed, incident wave	Ursell 14) (1975)
$U=O(\varepsilon^{1/2}), \omega=0, \delta=0$	steady motion	Ursell 14) (1975)
$U=O(\varepsilon^{1/2}), \omega=0, \delta=0$	steady motion	Reed 15) (1975)
$U=O(\varepsilon^{1/2}), \omega=0, \delta=0$	steady motion	Adachi 16) (1977)
$U=0, \omega=O(\varepsilon^{-1/2}), \delta=o(\varepsilon)$	zero speed, incident wave	Adachi 17) (1977)
$U=O(\varepsilon^{1/2}), \omega=O(\varepsilon^{-1/2}), \delta=o(\varepsilon)$	forward speed, incident wave	Adachi 18) (1977)

\* "O-symbol" および "o-symbol" は位数記号である。 $f=O(x)$  は  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f}{x} < M$  ここで  $M=\text{constant}$ ,  
また  $f=o(x)$  は  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f} \rightarrow \infty$  を意味する。

\*\* Inconsistent な方法で行なわれている。多分ここに入れるのが正しいと考えられる。

対して波高振幅  $\delta$  は微小とし  $\delta=o(\lambda)$  とする。

船体については、左右対称な細長体とし、船幅  $B$  または吃水  $d$  と船長  $L$  との比  $B$  or  $d/L$  は小さいとする。船長を  $L=O(1)$  とし  $B$  or  $d$  を order  $O(\varepsilon)$  であるとする。ここで  $\varepsilon$  は船の slenderness を代表する parameter であるとする。ここに規則波浪に固有な parameter  $\delta$  と船体形状に固有な  $\varepsilon$  とは互いに無関係である。

船体が静止水面上に浮いている時、静止水面を  $(x, y)$  面とし、鉛直上方に  $z$  軸をとる。空間固定の  $(x, y, z)$  座標の原点は船の重心上の静止水面にあるとする。すなわち重心は  $(0, 0, z_0)$  にあるとする。船が  $x$  の負

の方向に一様平均速度  $U$  で進む代りに、空間に固定した座標系  $0-x, y, z$  に対して、 $x$  の正の方向に速度  $U$  で流れる一様流があるとする。規則波浪が一様流の上に重ね合わせられるとする。この規則波浪により船体は運動する。運動により船の重心が船に対して移動しないとすると、この重心は空間固定座標  $0-x, y, z$  に対して運動する。重心より  $z_0$  だけ直上の位置を原点  $0'$  として船体固定の座標系  $0'-x', y', z'$  を考える。船体が運動していないとき  $(x', y')$  面は  $(x, y)$  面に一致しているとし、原点  $0'$  の  $0-xyz$  座標系における点を  $(\zeta_1, 0, \zeta_3)$  とする。ここで  $\zeta_i (i=1, 2, \dots, 6)$  は各モードの運動とする\*。2つの座標系の間には次の関係があ

る。

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \zeta_5 + z' \sin \zeta_5 + \zeta_1 \\ y &= y' \\ z &= -x' \sin \zeta_5 + z' \cos \zeta_5 + \zeta_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ここで  $\zeta_5$  は  $x$  軸と  $x'$  軸との間の傾きであり bow up の状態で  $\zeta_5$  は正とする。また, slender body assumption により,  $\zeta_1 = o(\zeta_3)$  である。(Fig. 1)

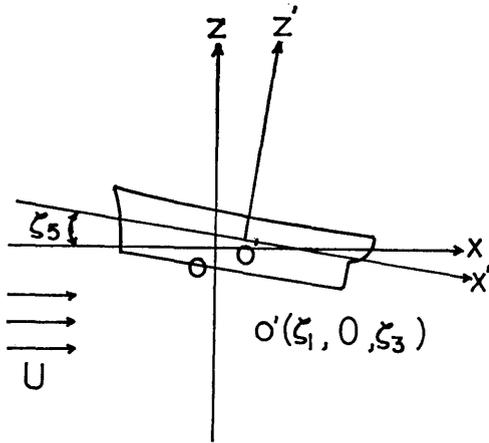


Fig.1 Coordinate System

流体は非回転的であるとしたので, 運動による攪乱は速度 potential

$$\Phi(x, y, z, t) = Ux + \phi(x, y, z, t) \quad (2.2)$$

で表わすことができる。potential  $\phi$  により速度, 圧力等の関係が記述されるので, potential  $\phi$  に関する boundary value problem を解くことにより船体運動を求めることができる。ここで potential  $\phi$  の満足しなくてはならない条件は次の通りである。

Laplace equation

$$[\text{L}] \quad \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad \text{in the fluid} \quad (2.3)$$

船体を

$$H(x, y, z, t) = z - h(x, y, t) = z' - h_o(x', y') = 0 \quad (2.4)$$

と表わすとき, 船体表面上での kinematic condition は

$$[\text{H}] \quad \frac{DH}{Dt} = -h_t - (U + \phi_x)h_x - \phi_y h_y + \phi_z = 0 \quad \text{on } z = h(x, y, t) \quad (2.5)$$

\*  $\zeta_i$  で  $i=1,2,3$  は surging, swaying, heaving を,  $i=4,5,6$  は rolling, pitching, yawing を表わす。また,  $\zeta_i$  が frequency  $\omega$  の harmonic oscillation のとき, これを  $\zeta_i e^{i\omega t}$  と記す便宜を混乱のない時に限りとることとする。

である。自由表面を表わす方程式を

$$F(x, y, z, t) = z - f(x, y, t) = 0 \quad (2.6)$$

とすると, この自由表面上での dynamic condition

$$[\text{A}] \quad g f_t + \phi_t + U \phi_x + 1/2(\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) = 0 \quad \text{on } z = f(x, y, t) \quad (2.7)$$

および kinematic condition

$$[\text{B}] \quad \frac{DF}{Dt} = -f_t - (U + \phi_x)f_x - \phi_y f_y + \phi_z = 0 \quad \text{on } z = f(x, y, t) \quad (2.8)$$

を  $\phi$  は満足しなくてはならない。

さらに船体より速く離れた点では, 船の運動による波動が見られるが, この波動は物理的に意味を持たねばならない。このための条件を radiation condition [R] と書くことにする。

これらの条件は非線型なものであり, また, 自由表面変位は a priori に知ることができない。このため問題を解くためには, 何らかの条件の下にこれらの条件を問題が解ける形にしなくてはならない。matched asymptotic expansions の手法により, この試みの幾つかについて考察を行う。

### 3. Slender body assumption による問題の線型化

船体まわりの流場の境界条件が線型化されるには, 船の前進速度および動揺による流体攪乱の振幅が微小であることが必要である。したがって船体動揺が incident wave によって励起されるとすると incident wave の振幅  $\delta$  は波長  $\lambda$  に比して小さいことが必要になる。この  $\delta$  を small parameter として流体攪乱の物理量の order の考察に使用する。船体動揺の振幅は  $\delta$  に比例するとされる。また動揺によって励起された波の振幅はその波長に比して小さいことが必要である。

さらに, 船が前進速度を持っていても流体攪乱が小さいことが保証されるには, 船体形状についてなんらかの仮定が必要となる。そのために thin ship, flat ship, slender ship, yacht type ship などが考えられたが, ここでは slender ship について取り扱う。slender ship では  $B/L$  および  $d/L$  が微小であるとする。 $L=O(1)$  と考えるとき  $B$  および  $d$  は  $O(\epsilon)$  とし, この slenderness  $\epsilon$  を small parameter として物理量の order の考察に使用する。

ここで,  $\delta$  と  $\epsilon$  は互いに無関係な parameter であり, 流場を表わす速度ポテンシャルを  $\delta$  と  $\epsilon$  について

展開して、問題の線型化をはかるわけであるが、 $\varepsilon$  についての展開については次のことが言える。すなわち、問題を線型化するために速度ポテンシャル  $\Phi = Ux + \phi$  を  $\varepsilon$  で展開して

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x, y, z; t; \varepsilon) \quad \text{ここで } \phi_{n+1} = o(\phi_n) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.1)$$

とする。(3.1) を §2. で述べた境界条件に代入し、各  $\phi_n$  について線型化をはかるわけであるが、slender body の場合  $\varepsilon \rightarrow 0$  とすることによって船体が一つの線分に縮退してしまうため、船体表面の境界条件[H]を満足させることができなくなる。すなわち、各  $\phi_n$  について一つの線分上で規定された境界条件を持つ3次元境界値問題を解くことになってしまう。この困難を回避するためにもう一つの領域、すなわち“near field”を導入する。これに対応して(3.1)を“far field”における outer expansion”とよぶ。near field では次の展開 (“inner expansion”)

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x, \frac{y}{\varepsilon}, \frac{z}{\varepsilon}, t; \varepsilon) \quad \text{ここで } \phi_{n+1} = o(\phi_n) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

を持つものとする。そして  $x, y/\varepsilon, z/\varepsilon$  は  $\varepsilon \rightarrow 0$  で有限であるとする。つまり  $y, z$  は  $O(\varepsilon)$  とする。こうすることによって、今度は  $\varepsilon \rightarrow 0$  としても船体は一つの線分に縮退することなく、[H]条件も困難なく与えることができる。しかし、 $y, z$  は  $O(\varepsilon)$  としているため、無限遠での条件[R]は適用できないことになる。

こうして両方の展開においてはそれぞれ、それ自身としては unique には解は定まらない。この nonuniqueness を取り除くために “matching” が行われる。すなわち far field solution の inner expansion と near field solution の outer expansion を一致させることによって解を確定させることができる。

船体運動による流場の性質を支配する parameter として、船の前進速度  $U$ 、船体が harmonic oscillation を行うとするときの運動周波数  $\omega$  がある。

$$\left. \begin{aligned} \nu &= g/U^2 \quad \text{wave number of steady motion} \\ \kappa &= \omega^2/g \quad \text{wave number due to oscillation} \\ \tau &= \omega U/g = (\kappa/\nu)^{1/2} \quad \text{Hanaoka's parameter} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

とすると、これらの parameter の大きさの order と船の slenderness を表わす parameter  $\varepsilon$  の order の関係によって種々の slender body theory が構成される。

ここでは parameter  $\kappa, \nu$  の組み合わせが次の4つの場合について考察する。

- case 1.  $\kappa = O(1) \quad \nu = O(1) \quad \tau = O(1)$
- case 2.  $\kappa = O(\varepsilon^{-1}) \quad \nu = O(\varepsilon^{-1}) \quad \tau = O(1)$
- case 3.  $\kappa = O(\varepsilon^{-1}) \quad \nu = O(1) \quad \tau = O(\varepsilon^{-1/2})$
- case 4.  $\kappa = O(1) \quad \nu = O(\varepsilon^{-1}) \quad \tau = O(\varepsilon^{1/2})$

far field における流場は  $\kappa, \nu$  の order によって性質が規定される。また near field では  $\kappa, \nu$  および far field solution の inner region での振舞によって性質が規定される。そこで、上の4つの case について、はじめに far field での線型化によって far field solution を求め、それぞれの case についてその inner expansion を求める。そしてその結果を使って near field での境界値問題を考えることにする。

### 3.1 Far field problem

まず incident wave がない場合を考えることにする。流場を表わす total velocity potential は uniform flow と steady motion potential と pure oscillation potential の和で表わされる。そこで

$$\Phi(x, y, z; t) = Ux + \phi_0(x, y, z) + \phi_1(x, y, z)e^{i\omega t} + \dots \quad (3.4)$$

と展開する。また自由表面変位量  $f(x, y; t)$  も同様に

$$f(x, y; t) = f_0(x, y) + f_1(x, y)e^{i\omega t} + \dots \quad (3.5)$$

とする。

ここで、これらの量の時間および空間座標についての微分による order の変化について述べる。まず時間微分については time factor を  $e^{i\omega t}$  としているので

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega \quad (3.6)$$

であり、 $\omega$  の order によって変化する。空間座標による微分については、 $\phi_0, \phi_1$  それぞれの potential の流場の性質を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial x} &= O(\nu \phi_0) & \frac{\partial \phi_0}{\partial y} &= O(\nu \phi_0) & \frac{\partial \phi_0}{\partial z} &= O(\nu \phi_0) \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &= O(\kappa \phi_1) & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} &= O(\kappa \phi_1) & \frac{\partial \phi_1}{\partial z} &= O(\kappa \phi_1) \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

$f_0, f_1$  についても同様に仮定する。

#### 3.1.1 Far field problem の線型化

Far field potential は条件[L], [A], [B], [R]を満足するものである。(3.4)を[L](2.3)に代入すると(3.7)を考慮して

$$\phi_{0xx} + \frac{\phi_{0yy}}{[\nu^2\phi_0]} + \phi_{0zz} + (\phi_{1xx} + \frac{\phi_{1yy}}{[\kappa^2\phi_1]} + \phi_{1zz})e^{i\omega t} + \dots = 0 \quad (3.8)$$

となる。ここで [ ] の中はその項の order を表わす。次に [A](2.7) に (3.4) と (3.5) を代入すると

$$\begin{aligned} & g(f_0 + f_1 e^{i\omega t} + \dots) + (i\omega\phi_1 e^{i\omega t} + \dots) \\ & + \frac{1}{2} \left\{ (U + \phi_{0x} + \phi_{1x} e^{i\omega t} + \dots)^2 + (\phi_{0y} + \phi_{1y} e^{i\omega t} + \dots)^2 \right. \\ & \left. + (\phi_{0z} + \phi_{1z} e^{i\omega t} + \dots)^2 \right\} = \frac{U^2}{2} \quad \text{on } z=f(x,y,t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

となる。これは  $z=f(x,y,t)$  において満足される条件であるが、 $f(x,y,t)$  は a priori には定まらないので  $z=0$  において成り立つ条件に直すことにする。 $f=O(\varepsilon)^*$  なので (3.9) の  $\phi_0, \phi_1$  を  $z=0$  のまわりに展開することは  $\left\{ 1 + (f_0 + f_1 e^{i\omega t}) \frac{\partial}{\partial z} + \dots \right\}$  を作用させることと同じであるので、

steady motion term は

$$\begin{aligned} & \frac{gf_0 + U\phi_{0x} + \frac{1}{2}(\phi_{0x}^2 + \phi_{0y}^2 + \phi_{0z}^2) + Uf_0\phi_{0xz}}{[f_0] [U\nu\phi_0] 2 [\nu^2\phi_0^2] [U\nu^2f_0\phi_0]} = 0, \\ & \quad \text{on } z=0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

time factor  $e^{i\omega t}$  の unsteady motion term は

$$\begin{aligned} & \frac{gf_1 + i\omega\phi_1 + U\phi_{1x} + \phi_{0x}\phi_{1x} + \phi_{0y}\phi_{1y}}{[f_1] [\omega\phi_1] [U\kappa\phi_1] [\nu\kappa\phi_0\phi_1] [\nu\kappa\phi_0\phi_1]} \\ & + \frac{\phi_{0z}\phi_{1z} + i\omega f_0\phi_{1z} + Uf_1\phi_{0xz} + Uf_0\phi_{1xz}}{[\nu\kappa\phi_0\phi_1] [\omega\kappa f_0\phi_1] [U\nu^2 f_1\phi_0] [U\kappa^2 f_0\phi_1]} = 0 \\ & \quad \text{on } z=0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる。

同様に [B](2.8) に (3.4) と (3.5) を代入すると

$$\begin{aligned} & (U + \phi_{0x} + \phi_{1x} e^{i\omega t} + \dots)(f_{0x} + f_{1x} e^{i\omega t} + \dots) \\ & + (\phi_{0y} + \phi_{1y} e^{i\omega t} + \dots)(f_{0y} + f_{1y} e^{i\omega t} + \dots) \\ & - (\phi_{0z} + \phi_{1z} e^{i\omega t} + \dots) + i\omega f_1 e^{i\omega t} + \dots = 0 \\ & \quad \text{on } z=f(x,y,t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

となる。そこで[A]の場合と同様に  $z=0$  での条件に書き直す

steady motion term は

$$\begin{aligned} & \frac{Uf_0x + f_{0x}\phi_{0x} + f_{0y}\phi_{0y} - \phi_{0z} - f_0\phi_{0zz}}{[U\nu f_0] [\nu^2 f_0\phi_0] [\nu^2 f_0\phi_0] [\nu\phi_0] [\nu^2 f_0\phi_0]} = 0, \\ & \quad \text{on } z=0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

unsteady motion term は

\*  $f$  はたかだか  $O(\delta)$  である。 $\delta$  と  $\varepsilon$  は互いに無関係な parameter であるが、物理的に  $\delta=O(\varepsilon)$  とされるので  $f=O(\varepsilon)$  となる。

$$\begin{aligned} & \frac{Uf_{1x} + f_{1x}\phi_{0x} + f_{0x}\phi_{1x} + f_{1y}\phi_{0y} + f_{0y}\phi_{1y}}{[U\kappa f_1] [\nu\kappa f_1\phi_0] [\nu\kappa f_0\phi_1] [\nu\kappa f_1\phi_0] [\nu\kappa f_0\phi_1]} \\ & - \frac{\phi_{1z} + i\omega f_1 - f_1\phi_{0zz} - f_0\phi_{1zz}}{[\kappa\phi_1] [\omega f_1] [\nu^2 f_1\phi_0] [\kappa^2 f_0\phi_1]} = 0 \\ & \quad \text{on } z=0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

