船舶技術研究所報告 第14巻 第6号 研究報告（昭和52年11月）

プロペラの基礎理論—Ⅲ

(discrete loading function によるプロペラ揚力面の二つの解法)

花岡達郎*

Fundamental Theory of a Screw Propeller—Ⅲ

(Two Numerical Methods for Solving Propeller Lifting-Surface Problems by the Use of Discrete Loading Functions)

By

Tatsuro HANAOKA

Two numerical methods are given for calculating the hydrodynamic forces acting on a screw propeller in both uniform and nonuniform flow. The principle and techniques follow lifting surface theory of wings using discrete loading functions. The methods are developed with the purpose of obtaining more accurate pressure distributions in the neighbourhood of leading-edge than others. One is doublet-lattice method and the other is quasi-finite-panel method. In the former Lan's theory is applied to the selections of both loading and upwash points. In the latter the radial pressure distribution is assumed to be stepwise constant while the distribution is assumed to be given by Birnbaum's elementary functions in chordwise. The hydrodynamic forces is evaluated by introducing leading-edge suction in relation to induced drag in the lifting-surface conception.

まえがき

前著執筆以来6年を経過したが，その間，電子計算機の普及と飛行機翼の揚力面理論の発展に刺激されて，プロペラ理論の応用はかなりの活況を呈している。中でも非定常プロペラ理論への関心の高まりはプロペラ理論応用の一つの方向を示すもののように思われるが，その計算法となるとプログラム化されたものは現在二三種，というように理論の進展は少ない。一方，飛行機翼の揚力面理論では discrete loading function を用いる方法が発展し，計算技術上の問題点は殆んど解明されたかに見える。このような現状を調査した上で[1]，プロペラ揚力面を discrete loading function によって解く方法を考えたのが本文記載の解析である。ここには doublet-lattice 法[2]と翼弦方向には mode function を用いる準 discrete function 法の二つが示してあるが，前者の簡便さがよく理解できると思う。doublet-lattice 法は vortex-lattice 法の一種，定ピッチ非線型の場合に利用できるもので，理論の著しい明快さに特徴がある。

飛行機翼の vortex-lattice 法は簡便さも然ることながら，綿密な精度検定によって信頼性が保証されたため現在広範に利用されている方法であるが[3]，プロペラ揚力面にそのまま流用することには問題がある。プロペラでは性能計算，cavitation 特性の両面から，特に前縁附近の圧力差を正確に求める必要があるのに，1/4〜3/4弦長法の vortex-lattice 法ではそこに欠陥があるからである[4]。本文では特にその点に留意し，難点を避ける方法を採用している。

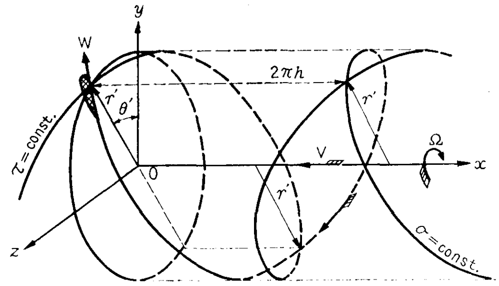
* 運動性能部　原稿受付　昭和52年6月28日

プロペラ揚力面の積分方程式ではまず核関数が積分表示の形をとり，それに揚力面上の面積分が重なるので，積分は3重になる。mode function 法ではこの3重積分はすべて数値積分に頼るわけで，その際核関数の特異性をめぐって難問が幾重にも重なる。discrete function 法の利点は3重積分のうち面積分が解析的に行える点にある。中でも翼幅方向の積分が可能なことは重要で，このため mode function 法で遭遇する対数特異性の難問はおのずから解消する。即ちBAC法[5] が翼幅方向の積分を先に行って上記問題を避けているのと似た効果をもたらすわけである。したがって翼幅方向の積分を行ったあとでは圧力差の翼弦分布をEVD法[6]のように折線で近似させようと，mode function を用いようと，計算量には大きな違いはない。本文で finite panel 法の代りに準 discrete function 法を採用したのはこの理由による。プロペラ翼では吹上げ分布が連続的であるから，この方がEVD法より有利のように思う。

内　容

記　号

$x,\ r,\ \theta$	任意点の座標（円壔座標）
$x',\ r',\ \theta'$	揚力面上の doublet の座標
ρ	流体密度
$\boldsymbol{p}$	流体圧力
$\phi=-\boldsymbol{p}/\rho$	圧力場のポテンシャル
Φ	速度ポテンシャル
ν	振動率
$\Phi=\Phi_0 e^{i\nu t}$	非定常の速度ポテンシャル
$\Pi=\boldsymbol{p}_l-\boldsymbol{p}_u$	揚力上の圧力差（荷重分布）
δn	揚力面への法線素片（揚力の働く方向を正とする）



図—1　螺　旋　座　標

w	吹上げ
$w=w_0 e^{i\nu t}$	非定常の吹上げ
V	プロペラの前進速度（x 軸の負の方向に進む）
Ω	プロペラの回転角速度（x 軸を軸に負の向きに廻転する）
r_0	プロペラ半径
r_b	ボス半径
l	翼数
s	渦の分布する螺旋に沿って測った長さ
w_I	翼の位置における定常自由渦の吹上げ
$2\pi h$	螺旋渦のピッチ

$w_a=-w_I\cos\varepsilon_I$

$w_t=w_I\sin\varepsilon_I$

$\overline{w_a}$	w_a の半径方向の平均値
$\overline{w_t/r}$	w_t/r の半径方向の平均値

$h=(V+\overline{w_a})/(\Omega+\overline{w_t/r})$

$r/h=\mu,\ r'/h=\mu'$

$\sin\varepsilon_I=1/\sqrt{1+\mu^2}$, $\cos\varepsilon_I=\mu/\sqrt{1+\mu^2}$

$V^*=V+\overline{w}_a,\ \Omega^*=\Omega+\overline{w_t/r}$

$W^*=V^*\sqrt{1+\mu^2},\ W^{*\prime}=V^*\sqrt{1+\mu'^2}$

$p=\nu/\Omega,\ p^*=\nu/\Omega^*$

$\gamma^*=\Pi/(\rho W^*)$

$\gamma_0{}^*=\Pi_0/(\rho W^*)$

$x=f(\theta,r)$　プロペラ翼の平均矢高面の方程式

$\sigma=\theta-x/h,\ \tau=\theta+x/h$

$\sigma'=\theta'-x'/h,\ \tau'=\theta'+x'/h$

1 序論（基礎的事項）

1.1 速度ポテンシャル

プロペラ揚力面SのところにΠの圧力差があるときの圧力場のポテンシャルは，そこにモーメントが Π の doublet を分布させることで得られる。したがって定常プロペラの場合は

$$\phi(\tau,\sigma,\mu)=\frac{1}{4\pi\rho h}\sum_{m=0}^{l-1}\iint_S \Pi(s',r')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)ds'dr' \tag{1.1.1}$$

である。ただし

$$hR=\sqrt{(x-x')^2+r^2+r'^2-2rr'\cos(\theta-\theta'-2m\pi/l)}$$
$$h=V^*/\Omega^* \tag{1.1.2}$$

とする。

非定常プロペラで対称振動のときの圧力のポテンシャルの complex amplitude は

$$\phi_0(\tau,\sigma,\mu)=\frac{1}{4\pi\rho h}\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\iint_S \Pi_0(s',r')\times\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)ds'dr' \tag{1.1.3}$$

のように (1.1.1) とほぼ同形である。この式の p は正整数で，ν を振動率，Ω をプロペラ回転角速度とすると $p=\nu/\Omega$ である。又 s' は螺線に沿って測った長さとする。

螺旋座標 τ, σ, μ を用いると

$$R=\sqrt{(\tau-\tau'-\sigma+\sigma')^2/4+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\times\cos\{(\tau-\tau'+\sigma-\sigma'-4m\pi/l)/2\}}$$
$$\frac{\partial}{\partial n'}=\frac{1}{h\sqrt{1+\mu'^2}}\left\{\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\sigma'}-\left(\mu'-\frac{1}{\mu'}\right)\times\frac{\partial}{\partial\tau'}\right\}$$
$$ds'=h\sqrt{1+\mu'^2}d\tau'/2 \tag{1.1.4}$$

である。

定ピッチ非線型理論では圧力場より速度場への変換は単純な積分によって行うことができる。即ち定常プロペラでは

$$\Phi(\tau,\sigma,\mu)=\frac{1}{2\Omega^*}\int_{-\infty}^{\tau}\phi(\boldsymbol{T},\sigma,\mu)d\boldsymbol{T} \tag{1.1.5}$$

非定常プロペラでは

$$\Phi_0(\tau,\sigma,\mu)=\frac{1}{2\Omega^*}\int_{-\infty}^{\tau}e^{-\frac{ip^*}{2}(\tau-\boldsymbol{T})}\phi_0(\boldsymbol{T},\sigma,\mu)d\boldsymbol{T} \tag{1.1.6}$$

である。(1.1.5)に(1.1.1)を，又(1.1.6)に(1.1.3)を代入すれば，それぞれの速度ポテンシャルが得られる。

圧力差 Π と束縛循環密度 γ^* の関係は定常プロペラでは

$$\Pi=\rho W^*\gamma^* \tag{1.1.7}$$

非定常プロペラでは

$$\Pi_0=\rho W^*\gamma_0^* \tag{1.1.8}$$

である[7),8)]。ただし Π_0, γ_0^* はそれぞれの complex amplitude とする。

1.2 対称プロペラの非定常対称流場

プロペラのそれぞれの翼の圧力差が時間的に無関係に変動する場合の揚力面を計算することは，電子計算機の発展した現在でも中々大変で，計算が行われることは殆んどないが，対称振動の計算の方は目下進展途上にある。この対称振動の考えは非定常プロペラ理論の基礎になるものであるから，定ピッチ非線型のように非線型要素の入るものでどう考えるか，仮説の基本を明らかにしておく必要があるだろう。

対称プロペラで，回転周期が流場の振動周期の整数倍のときを対称振動という。この場合はどの翼でもある定まった位置にきたとき流場は合同になる。逆に流場を回転軸のまわりに翼間角の整数倍回転すると，位相遅れが現われるだけで流場は相似になる。例えばプロペラ回転面における不均一流が円周方向に p の振動率で $ic_p(r)e^{-ip\theta}$ のように調和振動しているものとする。これを角速度Ωで回転しているプロペラから見るときは，θ の代りに $\theta-\Omega t$ で置き換えればよい。そうすると，プロペラ翼への流入角は振動率 $p\Omega$ で変動し，したがってプロペラの流場全体は $p\Omega$ の振動率で振動していることになるから，回転周期と流場の振動周期の比率は p で整数，対称振動である。各翼に対する流入角はプロペラの一回転の間に p 回変動し，したがって位相は $2p\pi$ 進む。これは各翼間では $2p\pi/l$ の進みになる。

この流場の速度ポテンシャルの complex amplitude を定ピッチ非線型の仮定のもとに書いたのが，(1.1.3)，(1.1.6) である。

その式の $1/R$ を Green 関数

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i/2(\lambda+n)(\tau-\tau')-i/2(\lambda-n)(\sigma-\sigma')-i2nm\pi/l}\times I_n(|\lambda|\mu)K_n(|\lambda|\mu')d\lambda,\quad \mu'>\mu \tag{1.2.1}$$

で置き換える[8)]。ただし I_n, K_n は変形ベッセル関数である。記述を簡単にするため仮想摩擦 $\boldsymbol{\mu}$ を導入する[9)]。そして τ, σ を円壔座標 θ, x に変え，更に

$$\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2(p+n)m\pi/l}=\begin{pmatrix}0, & p+n\neq kl\\ l, & p+n=kl\end{pmatrix} \tag{1.2.2}$$

(k は 0 を含む整数)

の公式を用いて m の総和を行うと

$$\Phi_0(x,r,\theta)=\frac{l}{4\pi^2\Omega^*h^2\rho}\iint_S\frac{\Pi_0}{\sqrt{1+\mu'^2}}ds'dr'$$
$$\times\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu'\lambda-(lk-p)/\mu'}{\lambda+lk-p+p^*-i\mu}I_{lk-p}(|\lambda|\mu_<)$$
$$\times K_{lk-p}(|\lambda|\mu_>)\,e^{i\lambda(x-x')/h+i(lk-p)(\theta-\theta')}\,d\lambda \tag{1.2.3}$$

となる。ただし $\mu_>$, $\mu_<$ はそれぞれ μ, μ' のうち大きい方および小さい方を意味する。

この流場を二翼間の整数倍プロペラの回転方向に回してみる。それには (1.2.3) の θ の代りに $\theta+2m\pi/l$ と置けばよい。その結果は容易にわかるように，(1.2.3) と全く相似，ただ $2mp\pi/l$ の位相遅れがあるだけである。即ち (1.1.6) は対称振動の流場である。この式は p と p^* をパラメターとするだけで，振動率は表面に現われていない。

次に対称流場における p, p^* と ν の関係を明確にしておく。振動率 ν で調和振動をする対称流場の速度ポテンシャルの complex amplidute を渦理論で書くと

$$\Phi_0=\frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\int_{r_b}^{r_0}dr'\int_{S_1}^{\infty}\int_{S_1}^{\tilde{s}}$$
$$\times\gamma_0(s')ds'\frac{\partial}{\partial n''}\left(\frac{1}{R}\right)d\tilde{s} \tag{1.2.4}$$

である。この式の p は ν/Ω とする。γ_0 は循環密度の complex amplitude, s は渦の分布する常螺線に沿う長さを表わし，s_1 は翼前縁の s 座標を意味する。この螺旋面のピッチ $2\pi h$ の h は (1.1.2) に示すものとし，$\partial/\partial n''$ はその面に対する法線微分である。

γ^* を束縛渦の循環密度，γ を束縛渦，自由渦を一諸にした全循環の密度とし，$\gamma_f=\gamma-\gamma^*$ と書く。定ピッチ非線型理論はこの渦が常螺線に沿って W^* の流速で流されると仮定するものであるから，Prandtl の渦保存則により

$$\frac{\partial\gamma^*}{\partial t}+\frac{\partial\gamma_f}{\partial t}+W^*\frac{\partial\gamma_f}{\partial s}=0 \tag{1.2.5}$$

の関係が成立つと考えてよい。この式を γ_f について解くと

$$\gamma_f=\gamma-\gamma^*=-\frac{1}{W^*}\int_{s_1}^{s}\gamma'\left(s',t-\frac{s-s'}{W^*}\right)ds' \tag{1.2.6}$$

ただし　$\gamma'=\partial\gamma^*/\partial t$

が得られる。両辺を s で積分して，循環の式にすると

$$\int_{s_1}^{s}\gamma(s')\,ds'-\int_{s_1}^{s}\gamma^*(s')ds'=-\frac{1}{W^*}$$
$$\times\int_{s_1}^{s}ds''\int_{s_1}^{s''}\gamma'\left(s',t-\frac{s''-s'}{W^*}\right)ds'$$

であるが，右辺は Dirichlet 変換によって積分順序を交換すると，積分が行えて

$$=\int_{s_1}^{s}\gamma^*\left(s',t-\frac{s-s'}{W^*}\right)ds'-\int_{s_1}^{s}\gamma^*(s')ds'$$

となる。よって

$$\int_{s_1}^{s}\gamma(s')ds'=\int_{s_1}^{s}\gamma^*\left(s',t-\frac{s-s'}{W^*}\right)ds' \tag{1.2.7}$$

が得られる。これは γ と γ^* の関係式である。

(1.2.7) の両辺に $\rho(\partial/\partial t+W^*\partial/\partial s)$ の演算を行うと

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\int_{s_1}^{s}\gamma(s',t)ds'+\rho W^*\gamma=\rho w^*\gamma^*(s,t) \tag{1.2.8}$$

である。一方 Euler の運動方程式を積分すると

$$\boldsymbol{p}=-\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{\rho}{2}w^2+\text{const.}$$

である。ただし $\boldsymbol{p}$ は圧力，w は流速を意味する。圧力，流速等の翼上下面における値を脚符 u, l を付して表わすことにすると，上式より

$$\Pi(s,t)=\boldsymbol{p}_l-\boldsymbol{p}_u=\rho\frac{\partial}{\partial t}(\Phi_u-\Phi_l)$$
$$+\frac{\rho}{2}(w_u+w_l)(w_u-w_l) \tag{1.2.9}$$

である。近似的には

$W^*=(w_u+w_l)/2$,　　$\gamma=w_u-w_l$

としてよいから，(1.2.9) は

$$\Pi(s,t)=\rho\frac{\partial}{\partial t}\int_{s_1}^{s}\gamma(s',t)ds'+\rho W^*\gamma$$

のように表わされる。この式の右辺は (1.2.8) の左辺と等しいから，それを等置すると

$$\Pi(s,t)=\rho W^*\gamma^* \tag{1.2.10}$$

のように Kutta-Joukowski の定理と同形の式が得られる。(1.1.8) はこれの調和振動の場合である。

流場が振動率 ν で調和振動をしている場合は

$$\gamma(s,t)=\gamma_0(s)e^{i\nu t},\quad \gamma^*(s,t)=\gamma_0^*(s)e^{i\nu t} \tag{1.2.11}$$

のように表わされるから，(1.2.7) は

$$\int_{s_1}^{s}\gamma_0(s')ds'=\int_{s_1}^{s}\gamma_0^*(s')e^{-i\nu/W^*(s-s')}ds' \tag{1.2.12}$$

となる。これを (1.2.4) に代入すると，速度ポテンシャルは

$$\Phi_0=\frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\int_{r_b}^{r_0}dr'\int_{s_1}^{\infty}\int_{s_1}^{\tilde{s}}\gamma_0{}^*(s')$$

$$\times e^{-i\nu/W^*(s-s')}ds'\frac{\partial}{\partial n''}\left(\frac{1}{R}\right)d\tilde{s} \tag{1.2.13}$$

となる。 Dirichlet 変換を用いて (1.2.13) の s', $\tilde{s}$ の積分順序を交換し，γ^* が翼面外で 0 であることを考慮すると

$$\Phi_0=\frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\int_{r_b}^{r_0}dr'\int_{s_1}^{s_2}\gamma_0{}^*(s')\,ds'$$

$$\times\int_{s'}^{\infty}e^{-i\nu/W^*(\tilde{s}-s')}\frac{\partial}{\partial n''}\left(\frac{1}{R}\right)d\tilde{s} \tag{1.2.14}$$

と書かれる。ただし s_2 は翼後縁の s 座標である。(1.1.4) に示した ds と $d\tau$ の関係を用いて変数 $\tilde{s}$ を $\tilde{\tau}$ に変えると

$$\frac{\nu}{W^*}(\tilde{s}-s')=\frac{\nu h(\tilde{\tau}-\tau')}{2V^*}$$

である。(1.2.14) の積分変数 $\tilde{\tau}$ を $\tilde{\tau}-\tau'=\tau-\boldsymbol{T}$ によって $\boldsymbol{T}$ に変える。そこで

$$\frac{\nu h}{V^*}=p^* \tag{1.2.15}$$

と書くと，(1.2.14) は (1.1.6) に一致し，上に示したように対称流場になる。(1.2.15) より p^* は振動率 ν と $\nu=p^*\Omega^*$ の関係にあることがわかるが，一方 (1.2.12) にさかのぼると，調和波状循環の分布状態を表わすパラメターということになる。線型理論[9] では $p=p^*$ であるから，理論は単純明快である。前著[7] の非定常プロペラ理論ではその明快さを保つため p, p^* を p^* 一つに統一したが，それでは起振力の計算が複雑になる。そのため本文では p, p^* を異なるものとして表わした。少し込み入った形になったが，非線型理論の宿命というものだろう。非線型要素をもつと精密に取入れると，(1.1.6) のような単純な積分変換ではすまされないが，圧力場が (1.1.3) の形ならば，対称振動の流場が形成される。

1.3 境界条件と積分方程式

揚力面上の境界条件は流れが翼面に沿って流れるということで与えられるものであるから，揚力面上の吹上げ w は翼の幾何学的形状とそれへの流入速度が与えられれば定まる。

揚力面の吹上げ w は，定常プロペラでは

$$w=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\sigma=\sigma'} \tag{1.3.1}$$

非定常プロペラでは

$$w_0=\left.\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}\right|_{\sigma=\sigma'} \tag{1.3.2}$$

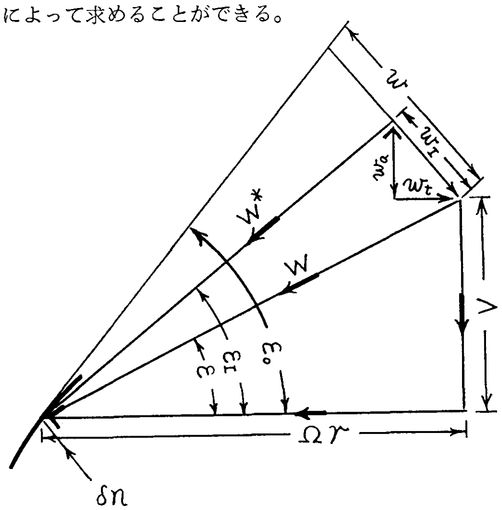
によって計算する。又螺旋渦のピッチを定める w_a, w_t は

$$w_I=\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\substack{\sigma=\sigma'\\ \tau=\tau'}} \tag{1.3.3}$$

とすると

$$w_a=-w_I\cos\varepsilon_I,\quad w_t=w_I\sin\varepsilon_I \tag{1.3.4}$$

によって求めることができる。



図—2 流速ベクトル図

揚力面上の境界条件は，定常プロペラでは

$$w=-W^*\sin(\varepsilon_0-\varepsilon) \tag{1.3.5}$$

である。

非定常プロペラではまずプロペラ回転面における伴流分布を円周方向に調和分析しておく必要がある。伴流の軸方向成分 v_a および接線方向成分 v_t を

$$\left.\begin{aligned} v_a&=R_e\sum_{p=1}^{\infty}\{ic_p(r)+d_p(r)\}e^{-ip\theta}\\ v_t&=R_e\sum_{p=1}^{\infty}\{ie_p(r)+f_p(r)\}e^{-ip\theta}\end{aligned}\right\} \tag{1.3.6}$$

のように表わす。この式の θ を $\theta-\Omega t$ で置き変えると，プロペラ翼から見て伴流が調和振動をする形に表わされることになる。更に揚力面上の値にするため，$\theta=(\tau+\sigma)/2$ によって θ を螺旋座標に変える。そこで $\sigma=0$ とすれば，第 1 翼，即ち $m=0$ の翼の上の値が得られる。伴流中の非定常プロペラの境界条件は

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\sigma=\sigma'}=-v_a\cos\varepsilon_I+v_t\sin\varepsilon_I \tag{1.3.7}$$

であるから，一つの p に対する吹上げは

$$w_0=\{-(ic_p+d_p)\cos\varepsilon_I+(ie_p+f_p)\sin\varepsilon_I\}e^{-ip\tau/2} \tag{1.3.8}$$

である。

(1.3.1) の w に (1.3.5) の右辺を代入したものが定常プロペラの積分方程式であり，(1.3.2)，(1.3.8) について同様にしたものが非定常プロペラの積分方程式である。w および w_0 の表示式は

$$w=\frac{1}{8\pi\rho h\Omega^*}\sum_{m=0}^{l-1}\frac{\partial}{\partial n}\int_{-\infty}^{\tau}d\boldsymbol{T}\iint_S \Pi(s',r')\times\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)\bigg|_{\sigma=\sigma'}ds'dr' \tag{1.3.9}$$

$$w_0=\frac{1}{8\pi\rho h\Omega^*}\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\frac{\partial}{\partial n}\int_{-\infty}^{\tau}e^{-ip^*/2(\tau-T)}d\boldsymbol{T}\times\iint_S \Pi_0(s',r')\frac{\partial}{\partial n'}\left(\frac{1}{R}\right)\bigg|_{\sigma=\sigma'}ds'dr' \tag{1.3.10}$$