となる。

Radiation condition [R] については後で述べる。以上の各式からそれぞれの case について線型化された条件式を求めることにする。

Case 1.  $\kappa=O(1), \nu=O(1), \tau=O(1)$

この case は  $\omega=O(1), U=O(1)$  すなわち moderate frequency, high Froude number であり, simple slender ship theory とよばれている。

[L] は (3.8) より

$$\left. \begin{aligned} \phi_{0xx} + \phi_{0yy} + \phi_{0zz} &= 0 \\ \phi_{1xx} + \phi_{1yy} + \phi_{1zz} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ in fluid domain} \quad (3.15)$$

[A] は (3.10) より

$$\frac{gf_0 + U\phi_{0x}}{[f_0] [\phi_0]} = 0, \quad \text{on } z=0 \quad (3.16)$$

したがって  $f_0=O(\phi_0)$  となる。ゆえに (3.11) より

$$\frac{gf_1 + i\omega\phi_1 + U\phi_{1x}}{[f_1] [\phi_1] [\phi_1]} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.17)$$

を得る。これより  $f_1=O(\phi_1)$  である。次に [B] は (3.13) (3.14) より、 $f_0=O(\phi_0), f_1=O(\phi_1)$  を考慮すると

$$Uf_{0x} - \phi_{0z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.18)$$

$$Uf_{1x} - \phi_{1z} + i\omega f_1 = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.19)$$

を得る。ここで (3.16), (3.18) より  $f_0$  を消去すると

$$[F] \frac{1}{\nu} \phi_{0xx} + \phi_{0z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.20)$$

(3.17), (3.19) より  $f_1$  を消去すると

$$[F] \left( i\kappa^{1/2} + \nu^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi_1 + \phi_{1z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.21)$$

となる。

Case 2.  $\kappa=O(\varepsilon^{-1}), \nu=O(\varepsilon^{-1}), \tau=O(1)$

この case は  $\omega=O(\varepsilon^{-1/2}), U=O(\varepsilon^{1/2})$  すなわち high frequency, low Froude number の場合であり, simple strip theory が導出される可能性がある。

[L] は (3.8) より

$$\left. \begin{aligned} \phi_{0xx} + \phi_{0yy} + \phi_{0zz} &= 0, \\ \phi_{1xx} + \phi_{1yy} + \phi_{1zz} &= 0, \end{aligned} \right\} \text{ in fluid domain} \quad (3.22)$$

自由表面条件[A],[B] は case 1. の場合と同様に steady motion term

$$\left. \begin{array}{l} gf_0 + U\phi_{0x} = 0 \\ Uf_{0x} - \phi_{0z} = 0 \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.23)$$

unsteady motion term

$$\left. \begin{array}{l} gf_1 + i\omega\phi_1 + U\phi_{1x} = 0 \\ Uf_{1x} - \phi_{1z} + i\omega f_1 = 0 \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.24)$$

が得られる。ここで  $f_0 = O(\varepsilon^{-1/2}\phi_0)$ ,  $f_1 = O(\varepsilon^{-1/2}\phi_1)$  である。(3.23), (3.24) において  $f_0, f_1$  を消去すると

$$[\text{F}] \quad \frac{1}{\nu}\phi_{0xx} + \phi_{0z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.25)$$

$$[\text{F}] \quad \left( i\kappa^{1/2} + \nu^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi_1 + \phi_{1z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.26)$$

となる。

Case 3.  $\kappa = O(\varepsilon^{-1})$ ,  $\nu = O(1)$ ,  $\tau = O(\varepsilon^{-1/2})$

この case は  $\omega = O(\varepsilon^{-1/2})$ ,  $U = O(1)$  すなわち high frequency, high Froude number の場合である。

[L] は (3.8) より

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{0xx} + \phi_{0yy} + \phi_{0zz} = 0 \\ \phi_{1xx} + \phi_{1yy} + \phi_{1zz} = 0 \end{array} \right\} \text{ in fluid domain} \quad (3.27)$$

steady motion term の自由表面条件は case 1. と同様に

$$\left. \begin{array}{l} gf_0 + U\phi_{0x} = 0 \\ Uf_{0x} - \phi_{0z} = 0 \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.28)$$

となる。ここで  $f_0 = O(\phi_0)$  である。

unsteady motion term の自由表面条件 [A] は (3.11) より

$$\left. \begin{array}{l} gf_1 + i\omega\phi_1 + U\phi_{1x} + \text{higher order term} = 0 \\ [f_1] [\varepsilon^{-1/2}\phi_1] [\varepsilon^{-1}\phi_1] \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.29)$$

[B] は (3.14) より

$$\left. \begin{array}{l} Uf_{1x} - \phi_{1z} + i\omega f_1 + \text{higher order term} = 0 \\ [\varepsilon^{-1}f_1] [\varepsilon^{-1}\phi_1] [\varepsilon^{-1/2}f_1] \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.30)$$

となる。ここで  $f_1$  の order の選び方によってちがった条件式が導びかれる。 $f_1 = O(\varepsilon^{-1}\phi_1)$  とすると (3.29) より

$$\left. \begin{array}{l} gf_1 + U\phi_{1x} = 0, \quad i\omega\phi_1 = 0 \\ [\varepsilon^{-1}\phi_1] \quad [\varepsilon^{-1/2}\phi_1] \end{array} \right\}$$

となるのでこの case は考えない。 $f_1 = O(\varepsilon^{-1/2}\phi_1)$  とすると (3.29) より

$$[\text{A}] \quad \left. \begin{array}{l} U\phi_{1x} = 0, \quad gf_1 + i\omega\phi_1 = 0 \\ [\varepsilon^{-1}\phi_1] \quad [\varepsilon^{-1/2}\phi_1] \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.31)$$

(3.30) より

$$[\text{B}] \quad \left. \begin{array}{l} Uf_{1x} = 0, \quad -\phi_{1z} + i\omega f_1 = 0 \\ [\varepsilon^{-3/2}\phi_1] \quad [\varepsilon^{-1}\phi_1] \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.32)$$

となる。そこで  $\varepsilon^{1/2}$  だけ order の高い項も含めて考えることにすると

$$\left. \begin{array}{l} U\phi_{1x} + gf_1 + i\omega\phi_1 = 0 \\ Uf_{1x} - \phi_{1z} + i\omega f_1 = 0 \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.33)$$

と書ける。(3.28), (3.33) において  $f_0, f_1$  を消去すると

$$[\text{F}] \quad \frac{1}{\nu}\phi_{0xx} + \phi_{0z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.34)$$

$$[\text{F}] \quad \left( i\kappa^{1/2} + \nu^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi_1 + \phi_{1z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.35)$$

となる。

Case 4.  $\kappa = O(1)$ ,  $\nu = O(\varepsilon^{-1})$ ,  $\tau = O(\varepsilon^{1/2})$

この case は  $\omega = O(1)$ ,  $U = O(\varepsilon^{1/2})$  すなわち moderate frequency, low Froude number の場合である。

[L] は (3.8) より

$$\left. \begin{array}{l} \phi_{0xx} + \phi_{0yy} + \phi_{0zz} = 0 \\ \phi_{1xx} + \phi_{1yy} + \phi_{1zz} = 0 \end{array} \right\} \text{ in fluid domain} \quad (3.36)$$

steady motion term の自由表面条件は case 1. と同様に

$$\left. \begin{array}{l} gf_0 + U\phi_{0x} = 0 \\ Uf_{0x} - \phi_{0z} = 0 \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.37)$$

となる。ここで  $f_0 = O(\varepsilon^{-1/2}\phi_0)$  である。

unsteady motion term の自由表面条件 [A] は (3.11) より

$$\left. \begin{array}{l} gf_1 + i\omega\phi_1 + U\phi_{1x} + \text{higher order term} = 0 \\ [f_1] \quad [\phi_1] \quad [\varepsilon^{1/2}\phi_1] \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.38)$$

[B] は (3.14) より

$$\left. \begin{array}{l} Uf_{1x} - \phi_{1z} + i\omega f_1 + \text{higher order term} = 0 \\ [\varepsilon^{1/2}f_1] \quad [\phi_1] \quad [f_1] \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.39)$$

となる。そこで  $f_1 = O(\phi_1)$  とすると

$$\left. \begin{array}{l} gf_1 + i\omega\phi_1 = 0 \\ -\phi_{1z} + i\omega f_1 = 0 \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.40)$$

となって, zero forward speed の場合の条件式になる。そこで  $\varepsilon^{1/2}$  だけ order の高い項まで含めることにすると

$$\left. \begin{array}{l} gf_1 + i\omega\phi_1 + U\phi_{1x} = 0 \\ -\phi_{1z} + i\omega f_1 + Uf_{1x} = 0 \end{array} \right\} \text{ on } z=0 \quad (3.41)$$

と書ける。(3.37) (3.41) において  $f_0, f_1$  を消去すると

$$[\text{F}] \quad \frac{1}{\nu}\phi_{0xx} + \phi_{0z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.42)$$

$$[\text{F}] \quad \left( i\kappa^{1/2} + \nu^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi_1 + \phi_{1z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.43)$$

となる。

### 3.1.2 Far field solution とその inner expansion

以上, case 1~4 いずれの場合にも far field potential  $\phi$  の境界条件は

$$\left. \begin{array}{l} \text{[L]} \quad \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \quad \text{in fluid domain} \\ \text{[F]} \quad \left( ik^{1/2} + \nu^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \phi + \phi_z = 0 \quad \text{on } z=0 \\ \text{[R]} \quad \text{radiation condition} \end{array} \right\} \quad (3.44)$$

と書けることがわかった。したがって case 3, 4 の場合には自由表面条件の導出の際に明らかなように redundancy があるわけであるが, いずれの場合にも (3.44) の条件によって far field solution を求めることができる。そうすると自由表面条件の redundancy のために far field solution も redundancy を持つが, この redundancy は far field solution の inner expansion を求める際にとり去られる。したがって inner expansion は各 case によってちがった形のものとなり, 各 case に固有な性質を表わすと考えられる。

Far field において (3.44) を満足する potential は船体中心線上に分布した line source distribution によって表わされる。また [R] 条件を満足させる方法として, Rayleigh の仮想摩擦係数 ( $\mu > 0$ ) を導用する方法を用いると

$$\left. \begin{array}{l} \text{[L]} \quad \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 4\pi\sigma(x)\delta(y)\delta(z-z_0) \\ \text{[F]} \quad \left( i\omega + U \frac{\partial}{\partial x} + \mu \right)^2 \phi + g\phi_z = 0 \quad \text{on } z=0 \end{array} \right\} \quad (3.45)$$

と書ける。ここで  $\sigma(x)$  は source 分布密度,  $\delta$  は Dirac のデルタ関数である。 $z_0 < 0$  は source 分布の水面下の位置を表わすが, 解析の便利のために導入するもので最後には  $z_0 \rightarrow 0$  とされる。

(3.45) を  $x$  と  $y$  に関して double Fourier 変換を行い, 得られた微分方程式を Laplace 変換によって解き, さらに逆 Fourier 変換を行うと

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \sigma^*(k) \times \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{e^{il(y+z\sqrt{k^2+l^2})}}{\sqrt{k^2+l^2} - \frac{1}{g}(\omega + Uk)^2} \quad (3.46)$$

を得る。ここで  $\sigma^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \sigma(x)$  である。 $l$  に関する積分路  $C$  は  $\mu \rightarrow 0$  とする時に条件 [R] を

(380)

満足するように選ばれる。 $\sigma(x)$  が slowly varying function  $\left( \frac{\partial \sigma}{\partial x} = O(\sigma) \right)$  の場合 (3.46) の  $y \rightarrow O(\varepsilon)$  における inner expansion が Appendix I に記されている。各 case における結果は次のようになる。

Case 1.  $\kappa = O(1), \nu = O(1)$

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &\sim 4\sigma(x) \ln r + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi \sigma(\xi)}{O(\ln \varepsilon)} \\ &\times \frac{d}{d\xi} [\text{sgn}(x-\xi) \ln 2|x-\xi|] + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \\ &\times \sigma(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-\xi)} \beta(k) \coth \beta(k) \quad (3.47) \\ &O(1) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \cosh \beta(k) = \frac{-(\omega + Uk - i\mu)^2}{g|k|} \quad \mu \rightarrow 0 \quad (\mu > 0)$$

(3.47) は  $\ln r$  term が dominant であり, 第 2, 3 項は  $x$  のみの関数である。

Case 2.  $\kappa = O(\varepsilon^{-1}), \nu = O(\varepsilon^{-1})$

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &\sim 4\pi i \sigma(x - 2\tau y) e^{\varepsilon z - i\kappa y} \\ &= 4\pi i e^{\varepsilon z - i\kappa y} \{ \sigma(x) - 2\tau y \sigma'(x) + O(\varepsilon^2) \} \quad (3.48) \\ &O(1) \quad O(\varepsilon) \end{aligned}$$

これは two-term inner expansion で, 前進速度の影響はカッコの中の第 2 項で  $\varepsilon$  だけ order が高くなっている。これは, 今考えている断面  $x$  に  $2\tau y$  だけ前の断面の造った波があることを示している。

Case 3.  $\kappa = O(\varepsilon^{-1}), \nu = O(1)$

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &\sim 4\pi i \sigma(x - 2\tau y) e^{\varepsilon z - i\kappa y} \\ &= 4\pi i e^{\varepsilon z - i\kappa y} \{ \sigma(x) - 2\tau y \sigma'(x) + O(\varepsilon) \} \quad (3.49) \\ &O(1) \quad O(\varepsilon^{1/2}) \end{aligned}$$

Case 2. の場合と同じであるが前進速度の影響は  $\varepsilon^{1/2}$  だけ higher order である。

Case 4.  $\kappa = O(1), \nu = O(\varepsilon^{-1})$

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &\sim 4\sigma(x) \ln r + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi \sigma(\xi)}{O(\ln \varepsilon)} \frac{d}{d\xi} \\ &O(1) \quad O(1) \\ &\times [\text{sgn}(x-\xi) \ln 2|x-\xi|] \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-\xi)} \beta(k) \coth \beta(k) \\ &O(1) \quad (3.50) \end{aligned}$$

次に steady potential は  $\omega = 0$  とすると  $\nu = O(1)$  のとき

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &\sim 4\sigma(x) \ln r + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi \sigma(\xi)}{O(\ln \varepsilon)} \frac{d}{d\xi} \\ &O(1) \quad O(1) \\ &\times [\text{sgn}(x-\xi) \ln 2|x-\xi|] - \pi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} \\ &\times [\mathbf{H}_0(\nu|x-\xi|) + (2 + \text{sgn}(x-\xi)) Y_0(\nu|x-\xi|)] \\ &O(1) \quad (3.51) \end{aligned}$$

$\nu=O(\varepsilon^{-1})$  のとき

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &\sim 4\sigma(x)\ln r + \\ &O(\ln \varepsilon) \\ 2\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} &[\operatorname{sgn}(x-\xi)\ln 2|x-\xi|] \\ + F_W(x, y, z) &O(1) \end{aligned} \quad O(\varepsilon^{1/2}) \quad (3.52)$$

である。

Zero forward speed の場合は case 2. および case 4. で  $U \rightarrow 0$  として  $\kappa=O(\varepsilon^{-1})$  のとき

$$\phi(x, y, z) \sim 4\pi i \sigma(x) e^{\kappa z - i\kappa y} \quad (3.53)$$

$\kappa=O(1)$  のとき

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &\sim 4\sigma(x)\ln r \\ &O(\ln \varepsilon) \\ + 2\int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} &[\operatorname{sgn}(x-\xi)\ln 2|x-\xi|] \\ O(1) \\ - \pi\kappa \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) &[\frac{H_0(\kappa|x-\xi|)}{O(1)} \\ + Y_0(\kappa|x-\xi|) - 2iJ_0(\kappa|x-\xi|)] \end{aligned} \quad (3.54)$$

である。

以上が各 case における inner expansion である。これらから near field における境界値問題の性質が推定できる。

Case 1. および 4 の場合は  $\ln r$  term が dominant であることより自由表面が, rigid wall condition の 2次元 Laplace 方程式が, case 2. および 3 の場合は線型化された自由表面条件を持つ 2次元 Laplace 方程式が支配方程式となることが推察される。

### 3.1.3 Incident wave がある場合

線型化された incident wave potential を  $\phi_I e^{i\omega t}$  と書き, total potential を

$$\Phi = Ux + \phi_0 + (\phi_R + \phi_D + \phi_I) e^{i\omega t} + \dots \quad (3.55)$$

と表わすことにする。 $\phi_R$  は radiation potential,  $\phi_D$  は diffraction potential である。同様に自由表面変位量を

$$f = f_0 + (f_R + f_D + f_I) e^{i\omega t} + \dots \quad (3.56)$$

と表わす。今, 簡単のため head sea の場合のみを考慮することとする

$$\left. \begin{aligned} \phi_I &= \frac{g}{\omega_0} a e^{\kappa z} e^{-i\kappa x} \\ f_I &= -ia e^{-i\kappa x} \end{aligned} \right\} \quad (3.57)$$