である。$\partial/\partial n$ の中の $\partial/\partial\tau$ を $\partial/\partial\boldsymbol{T}$ に置き換えれば，$\partial/\partial n$ の演算は積分記号内に移すことができる。よって

$$w(\tau,\mu)=\frac{1}{2\Omega^*}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{\partial\phi}{\partial n}\bigg|_{\sigma=\sigma'}d\boldsymbol{T} \tag{1.3.11}$$

$$w_0(\tau,\mu)=\frac{1}{2\Omega^*}\int_{-\infty}^{\tau}e^{-ip^*/2(\tau-T)}\frac{\partial\phi_0}{\partial n}\bigg|_{\sigma=\sigma'}d\boldsymbol{T} \tag{1.3.12}$$

のように表わされる。この式の $\partial/\partial n$ は

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{1}{h\sqrt{1+\mu^2}}\left\{\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial\sigma}-\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{T}}\right\}$$

である。

1.4 螺旋面の幾何と翼素形状

柱面や錐面のように直線が動いてできる面を線織面というが，その中で一定直線 x と直交し，しかも或一定の法則で動く直線によって描かれる線織曲面を正コノイドという。即ちこの曲面は

$$\left.\begin{aligned}x&=g(\varphi)\\ y&=r\cos\varphi\\ z&=r\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{1.4.1}$$

の方程式で表わされる。

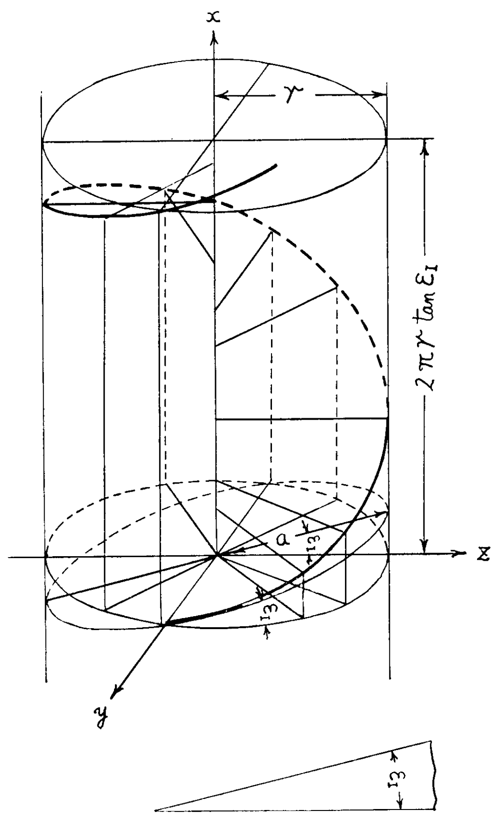
一方曲線 C が一定角速度で回転しながら定直線 x の方向へ進むとき作る曲面を螺旋面という。この曲面を表わす方程式は

$$\left.\begin{aligned}x&=f(r)+k\varphi,\quad k=\text{const.}\\ y&=r\cos\varphi\\ z&=r\sin\varphi\end{aligned}\right\} \tag{1.4.2}$$

である。ただし C の方程式を $x=f(y)$ とする。特に C が直線でそれが x と直交しているときできる曲面 ($f(r)=0$) を常螺旋面という。常螺旋面は正コノイドの線織面で同時に極小曲面であるが，逆に線織曲面で極小曲面であるのはこの場合に限る。

以上のようなことが岩波「数学辞典」(第2版 p. 448) の螺旋面のところに書いてある。極小曲面というのは，針金で空間曲線の枠を作り，それを石けん液に浸して静かに引き上げるとき，そこに張られる面であって，この枠を張る膜の中で曲面積が最小となるものである。極小曲面では平均曲率は常に0である。

(1.4.2) で $r=$const. とおいたときできる曲線を常螺線 (helix) という。円柱面上の測地線は常螺旋になる。動径 r は常螺線の主法線であるから，常螺線の接線とその接点を通る動径を含む面は常螺線の接触平面である。ところで一つの角が ε_I に等しい直角三角形を半径 r の直円壔に巻きつけ，角 ε_I の頂点を x, y, z 座標の点 (o, r, o) にとり (図―3)，ε_I をはさむ斜



図―3 常 螺 旋 面

辺でない一辺が yz 面上にある半径 r の円に重なるようにするとき，斜辺の描く曲線は方程式

$$x=r\varphi\tan\varepsilon_I,\quad y=r\cos\varphi,\quad z=r\sin\varphi$$

を満たすので，それは常螺線となる。

常螺線の接触平面が螺線のまきつく円壔を切る面は楕円であり，その接点は楕円の周の短軸上の点であるから，常螺線の曲率はこの楕円の短軸上の曲率に等しい。楕円の長半径を a，短半径を r としたときの短軸上の曲率半径 ρ は

$$\rho=a^2/r \tag{1.4.3}$$

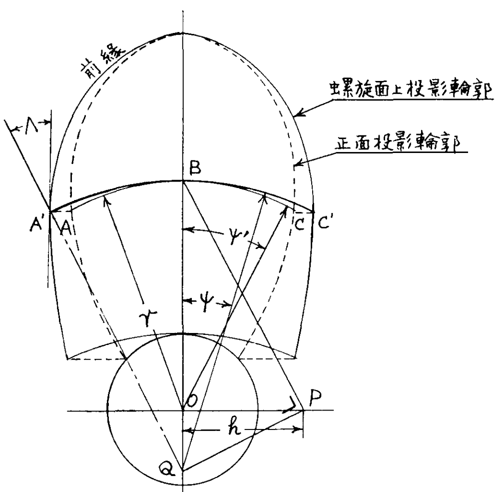
である。図—3を見ると明らかなように

$$a=r\sec\varepsilon_I \tag{1.4.4}$$

であるから，これを (1.4.3) に代入すると

$$\rho=\frac{r}{\cos^2\varepsilon_I}=\frac{r(1+\mu^2)}{\mu^2}=\frac{h^2+r^2}{r} \tag{1.4.5}$$

となる。



図—4 プロペラ翼の基準面
(プロペラ前方より見る)

図—4の点線は0を回転軸とするプロペラ翼輪郭の正面投影図である。A，CとBをそれぞれ翼輪郭および縦軸と半径 r の円との交点とする。横軸上，0より h の距離にある点をP，更にPを通りBPに直交する直線が縦軸と交わる点をQとすると

$$r\times\overline{BQ}=\overline{BP}^2=h^2+r^2$$

であるから，(1.4.5) により，$\overline{BQ}=\rho$ となる。したがって B 点近傍の常螺線は Q を中心とし，$\overline{BQ}$ を半径とする円で近似的に表わされる。A, C より引いた横軸に平行な線とこの常螺線との交点をそれぞれ A', C' とすると，曲線 $A'BC'$ は翼素 AC の常螺線への投影線で，この線の法線はプロペラ回転軸と直交する。この A', C' に相当する点を翼根より翼端にわたって求め，それを結んだものが，翼輪郭の定ピッチ螺旋面への投影面，即ちプロペラ揚力面理論の場合の基準面(圧力差を分布させる面)に該当する。以上のようなプロペラの展開面の書き方の幾何学は Taylor の "The Speed and Power of Ships" のような参考書の中に書かれている。

翼素への流入は A' B C' の曲線に沿うと考えるので，discrete function 法の box の境界はこの線にならって作ることになる。次章以下の理論は曲線 A' B C' への法線で翼弦方向に box 分割を行うという形で展開される。この分割法は飛行機翼の矩形 box 分割に相当するもので，box 内で半径方向に Π が一定と仮定すると，(1.3.9) および (1.3.10) の r' の積分を初等的に行うことができる。このことが理論全般に及ぼす影響は極めて大きい。

普通のプロペラでは多い少ないはあるが rake angle と skew back が付くのが一般である。幾何学的に見ると，これらはそれぞれ飛行機翼の上反角および後退角 (sweep angle) に対応するが，工学的な類似点は無い。

skew back は上に述べた常螺旋面の幾何学でよいけれども，rake angle 付プロペラは飛行機の nonplanar wing に対応し，プロペラ流場の渦の分布面を回転軸を軸とする円壔面で切ったところは常螺線であるが，渦面全体は常螺旋面にならない。したがって積分方程式は 1.3 節のままではなく，$\partial/\partial n$ を (1.1.4) の代りに，rake angle δ を含む

$$\frac{\partial}{\partial n'}=\frac{\cos\delta}{h\sqrt{1+\mu'^2}}\left\{\left(\mu'+\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\sigma'}-\left(\mu'-\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\tau'}\right\}+\frac{\sin\delta}{h}\frac{\partial}{\partial\mu'} \tag{1.4.6}$$

として核関数を導く必要がある。一方境界条件については半径方向の流速を無視する限り (1.3.5), (1.3.8) のままでよく (1.3.1), (1.3.2) の $\partial/\partial n$ は (1.1.4) でよい。

積分方程式を前記の box 分割で計算する場合，r' の積分はやはり初等的に行えるので，演算子行列の計算は次章以下に示す方法とあまり変らない手数で求めることができる。rake angle, skew back 何れにしても，揚力線理論として，それが無視し得ない程大きいときは Munk の定理III[8] が成立たないことは心にと

どめて置く必要がある。ただ螺旋渦のピッチを定める誘導速度 w_I は翼近傍における渦面上の平均値という意味をもっているので，(1.3.3) のままでよい（この場合の $\partial/\partial n$ は (1.1.4) の意味である）。

1.5 前縁推力と翼素の誘導抵抗

揚力面の誘導抵抗分布の計算は最近，一部の関心の的となっている[10),11)]。一つにはこれが揚力面の計算精度の指標とも見られるからである。その目的が何れにあるにせよ，飛行機翼ではこの課題は目下のところ二義的であることは明白である。一方プロペラについてはこれは重要で，推力，トルクの算出に誘導抵抗分布の計算は欠かせない。前著[12)]で一応揚力面としてのプロペラ性能の計算式を示したが，翼素の前縁推力の項に sweep angle の効果が落ちていた。特に新しいことは含まれないが，以下薄翼の誘導抵抗について若干の解説を行う。

揚力面の抵抗成分の表示式には一般に前縁推力の項が含まれる。これは多分に数学的なもので，線型理論と非線型理論の橋渡しがその主要な役目と理解しておくのがよいだろう。

完全流体中の2次元翼には抵抗成分は存在しない。薄翼の場合でも前後縁で循環密度が0ならば，抵抗成分は0である。ところが循環密度が前縁近傍で

$\gamma^*=2C/\sqrt{x+c}$（前縁の x 座標を $-c$ とする）のとき，抵抗成分は0でなく，極限計算により

$$D_i=\frac{\rho}{2\pi}\int_{-c}^{c}\gamma^*(x)dx\,⨍_{-c}^{c}\frac{\gamma^*(x')}{x-x'}dx'$$

$$=\frac{4\rho C^2}{2\pi}\int_0^{\varepsilon}\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda}}⨍_0^{\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{d\mu}{\lambda-\mu}=\pi\rho C^2 \qquad (1.5.1)$$

が得られる。これの実際の計算法は Flax の論文[13)]の附録Ⅰに示されているが，とにかく循環密度の前縁の特異性だけから導かれる。これは薄翼理論特有の余分の抵抗成分と見なければならない。Grammel[14)] は厚さ無限小の薄翼前縁でもそこの圧力は−∞であるから，力として有限な水平成分が考えられるとして，前縁推力 S_N を計算し

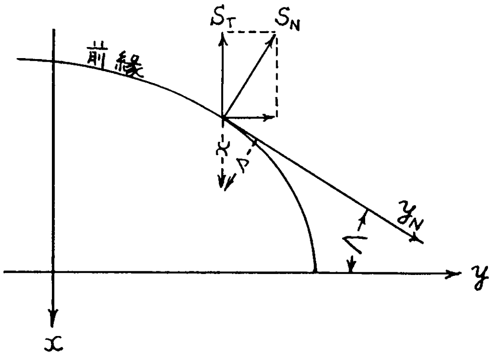
$$S_N=\pi\rho C^2 \qquad (1.5.2)$$

を得た。これは (1.5.1)の D_i と大きさ等しく反方向であるから，薄翼理論でも非線型理論のように抵抗は0となり，理論上の欠陥は除かれる。

3次元揚力面でも前縁が直線の場合，その近傍に限定して流場を見ると流れは2次元的とみなされる。それで揚力面の内点の前縁よりの距離を s とすると，一般にその循環密度は前縁に

$$\gamma^*=2C/\sqrt{s} \qquad (1.5.3)$$

の形の特異性があり，したがって圧力差の抵抗成分を積分して翼の抵抗を求めようとすると，(1.5.1) のような薄翼特有の余分なものが含まれることになる。3次元揚力面のその項の計算は矢張り前縁近傍の2次元的運算になるので，別法として2次元的に前縁推力を計算しても結果は同じ筈である。