である。ここで  $\omega_0$  は frequency of incident wave,  $\omega (= \omega_0 + \kappa U)$  は frequency of encounter,  $\kappa = \omega_0^2/g$  である。

したがって空間座標に関する微分による order の変化は

$$\frac{\partial \phi_I}{\partial x} = O(\kappa \phi_I), \quad \frac{\partial \phi_I}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \phi_I}{\partial z} = O(\kappa \phi_I) \quad (3.58)$$

である。 $f_I$  についても同様になる。また波の振幅を  $a = O(\delta)$  とすると

$$\left. \begin{aligned} \kappa = O(1) \text{ のときは } \omega_0 &= O(1) \\ \text{したがって } \phi_I &= O(\delta), f_I = O(\delta) \\ \kappa = O(\varepsilon^{-1}) \text{ のときは } \omega_0 &= O(\varepsilon^{-1/2}) \\ \text{したがって } \phi_I &= O(\varepsilon^{1/2}\delta), f_I = O(\delta) \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

である。

さて, case 1~4 について, incident wave がある場合の  $\phi_D$  を求めるわけであるが, case 3. の場合には  $\omega = \omega_0 + \kappa U$  より  $\omega$  は  $O(\varepsilon^{-1})$  となり,  $\omega_0 = O(\varepsilon^{-1/2})$  と order が異なる。そこで case 3. で incident wave がある場合は case 2. で  $\tau > \frac{1}{4}$  の場合を考えればよいとして扱うことにする。

(3.55), (3.56) を far field の境界条件に代入すると case 1, 4 すなわち  $\omega_0 = O(1)$  の場合には  $\phi_D$  は前節の  $\phi_1$  と全く同じ条件であり, incident wave と船体との作用は  $\partial/\partial x = \kappa = O(1)$  であり slowly varying であるので inner expansion も同じものになる。case 2, すなわち  $\omega_0 = O(\varepsilon^{-1/2})$  の場合にも条件は同じ形になるが, incident wave と船体の作用を表わす line source distribution  $\sigma(x)$  は case 1, 4 のように slowly varying でなく  $\kappa = O(\varepsilon^{-1})$  と変化するので rapidly varying となる。Incident wave は  $e^{-i\kappa x}$  なる因子を持つので,

$$\sigma(x) = \gamma(x) e^{-i\kappa x} \quad (3.60)$$

の形を仮定する。ここで  $\gamma(x)$  は slowly varying であるとすると,

$$\frac{\partial \sigma(x)}{\partial x} = O(\varepsilon^{-1}\sigma) \quad \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x} = O(\gamma) \quad (3.61)$$

となる。

この場合の解とその inner expansion は Appendix II に示されている。結果は  $\tau = \frac{\omega_0 U}{g}$  とするとき,

$$\frac{\omega U}{g} > \frac{1}{4} \quad \text{すなわち } \tau > \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned} \phi_D(x, y, z) &\sim -4 \frac{\sqrt{\pi\kappa}}{\sqrt{2(1+2\tau)}} e^{-i\kappa x + \kappa z} e^{-i\pi/4} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} \\ &+ 4\pi\gamma(x) e^{-i\kappa x} \left\{ \kappa y e^{\kappa z} - \frac{(1+\tau)^2}{\tau(1+2\tau)\sqrt{2}} e^{\nu z(1+\tau)^2} \right\} \\ &- 2e^{-i\kappa x} \gamma(x) \int_0^{\infty} dv \frac{v e^{-\kappa y \sqrt{1+v^2}} \{ e^{i\kappa z v} \frac{v+i}{v+i} + \frac{e^{-i\kappa z v}}{v-i} \}}{\sqrt{1+v^2}} \end{aligned} \quad (3.62)$$

(381)

$$\begin{aligned}
\frac{\omega U}{g} < \frac{1}{4} \text{ すなわち } \tau < \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \text{ のとき} \\
\phi_D(x, y, z) \sim & -4 \frac{\sqrt{\pi\kappa}}{\sqrt{2(1+2\tau)}} e^{-i\kappa x + \kappa z} e^{-i\kappa/4} \\
& \times \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} - 4\pi \frac{(1+\tau)}{(1+2\tau)\sqrt{2}} e^{-i\kappa x + \nu(1+\tau)z} \gamma(x) \\
& + i\pi \frac{\sqrt{2(1-A)^2}}{\sqrt{A(1-2\tau-A)(1-2\tau-2\tau^2-A)}} \\
& \quad \times e^{-i\kappa x + \nu(1-A)z/4} \gamma(x) \\
& + \pi \frac{\sqrt{2(1+A)^2}}{\sqrt{A(1-2\tau+A)(1-2\tau-2\tau^2+A)}} \\
& \quad \times e^{-i\kappa x + \nu(1+A)z/4} \gamma(x) \\
& + 4\pi\kappa y e^{-i\kappa x + \kappa z} \gamma(x) - 2e^{-i\kappa x} \gamma(x) \\
& \times \int_0^\infty dv \frac{v e^{-\kappa y \sqrt{1+v^2}}}{\sqrt{1+v^2}} \left\{ \frac{e^{i\kappa z v}}{v+i} + \frac{e^{-i\kappa z v}}{v-i} \right\} \\
\text{ここで } A = & \sqrt{|4\tau^2 + 4\tau - 1|} \quad (3.63)
\end{aligned}$$

である。

(3.63) で  $\tau \rightarrow 0$ ,  $\nu \rightarrow \infty$  とすると zero forward speed の場合の表示式が得られる。

$$\begin{aligned}
\phi_D(x, y, z) \sim & -2\sqrt{2\pi\kappa} e^{\kappa z - i\kappa x} e^{-i\kappa/4} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} \\
& + 4\pi\gamma(x) e^{\kappa z - i\kappa x} \left( \kappa y - \frac{e^{-i\kappa/2}}{2} \right) \\
& - 2e^{-i\kappa x} \gamma(x) \int_0^\infty dv \frac{v e^{-\kappa y \sqrt{1+v^2}}}{\sqrt{1+v^2}} \left\{ \frac{e^{i\kappa z v}}{v+i} + \frac{e^{-i\kappa z v}}{v-i} \right\} \\
& (3.64)
\end{aligned}$$

(3.62), (3.63) および (3.64) から near field では  $\phi_D$  は  $x$  に関する微分で order が  $O(\kappa)$  だけ変化するので, 3次元 Laplace 方程式は 2次元 Helmholtz 方程式になること, および線型化された自由表面条件を持つことが推察される。

### 3.2 Near field problem の線型化

まず incident wave がない場合を考えることにし, far field の場合と同様に near field potential を

$$\Phi = Ux + \Phi_0 + \Phi_1 e^{i\omega t} + \dots \quad (3.67)$$

と展開する。

空間座標に関する微分による order の変化は次のようになる。Near field での流場は船体形状と密接に関係する。Slender body の仮定により, 船体運動による流体攪乱の transverse 方向の微係数は longitudinal 方向のそれより  $\varepsilon^{-1}$  の order だけ大きいと仮定される。

(382)

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} = O(\Phi_0), \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} = O(\varepsilon^{-1}\Phi_0), \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = O(\varepsilon^{-1}\Phi_0) \\
\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = O(\Phi_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} = O(\varepsilon^{-1}\Phi_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = O(\varepsilon^{-1}\Phi_1)
\end{aligned} \right\} \quad (3.68)$$

したがって船体横断面での法線微分も

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = O(\varepsilon^{-1}\Phi_0), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = O(\varepsilon^{-1}\Phi_1) \quad (3.69)$$

となる。ただし  $x$  に関する微分においても, § 3.1.3 で述べたように短波長の incident wave がある場合, あるいは steady potential の second order term を考える場合には order が変る場合がある。order が変る場合にはその都度述べることにする。以上のことは自由表面変位量  $f_0, f_1$  についても同じである。

Near field potential は条件 [L], [A], [B], [H] を満足するものである。

(3.67) を [L] (2.3) に代入すると

$$\begin{aligned}
\Phi_{0,xx} + \Phi_{0,yy} + \Phi_{0,zz} + (\Phi_{1,xx} + \Phi_{1,yy} + \Phi_{1,zz}) e^{i\omega t} + \dots = 0 \\
[\Phi_0] \quad [\varepsilon^{-2}\Phi_0] \quad [\varepsilon^{-2}\Phi_0] \quad [\Phi_1] \quad [\varepsilon^{-2}\Phi_1] \quad [\varepsilon^{-2}\Phi_1]
\end{aligned} \quad (3.70)$$

となる。次に船体表面での境界条件[H]について述べる。今, heaving と pitching のみを考えているので hull equation  $z=h(x, y, t)$  は heaving displacement および pitching angle が  $o(\varepsilon)$  の微量\*として次のように書ける。

$$z = h(x, y, t) = h_0(x, y) + (\zeta_3 - x\zeta'_3) e^{i\omega t} \quad (3.71)$$

(3.67) と (3.71) を [H] (2.5) に代入すると

$$\begin{aligned}
(U + \Phi_{0,x} + \Phi_{1,x} e^{i\omega t} + \dots)(h_{0,x} - \zeta'_3 e^{i\omega t}) \\
+ (\Phi_{0,y} + \Phi_{1,y} e^{i\omega t} + \dots) h_{0,y} - (\Phi_{0,z} + \Phi_{1,z} e^{i\omega t} + \dots) \\
+ i\omega(\zeta_3 - x\zeta'_3) e^{i\omega t} = 0 \quad \text{on } z=h(x, y, t) \quad (3.72)
\end{aligned}$$

となる。この条件は動揺する船体表面上で満足さるべき条件であり, 取り扱いがむづかしいので, これらを  $z=h_0(x, y)$  のまわりに Taylor 展開して, そこで満足させる条件にする。 $\zeta_3, \zeta'_3$  は  $o(\varepsilon)$  であるので (3.72)

の potential  $\Phi_0, \Phi_1$  に  $\left\{ 1 + (\zeta_3 - x\zeta'_3) e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial z} + \dots \right\}$  を作用させると

steady motion term は

$$\begin{aligned}
U h_{0,x} + \Phi_{0,x} h_{0,x} + \Phi_{0,y} h_{0,y} - \Phi_{0,z} = 0 \\
[U\varepsilon] \quad [\varepsilon\Phi_0] \quad [\varepsilon^{-1}\Phi_0] \quad [\varepsilon^{-1}\Phi_0] \\
\text{on } z=h_0(x, y) \quad (3.73)
\end{aligned}$$

unsteady motion term は

\*  $\zeta_i$  はただか  $O(\delta)$  であり,  $\delta = o(\varepsilon)$  とされるので  $\zeta_i = o(\varepsilon)$  である。

$$\begin{aligned}
& \phi_{1x}h_{0x} - U\zeta_5 - \phi_{0x}\zeta_5 + \phi_{1y}h_{0y} - \phi_{1z} + i\omega(\zeta_3 - x\zeta_5) \\
& [\varepsilon\phi_1] [U\zeta] [\zeta\phi_0] [\varepsilon^{-1}\phi_1] [\varepsilon^{-1}\phi_1] [\omega\zeta] \\
& + (\zeta_3 - x\zeta_5)\phi_{0xz}h_{0xz} + (\zeta_3 - x\zeta_5)\phi_{0yz}h_{0yz} \\
& [\zeta\phi_0] [\zeta\varepsilon^{-2}\phi_0] \\
& - (\zeta_3 - x\zeta_5)\phi_{0zz} = 0 \quad \text{on } z=h_0(x,y) \quad (3.74) \\
& [\zeta\varepsilon^{-2}\phi_0]
\end{aligned}$$

となる。次に自由表面条件[A], [B]は(3.67)と(3.5)を代入し, far field の場合と同様の操作を行うと  
[A] steady motion term

$$\begin{aligned}
& gf_0 + U\phi_{0xx} + \frac{1}{2}(\phi_{0x}^2 + \phi_{0y}^2 + \phi_{0z}^2) + Uf_0\phi_{0xz} = 0 \\
& [f_0] [U\phi_0] [\phi_0^2] [\varepsilon^{-2}\phi_0^2] [\varepsilon^{-2}\phi_0^2] [Uf_0\varepsilon^{-1}\phi_0] \\
& \text{on } z=0 \quad (3.75)
\end{aligned}$$

unsteady motion term

$$\begin{aligned}
& gf_1 + i\omega\phi_1 + U\phi_{1xx} + \phi_{0x}\phi_{1xz} + \phi_{0y}\phi_{1yz} + \phi_{0z}\phi_{1xz} \\
& [f_1] [\omega\phi_1] [U\phi_1] [\phi_0\phi_1] [\varepsilon^{-2}\phi_0\phi_1] [\varepsilon^{-2}\phi_0\phi_1] \\
& + i\omega f_0\phi_{1z} + Uf_1\phi_{0xz} + Uf_0\phi_{1xz} = 0 \\
& [\omega f_0\varepsilon^{-1}\phi_1] [Uf_1\varepsilon^{-1}\phi_0] [Uf_0\varepsilon^{-1}\phi_1] \\
& \text{on } z=0 \quad (3.76)
\end{aligned}$$

および

[B] steady motion term

$$\begin{aligned}
& Uf_{0x} + \phi_{0x}f_{0x} + \phi_{0y}f_{0y} - \phi_{0z} - f_0\phi_{0zz} = 0 \\
& [Uf_0] [f_0\phi_0] [\varepsilon^{-2}f_0\phi_0] [\varepsilon^{-1}\phi_0] [\varepsilon^{-2}f_0\phi_0] \\
& \text{on } z=0 \quad (3.77)
\end{aligned}$$

unsteady motion term

$$\begin{aligned}
& Uf_{1x} + \phi_{0x}f_{1x} + \phi_{1x}f_{0x} + \phi_{0y}f_{1y} + \phi_{1y}f_{0y} - \phi_{1z} \\
& [Uf_1] [f_1\phi_0] [f_0\phi_1] [\varepsilon^{-2}f_1\phi_0] [\varepsilon^{-2}f_0\phi_1] [\varepsilon^{-1}\phi_1] \\
& + i\omega f_1 - f_1\phi_{0zz} - f_0\phi_{1zz} = 0 \\
& [\omega f_1] [\varepsilon^{-2}f_1\phi_0] [\varepsilon^{-2}f_0\phi_1] \\
& \text{on } z=0 \quad (3.78)
\end{aligned}$$

が得られる。以上の各式から線型化された条件式を求めることにする。

Case 1.  $\kappa = O(1)$   $\nu = O(1)$

[L] は (3.70) より

$$\left. \begin{aligned} \phi_{0yy} + \phi_{0zz} &= 0 \\ \phi_{1yy} + \phi_{1zz} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{in fluid domain} \quad (3.79)$$

[H] の steady motion term は (3.73) より

$$\begin{aligned}
& Uh_{0x} + \phi_{0y}h_{0y} - \phi_{0z} = 0 \\
& [\varepsilon] [\varepsilon^{-1}\phi_0] [\varepsilon^{-1}\phi_0] \\
& \text{on } z=h_0(x,y) \quad (3.80)
\end{aligned}$$

となる。船体横断面の contour に立てた法線方向の微分は

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\hat{n}}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} \cdot h_{0y} \frac{\partial}{\partial y}$$

となるので (3.80) は

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial\phi_0}{\partial n} = \frac{Uh_{0x}}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} \quad \text{on } z=h_0(x,y) \quad (3.81) \\
& [\varepsilon^{-1}\phi_0] [\varepsilon]
\end{aligned}$$

と書ける。  $\phi_0 = O(\varepsilon^2)$  であることがわかる。次に unsteady motion term を考える。Incident wave によって励起される船体運動の振幅は incident wave の波長が長い場合には incident wave の振幅と同じ order  $O(\delta)$  であると仮定する。そうすると(3.74)より

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial\phi_1}{\partial n} = \frac{i\omega(\zeta_3 - x\zeta_5) + (\zeta_3 - x\zeta_5)(h_{0y}\phi_{0yz} - \phi_{0zz}) - U\zeta_5}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} \\
& [\varepsilon^{-1}\phi_1] [\delta] \\
& \text{on } z=h_0(x,y) \quad (3.82)
\end{aligned}$$

を得る。ゆえに  $\phi_1 = O(\varepsilon\delta)$  であることがわかる。

次に自由表面条件[A] は (3.75) の各項の order に  $\phi_0 = O(\varepsilon^2)$  を代入すると

$$\begin{aligned}
& gf_0 + U\phi_{0xx} + \frac{1}{2}\phi_{0y}^2 + \frac{1}{2}\phi_{0z}^2 = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.83) \\
& [f_0] [\varepsilon^2] [\varepsilon^2] [\varepsilon^2]
\end{aligned}$$

を得る。したがって  $f_0 = O(\varepsilon^2)$  であることがわかる。(3.76) の各項の order に  $f_0 = O(\varepsilon^2)$ ,  $\phi_0 = O(\varepsilon^2)$ ,  $\phi_1 = (\varepsilon\delta)$  を代入すると

$$\begin{aligned}
& gf_1 + i\omega\phi_1 + U\phi_{1xx} + \phi_{0y}\phi_{1yz} + \phi_{0z}\phi_{1xz} = 0 \\
& [f_1] [\varepsilon\delta] [\varepsilon\delta] [\varepsilon\delta] [\varepsilon\delta] \\
& \text{on } z=0 \quad (3.84)
\end{aligned}$$