図—5 前縁推力ベクトル図（直進翼の場合）

(1.5.2) により単位幅当りの推力は

$$\frac{dS_N}{dy_N}=\frac{dS_T}{dy}=\pi\rho C^2 \qquad (1.5.4)$$

である（図—5参照）。直進揚力面の循環密度の数値解は一般に x, y の関数として得られ，特に前縁特異性は x の関数として表わされる。それを仮に

$$\gamma^*=2A/\sqrt{x+c} \qquad (1.5.5)$$

と書く。これを s の関数として表わすには渦管の定理を利用するのがよい[15)]。即ち

$$\gamma^*(s)=\frac{\partial}{\partial s}\int_{-c}^{x}\gamma^* dx \qquad (1.5.6)$$

である。右辺の γ^* に(1.5.5)を代入する。γ^* の分布から見た x と s の対応点は $s=(x+c)\cos\Lambda$ であるから（図—5参照），

$$\gamma^*(s)=\frac{2A\sqrt{\sec\Lambda}}{\sqrt{s}} \qquad (1.5.7)$$

となる。よって，$C=A\sqrt{\sec\Lambda}$，(1.5.4) により

$$\frac{dS_T}{dy}=\pi\rho A^2\sec\Lambda \qquad (1.5.8)$$

が得られる。これは Garner[16)] が示した式である。前縁が曲線の場合でも曲率の影響は省略しても大差なく[17)]，以上の結果が流用できる。この前縁推力を利用すると，直進揚力面の誘導抵抗 D_{ii} は

$$D_{ii}=\iint_S \Pi \frac{\partial z}{\partial x}dxdy-\pi\rho\int_{-b}^{b}A^2\sec\Lambda\,dy \tag{1.5.9}$$

のように表わすことができる。一方エネルギー定理によると，揚力面の誘導抵抗 D_i は揚力線のものと同じで

$$\left.\begin{aligned} D_i &= 4qb\int_{-b}^{b}\Gamma\alpha_i dy \\ \alpha_i &= \frac{b}{2\pi}\int_{-b}^{b}\frac{d\Gamma}{dy'}\frac{1}{y-y'}dy' \end{aligned}\right\} \tag{1.5.10}$$

のように表わされる。ただし b は半翼幅，$q=1/2\rho V^2$，Γ は無次元循環分布とする。(1.5.9) と (1.5.10) とは一致する筈のもので，Garner[16] が吹上げ一定の放物型 swept wing について計算した結果では，両式の被積分関数即ち誘導抵抗分布は全く異なるが，全抵抗では1.3％の違いに過ぎないという。したがって誘導抵抗分布として(1.5.10)の被積分関数をとるのは誤りで，(1.5.9) の y の被積分関数がそれの充分正確な値を与えると考えてよい。

プロペラの場合，推力およびトクルの表示式に翼素の誘導抵抗が含まれるので，それの計算には (1.5.9) の形が必要になる。

非定常翼の場合にも同じように考えることができる。2次元非定常薄翼で前縁近傍の循環密度が，$\gamma^*=2\tilde{C}/\sqrt{x+c}$ であるときの前縁推力 $\tilde{S}_N$ は (1.5.2) と同じに

$$\tilde{S}_N=\pi\rho\tilde{C}^2 \tag{1.5.11}$$

翼断面誘導抵抗 δD_{ii} は

$$\delta D_{ii}=\int_{-C}^{C}\Pi\frac{dz}{dx}dx-\tilde{S}_N \tag{1.5.12}$$

であるという[18),19)]。(1.5.11)の証明は示されていないが，$\tilde{S}_N$ が (1.5.1) の積分から出て来る抵抗を打ち消すためのものとみなすならば，(1.5.12)の関係が成立つことは容易に理解できる。

3次元翼で sweep angle が0でないときの取扱いは定常翼と同じである。循環密度が (1.5.5) の形で，A は

$$A=A_0+R_e\tilde{A}e^{i\nu t} \tag{1.5.13}$$

のように定常項 A_0 と非定常項 $\tilde{A}$ により構成されるものとすると，翼素の誘導抵抗は

$$\delta D_{ii}=\int_{-c}^{c}\Pi\frac{\partial z}{\partial x}dx-\frac{dS_T}{dy} \tag{1.5.14}$$

$$\frac{dS_T}{dy}=\pi\rho\sec\Lambda\cdot\{A_0^2+2A_0R_e\tilde{A}e^{i\nu t}+(R_e\tilde{A}e^{i\nu t})^2\} \tag{1.5.15}$$

で与えられることになる。

プロペラ起振力を計算する際，翼素の誘導抵抗が必要になるが，それには (1.5.14) の形を用いるのがよい。

1.6 流体合力の表示式

以下の計算では翼厚の影響は省略する。

1.6.1 定常プロペラ

定常プロペラの流体合力は前著に示してあるが，一部の訂正と非定常プロペラの場合との比較の意味で再録する。

翼素に働く揚力 δL および抵抗 δD は

$$\left.\begin{aligned} \delta L &= \rho W^*\int_{S_1}^{S_2}\gamma^* ds \\ \delta D &= \rho W^*\int_{S_1}^{S_2}\gamma^*\frac{\partial f}{\partial s}ds-\delta S_T+\delta D_f \end{aligned}\right\} \tag{1.6.1}$$

である。ただし f は螺旋面より翼の平均矢高面までの距離，δS_T は前縁推力，δD_f は翼断面の粘性抵抗とする。δL, δD による軸方向および接線方向の力の成分 δS, δT は

$$\left.\begin{aligned} \delta S &= \delta L\cos\varepsilon_I-\delta D\sin\varepsilon_I \\ \delta T &= \delta L\sin\varepsilon_I+\delta D\cos\varepsilon_I \end{aligned}\right\} \tag{1.6.2}$$

である。$\partial f/\partial s=\tan(\varepsilon_0-\varepsilon_I)$ であるが，$\cos(\varepsilon_0-\varepsilon_I)\fallingdotseq 1$ としても大差ないから，

$$\left.\begin{aligned} \cos\varepsilon_I-\frac{\partial f}{\partial s}\sin\varepsilon_I &\fallingdotseq \cos\varepsilon_0 \\ \sin\varepsilon_I+\frac{\partial f}{\partial s}\cos\varepsilon_I &\fallingdotseq \sin\varepsilon_0 \end{aligned}\right\} \tag{1.6.3}$$

とすることができる。この関係を用いると，推力 S とトルク Q は

$$\begin{aligned} S=&\,l\rho\int_{r_b}^{r_0}W^*dr\int_{S_1}^{S_2}\gamma^*\cos\varepsilon_0 ds+l\int_{r_b}^{r_0}\delta S_T\sin\varepsilon_I dr \\ &-l\int_{r_b}^{r_0}\delta D_f\sin\varepsilon_I dr \end{aligned} \tag{1.6.4}$$

$$\begin{aligned} Q=&\,l\rho\int_{r_b}^{r_0}W^*rdr\int_{S_1}^{S_2}\gamma^*\sin\varepsilon_0 ds \\ &-l\int_{r_b}^{r_0}r\delta S_T\cos\varepsilon_I dr+l\int_{r_b}^{r_0}r\delta D_f\cos\varepsilon_I dr \end{aligned} \tag{1.6.5}$$

のように表わされる。翼弦中点を原点として螺線に沿って測った長さを s^*（後縁側を正とする），半翼弦長

を c としたとき，γ^* が

$$\frac{\Pi}{\rho W^{*2}}=\frac{\gamma^*}{W^*}=A^{(0)}(r)\sqrt{\frac{c-s^*}{c+s^*}}+A^{(1)}(r)\times\sqrt{1-(s^*/c)^2}+A^{(2)}(r)(s^*/c)\sqrt{1-(s^*/c)^2}+\cdots \tag{1.6.6}$$

の形で表わされるものとする。これに対する前縁推力は（1.5.8）より

$$\delta S_T=\frac{\pi}{2}\rho cW^{*2}(A^{(0)})^2\sec\Lambda \tag{1.6.7}$$

で与えられる。前著では $\sec\Lambda$ が落ちていた。プロペラの場合の Λ は前縁の接線が螺線の法線となす角である（図－4参照）。

1.6.2 非定常プロペラ

ここでは不均一流中のプロペラを考える。プロペラには弾性変形がなく，回転軸に対する翼の相対位置は変動しないものとする。したがって翼素の姿勢は時間的に変化せず，圧力だけが調和振動していると仮定するので，流体合力としてはそれと同じ振動率の振動力だけが導かれ，その時間平均は0である。一方自由渦による損失エネルギーの時間平均 $\overline{E}$ は有限であって，それと変動する推力，トクルの時間平均 $\overline{S}$, $\overline{Q}$ とはエネルギー定理により

$$\overline{E}=\Omega^*\overline{Q}-V^*\overline{S} \tag{1.6.8}$$

の関係がある。即ちこの場合は上記とは逆に推力，トルクの時間平均が有限である。これはエネルギー定理が流速の2次の項まで計算しているのに対し，定ピッチ非線型理論は線型理論にほぼ近い計算をしていることによる相違である。$\overline{E}$ が既知でも，(1.6.8) だけから $\overline{S}$, $\overline{Q}$ を分離して導くことはできないが，流速の2次の項までとれば，それの算出は可能である。しかし以下では流速の2次の項は微小量とみなして省略するので，$\overline{S}$, $\overline{Q}$ についても同様に定常の S, Q への寄与は考えないことにする。これは波浪中の抵抗増加の問題と同じで，船が動揺しないものとすると，抵抗増加が流速の2次の order でしか導かれないことに該当する。

以上を前置きにして，以下で，周期的に変動する圧力に基づく流体合力の表示を求める。

翼素に働く揚力および抵抗は定常の場合とほぼ同じに

$$\left.\begin{aligned}\delta\tilde{L}&=\rho W^*\int_{S_1}^{S_2}\gamma_0^*ds\ e^{i\nu t}\\ \delta\tilde{D}&=\rho W^*\int_{S_1}^{S_2}\gamma_0^*\frac{\partial f}{\partial s}dse^{i\nu t}-\delta\tilde{S}_T\end{aligned}\right\} \tag{1.6.9}$$

のように表わされる。ただし粘性抵抗の時間的変動分は小さいので無視する。(1.5.15)で与えられる前縁推力のうち $e^{i\nu t}$ の2次の項を省略すると，その時間的変動分は

$$\delta\tilde{S}_T=\pi\rho cW^{*2}A^{(0)}\tilde{A}^{(0)}e^{i\nu t}\sec\Lambda \tag{1.6.10}$$

である。(1.6.9) の力による推力および接線方向成分 $\delta\tilde{S}$, $\delta\tilde{T}$ は

$$\left.\begin{aligned}\delta\tilde{S}&=\delta\tilde{L}\cos\varepsilon_I-\delta\tilde{D}\sin\varepsilon_I\\ \delta\tilde{T}&=\delta\tilde{L}\sin\varepsilon_I+\delta\tilde{D}\cos\varepsilon_I\end{aligned}\right\} \tag{1.6.11}$$

である。(1.6.3) の関係および同一半径のところの翼素については各翼間の γ_0^* に $2p\pi/l$ の位相遅れがあることを考慮すると，m 番目の翼の翼素に働く力は

$$\left.\begin{aligned}\delta\tilde{S}_m&=\rho W^*e^{-i2pm\pi/l}\int_{S_1}^{S_2}\gamma_0^*\cos\varepsilon_0 ds\ e^{i\nu t}\\ &\quad+\pi\rho W^{*2}cA^{(0)}\tilde{A}^{(0)}e^{-i2pm\pi/l}\sec\Lambda\sin\varepsilon_I\ e^{i\nu t}\\ \delta\tilde{T}_m&=\rho W^*e^{-i2pm\pi/l}\int_{S_1}^{S_2}\gamma_0^*\sin\varepsilon_0 ds\ e^{i\nu t}\\ &\quad-\pi\rho W^{*2}cA^{(0)}\tilde{A}^{(0)}e^{-i2pm\pi/l}\sec\Lambda\cos\varepsilon_I\ e^{i\nu t}\end{aligned}\right\} \tag{1.6.12}$$

のように表わされる。これを m について総和するのに (1.2.2) を利用する。変数 a が0又は整数のとき1，それ以外では0の値をとる関数を $I(a)$ の記号で表わすことにすると，

$$\sum_{m=0}^{l-1}\delta\tilde{S}_m=\rho lI(p/l)\left\{W^*\int_{S_1}^{S_2}\gamma_0^*\cos\varepsilon_0 ds+\pi W^{*2}A^{(0)}c\tilde{A}^{(0)}\sec\Lambda\sin\varepsilon_I\right\}e^{i\nu t} \tag{1.6.13}$$

$$\sum_{m=0}^{l-1}\delta\tilde{T}_m=\rho lI(p/l)\left\{W^*\int_{S_1}^{S_2}\gamma_0^*\sin\varepsilon_0 ds-\pi W^{*2}cA^{(0)}\tilde{A}^{(0)}\sec\Lambda\cos\varepsilon_I\right\}e^{i\nu t} \tag{1.6.14}$$

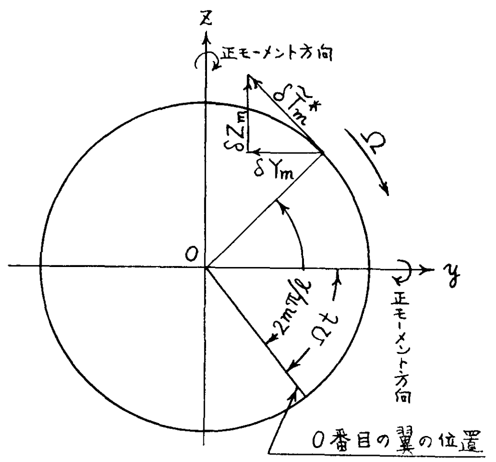
と書かれる。(1.6.13)を半径方向に積分すると推力変動 $\tilde{S}$ が得られ，(1.6.14)による回転モーメントを半径方向に積分するとトルク変動 $\tilde{Q}$ が得られる。即ち

$$\tilde{S}=\rho lI(p/l)\left\{\int_{r_b}^{r_0}W^*dr\int_{S_1}^{S_2}\gamma_0^*\cos\varepsilon_0 ds+\pi\int_{r_b}^{r_0}W^{*2}cA^{(0)}\tilde{A}^{(0)}\sec\Lambda\sin\varepsilon_I dr\right\}e^{i\nu t} \tag{1.6.15}$$

$$\tilde{Q}=\rho l\boldsymbol{I}(p/l)\left\{\int_{r_b}^{r_0} rW^*dr\int_{s_1}^{s_2}\gamma_0^*\sin\varepsilon_0 ds\right.$$
$$\left.-\pi\int_{r_b}^{r_0} rW^{*2}cA^{(0)}\tilde{A}^{(0)}\sec\Lambda\cos\varepsilon_I dr\right\}e^{i\nu t} \quad (1.6.16)$$

である。実際の計算では，以下も同様であるが，実数部をとる。

次にプロペラ回転面内の横力とモーメントの表示式を求める。或る翼 ($m=0$) の基準径が y 軸を通る時刻を $t=0$ とする（図—6 参照)。m 番目の翼素に働く y および z 方向の力を δY_m, δZ_m とすると



図—6 流体合力ベクトル図
(プロペラ後方より見る)

$$\left.\begin{aligned}\delta Y_m&=\delta\tilde{T}_m^*\sin(\Omega t-2m\pi/l)\\ \delta Z_m&=\delta\tilde{T}_m^*\cos(\Omega t-2m\pi/l)\end{aligned}\right\} \quad (1.6.17)$$

である。これの $\delta\tilde{T}_m^*$ は翼素抵抗の基準径に直角な成分で，(1.6.12)とは少し異なる。m について総和すると，

$$\left.\begin{aligned}\sum_{m=0}^{l-1}\delta Y_m&=l\delta T_0\cdot\sum\nolimits_s\\ \sum_{m=0}^{l-1}\delta Z_m&=l\delta T_0\cdot\sum\nolimits_c\end{aligned}\right\} \quad (1.6.18)$$

$$\delta T_0=\rho W^*\int_{s_1}^{s_2}\gamma_0^*\cos\Psi'\sin\varepsilon_0 ds$$
$$-\pi\rho W^{*2}cA^{(0)}\tilde{A}^{(0)}\sec\Lambda\cos\Psi_0'\cos\varepsilon_I \quad (1.6.19)$$

$$\left.\begin{matrix}\sum_s\\ \sum_c\end{matrix}\right)=\frac{1}{l}\sum_{m=0}^{l-1}e^{ip(\Omega t-2m\pi/l)}\left(\begin{matrix}\sin(\Omega t-2m\pi/l)\\ \cos(\Omega t-2m\pi/l)\end{matrix}\right. \quad (1.6.20)$$

と書かれる。ただし Ψ' は図—4 に示す角で，s の関数，そして Ψ_0' は前縁におけるその角である。

(1.2.2) を利用すると (1.6.20) は

$$\left.\begin{aligned}\sum\nolimits_s&=-\frac{i}{2}\left\{\boldsymbol{I}\left(\frac{p+1}{l}\right)e^{i(p+1)\Omega t}-\boldsymbol{I}\left(\frac{p-1}{l}\right)e^{i(p-1)\Omega t}\right\}\\ \sum\nolimits_c&=\frac{1}{2}\left\{\boldsymbol{I}\left(\frac{p+1}{l}\right)e^{i(p+1)\Omega t}+\boldsymbol{I}\left(\frac{p-1}{l}\right)e^{i(p-1)\Omega t}\right\}\end{aligned}\right\} \quad (1.6.21)$$

となる。横力 Y, Z は(1.6.18)を半径方向に積分したもので，

$$Y=l\int_{r_b}^{r_0}\delta T_0 dr\sum\nolimits_s,\qquad Z=l\int_{r_b}^{r_0}\delta T_0 dr\sum\nolimits_c \quad (1.6.22)$$

で与えられる。

次に y 軸および z 軸の正方向まわりのモーメント M_y, M_z の表示式を求める。m 番面の翼素に働く圧力によるモーメント δM_{ym}, δM_{zm} は

$$\left.\begin{aligned}\delta M_{ym}&=\delta\tilde{S}_m r\sin(\Omega t-2m\pi/l)-\delta\tilde{m}_m\cos(\Omega t-2m\pi/l)\\ \delta M_{zm}&=\delta\tilde{S}_m r\cos(\Omega t-2m\pi/l)+\delta\tilde{m}_m\sin(\Omega t-2m\pi/l)\end{aligned}\right\} \quad (1.6.23)$$

である。ただし $\delta\tilde{m}_m$ は m 番目の翼素の基準径まわりの頭下げモーメント

$$\delta\tilde{m}_m=\rho W^* e^{-i2pm\pi/l}\int_{s_1}^{s_2}\frac{\bar{s}}{a^*}\gamma_0^* ds e^{i\nu t} \quad (1.6.24)$$

である。ここに $\bar{s}$ は翼の基準径を原点として，翼素上の点を螺旋に沿って測った長さとする（後縁側を正とする)。又 a^* は $\bar{s}$ と $\bar{s}$ 点より基準径までの垂直距離との比で，Ψ を図—4 に示す角とすると

$$a^*=\Psi/\sin\Psi \quad (1.6.25)$$

で与えられる。

(1.6.23) の $\delta\tilde{S}_m$ に (1.6.12) を代入し，m について総和する。更に r について積分すると

$$\left.\begin{aligned}M_y&=l\int_{r_b}^{r_0} r\delta S_0 dr\sum\nolimits_s-l\int_{r_b}^{r_0}\delta m_0 dr\sum\nolimits_c\\ M_z&=l\int_{r_b}^{r_0} r\delta S_0 dr\sum\nolimits_c+l\int_{r_b}^{r_0}\delta m_0 dr\sum\nolimits_s\end{aligned}\right\} \quad (1.6.26)$$

のように表わされる。ただし

$$\delta S_0=\delta W^*\int_{s_1}^{s_2}\gamma_0^*\cos\varepsilon_0 ds+\pi\rho W^{*2}cA^{(0)}\tilde{A}^{(0)}\sec\Lambda\sin\varepsilon_I \quad (1.6.27)$$

$$\delta m_0=\rho W^*\int_{S_1}^{S_2}\frac{\bar{s}\gamma_0{}^*}{a^*}ds \qquad (1.6.28)$$

である。

$p=1$ では $e^{i(p-1)\Omega t}=1$ であるから，(1.6.22)，(1.6.26) の力およびモーメントには定常力が含まれる。この力を求める実用計算法があるが，それは上記とは殆んど無関係の理論である[20]。

2 doublet-lattice 法

この方法は理論的には vortex-lattice 法と同じであるが，演算子の導き方が極めて合理的にできている。vortex-lattice 法は簡便で全般的精度はよいが，box の 1/4 弦長上に渦を，3/4 弦長上に吹上げ標点をおく 1/4〜3/4弦長法によると前縁近傍で誤差11.4%は避けられないという[4]。1/4〜3/4 弦長法は多くの実績をもっているが，上記欠陥はプロペラにとって見過せない。この難関をうまく切り抜けた別の標点法がある。この方法は Lan[21] の理論に基づくもので，前縁近傍が正確に計算できる。

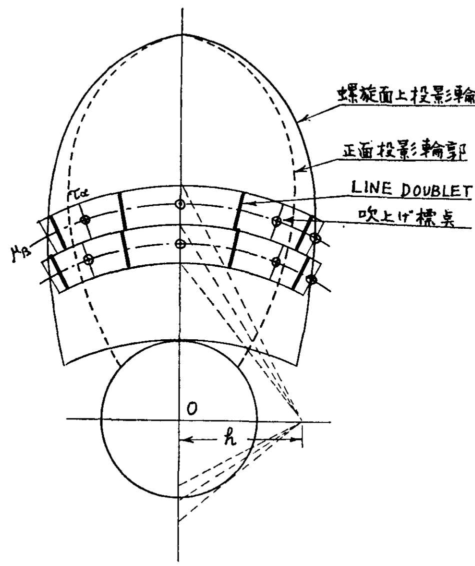
又揚力面理論のbox形状は翼周縁にならう梯形が普通であるが，それをプロペラ理論に採用すると計算が繁雑になるので，以下では螺旋面上の扇形をbox形状とする。

2.1 doublet-lattice

圧力場の連続的な複源分布を格子の上の線複源という discrete な分布で置き換えることを考えてみる。プロペラ翼を回転軸と同心の多数の円壔面で切断し，翼素を作る。この翼素の常螺旋面上への投影を書いたのが図−7である。rake angle が大きいときは各翼素が投影される常螺旋面は少しずつずらせる必要があるので，$\sigma=k$ の常数 k は各翼素それぞれが固有の値をもつことになる。常螺旋面へ投影された翼素をその内側常螺線の曲率中心を通る動径によってN個に分割した一つを box と呼ぶことにする。各 box 内の一動径上にモーメント一定の圧力場の line doublet を置き，box 境界上の中点を吹き上げ標点に選ぶ(2.5節参照)。即ち図−7の太線が line doublet，⊙印が吹上げ標点である。rake angle を入れて計算することは容易であるが，記述が繁雑になるばかりであるから，以下ではそれを0と仮定した計算を示す。

まず

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\sigma=\sigma_1}=u(\tau,\mu) \qquad (2.1.1)$$



図−7　box と標点の配分（プロペラ前方より見る）

と書いて，u の表示式を (1.1.1) より求める。u は形式的には

$$u(\tau,\mu)=\frac{1}{4\pi\rho h}\sum_{m=0}^{l-1}\iint\Pi(s',r')\frac{\partial^2}{\partial n\partial n'}\left.\frac{1}{R}\right|_{\sigma=\sigma'}ds'dr' \qquad (2.1.2)$$