を得る。したがって  $f_1 = O(\varepsilon\delta)$  であることがわかる。

[B] は (3.77) において  $\phi_0, f_0$  の order を考慮すると

$$\begin{aligned}
& \phi_{0z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.85) \\
& [\varepsilon]
\end{aligned}$$

(3.78) において  $\phi_0, f_0, \phi_1, f_1$  の order を考慮すると

$$\begin{aligned}
& \phi_{1z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (3.86) \\
& [\delta]
\end{aligned}$$

を得る。

以上をまとめると次のようになる。

steady motion term は  $\phi_0 = O(\varepsilon^2)$ ,  $f_0 = O(\varepsilon^2)$  であり

$$\left. \begin{aligned} \text{[L]} \quad \phi_{0yy} + \phi_{0zz} &= 0 \quad \text{in fluid domain} \\ \text{[H]} \quad \frac{\partial\phi_0}{\partial n} &= \frac{Uh_{0x}}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} \quad \text{on } z=h_0(x,y) \\ \text{[F]} \quad \phi_{0z} &= 0 \quad \text{on } z=0 \end{aligned} \right\} (3.87)$$

unsteady motion term は  $\phi_1 = O(\varepsilon\delta)$ ,  $f_1 = O(\varepsilon\delta)$  となり

$$\left. \begin{aligned} \text{[L]} \quad \phi_{1yy} + \phi_{1zz} &= 0 \quad \text{in fluid domain} \\ \text{[H]} \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial n} &= \frac{i\omega(\zeta_3 - x\zeta_5) + (\zeta_3 - x\zeta_5)(h_{0y}\phi_{0yz} - \phi_{0zz}) - U\zeta_5}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} \\ & [\varepsilon^{-1}\phi_1] [\delta] \quad \text{on } z=h_0(x,y) \\ \text{[F]} \quad \phi_{1z} &= 0 \quad \text{on } z=0 \\ & [\delta] \end{aligned} \right\} (3.88)$$

Frequency of encounter  $\omega$  が  $O(\varepsilon^{-1/2})$  のときは incident wave によって励起される船体動揺の振幅は  $\omega=O(1)$  の場合と異なり、船体の dimension  $\varepsilon$  に影響されることが考えられる。したがってその最低次の影響として  $\varepsilon$  に比例するとすると、 $\zeta$  の order は  $O(\varepsilon\delta)$  となる。このことは  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  のどちらかの場合、船体の運動は漸近的に 0 となるので合理的な仮定であろう。このことを仮定して case 2, 3 において case 1. と同様の操作を行うと以下の結果が得られる。

Case 2.  $\kappa=O(\varepsilon^{-1})$ ,  $\nu=O(\varepsilon^{-1})$

steady motion term は  $\Phi_0=O(\varepsilon^{5/2})$ ,  $f_0=O(\varepsilon^3)$  であり

$$\left. \begin{aligned} [\text{L}] \quad & \Phi_{0yy} + \Phi_{0zz} = 0 && \text{in fluid domain} \\ [\text{H}] \quad & \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = \frac{U h_{0x}}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} && \text{on } z=h_0(x,y) \\ [\text{F}] \quad & \Phi_{0z} = 0 && \text{on } z=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.89)$$

unsteady motion term は  $\Phi_1=O(\varepsilon^{3/2}\delta)+O(\varepsilon^{5/2}\delta)$ ,  $f_1=O(\varepsilon\delta)+O(\varepsilon^2\delta)$  となり

$$\left. \begin{aligned} [\text{L}] \quad & \Phi_{1yy} + \Phi_{1zz} = 0 && \text{in fluid domain} \\ [\text{H}] \quad & \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{i\omega(\zeta_3 - x\zeta_5)}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} && \text{on } z=h_0(x,y) \\ & + \frac{(\zeta_3 - x\zeta_5)(h_{0y}\Phi_{0yz} - \Phi_{0zz}) - U\zeta_5}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} && \text{on } z=h_0(x,y) \\ [\text{F}] \quad & g\Phi_{1z} - \omega^2\Phi_1 = && \\ & -2i\omega U\Phi_{1x} - 2i\omega\Phi_{0y}\Phi_{1y} + i\omega\Phi_{0zz}\Phi_1 && \text{on } z=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.90)$$

[H], [F] において前進速度の影響を表わす項は  $\varepsilon$  だけ order が高くなっている。この項を省略すると simple strip theory になる。

Case 3.  $\kappa=O(\varepsilon^{-1})$ ,  $\nu=O(1)$

steady motion term は  $\Phi_0=O(\varepsilon^2)$ ,  $f_0=O(\varepsilon^2)$  であり

$$\left. \begin{aligned} [\text{L}] \quad & \Phi_{0yy} + \Phi_{0zz} = 0 && \text{in fluid domain} \\ [\text{H}] \quad & \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = \frac{U h_{0x}}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} && \text{on } z=h_0(x,y) \\ [\text{F}] \quad & \Phi_{0z} = 0 && \text{on } z=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.91)$$

unsteady motion term は  $\Phi_1=O(\varepsilon^{3/2}\delta)+O(\varepsilon^2\delta)$ ,  $f_1=O(\varepsilon\delta)+O(\varepsilon^{3/2}\delta)$  となり

(384)

$$\left. \begin{aligned} [\text{L}] \quad & \Phi_{0yy} + \Phi_{0zz} = 0 && \text{in fluid domain} \\ [\text{H}] \quad & \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{i\omega(\zeta_3 - x\zeta_5)}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} && \text{on } z=h_0(x,y) \\ & + \frac{(\zeta_3 - x\zeta_5)(h_{0y}\Phi_{0yz} - \Phi_{0zz}) - U\zeta_5}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} && \\ [\text{F}] \quad & g\Phi_{1z} - \omega^2\Phi_1 = && \\ & -2i\omega U\Phi_{1x} - 2i\omega\Phi_{0y}\Phi_{1y} + i\omega\Phi_{0zz}\Phi_1 && \text{on } z=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.92)$$

[H], [F] において前進速度の影響を表わす項は  $\varepsilon^{1/2}$  だけ order が高くなっている。

case 4. では case 1. と同様に  $\zeta=O(\delta)$  とされる。同様の操作により次のようになる。

Case 4.  $\kappa=O(1)$ ,  $\nu=O(\varepsilon^{-1})$

steady motion term は  $\Phi_0=O(\varepsilon^{5/2})$ ,  $f_0=O(\varepsilon^3)$  となり

$$\left. \begin{aligned} [\text{L}] \quad & \phi_{0yy} + \phi_{0zz} = 0 && \text{in fluid domain} \\ [\text{H}] \quad & \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = \frac{U h_{0x}}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} && \text{on } z=h_0(x,y) \\ [\text{F}] \quad & \Phi_{0z} = 0 && \text{on } z=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.93)$$

unsteady motion term は  $\Phi_1=O(\varepsilon\delta)+O(\varepsilon^{3/2}\delta)$ ,  $f_1=O(\varepsilon\delta)+O(\varepsilon^{3/2}\delta)$  となり

$$\left. \begin{aligned} [\text{L}] \quad & \phi_{1yy} + \phi_{1zz} = 0 && \text{in fluid domain} \\ [\text{H}] \quad & \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{i\omega(\zeta_3 - x\zeta_5)}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} && \text{on } z=h_0(x,y) \\ & + \frac{(\zeta_3 - x\zeta_5)(h_{0y}\Phi_{0yz} - \Phi_{0zz}) - U\zeta_5}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} && \\ [\text{F}] \quad & \Phi_{1z} = 0 && \text{on } z=0 \end{aligned} \right\} \quad (3.94)$$

### 3.2.1 Incident wave がある場合

Incident wave がある場合、near field potential は

$$\Phi = Ux + \Phi_0 + (\Phi_R + \Phi_D + \phi_I)e^{i\omega t} + \dots \quad (3.95)$$

と展開される。 $\phi_I$  は (3.57) で表わされる incident wave potential である。自由表面変位量  $f$  も同様に展開される。これらの物理量の空間座標に関する微分による order の変化は次のようになる。

Near field においては  $\phi_0, \phi_1(-\phi_R)$  は船体形状の幾何学的仮定により(3.68)のように変化することを述べた。このことは  $\phi_D$  についても同様である。さらに incident wave がある場合には, far field solution の inner expansion (3.62), (3.63) からわかるように,  $x$  に関する微分においても物理的に order が変化する。したがって

$$\frac{\partial \phi_D}{\partial x} = O(\kappa \phi_D), \quad \frac{\partial \phi_D}{\partial y} = O(\varepsilon^{-1} \phi_D), \quad \frac{\partial \phi_D}{\partial z} = O(\varepsilon^{-1} \phi_D) \quad (3.96)$$

となる。 $\phi_I$  については near field においても幾何学的仮定による order の変化はない。far field の場合と同様, 物理的考察から(3.58)のようになる。以上のことは  $f_0, f_R, f_D, f_I$  についても同じである。

これらの order の変化を考慮して, incident wave がない場合と同様の操作を行って  $\Phi_D$  の境界条件を求めると以下のような結果が得られる。 $\Phi_R$  の条件には § 3.2 での pure oscillation の場合のほかに  $\Phi_D, \phi_I$  の効果が入るが, この論文ではこの効果については扱わない。

Case 1.  $\kappa = O(1), \nu = O(1)$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{[L]} & \Phi_{Dyy} + \Phi_{Dzz} = 0 \quad \text{in fluid domain} \\ \text{[H]} & \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I}{\partial n} \quad \text{on } z = h_0(x, y) \\ & [\varepsilon^{-1} \Phi_D] \quad [\delta] \\ \text{[F]} & \Phi_{Dz} = -\Phi_{0zz} f_I \quad \text{on } z = 0 \\ & [\delta] \quad [\delta] \end{array} \right\} \quad (3.97)$$

$\Phi_D = O(\varepsilon \delta), f_D = O(\varepsilon \delta)$  となり,  $\Phi_R, f_R$  と同じ order であることがわかる。

Case 2.  $\kappa = O(\varepsilon^{-1}), \nu = O(\varepsilon^{-1})$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{[L]} & \Phi_{Dyy} + \Phi_{Dzz} - \kappa^2 \Phi_D = 0 \quad \text{in fluid domain} \\ \text{[H]} & \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I}{\partial n} \quad \text{on } z = h_0(x, y) \\ & [\varepsilon^{-1} \Phi_D] \quad [\varepsilon^{-1/2} \delta] \\ \text{[F]} & \left( i\omega + U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \Phi_D + g \Phi_{Dz} = 0 \quad \text{on } z = 0 \\ & [\varepsilon^{-1/2} \delta] \end{array} \right\} \quad (3.98)$$

この場合は far field solution の inner expansion から [L] は 2次元 Helmholtz の方程式になる。 $\Phi_D = O(\varepsilon^{1/2} \delta), f_D = O(\delta)$  となり,  $\Phi_R, f_R$  より  $O(\varepsilon)$  だけ lower order であることがわかる。

Case 4.  $\kappa = O(1), \nu = O(\varepsilon^{-1})$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{[L]} & \Phi_{Dyy} + \Phi_{Dzz} = 0 \quad \text{in fluid domain} \\ \text{[H]} & \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I}{\partial n} \quad \text{on } z = h_0(x, y) \\ & [\varepsilon^{-1} \Phi_D] \quad [\delta] \\ \text{[F]} & \Phi_{Dz} = 0 \quad \text{on } z = 0 \\ & [\delta] \end{array} \right\} \quad (3.99)$$

$\Phi_D = O(\varepsilon \delta), f_D = O(\varepsilon \delta)$  である。

以上, far field solution の inner expansion および near field problem の境界条件をまとめて Table 2, Table 3 に示す。pure oscillation の場合の  $\Phi_1$  はここでは  $\Phi_R$  と記してある。

#### 4. Inner problem の解

Steady motion term  $\Phi_0$  については,  $\nu = O(1)$  および  $\nu = O(\varepsilon^{-1})$  の2つの場合について全く同じ形の near field problem になる。 $\nu = O(1)$  の場合は格別問題がないが,  $\nu = O(\varepsilon^{-1})$  の時は far field solution の inner expansion (3.52) より推察されるように波動項  $F_w$  は leading order term より  $\varepsilon^{1/2}$  だけ高次であった。このことは near field で  $x$  に関する2階微分は波動項については  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} F_w = O(\varepsilon^{-3/2})$  であり,

また,  $y, z$  に関する leading order term  $\log r$  については2階微分は  $O(\varepsilon^{-2})$  であるので  $\log r$  の leading order term は境界条件の中で dominant term として扱うことができる。すなわち考えている問題の中には steady term の波動項は表われない。

Steady motion term  $\Phi_0$  については

$$\text{[L]} \quad \Phi_{0yy} + \Phi_{0zz} = 0 \quad \text{in fluid domain} \quad (4.1)$$

$$\text{[H]} \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = -\frac{U h_{0,x}}{\sqrt{1+h_{0,y}^2}} \quad \text{on } z = h_0(x, y) \quad (4.2)$$

$$\text{[F]} \quad \Phi_{0z} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (4.3)$$

$$\text{[R]} \quad \Phi_0 \sim 4\sigma(x) \ln r \quad \text{as } r \rightarrow O(1) \quad (4.4)$$

の2次元 Laplace 方程式を解けば良い。この問題は任意の断面について数値的に解が得られる。 $\sigma(x)$  は conservation of mass の関係により [H] 条件より求めることができる。

##### 4.1. Incident wave のない場合

次に unsteady motion term について考える。Incident wave のない pure oscillation の場合については, 4つの case について [H] 条件は異なる order の項を含むことを許すと同じ形になる。今各モ

\* 船体振動は  $\zeta_i e^{i\omega t}$  で表わされているとする。

一ドの振動振幅\*  $\zeta_3$  および  $\zeta_5$  に比例する potential を  $\Phi_1^3, \Phi_1^5$  と書くことにすると [H] 条件は

$$[\text{H}] \quad \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial n} = \frac{i\omega + (h_{0y}\Phi_{0yz} - \Phi_{0zz})}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} \quad (4.5)$$

$$[\text{H}] \quad \frac{\partial \Phi_1^5}{\partial n} = \frac{-i\omega - x(h_{0y}\Phi_{0yz} - \Phi_{0zz}) - U}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} \quad (4.6)$$

となる。ここで扱うすべての case について

$$[\text{H}] \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial n} \zeta_3 + \frac{\partial \Phi_1^5}{\partial n} \zeta_5 \quad (4.7)$$

と書ける。

さらにここで generalized vectors  $n_i, m_i, (i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$  を導入する。

$n_i$  は

$$n_1 i + n_2 j + n_3 k = n \quad (4.8)$$

$$n_4 i + n_5 j + n_6 k = r \times n, \quad \text{ここで } r = xi + yj + zk \quad (4.9)$$

$m_i$  は

$$m_1 i + m_2 j + m_3 k = -(n \cdot v)v = m \quad (4.10)$$

$$m_4 i + m_5 j + m_6 k = -(n \cdot v)(r \times v) = r \times m + v \times n \quad (4.11)$$

で定義される。ここで  $n$  は船体に立てた外向き normal vector であり、

$$v = v(Ux + \Phi_0) \quad (4.12)$$

である。以上より

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{-h_{0x}}{\sqrt{1+h_{0x}^2+h_{0y}^2}} \\ n_2 &= \frac{-h_{0y}}{\sqrt{1+h_{0x}^2+h_{0y}^2}} \\ n_3 &= \frac{1}{\sqrt{1+h_{0x}^2+h_{0y}^2}} \end{aligned} \right\} (4.13)$$

$$\left. \begin{aligned} n_4 &= ym_3 - zn_2 \\ n_5 &= zn_1 - xn_3 \\ n_6 &= xn_2 - yn_1 \end{aligned} \right\} (4.14)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= -\Phi_{0xx}n_1 - \Phi_{0xy}n_2 - \Phi_{0xz}n_3 \\ m_2 &= -\Phi_{0yx}n_1 - \Phi_{0yy}n_2 - \Phi_{0yz}n_3 \\ m_3 &= -\Phi_{0zx}n_1 - \Phi_{0zy}n_2 - \Phi_{0zz}n_3 \end{aligned} \right\} (4.15)$$

$$\left. \begin{aligned} m_4 &= \Phi_{0y}n_3 - \Phi_{0z}n_2 + ym_3 - zm_2 \\ m_5 &= \Phi_{0z}n_1 - Un_3 + zm_1 - xm_3 \\ m_6 &= Un_2 - \Phi_{0y}n_1 + xm_2 - ym_1 \end{aligned} \right\} (4.16)$$

である。さらに slender body assumption および steady term  $\Phi_0$  に関する性質により、今問題にしている量については、

$$n_2 = \frac{-h_{0y}}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} = O(1) \quad (4.17)$$

$$n_3 = \frac{1}{\sqrt{1+h_{0y}^2}} [1+O(\varepsilon^2)] = O(1) \quad (4.18)$$

$$n_5 = -xn_3 [1+O(\varepsilon^2)] = O(1) \quad (4.19)$$

$$m_3 = -(\Phi_{0zy}n_2 + \Phi_{0zz}n_3) [1+O(\varepsilon^2)] \quad (4.20)$$

$$m_5 = -(Un_3 + xm_3) [1+O(\varepsilon^2)] \quad (4.21)$$

の関係が成立する。 $m_3, m_5$  の order は  $\Phi_0$  の order によって変わる。以上の関係を使うと (4.5), (4.6) はさらに

$$[\text{H}] \quad \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial n} = i\omega n_3 + m_3 \quad (4.22)$$

$$[\text{H}] \quad \frac{\partial \Phi_1^5}{\partial n} = i\omega n_5 + m_5 \quad (4.23)$$

となる。

Case 1.  $\kappa = O(1), \nu = O(1)$

(3.88) において

$$\Phi_1 = \zeta_3 \Phi_1^3 + \zeta_5 \Phi_1^5$$

とすると、 $\Phi_1^i (i=3, 5)$  は

$$\left. \begin{aligned} [\text{L}] \quad &\Phi_1^i{}_{yy} + \Phi_1^i{}_{zz} = 0 \\ [\text{H}] \quad &\frac{\partial \Phi_1^i}{\partial n} = i\omega n_i + m_i = O(1) \\ [\text{F}] \quad &\Phi_1^i{}_z = 0 \end{aligned} \right\} (4.24)$$

となる。これは本質的に  $\Phi_0$  と同じ near field problem であり  $\Phi_0$  と同じように解くことができる。Radiation condition は、source density  $\sigma(x)$  を  $\zeta_i$  に比例する部分にわけられるとし、

$$\sigma(x) = \zeta_3 \sigma_3(x) + \zeta_5 \sigma_5(x) \quad (4.25)$$

とするとき、

$$[\text{R}] \quad \Phi_1^i \sim \sigma_i(x) \ln r \quad \text{as } r \rightarrow O(1) \quad (4.26)$$

となる。 $\sigma_i(x)$  は conservation of mass の関係により [H] 条件より定められる。

Case 2.  $\kappa = O(\varepsilon^{-1}), \nu = O(\varepsilon^{-1})$

このとき  $\Phi_0 = O(\varepsilon^{5/2})$  であり、 $n_3, n_5 = O(1), m_3, m_5 = O(\varepsilon^{1/2})$  となるので [H] 条件は  $O(\varepsilon)$  だけ異なる項を含むことになる。 $\Phi_1^i$  を異なる order の potential の和に分けると

$$\Phi_1^i = \Psi_1^i + \Psi_2^i \quad \text{ここで } \Psi_2^i = o(\Psi_1^i) \quad (4.27)$$

と書ける。これらの potential の境界値問題は次のようになる。 $\Psi_j^i (i=3,5; j=1,2)$  として (3.90) から

$$\left. \begin{aligned} [\text{L}] \quad &\Psi_1^i{}_{yy} + \Psi_1^i{}_{zz} = 0 \\ [\text{H}] \quad &\frac{\partial \Psi_1^i}{\partial n} = i\omega n_i \quad \text{on } z = \bar{h}_0(x, y) \\ [\text{F}] \quad &g\Psi_1^i{}_z - \omega^2 \Psi_1^i = 0 \quad \text{on } z = 0 \end{aligned} \right\} (4.28)$$

および

$$\left. \begin{aligned} \text{[L]} \quad & \Psi_2^i{}_{yy} + \Psi_2^i{}_{zz} = 0 \\ \text{[H]} \quad & \frac{\partial \Psi_2^i}{\partial n} = m_i \quad \text{on } z = h_0(x, y) \\ \text{[F]} \quad & g\Psi_2^i{}_z - \omega^2\Psi_2^i = -2i\omega U\Psi_1^i{}_x \\ & \quad \quad \quad O(\varepsilon^{1/2}) \\ & \quad \quad \quad -2i\omega\Phi_{0y}\Psi_1^i{}_y + i\omega\Phi_{0zz}\Psi_1^i \\ & \quad \quad \quad O(\varepsilon^{1/2}) \quad \text{on } z=0 \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

となる。 $\Psi_2^i$  の free surface condition は homogeneous なものでない、しかし右辺は既知関数であると考えられる。 $(\Psi_1^i$  は解ける形になっている。) ここで  $\Psi_3^i$  なる potential を導入し次の条件を満足するものとする。

$$\left. \begin{aligned} \text{[L]} \quad & \Psi_3^i{}_{yy} + \Psi_3^i{}_{zz} = 0 \\ \text{[H]} \quad & \frac{\partial \Psi_3^i}{\partial n} = 0 \quad \text{on } z = h_0(x, y) \\ \text{[F]} \quad & g\Psi_3^i{}_z - \omega^2\Psi_3^i = -2i\omega U\Psi_1^i{}_x \\ & \quad \quad \quad -2i\omega\Phi_{0y}\Psi_1^i{}_y + i\omega\Phi_{0zz}\Psi_1^i \\ & \quad \quad \quad \text{on } z=0 \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

したがって  $\Psi_2^i$  は

$$\left. \begin{aligned} \text{[L]} \quad & \Psi_2^i{}_{yy} + \Psi_2^i{}_{zz} = 0 \\ \text{[H]} \quad & \frac{\partial \Psi_2^i}{\partial n} = m_i \quad \text{on } z = h_0(x, y) \\ \text{[F]} \quad & g\Psi_2^i{}_z - \omega^2\Psi_2^i = 0 \quad \text{on } z=0 \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

のように修正され、(4.27)で定義される potential は  $\Phi_1^i = \Psi_1^i + \Psi_2^i + \Psi_3^i$  ここで  $\Psi_2^i, \Psi_3^i = o(\Psi_1^i)$  (4.32)

と書ける。

$\Psi_j^i$  ( $i=3,5; j=1,2,3$ ) に関する問題は[R]条件を附加すれば原理的に解ける形になっている。[R]条件は far field solution の inner expansion によって与えられる。(3.48)において source density が

$$\sigma(x) = \sigma_1(x) + \sigma_2(x) \quad \sigma_2 = o(\sigma_1) \quad (4.33)$$

と表わされるとし、 $\sigma_2 = O(\varepsilon\sigma_1)$  であると仮定すると、(3.48)は

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &\sim 4\pi i e^{\varepsilon z - i\varepsilon y} \sigma(x - 2\tau y) \\ &\div 4\pi i e^{\varepsilon z - i\varepsilon y} \{ \sigma_1(x) + \sigma_2(x) - 2\tau y \sigma_1'(x) \} \\ &\quad \quad \quad O(\varepsilon\sigma_1) \quad O(\varepsilon\sigma_1) \end{aligned} \quad (4.34)$$

となり、これにより  $\Psi_j^i$  の[R]条件は

$$\text{[R]} \quad \Psi_1^i \sim a_i(x) e^{\varepsilon z - i\varepsilon y} \quad (4.35)$$

$$\text{[R]} \quad \Psi_2^i \sim b_i(x) e^{\varepsilon z - i\varepsilon y}, \quad b_i = O(\varepsilon a_i) \quad (4.36)$$

$$\text{[R]} \quad \Psi_3^i \sim -2\tau y a_i'(x) e^{\varepsilon z - i\varepsilon y} \quad (4.37)$$

により与えられる。

$\Psi_1^i, \Psi_2^i$  については simple strip theory の問題であり、任意の断面について数値的に解くことが可能で

あり、その手法も色々考案されている。 $\Psi_3^i$  の問題は複雑であるが Ogilvie & Tuck<sup>7)</sup> (1969) によりその性質が調べられており。 $\Psi_3^i$  の解の outer expansion は (4.37) の形になることが示されている。すなわち  $\Psi_3^i$  は解けたものとして扱うことができる。

Case 3.  $\kappa = O(\varepsilon^{-1}), \nu = O(1)$

この場合は case 2 のときと全く同じ形の結果を得る。しかし、 $\phi_0 = O(\varepsilon^2), m_3, m_5 = O(1)$  となるので  $\Psi_2^i, \Psi_3^i$  は  $\Psi_1^i$  と  $O(\varepsilon^{1/2})$  だけ order が異なっている。

Case 4.  $\kappa = O(1), \nu = O(\varepsilon^{-1})$

(3.94)により leading order の potential は rigid wall condition を満たす。また[H]条件は

$$\text{[H]} \quad \frac{\partial \Phi_1^i}{\partial n} = \frac{i\omega n_i}{O(1)} + \frac{m_i}{O(\varepsilon^{1/2})} \quad (4.38)$$

であるので、 $\Phi_1^i = O(\varepsilon)$  が leading order potential の order である。[R]条件は

$$\text{[R]} \quad \Phi_1^i \sim \sigma_i(x) \ln r \quad \text{as } r \rightarrow O(1) \quad (4.39)$$

であり、この case は基本的に case 1 と同じである。しかし leading order term を [H] 条件の lowest term から求まるものとする、この case は zero forward speed の問題と同じである。また (3.50) の far field potential の inner expansion は  $U \rightarrow 0$  のとき zero speed の inner expansion (3.54) に一致するので、この case 4 は zero forward speed の場合を包含している。

## 4.2 Incident wave がある場合

§4.1 で扱ってきた near field potential  $\Phi_1$  は pure oscillation (forced oscillation) の potential であった。Incident wave と船体との作用を表わす diffraction potential を  $\Phi_D$  とするとき、各 case 共 (case 3 を除く) hull surface condition は

$$\text{[H]} \quad \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I}{\partial n} \quad \text{on } z = h_0(x, y) \quad (4.40)$$

となる。

$$\phi_I = \frac{g}{\omega_0} a e^{\varepsilon z} e^{-i\varepsilon x} = \zeta_7 e^{\varepsilon z}, \quad \zeta_7 = \frac{g}{\omega_0} a e^{-i\varepsilon x} \quad (3.57)$$

とすると、 $\Phi_D$ は

$$\Phi_D = \zeta_7 e^{\varepsilon z} \Phi_1^7 \quad (4.41)$$

で定義される  $\Phi_1^7$  なる potential で表わされる。ここで  $\Phi_1^7$  は slowly varying function である。

Case 1.  $\kappa = O(1), \nu = O(1)$



依存している。Ogilvie & Tuck<sup>7)</sup> はこの効果は (4.30) の境界値問題の解である  $\Psi_3^i$  により説明されることを示した。[H]条件の  $U$  による補正と[F]条件における  $U$  による補正は case 2 および case 3 に見られるように同じ order であるので、どちらか一方だけを考えるのでは consistent でなくなる。さらに  $\kappa=O(\varepsilon^{-1})$  のとき incident wave があると §4.2 で見るように diffraction potential は強い 3 次元効果を示す。ここで case 3 の場合 frequency of encounter  $\omega$  は

$$\omega = \omega_0 + \kappa U, \quad \kappa = \frac{\omega_0^2}{g}$$

であるので、 $\omega = O(\varepsilon^{-1/2})$  であるためには  $\omega_0 = O(\varepsilon^{-1/4})$  であることが要請される。case 2 の場合には  $\omega = O(\varepsilon^{-1/2})$ ,  $\omega_0 = O(\varepsilon^{-1/2})$  であるので pure oscillation および incident wave のある場合についてもすっきりした扱いができた。Incident wave のある場合に case 3 の near field の formulation は幾分複雑になるが、case 3 が case 2 の延長であるとして case 2 の結果を使っても良いのではないかと思われる。

このように考えると、Salvesen, Tuck & Faltinsen<sup>8)</sup> による strip theory は §4.1 の case 2, 3 で [F]条件における forward speed の補正を無視したものと一致することが云えよう。さらに  $\kappa=O(\varepsilon^{-1})$  で incident wave のあるとき 3 次元効果があることは、はっきりしているので case 2 で行った slender body theory による船体運動の解析は最も consistent なものであると云える。

## 5. あとがき

これまでに slender body theory による船体運動の解析が行われてきているが、尚様々な問題を抱えている。船体運動に表われる物理量を parameter とし、この parameter と船体幾何形状との関係により理論を展開して行く方法はより実りの多い結果を生み出している。しかしこれらの結果が直ちに工学上役に立つものとは思われない。しかし、理論の教えるところから推定される様々な現象は実際にも観測されているものもあり、この論文で行ったような考察は大切であろう。

力およびモーメントの計算を具体的に示さないのははっきりしていないが、strip method がどのような場合の slender body theory に位置づけられるかが、

ここで行った方法でわかる。これは strip method の有用性を考えるのに、またその適用限界、あるいは欠陥を理解するのに役立つものである。

Diffraction potential について論じた部分は、これまで比較的扱われなかったものであるので、色々と興味深い考察が可能であるが、これもやはり力およびモーメントの関係で論じないとその深い意味が判らないものであろう。この意味において次報で、ここで扱った場合について力とモーメントを考察したい。

## 参 考 文 献

- 1) F. Ursell : Slender Oscillating Ships at Zero Forward Speed, J. Fluid Mech., Vol. 14, (1962)
- 2) E.O. Tuck : The Steady Motion of a Slender Ship, Ph.D. Thesis, Cambridge, (1963)
- 3) J.N. Newman : A Slender-Body Theory for Ship Oscillating in Waves, J. Fluid Mech., Vol. 18, (1964)
- 4) J.N. Newman and E.O. Tuck : Current Progress in the Slender Body Theory for Ship Motions, Proc. Fifth Symposium on Naval Hydrodynamics, (1964)
- 5) W.P.A. Joosen : Slender Body Theory for an Oscillating Ship at Forward Speed, Proc. Fifth Symposium on Navel Hydrodynamics, (1964)
- 6) H. Maruo : Application of the Slender Body Theory to the Longitudinal Motion of Ships among Waves, Bulletin of Faculty Engineering, Yokohama National Univ., Vol. 16, (1967)
- 7) T.F. Ogilvie and E. O. Tuck : A Rational Strip Theory of Ship Motions. Part I., Dept. Nav. Arch. and Marine Eng., Univ. Michigan, No. 013, (1969)
- 8) N. Salvesen, E. O. Tuck and O. Faltinsen : Ship Motions and Sea Loads, Trans. Soc. Nav. Arch. and Marine Eng., Vol. 78, (1970)
- 9) H. Maruo : An Improvement of the Slender Body Theory for Oscillating Ships with Zero Forward Speed, Bulletin of Faculty of Engineering, Yokohama National Univ., Vol. 19, (1970)
- 10) O. Faltinsen : Wave Forces on a Restrained Ship in Head-Sea Waves, Ph.D. Thesis, Univ, Michigan, (1971)
- 11) 丸尾孟, 佐々木敬之 : 向い波の中の細長い物体に働く波圧について, 日本造船学会論文集, 第 136 号, (1974)
- 12) H. Maruo : Discussions of Relative Magnitude of Governing Parameters in the Problem

of Slender Ships in Waves, Bulletin of Faculty of Engineering, Yokohama National Univ., Vol. 23, (1974)

13) 足達宏之: 長い中央平行部による船首波の干渉について, 日本造船学会論文集, 第135号, (1974)

14) F. Ursell: The Refraction of Head Seas by a Long Ship, J. Fluid Mech., Vol. 67, (1975)

15) A.M. Reed: Wave Making: A Low-Speed Slender-Body Theory, Dept. Nav. Arch. and Marine Eng., Univ. Michigan, No. 196, (1975)

16) 足達宏之: 向い波と細長船の干渉について, 船舶技術研究所報告, 第14巻, 第4号, (1977)

17) 足達宏之: 向い波と細長船の干渉について(その2) 船舶技術研究所報告, 第14巻, 第6号, (1977)

18) 足達宏之: 向い波と細長船の干渉について(その3) 船舶技術研究所報告, 発表予定

19) J.N. Newman: Applications of Slender-Body

Theory in Ship Hydrodynamics, Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 2, (1970)

20) T. F. Ogilvie: Workshop on Slender-Body Theory Part I: Free Surface Effects, Dept. Nav. Arch. and Marine Eng. Univ. Michigan, No. 163, (1974)

21) T. F. Ogilvie: Fundamental Assumptions in Ship-motion Theory, Proc. International Symposium on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, London, (1974)

22) T.F. Ogilvie: Wave-Length Scales in Slender-Body Theory, Proc. International Seminar on Ship Technology, Seoul, Korea, (1976)

23) A. Erdélyi: Asymptotic Expansions, Dover Publications, Inc., New York, (1956)

24) M. J. Lighthill: Fourier Analysis and Generalized Functions, Cambridge University Press, Cambridge, (1958)

**Appendix I. Inner expansion of far field potential whose source density function is slowly varying**

Far field における境界条件(3.45)を満足する  $\phi$  は

$$\phi(x,y,z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \sigma^*(k) \times \int_C^{\infty} dl \frac{e^{il y + \sqrt{l^2+k^2} z}}{\sqrt{l^2+k^2} - \frac{1}{g}(\omega + Uk)^2} \quad (I-1)$$

ただし  $\sigma^*(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \sigma(x)$

と表わされる。ここで  $l$  に関する積分路  $C$  は次のようにして定められる。 $l$  に関する積分で pole が存在するのは  $(\omega + Uk)^2/g > |k|$  のときである。そこで  $f(k)$  という函数を次のように定義する。

$$f(k) = \frac{1}{g^2} (\omega + Uk)^4 - k^2 = \frac{1}{\nu^2} (k - k_1)(k - k_2)(k - k_3)(k - k_4) \quad (I-2)$$