で与えられる。(1.1.4) によると

$$\frac{\partial^2}{\partial n\partial n'}\frac{1}{R}=-\frac{\sqrt{(1+\mu^2)(1+\mu'^2)}}{h^2\mu\mu'}\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\frac{1}{R}$$
$$+\frac{1}{h^2\sqrt{(1+\mu^2)(1+\mu'^2)}}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{2\left(\mu\mu'-\frac{1}{\mu\mu'}\right)\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial}{\partial\sigma}\frac{1}{R}-\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)\left(\mu'-\frac{1}{\mu'}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1}{R}\right\} \qquad (2.1.3)$$

である。

$$(\tau-\tau')/2=v,\quad v-2m\pi/l=v_m \qquad (2.1.4)$$

と書くと

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left.\frac{1}{R}\right|_{\sigma=\sigma'}=\frac{v-\mu\mu'\sin v_m}{2R^3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left.\frac{1}{R}\right|_{\sigma=\sigma'}=-\frac{v+\mu\mu'\sin v_m}{R^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\left.\frac{1}{R}\right|_{\sigma=\sigma'}=\frac{3}{4}\frac{(v-\mu\mu'\sin v_m)^2}{R^5}$$
$$-\frac{1}{4}\frac{1+\mu\mu'\cos v_m}{R^3}$$
$$=-\frac{3v\mu\mu'\sin v_m}{R^5}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{v+\mu\mu'\sin v_m}{R^3}$$

である。これを (2.1.3) に適用すると

$$\frac{\partial^2}{\partial n \partial n'}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'}=\frac{3\sqrt{(1+\mu^2)(1+\mu'^2)}}{h^2}\frac{v\sin v_m}{R^5}$$

$$+\frac{1}{h^2\sqrt{(1+\mu^2)(1+\mu'^2)}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mu\mu' v+\sin v_m}{R^3} \tag{2.1.5}$$

が得られる。これらの式では

$$R=\sqrt{v^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos v_m}$$

である。

ここで複源の面分布を線分布に置き換える操作を行う。複源のモーメントと束縛循環の関係は (1.1.7) であるから，荷重関数 a を考えることにし

$$\left.\begin{aligned} &\Pi\Delta s'=\rho W^{*\prime}\bar{\gamma}=\rho\bar{\gamma}V^*\sqrt{1+\mu'^2} \\ &\bar{\gamma}=\gamma^* a\Delta s' \end{aligned}\right\} \tag{2.1.6}$$

とすれば，γ^* の面分布は box 内でそれと等価な一本の渦糸 $\bar{\gamma}$ に置き換えられる。この関係を (2.1.2) に適用すると

$$u(\tau,\mu)=\sum_{k=1}^{Nr}\sum_{j=1}^{Nc}\bar{\gamma}_{jk}U_k(\tau-\tau_j,\mu) \tag{2.1.7}$$

と書かれる。j は翼弦方向，k は半径方向に付けた box の番号，N_c, N_r はそれぞれの総数，τ_j は螺旋面上における $\bar{\gamma}_{jk}$ の位置，又

$$U_k(\tau-\tau_j,\mu)=\frac{V^*}{4\pi}\sum_{m=0}^{l-1}\int_{\mu_k}^{\mu_{k+1}}\sqrt{1+\mu'^2}$$

$$\times\frac{\partial^2}{\partial n\partial n'}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'}d\mu' \tag{2.1.8}$$

である。

$$\left.\begin{aligned} X(v,\mu',\mu)=&\frac{1}{B\cdot R}\Big\{3(\mu'-\mu\cos v_m)-\frac{2\mu\cos v_m\cdot B}{R^2} \\ &-(v^2+\mu^2-2\mu^2\cos^2 v_m-1)(\mu'-\mu\cos v_m) \\ &\times\Big(\frac{1}{R^2}+\frac{2}{B}\Big)\Big\} \\ Y(v,\mu',\mu)& \\ =&\frac{-\mu vB+(\mu^2 v\cos v_m+\sin v_m)(\mu'-\mu\cos v_m)}{B\cdot R} \end{aligned}\right\} \tag{2.1.9}$$

ただし

$$B=v^2+\mu^2\sin^2 v_m$$

と書くと

$$\frac{3(1+\mu'^2)}{R^5}=\frac{\partial}{\partial\mu'}X(v,\mu',\mu) \tag{2.1.10}$$

$$\frac{\mu\mu' v+\sin v_m}{R^3}=\frac{\partial}{\partial\mu'}Y(v,\mu',\mu) \tag{2.1.11}$$

であるから，これを (2.1.5) に適用すると

$$\sqrt{1+\mu'^2}\frac{\partial^2}{\partial n\partial n'}\frac{1}{R}\bigg|_{\sigma=\sigma'}=\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{h^2}v\sin v_m$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\mu'}X(v,\mu',\mu)+\frac{1}{h^2\sqrt{1+\mu^2}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial}{\partial\mu'}Y(v,\mu',\mu) \tag{2.1.12}$$

と書かれる。よって

$$U_k(\tau-\tau_j,\mu)=\frac{V^*}{4\pi h^2}\sum_{m=0}^{l-1}\Big[\sqrt{1+\mu^2}\,v\sin v_m$$

$$\{X_{k+1}(v,\mu)-X_k(v,\mu)\}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\frac{\partial}{\partial v}\{Y_{k+1}(v,\mu)-Y_k(v,\mu)\}\Big] \tag{2.1.13}$$

となる。これらの式の v, v_m, X_k 等は

$$\left.\begin{aligned} &v=(\tau-\tau_j)/2,\quad v_m=(\tau-\tau_j)/2-2m\pi/l \\ &X_k(v,\mu)=X(v,\mu_k,\mu), \\ &Y_k(v,\mu)=Y(v,\mu_k,\mu) \end{aligned}\right\} \tag{2.1.14}$$

を意味する。

非定常プロペラの場合も運算は殆んど同じで

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial n}\bigg|_{\sigma=\sigma'}=\tilde{u}(\tau,\mu) \tag{2.1.15}$$

と書くと，図―7のような box 分割に対し

$$\tilde{u}(\tau,\mu)=\sum_{k=1}^{Nr}\sum_{j=1}^{Nc}\bar{\gamma}_{jk}\tilde{U}_k(\tau-\tau_j,\mu) \tag{2.1.16}$$

のように表わすことができる。ただし

$$\tilde{U}_k(\tau-\tau_j,\mu)=\frac{V^*}{4\pi h^2}\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\Big[\sqrt{1+\mu^2}\,v\sin v_m$$

$$\times\{X_{k+1}(v,\mu)-X_k(v,\mu)\}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\frac{\partial}{\partial v}\{Y_{k+1}(v,\mu)-Y_k(v,\mu)\}\Big] \tag{2.1.17}$$

である。$\bar{\gamma}$ は γ_0^* を一つの box 内で一本の渦糸にまとめたものを意味する。

2.2 演算子行列

(2.1.7) を (1.3.11) に代入し，$\boldsymbol{T}$ に関する積分を行い，τ, μ を図―7に示す標点の座標 (τ_α, μ_β) にとると，定常プロペラの吹上げの代数式表示

$$w_{\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{Nr}\sum_{j=1}^{Nc}\bar{\gamma}_{jk}Z_{jk}^{\alpha\beta} \tag{2.2.1}$$

が得られる。$w_{\alpha\beta}=w(\tau_\alpha,\mu_\beta)$ である。演算子行列 $Z_{jk}^{\alpha\beta}$ は

$$Z_{jk}^{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi h}\sum_{m=0}^{l-1}\Big[\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}\int_{-\infty}^{v} s\ \sin s_m\Big\{X_{k+1}^{\beta}(s)$$
$$-X_{k}^{\beta}(s)\Big\}ds+\frac{1}{\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}\Big\{Y_{k+1}^{\beta}(v)-Y_{k}^{\beta}(v)\Big\}\Big] \tag{2.2.2}$$

のように表わされる。ここに

$$\left.\begin{aligned}&X_k^\beta(s)=X(s,\mu_k,\mu_\beta),\quad Y_k^\beta(s)=Y(s,\mu_k,\mu_\beta)\\&v=(\tau_\alpha-\tau_j)/2\end{aligned}\right\} \tag{2.2.3}$$

である。

非定常プロペラの場合も(2.1.16)を(1.3.12)に代入すれば，ほぼ同様の計算によって，吹上げの代数表示

$$\tilde{w}_{\alpha\beta}=\sum_{k=1}^{Nr}\sum_{j=1}^{Nc}\tilde{\gamma}_{jk}\tilde{Z}_{jk}^{\alpha\beta} \tag{2.2.4}$$

が得られる。$\tilde{w}_{\alpha\beta}=w_0(\tau_\alpha,\mu_\beta)$であり，演算子行列の表示式は

$$\tilde{Z}_{jk}^{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi h}\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\Big[\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}\int_{-\infty}^{v}e^{-ip^*(v-s)}s\sin s$$
$$\times\Big\{X_{k+1}^\beta(s)-X_k^\beta(s)\Big\}ds-\frac{ip^*}{\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}\int_{-\infty}^{v}e^{-ip^*(v-s)}$$
$$\times\Big\{Y_{k+1}^\beta(s)-Y_k^\beta(s)\Big\}ds$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}\Big\{Y_{k+1}^\beta(v)-Y_k^\beta(v)\Big\}\Big] \tag{2.2.5}$$

である。

2.3 演算子行列の実用形

$m=0$ の場合 $s=0$ の近傍では

$$\left.\begin{aligned}&s\ \sin s\cdot X_k^\beta(s)\simeq 2\mathrm{sgn}(\mu_k-\mu_\beta)\\&\times\Big\{\frac{1+3\mu_\beta{}^2}{3(1+\mu_\beta{}^2)^2}+\frac{1}{1+\mu_\beta{}^2}\frac{1}{s^2}\Big\}\\&Y_k^\beta(s)\simeq\frac{\mathrm{sgn}(\mu_k-\mu_\beta)}{s}\end{aligned}\right\} \tag{2.3.1}$$

のように極がある。$v<0$ ならば (2.2.2)，(2.2.5) はそのままで計算できる。又 $v>0$ でも，$\mu_k<\mu_\beta<\mu_{k+1}$ 以外のところでは

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{s\to 0}s\sin s\Big\{X_{k+1}^\beta(s)-X_k^\beta(s)\Big\}=0\\&\lim_{s\to 0}\Big\{Y_{k+1}^\beta(s)-Y_k^\beta(s)\Big\}=0\end{aligned}\right\} \tag{2.3.2}$$

であるから，$Z_{jk}^{\alpha\beta}$, $\tilde{Z}_{jk}^{\alpha\beta}$ は(2.2.2)，(2.2.5)の式によって直接その値を求めることができる。問題は $\mu_k<\mu_\beta<\mu_{k+1}$ 且つ $v>0$ のときの演算子行列の数値計算法である。これは揚力面理論で普通行われているように発散積分の有限部分を計算するわけで，Mangler [22] の形式を用いると

$$Z_{jk}^{\alpha\beta}=\frac{1}{4\pi h}\sum_{m=0}^{l-1}\Big[\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}\Big\{\int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{v}\Big\}s\sin s_m$$
$$\times\Big\{X_{k+1}^\beta(s)-X_k^\beta(s)\Big\}ds$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}\Big\{Y_{k+1}^\beta(v)-Y_k^\beta(v)\Big\}\Big]-\frac{2}{\pi h\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}} \tag{2.3.3}$$

である。このままの形では ε の大きさに左右されるので

$$Z_{jk}^{\alpha\beta}=\frac{\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}{4\pi h}\int_{-\infty}^{v}\Big[\sum_{m=0}^{l-1}s\sin s_m$$
$$\times\Big\{X_{k+1}^\beta(s)-X_k^\beta(s)\Big\}-\frac{4}{1+\mu_\beta{}^2}\frac{1}{s^2}\Big]ds$$
$$+\frac{1}{4\pi h\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}\Big[\sum_{m=0}^{l-1}\Big\{Y_{k+1}^\beta(v)-Y_k^\beta(v)\Big\}-\frac{2}{v}\Big]$$
$$-\frac{1}{2\pi h\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}\frac{1}{v}\quad,\ \mu_k<\mu_\beta<\mu_{k+1} \tag{2.3.4}$$