ここで

$$k_1 = -\frac{\nu}{2} \left[ (2\tau + 1) - \sqrt{1 + 4\tau} \right]$$

$$k_2 = -\frac{\nu}{2} \left[ (2\tau + 1) + \sqrt{1 + 4\tau} \right]$$

$$k_3 = -\frac{\nu}{2} \left[ (2\tau - 1) - \sqrt{1 - 4\tau} \right]$$

$$k_4 = -\frac{\nu}{2} \left[ (2\tau - 1) + \sqrt{1 - 4\tau} \right]$$

である。 $k_0 = -\omega/U$  とするとその順序は Fig 2 のようになる。 $k_2 < k < k_1$  および  $k_4 < k < k_3$  のときは  $l$  の実軸上には pole は存在しない。Rayleigh の仮想摩擦を導入すると  $(\omega + Uk - i\mu)^2/g$  は複素  $k$  面上で Fig. 2 のように表わされる。

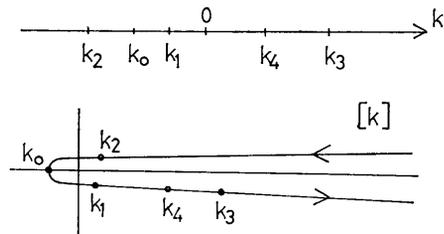


Fig. 2

したがって

$$\frac{1}{g} (\omega + Uk - i\mu)^2 = A(k) + iB(k) \quad (I-3)$$

と書くと,  $k < k_0$  のとき  $B > 0$ ,  $k > k_0$  のとき  $B < 0$  となる。 $A$ は正である。ゆえに pole の位置は

$$l^2 = (A + iB)^2 - k^2 = f(k) + i2AB$$

より  $l = \pm (l_0 \pm i\mu')$  (I-4)

カッコの中の符号は + for  $B > 0$   
- for  $B < 0$

ただし  $l_0 = \sqrt{f(k)}$

である。したがって積分路  $C$  は  $\tau < 1/4$  のとき Fig. 3 (a),  $\tau > 1/4$  のとき Fig. 3(b) となる。さらに steady potential  $\omega = 0$  の場合は  $k_0 = 0, k_1 = k_4 = 0, k_2 = -\nu,$

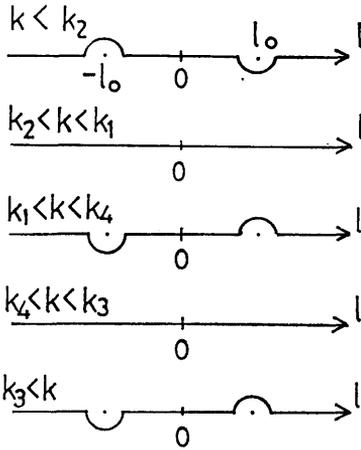


Fig. 3 (a)  $\tau < \frac{1}{4}$

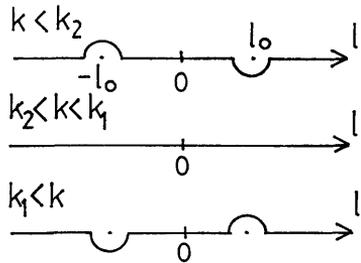


Fig. 3 (b)  $\tau > \frac{1}{4}$

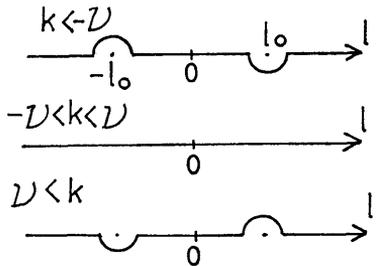


Fig. 3 (c)  $\omega = 0$

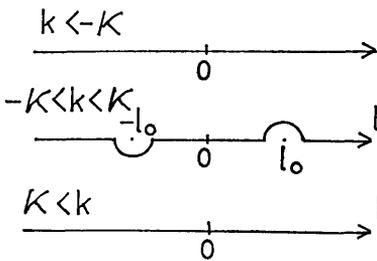


Fig. 3 (d)  $U = 0$

$k_3 = \nu$  となるので Fig. 3(c) のように、また zero forward speed  $U=0$  の場合は  $k_2 \rightarrow -\infty, k_0 \rightarrow -\infty, k_1 = -\kappa, k_4 = \kappa, k_3 \rightarrow +\infty$  となるので Fig. 3 (d) のようになる。以上が  $l$  に関する積分路  $C$  である。

(I-1) において  $l = |k| \sinh \mu$  として積分変数変換を行うと

$$\phi(x, y, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \sigma^*(k) \times \int_C^{\infty} d\mu \frac{\cosh \mu}{\cosh \mu - \frac{1}{g} \frac{(\omega + Uk)^2}{|k|}} e^{kiz \cosh \mu + i|k|y \sinh \mu} \quad (I-5)$$

と表わされる。far field solution は以上のように表わされる。次にその inner expansion を求める。

1)  $\kappa = O(1)$  の場合

(I-5) の  $\mu$  に関する積分を

$$I = \int_C^{\infty} d\mu \frac{\cosh \mu}{\cosh \mu - K(k)} e^{kiz \cosh \mu + i|k|y \sinh \mu} \quad (I-6)$$

ここで  $K(k) = \frac{1}{g} \frac{(\omega + Uk)^2}{|k|} = \frac{\cosh \alpha > 1}{\cos \alpha^* < 1}$

と書くと、 $I$  は Ursell<sup>1)</sup> の手法を参照すると

$$I = \left\{ \frac{(\pm \pi i - \alpha) \coth \alpha}{(\pi - \alpha^*) \cos \alpha^*} \right\} \left\{ 2I_0(|k|r) + 4 \sum_1^{\infty} (-1)^m I_m(|k|r) \cos m\theta \left\{ \frac{\cosh m\alpha}{\cos m\alpha^*} \right\} + 2K_0(|k|r) + 4 \sum_1^{\infty} (-1)^{m-1} \right. \\ \left. \times \left[ \frac{\partial}{\partial \nu} (I_\nu(|k|r) \cos \nu\theta) \right]_{\nu=m} \left\{ \frac{\sinh m\alpha \cdot \coth \alpha}{\sin m\alpha^* \cdot \cot \alpha^*} \right\} \right\} \quad (I-7)$$

と書ける。ここで第1項の符号は

$$\tau > \frac{1}{4} \text{ のときは } \begin{array}{l} + \quad k < k_2 \\ - \quad k_1 < k \end{array} \\ \tau < \frac{1}{4} \text{ のときは } \begin{array}{l} + \quad k < k_2 \\ - \quad k_1 < k < k_4, k_3 < k \end{array}$$

である。また  $y = r \sin \theta, z = -r \cos \theta$  としてある。

(I-7) の Modified Bessel function は  $y \rightarrow O(\epsilon), z \rightarrow O(\epsilon)$  となるとき  $r = (y^2 + z^2)^{1/2} = O(\epsilon)$  とされるので  $r$  に関して series 展開されて

$$I \sim -2 \ln r - 2 \left( \ln \frac{|k|}{2} + \gamma \right) + 2 \left\{ \frac{(\pm \pi i - \alpha) \coth \alpha}{(\pi - \alpha^*) \cot \alpha^*} \right\} + O(r \ln r) \quad (I-8)$$

となる。ここで  $\gamma$  は Euler の定数である。(I-8) を (I-5) に代入すれば inner expansion が求まる。まず (I-8) 第1項を代入すると

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \sigma^*(k) (-2 \ln r) = 4\sigma(x) \ln r \quad (\text{I-9})$$

となる。(I-8) 第2項を代入すると

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \sigma^*(k) \left\{ -2 \left( \ln \frac{|k|}{2} + \gamma \right) \right\} \\ & = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-\xi)} \left( \ln \frac{|k|}{2} + \gamma \right) \\ & = 4 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) G(x-\xi) \quad (\text{I-10}) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } G(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \left( \ln \frac{|k|}{2} + \gamma \right)$$

となる。 $G(x)$  は Lighthill<sup>24)</sup> の Table 1. を使うと

$$G(x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \operatorname{sgn} x \ln 2|x|$$

が得られるので

$$(\text{I-10}) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} [\operatorname{sgn}(x-\xi) \ln 2|x-\xi|] \quad (\text{I-11})$$

となる。

次に第3項において

$$\begin{aligned} \pm \pi i - \alpha &= -\beta \quad \text{とおくと} \\ (\pm \pi i - \alpha) \coth \alpha &= -\beta \coth(\pm \pi i + \beta) = -\beta \coth \beta \\ i\pi - i\alpha^* &= \beta \quad \text{とおくと} \\ (\pi - \alpha^*) \cot \alpha^* &= -i\beta \cot(\pi + i\beta) = -\beta \coth \beta \end{aligned}$$

と書けるので

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \sigma^*(k) \cdot 2 \left\{ \frac{(\pm \pi i - \alpha) \coth \alpha}{(\pi - \alpha^*) \cot \alpha^*} \right\} \\ & = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-\xi)} \beta \coth \beta \quad (\text{I-12}) \end{aligned}$$

となる。

以上 (I-9), (I-11) および (I-12) より case 1. および 4 の inner expansion は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) & \sim 4\sigma(x) \ln r \\ & \quad O(\ln \varepsilon) \\ & + 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} [\operatorname{sgn}(x-\xi) \ln 2|x-\xi|] \\ & \quad O(1) \\ & + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-\xi)} \beta(k) \coth \beta(k) \\ & \quad O(1) \quad (\text{I-13}) \end{aligned}$$

ここで  $\tau > \frac{1}{4}$  のとき

$$\begin{aligned} \beta(k) &= -i\pi + \alpha \quad \text{for } k < k_2 \\ \beta(k) &= i\pi - i\alpha^* \quad \text{for } k_2 < k < k_1 \\ \beta(k) &= i\pi + \alpha \quad \text{for } k_1 < k \end{aligned}$$

(392)

$\tau < \frac{1}{4}$  のとき

$$\begin{aligned} \beta(k) &= -i\pi + \alpha \quad \text{for } k < k_2 \\ \beta(k) &= i\pi - i\alpha^* \quad \text{for } k_2 < k < k_1, \quad k_4 < k < k_3 \\ \beta(k) &= i\pi + \alpha \quad \text{for } k_1 < k < k_4, \quad k_3 < k \end{aligned}$$

である。以上の  $\beta(k)$  は  $\tau > \frac{1}{4}$  のときも  $\tau < \frac{1}{4}$  のときも  $\cosh \beta(k) = \frac{-(\omega + Uk - i\mu)^2}{g|k|}$  ( $\mu \rightarrow 0$  ( $\mu > 0$ )) と表わされる。

(I-13) より, steady motion potential ( $\omega=0$ ) の inner expansion は, Tuck<sup>2)</sup> により次のように求められている。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) & \sim 4\sigma(x) \ln r \\ & \quad O(\ln \varepsilon) \\ & + 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} [\operatorname{sgn}(x-\xi) \ln 2|x-\xi|] \\ & \quad O(1) \\ & - \pi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} \\ & \quad \times [H_0(\nu|x-\xi|) + (2 + \operatorname{sgn}(x-\xi)) Y_0(\nu|x-\xi|)] \\ & \quad O(1) \quad (\text{I-14}) \end{aligned}$$

これは  $\nu = O(1)$  の場合である。 $\nu = O(\varepsilon^{-1})$  の場合については Adachi<sup>16)</sup> が次のように求めている。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) & \sim 4\sigma(x) \ln r \\ & \quad O(\ln \varepsilon) \\ & + 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} [\operatorname{sgn}(x-\xi) \ln 2|x-\xi|] \\ & \quad O(1) \\ & + F_w(x, y, z) \\ & \quad O(\varepsilon^{1/2}) \quad (\text{I-15}) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} F_w &= \frac{2}{\pi} \left[ - \int_{\nu-p}^{\nu} dk \sqrt{\frac{\nu}{2(\nu-k)}} \sigma^*(k) e^{kz+ikx} \right. \\ & \quad - \int_{-\nu}^{-\nu+p} dk \sqrt{\frac{\nu}{2(\nu+k)}} \sigma^*(k) e^{-kz+ikx} \\ & \quad + i \int_{\nu}^{\nu+p} dk \sqrt{\frac{\nu}{2(k-\nu)}} \sigma^*(k) e^{kz+ikx} \\ & \quad \left. - i \int_{-\nu-p}^{-\nu} dk \sqrt{\frac{\nu}{-2(k+\nu)}} \sigma^*(k) e^{-kz+ikx} \right] \end{aligned}$$

(I-13) より, zero forward speed ( $U=0$ ) の場合の inner expansion は次のようになる。Newman & Tuck<sup>4)</sup>。

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, z) &\sim 4\sigma(x) \ln r \\
&+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} [\operatorname{sgn}(x-\xi) \ln 2|x-\xi|] \\
&- \pi \kappa \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \\
&\times [\mathbf{H}_0(\kappa|x-\xi|) + Y_0(\kappa|x-\xi|) - 2iJ_0(\kappa|x-\xi|)] \\
&\quad (I-16)
\end{aligned}$$

2)  $\kappa = O(\varepsilon^{-1})$  の場合

まず  $\tau > \frac{1}{4}$  の場合を考える。(I-1) より

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{e^{ily+z\sqrt{l^2+k^2}}}{\sqrt{l^2+k^2} - \frac{1}{g}(\omega+Uk)^2} \quad (I-17)$$

とすると、積分路  $C$  を考慮して

$k < k_2$  の場合、Fig. 4(a) のように積分路ををとると

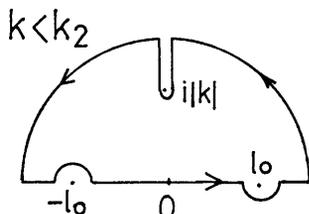


Fig. 4 (a)

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi i \frac{\left(1 + \frac{U}{\omega}k\right)^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{U}{\omega}k\right)^4 - \left(\frac{k}{\kappa}\right)^2}} \\
&\times \exp\left\{iky\sqrt{\left(1 + \frac{U}{\omega}k\right)^4 - \left(\frac{k}{\kappa}\right)^2} + \kappa z \left(1 + \frac{U}{\omega}k\right)^2\right\} \\
&+ i \int_{|k|}^{\infty} dl \frac{e^{-ly+iz\sqrt{l^2-k^2}}}{i\sqrt{l^2-k^2} - \frac{1}{g}(\omega+Uk)^2} \\
&- i \int_{|k|}^{\infty} dl \frac{e^{-ly-iz\sqrt{l^2-k^2}}}{-i\sqrt{l^2-k^2} - \frac{1}{g}(\omega+Uk)^2} \\
&\quad (I-18)
\end{aligned}$$

となる。そこで

$$\sqrt{\left(1 + \frac{U}{\omega}k\right)^4 - \left(\frac{k}{\kappa}\right)^2} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{f(k)} = F(k),$$

$$\begin{aligned}
&\int_{|k_1}^{\infty} dl e^{-ly} \left[ \frac{e^{iz\sqrt{l^2-k^2}}}{\sqrt{l^2-k^2} + \frac{i}{g}(\omega+Uk)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{-iz\sqrt{l^2-k^2}}}{\sqrt{l^2-k^2} - \frac{i}{g}(\omega+Uk)^2} \right] = L(k, y, z; \omega, U)
\end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi i \frac{\left(1 + \frac{U}{\omega}k\right)^2}{F(k)} \\
&\times e^{ikyF(k) + \kappa z(1+Uk/\omega)^2} + L(k, y, z; \omega, U) \quad (I-19)
\end{aligned}$$

と書ける。

同様に  $k_2 < k < k_1$  の場合、Fig. 4(b) より

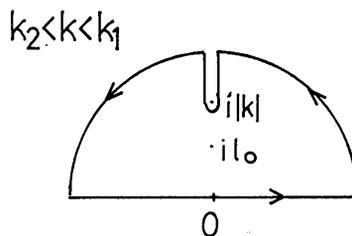


Fig. 4(b)

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi \frac{\left(1 + \frac{U}{\omega}k\right)^2}{iF(k)} \\
&\times e^{-ikyF(k) + \kappa z(1+Uk/\omega)^2} + L(k, y, z; \omega, U) \\
&\quad (I-20)
\end{aligned}$$

$k_1 < k$  の場合、Fig. 4(c) より

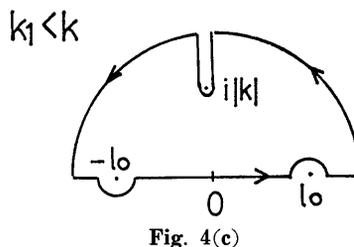


Fig. 4(c)

$$\begin{aligned}
I &= -2\pi i \frac{\left(1 + \frac{U}{\omega}k\right)^2}{F(k)} \\
&\times e^{-ikyF(k) + \kappa z(1+Uk/\omega)^2} + L(k, y, z; \omega, U) \quad (I-21)
\end{aligned}$$

となる。

そこで(I-19), (I-20)および(I-21)を(I-1)に代入するわけであるが  $L(k, y, z; \omega, U)$  は higher order ゆえ neglect される。