のように書く。この式は $v<0$ の場合には (2.2.2) と一致するので，v の正負にかかわらず $Z_{jk}^{\alpha\beta}$ の数値計算に使うことができる。

次に $\tilde{Z}_{jk}^{\alpha\beta}$ の場合である。(2.2.5) の第1項，第2項の積分をまとめる。$m=0$ の場合，$s=0$ の近傍では

$$\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}\,e^{ip^*s}s\sin s\cdot X_k^\beta(s)-\frac{ip^*e^{ip^*s}}{\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}Y_k^\beta(s)$$
$$\simeq\frac{2(1+3\mu_\beta{}^2)\mathrm{sgn}(\mu_k-\mu_\beta)}{3(1+\mu_\beta{}^2)^{3/2}}+\frac{2\mathrm{sgn}(\mu_k-\mu_\beta)}{\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}\frac{1}{s^2}$$
$$+\frac{ip^*\mathrm{sgn}(\mu_k-\mu_\beta)}{\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}\frac{1}{s} \tag{2.3.5}$$

である。2位の極はついては (2.3.4) と同じに書き，1位の極は Cauchy の主値をとるようにする。即ち

$$\tilde{Z}_{jk}^{\alpha\beta}=\frac{\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}{4\pi h}⨍_{-\infty}^{v}e^{-ip^*(v-s)}$$
$$\Big[\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\Big\{s\sin s_m\Big(X_{k+1}^\beta-X_k^\beta\Big)$$
$$-\frac{ip^*}{1+\mu_\beta{}^2}\Big(Y_{k+1}^\beta-Y_k^\beta\Big)\Big\}-\frac{4}{1+\mu_\beta{}^2}\frac{1}{s^2}\Big]ds$$

$$+\frac{1}{\pi h\sqrt{1+\mu_\beta^2}}\int_{-\infty}^{v}\frac{e^{-ip^*(v-s)}}{s^2}ds+\frac{1}{4\pi h\sqrt{1+\mu_\beta^2}}$$

$$\times\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\left\{Y^{\beta}_{k+1}(v)-Y^{\beta}_{k}(v)\right\},$$

$$\mu_k<\mu_\beta<\mu_{k+1}\qquad(2.3.6)$$

のように表わす。第2項の発散積分は部分積分してCauchy の主値をとればよいので，

$$\frac{1}{\pi h\sqrt{1+\mu_\beta^2}}\int_{-\infty}^{v}\frac{e^{-ip^*(v-s)}}{s^2}ds=\frac{1}{\pi h\sqrt{1+\mu_\beta^2}}$$

$$\times\left\{-\frac{1}{v}+ip^*\ln v-ip^*e^{-ip^*v}\int_{p^*}^{\infty}\frac{e^{-is}}{s}ds\right.$$

$$+\mathrm{sgn}\,v\cdot p^{*2}\int_{1}^{|v|}e^{-i\mathrm{sgn}v\cdot p^*(|v|-s)}\ln s\,ds$$

$$\left.-(1+\mathrm{sgn}v)p^*e^{-ip^*v}\int_{0}^{p^*}\frac{\sin s}{s}ds\right\}$$

である。

(2.3.6) の右辺第3項の1位の極を外へ出し，更に上式を適用すると

$$\tilde{Z}^{\alpha\beta}_{jk}=\frac{\sqrt{1+\mu_\beta^2}}{4\pi h}\oint_{-\infty}^{v}e^{-ip^*(v-s)}\left[\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\right.$$

$$\times\left\{s\sin s_m\left(X^{\beta}_{k+1}-X^{\beta}_{k}\right)-\frac{ip^*}{1+\mu_\beta^2}\left(Y^{\beta}_{k+1}-Y^{\beta}_{k}\right)\right\}$$

$$\left.-\frac{4}{1+\mu_\beta^2}\frac{1}{s^2}\right]ds+\frac{1}{4\pi h\sqrt{1+\mu_\beta^2}}\left[\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\right.$$

$$\left.\times\left\{Y^{\beta}_{k+1}(v)-Y^{\beta}_{k}(v)\right\}-\frac{2}{v}\right]+\frac{1}{\pi h\sqrt{1+\mu^2{}_\beta}}$$

$$\times\left\{-ip^*e^{-ip^*v}\int_{p^*}^{\infty}\frac{e^{-is}}{s}ds+\mathrm{sgn}v\cdot p^{*2}\right.$$

$$\times\int_{1}^{|v|}e^{-i\mathrm{sgn}v\cdot p^*(|v|-s)}\ln s\,ds-(1+\mathrm{sgn}\,v)p^*e^{-ip^*v}$$

$$\left.\times\int_{0}^{p^*}\frac{\sin s}{s}ds\right\}-\frac{1}{\pi h\sqrt{1+\mu_\beta^2}}\left(\frac{1}{2v}-ip^*\ln v\right),$$

$$\mu_k<\mu_\beta<\mu_{k+1}\qquad(2.3.7)$$

のように書かれる。v の正負にかかわらず，この式は $\tilde{Z}^{\alpha\beta}_{jk}$ の数値計算に使うことができる。

2.4 hydrodynamic pitch の計算法

hydrodynamic pitch を計算するのに必要な揚力線の吹上げ w_I の表示式として，前著では (1.3.3) と

$$w_I=\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial n}\bigg|_{\sigma=\sigma'}\qquad(2.4.1)$$

の二つを同等に扱った。これらの表示式を具体的に書くと

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\bigg|_{\substack{\sigma=\sigma\\ \tau=\tau'}}=\lim_{v\to0}\frac{1}{4\pi\rho h\Omega^*}\sum_{m=0}^{l-1}\int_{r_b}^{r_0}\int_{s_1}^{s_2}\Pi\,ds'dr'$$

$$\times\int_{-\infty}^{v}(2.1.5)\ dv\qquad(2.4.2)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial n}\bigg|_{\sigma=\sigma'}=\frac{l^3}{4\pi\rho h^3\Omega^*}\int_{r_b}^{r_0}\int_{s_1}^{s_2}\Pi\,ds'dr'$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(1+\mu^2)(1+\mu'^2)}}\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\mu'+1/\mu')(\mu+1/\mu)$$

$$\times I_{lk}(lk\mu_<)K_{lk}(lk\mu_>)\qquad(2.4.3)$$

である。

(2.4.3) は自由渦だけのものであるが，(2.4.2) にはそれに束縛渦が加わる。Munk の第Ⅲ定理[8]のもとになる式

$$\frac{\partial\Phi_{\mathrm{II}}}{\partial n}\bigg|_{\substack{\sigma=\sigma'\\ \tau=\tau'}}=0$$

から推定されるように，対称プロペラでは束縛渦の吹上げは翼相互に消し合い，自身の束縛渦のものだけが残る。それも(2.4.2)の半径方向の積分で Hadamard の有限部分をとるとき落ちてしまう。(2.4.2)も(2.4.3)も共に r' の積分では Hadamard の有限部分を計算するので，二つの式の違いは表面に現われない。ところが discrete function 法では (2.4.2) の積分を行う際，半径方向を先にするので，束縛渦の吹上げが表面に出て来て，w_I が発散してしまう。この障害は束縛渦の吹上げを差引くことで除かれ，結果は (2.4.3) に帰着する。discrete function 法によれば (2.4.3) でも半径方向の積分は解析的に行えるが[23]，他の演算子と形をそろえると実用上便利になるので，以下(2.4.2)によって w_I を求める計算法を示す。

(2.2.1)，(2.2.2) を利用すると，$w_I(\mu_\beta)$ の代数表示は形式的に

$$\left.\begin{aligned}&w_{I\beta}=\sum_{k=1}^{Nr}Z^{\beta}_{k}\sum_{j=1}^{Nc}\bar{\gamma}_{jk}\\&Z^{\beta}_{k}=\lim_{v\to0}\frac{1}{4\pi h}\sum_{m=0}^{l-1}\left[\sqrt{1+\mu_\beta^2}\int_{-\infty}^{v}s\sin s_m\right.\\&\qquad\times\left\{X^{\beta}_{k+1}(s)-X^{\beta}_{k}(s)\right\}ds\\&\qquad\left.+\frac{1}{\sqrt{1+\mu_\beta^2}}\left\{Y^{\beta}_{k+1}(v)-Y^{\beta}_{k}(v)\right\}\right]\end{aligned}\right\}\quad(2.4.4)$$

と書かれる。

$\mu_k<\mu_\beta<\mu_{k+1}$ 以外のところの Z^{β}_{k} は (2.4.4)の v を0とした式で計算することができる。

一方 $\mu_k<\mu_\beta<\mu_{k+1}$ では (2.4.4) は上に述べた理由により $v=0$ で発散する。いま s を螺線に沿って測っ

た距離とすると，束縛渦 Γ_k によるその極く近傍の吹上げ w_k は（$\mu=\mu_\beta$ 上）

$$w_k=-\frac{1}{2\pi}\frac{\Gamma_k}{s-s'}=-\frac{\Gamma_k}{2\pi h\sqrt{1+\mu_\beta^2}}\frac{1}{v} \qquad (2.4.5)$$

である。これを(2.4.4)から差引いて，$v=0$ としたものを Z_k^β として計算すれば w_I が求められる。即ち

$$Z_k^\beta=\frac{\sqrt{1+\mu_\beta^2}}{4\pi h}\int_{-\infty}^{0}\Big[\sum_{m=0}^{l-1}s\sin s_m \left\{X_{k+1}^\beta(s)-X_k^\beta(s)\right\}-\frac{4}{1+\mu_\beta^2}\frac{1}{s^2}\Big]ds$$
$$+\frac{1}{4\pi h\sqrt{1+\mu_\beta^2}}\sum_{m=1}^{l-1}\left\{Y_{k+1}^\beta(0)-Y_k^\beta(0)\right\},$$
$$\mu_k<\mu_\beta<\mu_{k+1} \qquad (2.4.6)$$

である。この式の第２項の m の総和で $m=0$ の項が無いのは（2.4.5）が差引かれた為である。

（1.3.4）により

$$w_{a\beta}=-w_{I\beta}\cos\varepsilon_I,\quad w_{t\beta}=w_{I\beta}\sin\varepsilon_I \qquad (2.4.7)$$

であるから，これの半径方向の平均は

$$\left.\begin{aligned}\overline{w}_a&=-\frac{1}{N_r}\sum_{\beta=1}^{N_r}\frac{\mu_\beta w_{I\beta}}{\sqrt{1+\mu_\beta^2}}\\ \overline{w_t/r}&=\frac{1}{hN_r}\sum_{\beta=1}^{N_r}\frac{w_{I\beta}}{\mu_\beta\sqrt{1+\mu_\beta^2}}\end{aligned}\right\} \qquad (2.4.8)$$

によって計算することができる。（1.1.2）に示す h はその第１近似を $h=V/\Omega$ として（2.2.1）を解きながら，逐次近似的に収束値を求めるようにする。

2.5 標点と翼素の配分

Lan[21] は２次元薄翼の積分方程式

$$w(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma(\xi')}{\xi-\xi'}d\xi' \qquad (2.5.1)$$

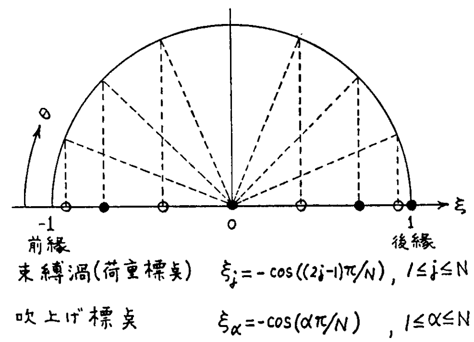
から，

$$\xi_\alpha=-\cos(\alpha\pi/N),\quad \xi_j=-\cos((2j-1)\pi/(2N))$$
$$\begin{pmatrix}\alpha=0,1,\cdots,N\\ j=1,2,\cdots,N\end{pmatrix} \qquad (2.5.2)$$

に対し（図—８）

$$-w(\xi_\alpha)\simeq\frac{1}{2N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma_j\sqrt{1-\xi_j^2}}{\xi_\alpha-\xi_j}+\begin{pmatrix}NVA^{(0)}, & \alpha=0\\ 0, & \alpha\neq0\end{pmatrix} \qquad (2.5.3)$$