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, z) &\sim -2i \int_{-\infty}^{k_2} dk e^{ikx} \sigma^*(k) \frac{\left(1 + \frac{U}{\omega}k\right)^2}{F(k)} \\
&\quad \times e^{ikyF(k) + \kappa z(1+Uk/\omega)^2} \\
&- 2 \int_{k_2}^{k_1} dk e^{ikx} \sigma^*(k) \frac{\left(1 + \frac{U}{\omega}k\right)^2}{iF(k)} \\
&\quad \times e^{-ikyF(k) + \kappa z(1+Uk/\omega)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2i \int_{k_1}^{\infty} dk e^{ikx} \sigma^*(k) \frac{\left(1 + \frac{U}{\omega} k\right)^2}{F(k)} \\
& \quad \times e^{-iky} F(k) \operatorname{sgn}(k-k_2) + \kappa z (1+Uk/\omega)^2 \\
& = 2i \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \sigma^*(k) \frac{\left(1 + \frac{U}{\omega} k\right)^2}{F(k) \operatorname{sgn}(k-k_2)} \\
& \quad \times e^{-iky} F(k) \operatorname{sgn}(k-k_2) + \kappa z (1+Uk/\omega)^2 \\
& = 2i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\left(1 + \frac{U}{\omega} k\right)^2 e^{\kappa z (1+Uk/\omega)^2}}{F(k) \operatorname{sgn}(k-k_2)} \\
& \quad \times e^{ik(x-\xi) - iky} F(k) \operatorname{sgn}(k-k_2) \quad (\text{I-22})
\end{aligned}$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
h(\xi, k) &= \frac{1}{\kappa} \{k(x-\xi) - \kappa y F(k) \operatorname{sgn}(k-k_2)\} \\
G(k) &= \frac{\left(1 + \frac{U}{\omega} k\right)^2 e^{\kappa z (1+Uk/\omega)^2}}{F(k) \operatorname{sgn}(k-k_2)}
\end{aligned} \right\} \quad (\text{I-23})$$

とおくと

$$\phi(x, y, z) \sim 2i \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dk G(k) e^{i\kappa h(\xi, k)} \quad (\text{I-24})$$

となる。(I-24) の inner expansion を求めるために, 2重積分の場合の stationary phase method<sup>5)23)</sup>を使う。今の場合 stationary point は

$$\left. \begin{aligned}
h_{\xi}(\xi, k) &= -k/\kappa = 0 \\
h_k(\xi, k) &= (x-\xi)/\kappa - yF'(k) = 0
\end{aligned} \right\} \quad (\text{I-25})$$

より  $(\xi_0, k_0) = (x - F'(0)\kappa y, 0)$  (I-26) である。 $h(\xi, k)$  を  $(\xi_0, k_0)$  のまわりに展開すると

$$\begin{aligned}
h(\xi, k) &= h(\xi_0, k_0) + \frac{1}{2}(\xi - \xi_0)^2 h_{\xi\xi}(\xi_0, k_0) \\
& + \frac{1}{2}(k - k_0)^2 h_{kk}(\xi_0, k_0) + (\xi - \xi_0)(k - k_0) h_{\xi k}(\xi_0, k_0)
\end{aligned} \quad (\text{I-27})$$

となる。ここで  $\xi - \xi_0 = \xi' \cos \alpha - k' \sin \alpha$  } (I-28)

$$k - k_0 = \xi' \sin \alpha + k' \cos \alpha$$

により座標を回転すると (I-27) は

$$\begin{aligned}
h(\xi', k') &= h(\xi_0, k_0) \\
& + \xi'^2 \left( \frac{h_{\xi\xi}}{2} \cos^2 \alpha + h_{\xi k} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{h_{kk}}{2} \sin^2 \alpha \right) \\
& + k'^2 \left( \frac{h_{\xi\xi}}{2} \sin^2 \alpha - h_{\xi k} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{h_{kk}}{2} \cos^2 \alpha \right) \\
& + \xi' k' \{ -(h_{\xi\xi} - h_{kk}) \cos \alpha \sin \alpha \\
& + h_{\xi k} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \} \quad (\text{I-29})
\end{aligned}$$

となる。ここで (I-29) の右辺第 4 項が zero になる

(394)

ように  $\alpha$  をとることになると

$$h(\xi', k') = h(\xi_0, k_0) + \xi'^2 P(\xi_0, k_0) - k'^2 Q(\xi_0, k_0) \quad (\text{I-30})$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
P &= \frac{1}{2} (h_{\xi\xi} \cos^2 \alpha + 2h_{\xi k} \cos \alpha \sin \alpha + h_{kk} \sin^2 \alpha) \\
Q &= -\frac{1}{2} (h_{\xi\xi} \sin^2 \alpha - 2h_{\xi k} \cos \alpha \sin \alpha + h_{kk} \cos^2 \alpha)
\end{aligned} \right\} \quad (\text{I-31})$$

$$\cos 2\alpha = \frac{h_{\xi\xi} - h_{kk}}{2h_{\xi k}} \sin 2\alpha \quad (\text{I-32})$$

と書ける。(I-31) で  $h_{\xi\xi} = 0$  を代入し (I-32) を使うと

$$\begin{aligned}
PQ &= -\frac{1}{4} \left\{ (h_{kk}^2 - 4h_{\xi k}^2) \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \right. \\
& \quad \left. + h_{\xi k} h_{kk} \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \right\} = \frac{h_{\xi k}^2}{4} \quad (\text{I-33})
\end{aligned}$$

を得る。(I-24) は  $\kappa$  が大きいとき

$$\begin{aligned}
\phi &\sim 2i \sigma(\xi_0) G(k_0) e^{i\kappa h(\xi_0, k_0)} \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' e^{i\kappa P \xi'^2} \int_{-\infty}^{\infty} dk' e^{-i\kappa Q k'^2} \\
& = 2\pi i \sigma(\xi_0) G(k_0) e^{i\kappa h(\xi_0, k_0)} \frac{1}{\kappa \sqrt{PQ}} \quad (\text{I-34})
\end{aligned}$$

と近似される。

$$\left. \begin{aligned}
F'(0) &= 2\frac{U}{\omega} = 2\frac{\tau}{\kappa} \text{ より} \\
\xi_0 &= x - \kappa y F'(0) = x - 2\tau y \\
k_0 &= 0 \text{ より } G(k_0) = e^{\kappa z} \\
F(0) &= 1 \text{ より } h(\xi_0, k_0) = -y \\
h_{\xi k} &= -1/\kappa \text{ より } PQ = 1/4\kappa^2
\end{aligned} \right\} \quad (\text{I-35})$$

(I-35) を使うと

$$\phi \sim 4\pi i \sigma(x - 2\tau y) e^{\kappa z - i\kappa y} \quad (\text{I-36})$$

となる。ここで  $y \rightarrow O(\varepsilon)$  とすると  $\tau = o(\varepsilon^{-1/2})$  ゆえ  $\tau y = o(\varepsilon^{1/2})$  であるので

$$\sigma(x - 2\tau y) = \sigma(x) - 2\tau y \sigma'(x) + \dots \quad (\text{I-37})$$

となる。よって

$$\phi(x, y, z) \sim 4\pi i e^{\kappa z - i\kappa y} \{ \sigma(x) - 2\tau y \sigma'(x) + \dots \} \quad (\text{I-38})$$

を得る。case 2. の場合は第 2 項は  $\varepsilon$  だけ higher order, case 3. の場合は  $\varepsilon^{1/2}$  だけ higher order になる。

$\tau < \frac{1}{4}$  の場合も stationary point  $k_0 = 0$  はかわらないため  $\tau > \frac{1}{4}$  の場合と同じ結果になる。Zero forward speed ( $U=0$ ) の場合と同様の操作を行うと

$$\phi(x, y, z) \sim 4\pi i e^{\kappa z - i\kappa y} \sigma(x) \quad (I-39)$$

が得られる。

### Appendix II. Inner expansion of far field potential whose source density function is rapidly varying

Incident wave  $\phi_I$  と船体の作用により生ずる disturbance  $\phi_D$  は Incident wave を

$$\phi_I = \frac{ga}{\omega_0} e^{\kappa z} e^{-i\kappa x} \quad (II-1)$$

と表わすとき, far field において次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \phi_D(x, y, z) = & -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F\{\sigma(x) e^{-i\kappa x}\} \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dl \frac{e^{ily+z\sqrt{k^2+l^2}}}{\sqrt{k^2+l^2} - \frac{1}{g}(\omega + Uk - i\mu)^2} \quad (II-2) \end{aligned}$$

ここで  $\mu$  は Raleigh の仮想摩擦係数であり, また

$$\begin{aligned} F\{\sigma(x) e^{-i\kappa x}\} = & \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i\kappa x} \sigma(x) e^{-i\kappa x} \\ = & \sigma^*(k+\kappa) \quad (II-3) \end{aligned}$$

である。(II-2) の potential は船体中心線上に  $\sigma(x) e^{-i\kappa x}$  の形の source distribution があるときのものであり, (II-1) の incident wave と船体との作用を far-field から見るときこのように表わされると仮定する。この potential の inner expansion を  $\kappa = O(\varepsilon^{-1})$ ,  $\nu = O(\varepsilon^{-1})$  の仮定の下に求める。ここに,

$$\kappa = \frac{\omega_0^2}{g}, \quad \nu = \frac{g}{U^2}, \quad \tau = \frac{\omega_0 U}{g} = \left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^{1/2} \quad (II-4)$$

であり, frequency of encounter  $\omega$  は

$$\omega = \omega_0 + \kappa U \quad (II-5)$$

で与えられる。  $\tau = \left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^{1/2} = O(1)$  であるので

$$\frac{\omega U}{g} = \frac{(\omega_0 + \kappa U)U}{g} \geq \frac{1}{4} \quad \text{or} \quad \tau \geq \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1) \quad (II-6)$$

の二つの場合に  $\phi_D$  の inner expansion を求めることにする。

$$1) \quad \tau > \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1), \quad y = O(\varepsilon), \quad z = O(\varepsilon)$$

(II-2) の  $l$  に関する積分を行うと,

$$\begin{aligned} \phi_D(x, y, z) = & -2i \int_{-\infty}^{k_2} dk e^{ikx} \sigma^*(k+\kappa) \frac{(k+\kappa+\nu\tau)^2}{F(k)} \\ & \times e^{i(y/\nu) F(k) + (z/\nu)(k+\kappa+\nu\tau)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -2 \int_{k_2}^{k_1} dk e^{ikx} \sigma^*(k+\kappa) \frac{(k+\kappa+\nu\tau)^2}{F(k)} \\ & \quad \times e^{-(y/\nu) F(k) + (z/\nu)(k+\kappa+\nu\tau)^2} \\ & + 2i \int_{k_1}^{\infty} dk e^{ikx} \sigma^*(k+\kappa) \frac{(k+\kappa+\nu\tau)^2}{F(k)} \\ & \quad \times e^{-i(y/\nu) F(k) + (z/\nu)(k+\kappa+\nu\tau)^2} \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \sigma^*(k+\kappa) \int_{|k_1}^{\infty} dl \\ & \quad \times e^{-ly} \left[ \frac{e^{iz\sqrt{l^2-k^2}}}{\sqrt{l^2-k^2} + \frac{i}{\nu}(k+\kappa+\nu\tau)^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{e^{-iz\sqrt{l^2-k^2}}}{\sqrt{l^2-k^2} - \frac{i}{\nu}(k+\kappa+\nu\tau)^2} \right] \quad (II-7) \end{aligned}$$

ここで

$$F(k) = \{|(k-k_1)(k-k_2)(k-k_3)(k-k_4)|\}^{1/2} \quad (II-8)$$

$$k_1 = -\kappa, \quad k_2 = -\nu(1+\tau)^2,$$

$$k_3 = -\kappa + \frac{\nu}{2}(1-2\tau) \pm \frac{\nu}{2}\sqrt{4\tau^2+4\tau-1} \quad (II-9)$$

である。

(II-7) は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \phi_D(x, y, z) = & -2i e^{-i(\kappa+\nu(1+2\tau))x} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon^{-1+\delta}} \right. \\ & \left. + \int_{-\varepsilon^{-1+\delta}}^0 dt e^{itx} \sigma^*\{t-\nu(1+2\tau)\} \right) \\ & \times \frac{\{t-\nu(1+\tau)\}^2 e^{(z/\nu)(t-\nu(1+\tau))^2 + i(y/\nu) F(t-\kappa-\nu(1+2\tau))}}{F\{t-\kappa-\nu(1+2\tau)\}} \\ & - 2e^{-i(\kappa+\nu(1+2\tau))x} \left( \int_0^{\varepsilon^{-1+\delta}} + \int_{\varepsilon^{-1+\delta}}^{\nu(1+2\tau)-\varepsilon^{-1+\delta}} dt \right) \\ & \times e^{itx} \sigma^*\{t-\nu(1+2\tau)\} \\ & \times \frac{\{t-\nu(1+\tau)\}^2 e^{(z/\nu)(t-\nu(1+\tau))^2 + i(y/\nu) F(t-\kappa-\nu(1+2\tau))}}{F\{t-\kappa-\nu(1+2\tau)\}} \\ & - 2e^{-i\kappa x} \int_{-\varepsilon^{-1+\delta}}^0 dt e^{itx} \sigma^*(t) \frac{(t+\nu\tau)^2}{F(t-\kappa)} \\ & \times e^{z/\nu(t+\nu\tau)^2 - (y/\nu) F(t-\kappa)} \\ & + 2ie^{-i\kappa x} \left( \int_0^{\varepsilon^{-1+\delta}} + \int_{\varepsilon^{-1+\delta}}^{\infty} dt e^{itx} \sigma^*(t) \right) \\ & \times \frac{(t+\nu\tau)^2}{F(t-\kappa)} e^{(z/\nu)(t+\nu\tau)^2 - (y/\nu) F(t-\kappa)} \\ & - \frac{1}{\pi} e^{-i\kappa x} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon^{-1+\delta}} + \int_{-\varepsilon^{-1+\delta}}^{\varepsilon^{-1+\delta}} + \int_{\varepsilon^{-1+\delta}}^{\infty} dt e^{itx} \sigma^*(t) \right) \\ & \times \int_0^{\infty} dv \frac{ve^{-\kappa y} \sqrt{(1+v^2)+l(t-2\kappa)/\kappa^2}}{\sqrt{(1+v^2)+t(t-2\kappa)/\kappa^2}} \\ & \times \left[ \frac{e^{i\kappa z v}}{v+i(t+\nu\tau)^2/\kappa\nu} + \frac{e^{-i\kappa z v}}{v-i(t+\nu\tau)^2/\kappa\nu} \right] \quad (II-10) \end{aligned}$$

ここで  $\varepsilon^{-1+\delta}$  は  $\delta$ =small positive constant であり  $\varepsilon^{-1+\delta}=O(\varepsilon^{-1})$  である。また

$$A = \sqrt{|4\varepsilon^2 + 4\varepsilon + 1|} \quad (\text{II-11})$$

$$B = \nu\tau\sqrt{2\nu(1+2\tau)} = O(\varepsilon^{-3/2}) \quad (\text{II-12})$$

と書くとき

$$F(t-\kappa) = B|t|^{1/2} \left| 1 + \frac{t}{\nu(1+2\tau)} \right|^{1/2} \\ \times \left| 1 - \frac{2t}{\nu(1-2\tau) - i\nu A} \right|^{1/2} \left| 1 - \frac{2t}{\nu(1-2\tau) - i\nu A} \right|^{1/2} \quad (\text{II-13})$$

であり、また

$$F\{t-\kappa-\nu(1+2\tau)\} = B|t|^{1/2} \left| 1 - \frac{t}{\nu(1+2\tau)} \right|^{1/2} \\ \times \left| 1 + \frac{2t}{\nu(1-2\tau) + i\nu A} \right|^{1/2} \left| 1 - \frac{2t}{\nu(1-2\tau) - i\nu A} \right|^{1/2} \quad (\text{II-14})$$

である。よって  $t < \varepsilon^{-1+\delta}$  なるとき  $y=O(\varepsilon)$  を考慮すると、

$$\frac{e^{\pm iy/\nu} F(t-\kappa)}{F(t-\kappa)} = \frac{1}{B\sqrt{|t|}} \pm i\frac{y}{\nu} + \text{higher order terms} \quad (\text{II-15})$$

$$\frac{e^{\pm i(y/\nu)F(t-\kappa-\nu(1+2\tau))}}{F\{t-\kappa-\nu(1+2\tau)\}} = \frac{1}{B\sqrt{|t|}} \pm i\frac{y}{\nu} \\ + \text{higher order terms} \quad (\text{II-16})$$

であり、また  $\sigma^*(t)$  は  $t > \varepsilon^{-1+\delta}$  のとき  $\sigma^*(t) = o(\varepsilon^{1-\delta})$  として良いと考えられるので、 $\phi_D$  の two term expansion が次のように与えられる。

$$\phi_D(x, y, z) \sim -2e^{-ikx+kz} \frac{\kappa}{B} \left[ \int_{-\varepsilon^{-1+\delta}}^0 dt e^{itx} \right. \\ \times \left. \frac{\sigma^*(t)}{\sqrt{-t}} - i \int_0^{\varepsilon^{-1+\delta}} dt e^{itx} \frac{\sigma^*(t)}{\sqrt{t}} \right] \\ + 2e^{-ikx+kz} \kappa y \int_{-\varepsilon^{-1+\delta}}^{\varepsilon^{-1+\delta}} dt e^{itx} \sigma^*(t) \\ - 2i e^{-i(\kappa+\nu(1+2\tau))x+\nu z(1+\tau)^2} \frac{\nu(1+\tau)^2}{B} \\ \times \left[ \int_{-\varepsilon^{-1+\delta}}^0 dt e^{itx} \frac{\sigma^*\{t-\nu(1+2\tau)\}}{\sqrt{-t}} \right. \\ \left. - i \int_0^{\varepsilon^{-1+\delta}} dt e^{itx} \frac{\sigma^*\{t-\nu(1+2\tau)\}}{\sqrt{t}} \right] \\ - \frac{1}{\pi} e^{-ikx} \int_{-\varepsilon^{-1+\delta}}^{\varepsilon^{-1+\delta}} dt e^{itx} \sigma^*(t) \int_0^\infty dv \frac{v e^{-\kappa y \sqrt{1+v^2}}}{\sqrt{1+v^2}} \\ \times \left[ \frac{e^{ikzv}}{v+i} + \frac{e^{-ikzv}}{v-i} \right] \quad (\text{II-17})$$

積分の上下限にある  $\varepsilon^{-1+\delta}$  を  $\infty$  に置換えても higher order の error が入ってくるのみであるから、 $\varepsilon^{-1+\delta}$

を  $\infty$  とし、また Fourier convolution theorem を利用すると

$$\phi_D(x, y, z) \sim -4 \frac{\sqrt{\pi}\kappa}{\tau\sqrt{2\nu(1+2\tau)}} e^{-ikx+kz} e^{-ix/4} \\ \times \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\sigma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} + 4\pi e^{-ikx+kz} \kappa y \sigma(x) \\ - 4i \frac{\sqrt{\pi}\nu(1+\tau)^2}{\tau\sqrt{2\nu(1+2\tau)}} e^{-i(\kappa+\nu(1+2\tau))x+\nu z(1+\tau)^2} \\ e^{-ix/4} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\sigma(\xi) e^{i\nu(1+2\tau)\xi}}{\sqrt{x-\xi}} - 2e^{-ikz} \sigma(x) \\ \times \int_0^\infty dv \frac{v e^{-\kappa y \sqrt{1+v^2}}}{\sqrt{1+v^2}} \left\{ \frac{e^{ikzv}}{v+i} + \frac{e^{-ikzv}}{v-i} \right\} \quad (\text{II-18})$$

となる。

また上式の第3項は

$$\int_{-\infty}^x d\xi \frac{\sigma(\xi) e^{i\nu(1+2\tau)\xi}}{\sqrt{x-\xi}} = \sqrt{\pi} e^{-ix/4} \sigma(x) e^{i\nu(1+2\tau)x} \\ \times \frac{1}{\sqrt{\nu(1+2\tau)}} + \text{higher order terms} \quad (\text{II-19})$$

であるので<sup>23)</sup>、最終的に  $\phi_D$  の two term expansion は

$$\phi_D(x, y, z) \sim -4 \frac{\sqrt{\pi}\kappa}{\sqrt{2(1+2\tau)}} e^{-ikx+kz} e^{-ix/4} \\ \times \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\sigma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} + 4\pi \sigma(x) e^{-ikx} \\ \times \left\{ \kappa y e^{kz} - \frac{(1+\tau)^2}{\tau(1+2\tau)} \frac{e^{\nu z(1+\tau)^2}}{\sqrt{2}} \right\} \\ - 2e^{-ikx} \sigma(x) \int_0^\infty dv \frac{v e^{-\kappa y \sqrt{1+v^2}}}{\sqrt{1+v^2}} \\ \times \left\{ \frac{e^{ikzv}}{v+i} + \frac{e^{-ikzv}}{v-i} \right\} \quad (\text{II-20})$$

となる。 $\tau = O(\varepsilon^{-2a})$  ( $a$ =small constant) として考えると、この式は Faltinsen<sup>10)</sup> の求めたものと一致する。

次に  $\tau < \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$  の場合について考察を行う。この場合も  $\tau = O(1)$  とし、 $\kappa = O(\varepsilon^{-1})$ 、 $\nu = O(\varepsilon^{-1})$  の仮定はそのままとする。しかし  $U \rightarrow 0$  とする極限においてもこの仮定は変わらないものとする。

$U \rightarrow 0$  のとき zero speed における inner expansion と一致する。

2)  $\tau < \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ ,  $y = O(\varepsilon)$ ,  $z = O(\varepsilon)$

(II-2) の  $l$  に関する積分を行うと



Table 2 Inner Expansion of Far Field Solution

<p>Case 1</p> <p><math>\kappa = O(1)</math></p> <p><math>\nu = O(1)</math></p>	$\phi_0 \sim 4\sigma(x) \ln r$ $+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} \cdot [\operatorname{sgn}(x-\xi) \ln 2 x-\xi ]$ $- \pi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} [H_0(\nu x-\xi ) + (2 + \operatorname{sgn}(x-\xi)) Y_0(\nu x-\xi )]$	$\phi_R \sim 4\sigma(x) \ln r$ $+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} [\operatorname{sgn}(x-\xi) \ln 2 x-\xi ]$ $+ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-\xi)} \beta(k) \coth \beta(k)$ <p style="text-align: center;"><math>\beta(k)</math> in (I-13)</p>	<p><math>\phi_D \sim</math> 同左</p>
<p>Case 2</p> <p><math>\kappa = O(\varepsilon^{-1})</math></p> <p><math>\nu = O(\varepsilon^{-1})</math></p>	$\phi_0 \sim 4\sigma(x) \ln r$ $+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} \cdot [\operatorname{sgn}(x-\xi) \ln 2 x-\xi ]$ <p style="text-align: center;"><math>+ F_w(x, y, z)</math></p> <p style="text-align: center;"><math>F_w(x, y, z)</math> in (I-15)</p>	$\phi_R \sim 4\pi i e^{\varepsilon z - i\varepsilon y} \{\sigma(x) - 2\tau y \sigma'(x)\}$ <p style="text-align: center;">zero forward speed</p> $\phi_R \sim 4\pi i e^{\varepsilon z - i\varepsilon y} \sigma(x)$	$\frac{\omega U}{g} < \frac{1}{4} \quad (\sigma(x) = \gamma(x) e^{-i\varepsilon x})$ $\phi_D \sim -4 \frac{\sqrt{\pi \kappa}}{\sqrt{2(1+2\tau)}} e^{-i\varepsilon x + \varepsilon z} e^{-\pi i/4} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}$ $- 4\pi \frac{(1+\tau)}{(1+2\tau)\sqrt{2}} e^{-i\varepsilon x + \nu(1+\tau)^2 z} \gamma(x)$ $+ i\pi \frac{\sqrt{2}(1-A)^2}{\sqrt{A(1-2\tau-A)(1-2\tau-2\tau^2-A)}} e^{-i\varepsilon x + \nu/4(1-A)^2 z} \gamma(x)$ $+ \pi \frac{\sqrt{2}(1+A)^2}{\sqrt{A(1-2\tau+A)(1-2\tau-2\tau^2+A)}} e^{-i\varepsilon x + \nu/4(1+A)^2 z} \gamma(x)$ $+ 4\pi \kappa y e^{-i\varepsilon x + \varepsilon z} \gamma(x) - 2e^{-i\varepsilon x} \gamma(x) \cdot \int_0^{\infty} dv \frac{v e^{-\varepsilon y \sqrt{1+v^2}}}{\sqrt{1+v^2}} \left\{ \frac{e^{i\varepsilon z v}}{v+i} + \frac{e^{-i\varepsilon z v}}{v-i} \right\}$
<p>Case 3</p> <p><math>\kappa = O(\varepsilon^{-1})</math></p> <p><math>\nu = O(1)</math></p>	$\phi_0 \sim 4\sigma(x) \ln r$ $+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} \cdot [\operatorname{sgn}(x-\xi) \ln 2 x-\xi ]$ $- \pi \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} \cdot [H_0(\nu x-\xi ) + (2 + \operatorname{sgn}(x-\xi)) Y_0(\nu x-\xi )]$	$\phi_R \sim 4\pi i e^{\varepsilon z - i\varepsilon y} \{\sigma(x) - 2\tau y \sigma'(x)\}$	$\frac{\omega U}{g} > \frac{1}{4} \quad A(\tau)$ <p style="text-align: right;">in (II-11)</p> $\phi_D \sim -4 \frac{\sqrt{\pi \kappa}}{\sqrt{2(1+2\tau)}} e^{-i\varepsilon x + \varepsilon z} e^{-i\varepsilon/4} \int_{-\infty}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}}$ $+ 4\pi \gamma(x) e^{-i\varepsilon x} \left\{ \kappa y e^{\varepsilon z} \frac{(1+\tau)^2}{\tau(1+2\tau)\sqrt{2}} e^{\nu z(1+\tau)^2} \right\}$ $- 2e^{-i\varepsilon x} \gamma(x) \int_0^{\infty} dv \frac{v e^{-\varepsilon y \sqrt{1+v^2}}}{\sqrt{1+v^2}} \left\{ \frac{e^{i\varepsilon z v}}{v+i} + \frac{e^{-i\varepsilon z v}}{v-i} \right\}$
<p>Case 4</p> <p><math>\kappa = O(1)</math></p> <p><math>\nu = O(\varepsilon^{-1})</math></p>	$\phi_0 \sim 4\sigma(x) \ln r$ $+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} \cdot [\operatorname{sgn}(x-\xi) \ln 2 x-\xi ]$ <p style="text-align: center;"><math>+ F_w(x, y, z)</math></p> <p style="text-align: center;"><math>F_w(x, y, z)</math> in (I-15)</p>	$\phi_R \sim 4\sigma(x) \ln r$ $+ 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} [\operatorname{sgn}(x-\xi) \ln 2 x-\xi ]$ $+ \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-\xi)} \beta(k) \coth \beta(k)$ <p style="text-align: center;"><math>\beta(k)</math> in (I-13)</p> <p style="text-align: center;">Zero forward speed</p> $\phi_R \sim 4\sigma(x) \ln r + 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) \frac{d}{d\xi} \cdot [\operatorname{sgn}(x-\xi) \ln 2 x-\xi ]$ $- \pi \kappa \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \sigma(\xi) [H_0(\kappa x-\xi ) + Y_0(\kappa x-\xi ) - 2iJ_0(\kappa x-\xi )]$	<p><math>\phi_D \sim</math> 同左</p>

Table 3 Near Field Problem

<p>Case 1</p> <p><math>\kappa = O(1)</math></p> <p><math>\nu = O(1)</math></p>	<p>[L] <math>\Phi_{0yy} + \Phi_{0zz} = 0</math></p> <p>[H] <math>\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = \frac{U h_{0x}}{\sqrt{1+h_{0y}^2}}</math>  <math>[\varepsilon^{-1}\Phi_0] \quad [\varepsilon]</math></p> <p>[F] <math>\Phi_{0z} = 0</math></p> <p><math>\Phi_0 = O(\varepsilon^2) \quad f_0 = O(\varepsilon^2)</math></p>	<p>[L] <math>\Phi_{Ryy} + \Phi_{Rzz} = 0</math></p> <p>[H] <math>\frac{\partial \Phi_R}{\partial n} = \frac{i\omega(\zeta_3 - x\zeta_5)}{\sqrt{1+h_{0y}^2}}</math>  <math>[\varepsilon^{-1}\Phi_R] \quad [\delta]</math>  <math>+ \frac{(\zeta_3 - x\zeta_5)(h_{0y}\Phi_{0yz} - \Phi_{0zz}) - U\zeta_5}{\sqrt{1+h_{0y}^2}}</math>  <math>[\delta]</math></p> <p>[F] <math>\Phi_{Rz} = 0</math>  <math>\Phi_R = O(\varepsilon\delta) \quad f_R = O(\varepsilon\delta)</math></p>	<p>[L] <math>\Phi_{Dyy} + \Phi_{Dzz} = 0</math></p> <p>[H] <math>\frac{\partial \Phi_D}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_I}{\partial n}</math>  <math>[\varepsilon^{-1}\Phi_D] \quad [\delta]</math></p> <p>[F] <math>\Phi_{Dz} = -\Phi_{0zz}f_I</math></p> <p><math>\Phi_D = O(\varepsilon\delta) \quad f_D = O(\varepsilon\delta)</math></p>	<p><math>\phi_I = \frac{g}{\omega_0} a e^{-i\kappa x + \kappa z}</math></p> <p><math>f_I = -ia e^{-i\kappa x}</math></p> <p><math>\phi_I = O(\delta) \quad f_I = O(\delta)</math></p>
<p>Case 2</p> <p><math>\kappa = O(\varepsilon^{-1})</math></p> <p><math>\nu = O(\varepsilon^{-1})</math></p>	<p>[L]</p> <p>[H] <math>[\varepsilon^{-1}\Phi_0] = [\varepsilon^{3/2}]</math></p> <p>[F]</p> <p><math>\Phi_0 = O(\varepsilon^{5/2}) \quad f_0 = O(\varepsilon^3)</math></p>	<p>[L]</p> <p>[H] <math>[\varepsilon^{-1}\Phi_R] = [\varepsilon^{1/2}\delta] + [\varepsilon^{3/2}\delta]</math></p> <p>[F] <math>g\Phi_{Rz} - \omega^2\Phi_R</math>  <math>[\varepsilon^{1/2}\delta]</math>  <math>= -2i\omega U\Phi_{Rx} - 2i\omega\Phi_{0y}\Phi_{Ry} + i\omega\Phi_{0zz}\Phi_R</math>  <math>[\varepsilon^{3/2}\delta]</math></p> <p><math>\Phi_R = O(\varepsilon^{3/2}\delta) + O(\varepsilon^{5/2}\delta) \quad f_R = O(\varepsilon\delta) + O(\varepsilon^2\delta)</math></p>	<p>[L] <math>\Phi_{Dyy} + \Phi_{Dzz} = \kappa^2\Phi_D</math></p> <p>[H] <math>[\varepsilon^{-1}\Phi_D] = [\varepsilon^{-1/2}\delta]</math></p> <p>[F] <math>(i\omega + U\frac{\partial}{\partial x})^2\Phi_D</math>  <math>+ g\Phi_{Dz} = 0</math></p> <p><math>\Phi_D = O(\varepsilon^{1/2}\delta) \quad f_D = O(\delta)</math></p>	<p><math>\phi_I = O(\varepsilon^{1/2}\delta) \quad f_I = O(\delta)</math></p>
<p>Case 3</p> <p><math>\kappa = O(\varepsilon^{-1})</math></p> <p><math>\nu = O(1)</math></p>	<p>[L]</p> <p>[H] <math>[\varepsilon^{-1}\Phi_0] = [\varepsilon]</math></p> <p>[F]</p> <p><math>\Phi_0 = O(\varepsilon^2) \quad f_0 = O(\varepsilon^2)</math></p>	<p>[L]</p> <p>[H] <math>[\varepsilon^{-1}\Phi_R] = [\varepsilon^{1/2}\delta] + [\varepsilon\delta]</math></p> <p>[F] <math>g\Phi_{Rz} - \omega^2\Phi_R</math>  <math>[\varepsilon^{1/2}\delta]</math>  <math>= -2i\omega U\Phi_{Rx} - 2i\omega\Phi_{0y}\Phi_{Ry} + i\omega\Phi_{0zz}\Phi_R</math>  <math>[\varepsilon\delta]</math></p> <p><math>\Phi_R = O(\varepsilon^{3/2}\delta) + O(\varepsilon^2\delta) \quad f_R = O(\varepsilon\delta) + O(\varepsilon^{3/2}\delta)</math></p>		
<p>Case 4</p> <p><math>\kappa = O(1)</math></p> <p><math>\nu = O(\varepsilon^{-1})</math></p>	<p>[L]</p> <p>[H] <math>[\varepsilon^{-1}\Phi_0] = [\varepsilon^{3/2}]</math></p> <p>[F]</p> <p><math>\Phi_0 = O(\varepsilon^{5/2}) \quad f_0 = O(\varepsilon^3)</math></p>	<p>[L]</p> <p>[H] <math>[\varepsilon^{-1}\Phi_R] = [\delta] + [\varepsilon^{1/2}\delta]</math></p> <p>[F] <math>\Phi_{Rz} = 0</math></p> <p><math>\Phi_R = O(\varepsilon\delta) + O(\varepsilon^{3/2}\delta) \quad f_R = O(\varepsilon\delta) + O(\varepsilon^{3/2}\delta)</math></p>	<p>[L] <math>\Phi_{Dyy} + \Phi_{Dzz} = 0</math></p> <p>[H] <math>[\varepsilon^{-1}\Phi_D] = [\delta]</math></p> <p>[F] <math>\Phi_{Dz} = 0</math></p> <p><math>\Phi_D = O(\varepsilon\delta) \quad f_D = O(\varepsilon\delta)</math></p>	<p><math>\phi_I = O(\delta) \quad f_I = O(\delta)</math></p>