の式を導いた。ただし $A^{(0)}$ は（1.6.6）の右辺第１項の係数，V は翼への流入速度である。$\alpha\neq0$ ならば，(2.5.3）の右辺は第１項だけになる。それを



図—８　標点分布（$N=4$の場合）

$$-w_\alpha=\frac{1}{2\pi}\frac{\pi}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma_j\sqrt{c^2-x_j^2}}{x_\alpha-x_j}\frac{\Delta x_j}{\Delta x_j},\quad(\alpha\neq0) \qquad (2.5.4)$$

のように書く。ただし Δx_j は box の弦長

$$\Delta x_j=c\{\cos((j-1)\pi/N)-\cos(j\pi/N)\}$$
$$=2c\sin((2j-1)\pi/(2N))\sin(\pi/(2N))$$

である。これを（2.5.4）の分母の Δx_j に適用し，又

$$\bar{\gamma}_j=\gamma_j a\Delta x_j \qquad (2.5.5)$$

と書けば

$$-w_\alpha=\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{\bar{\gamma}_j}{x_\alpha-x_j},\qquad(\alpha\neq0) \qquad (2.5.6)$$

が得られる。ただしこの場合の荷重関数 a は

$$a=\frac{\pi}{2N}\cdot\frac{1}{\sin(\pi/(2N))} \qquad (2.5.7)$$

であって，角 π/N の間の円弧とそれを張る弦長との比を意味する。

(2.5.6)の右辺は x_j の位置に強さ $\bar{\gamma}_j$ の渦が discrete に分布しているときの x_α 点における吹下しである。$x_\alpha(\alpha=1,2,\cdots,N)$ における $-w_\alpha$ を与えれば(2.5.6)により $x_j(j=1,2,\cdots,N)$ の $\bar{\gamma}_j$ が求められる。その解を（2.5.3）の右辺に代入し，$\alpha=0$ と置けば，

$$A^{(0)}=-\frac{1}{NV}\left\{w(\xi_0)+\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{N}\frac{\bar{\gamma}_j}{x_0-x_j}\right\} \qquad (2.5.8)$$

によって $A^{(0)}$ の値を計算することができる。この方法ではbox配分が固定しているので，1/4〜3/4弦長法に較べると mode function 法に近いと見ることができるが，実際の運算は vortex-lattice 法そのままである。

揚力の計算も

$$L=\rho V\int_{-c}^{c}\gamma dx=\rho Vc\int_{0}^{\pi}\gamma\sin\theta d\theta$$

$$\simeq\frac{\pi\rho Vc}{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\sin\left(\frac{(2j-1)\pi}{2N}\right)\cdot\frac{\Delta x_j}{\Delta x_j}$$

$$=\rho V\sum_{j=1}^{N}\gamma_j a\Delta x_j=\rho V\sum_{j=1}^{N}\bar{\gamma}_j \qquad (2.5.9)$$

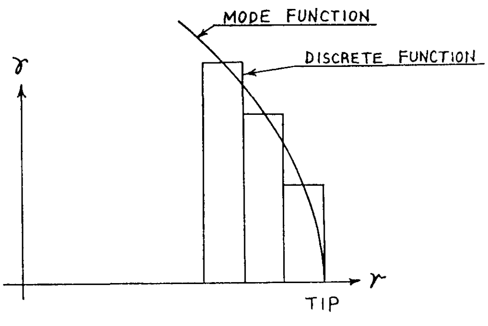
のように vortex-lattice 法と同じ式になる。

(2.2.2), (2.2.5) の τ_α, τ_j を(2.5.2)の標点位置にとれば，$1\leqq\alpha\leqq N_c$ の範囲で (2.2.1), (2.2.4) の代数式から $\bar{\gamma}_{jk}$, $\tilde{\bar{\gamma}}_{jk}$ を求めることができる。これまでの vortex-lattice 法による圧力差分布の計算はここで終りである。それがこの方法では更に $A^{(0)}(r)$ が次のようにして求められる。

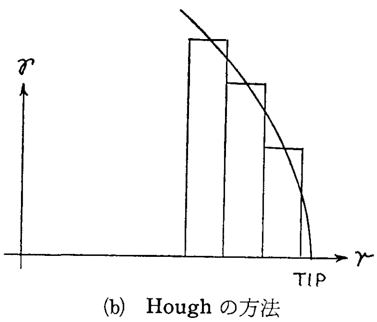
(2.3.4), (2.3.7)の最終項に1位の極があるが，これは束縛渦による吹上げを表わすので，(2.5.3) を適用することができる。したがって $\alpha=0$（前縁）に対する吹上げの代数表示は

$$w_{0\beta}=\sum_{k=1}^{Nr}\sum_{j=1}^{Nc}\bar{\gamma}_{jk}Z_{jk}^{0\beta}-N_cW^*A_\beta^{(0)} \qquad (2.5.10)$$

$$\tilde{w}_{0\beta}=\sum_{k=1}^{Nr}\sum_{j=1}^{Nc}\tilde{\bar{\gamma}}_{jk}\tilde{Z}_{jk}^{0\beta}-N_cW^*\tilde{A}_\beta^{(0)} \qquad (2.5.11)$$



(a) 在来の方法



(b) Hough の方法

図—9 翼素の配分

である。(2.5.8) のようにすれば，これらの式から $A_\beta^{(0)}$, $\tilde{A}_\beta^{(0)}$ が求められる。ただし $A_\beta^{(0)}$ 等は $A^{(0)}(r_\beta)$ を略記したものである。

次は翼素の配分法である。Hough[24] によると vortex-lattice は翼平面形に対し翼端の少し内側で止めるように配置すると翼幅方向分割数に対する収束がよいという。図を見ただけでも図—9の(a)より(b)の方がよいことはほぼ予想がつくが，Hough はそれに理論的裏付をしながら，次のように提案している。lattice は翼幅方向に等間隔なものにし，翼幅より lattice 幅の 1/4 内側で止めておく。これは多分に経験的なものであるが，とにかく10分割程度でほぼ収束するようである[25]。しかし等間隔がよいとも思えない。ボス側も翼端と同じに lattice を翼面の内側で止めておくのがよいだろう。

(2.2.1), (2.2.4)を以上の標点分布について解いて得られた $\bar{\gamma}_{jk}$, $\tilde{\bar{\gamma}}_{jk}$ を $a\Delta x_j$ で除すと，荷重標点上の γ^*, γ_0^* が得られる。

2.6 合力の計算法

合力の計算は doublet-lattice 法で求めた $\bar{\gamma}_{jk}$, $\tilde{\bar{\gamma}}_{jk}$ を1.6節の合力の表示式に適用するので，積分が有限級数の形になる。抵抗成分は束縛渦位置の翼の傾斜を γ_{jk} に乗じて計算する。図—7では束縛渦の長さ $\hat{r}=r_{k+1}-r_k$ は変るように書かれているが螺線面上では螺線に沿って一定である。

1.6 節の合力の表示式を doublet-lattice 法の式に改めると次の様になる。(1.6.4), (1.6.5) に (2.5.9) を適用すると定常プロペラの推力およびトルクは

$$\left.\begin{aligned}S&=l\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta\Big[\rho W_\beta^*\sum_{j=1}^{Nc}\bar{\gamma}_{j\beta}\cos\varepsilon_{oj\beta}\\&\qquad+\delta S_{T\beta}\sin\varepsilon_{I\beta}-\delta D_{f\beta}\sin\varepsilon_{I\beta}\Big]\\Q&=l\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta r\Big[\rho W_\beta^*\sum_{j=1}^{Nc}\bar{\gamma}_{j\beta}\sin\varepsilon_{oj\beta}\\&\qquad-\delta S_{T\beta}\cos\varepsilon_{I\beta}+\delta D_{f\beta}\cos\varepsilon_{I\beta}\Big]\end{aligned}\right\} \qquad (2.6.1)$$

ただし

$$\delta S_{T\beta}=\frac{\pi}{2}\rho c_\beta W_\beta^{*2}(A_\beta^{(0)})^2\sec\Lambda_\beta$$

のように表わされる。

非定常プロペラの推力とトルクの変動は

$$\tilde{S}=\rho lI(p/l)\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta\Big\{W_\beta^*\sum_{j=1}^{Nc}\tilde{\bar{\gamma}}_{j\beta}\cos\varepsilon_{0j\beta}$$

$$+\pi W_\beta{}^{*2}c_\beta A_\beta{}^{(0)}\tilde{A}_\beta{}^{(0)}\sec\Lambda_\beta\sin\varepsilon_{I\beta}\Big\}e^{i\nu t}$$

$$\tilde{Q}=\rho lI(p/l)\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta r_\beta\Big\{W_\beta{}^*\sum_{i=1}^{Nc}\tilde{\gamma}_{j\beta}\sin\varepsilon_{oj\beta}$$

$$-\pi W_\beta{}^{*2}c_\beta A_\beta{}^{(0)}\tilde{A}_\beta{}^{(0)}\sec\Lambda_\beta\cos\varepsilon_{I\beta}\Big\}e^{i\nu t} \tag{2.6.2}$$

である。プロペラ回転面内の横力およびモーメントの変動は

$$\left.\begin{matrix}Y\\Z\end{matrix}\right)=\rho l\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta\Big\{W_\beta{}^*\sum_{j=1}^{Nc}\tilde{\gamma}_{j\beta}\cos\Psi'_{j\beta}\sin\varepsilon_{oj\beta}$$

$$-\pi W_\beta{}^{*2}c_\beta A_\beta{}^{(0)}\tilde{A}_\beta{}^{(0)}\sec\Lambda_\beta\cos\Psi'_{o\beta}\cos\varepsilon_{I\beta}\Big\}\cdot\left(\begin{matrix}\sum s\\ \sum c\end{matrix}\right. \tag{2.6.3}$$

$$\left.\begin{matrix}M_y\\M_z\end{matrix}\right)=\rho l\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta r_\beta\Big\{W_\beta{}^*\sum_{j=1}^{Nc}\tilde{\gamma}_{j\beta}\cos\varepsilon_{oj\beta}$$

$$+\pi W_\beta{}^{*2}c_\beta A_\beta{}^{(0)}\tilde{A}_\beta{}^{(0)}\sec\Lambda_\beta\sin\varepsilon_{I\beta}\Big\}\cdot\left(\begin{matrix}\sum s\\ \sum c\end{matrix}\right)$$

$$-\rho l\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta W_\beta{}^* c_\beta\sum_{j=1}^{Nc}\tilde{\gamma}_{j\beta}\frac{\xi_j-\xi_0}{a_{j\beta}{}^*}\cdot\left(\begin{matrix}\sum c\\ -\sum s\end{matrix}\right. \tag{2.6.4}$$

である。ただし ξ_0 は基準径の ξ 座標（図－8）とする。脚符 β の付いた量は β 番目の翼素の中央弦上の値を意味する。

3 準 discrete function 法

最近の discrete function 法の中で最も安定した方法と思われる Douglas Aircraft Company のＥＶＤ法[6]（elementary vortex distribution）の翼弦方向関数形は Birnbaum 関数を折線で置き換えたようなものである。discrete function をここまで mode function に近付けるならば，いっそ Birnbaum 関数列を使った方が，プロペラ翼のように平均矢高線の単調なものでは，手数がかからないように思う。

本章では半径方向に discrete function，翼弦方向に mode function を用いる準 discrete function 法を考えてみる。Multhopp 系統の mode function 法は明快そうに見えるが，現実には積分計算はすべて数値的，その間対数特異性の難問[26]に閉口するばかりである。準 discrete function 法の利点は半径方向の積分が解析的に行えることで，そのため対数特異性問題は一応回避される。doublet-lattice 法の場合同様，翼素配分は翼端の内側 $\hat{r}/4$ からにした方が収束はよいであろう。

3.1 定常プロペラ

(2.1.6) の$\delta s'$ を (1.1.4) によって $\delta\tau'$ に変えると

$$h/2\Pi\delta\tau'=\rho\bar{\gamma}V^* \tag{3.1.1}$$

である。したがって図－7のように $\delta\tau'$ が半径方向に一定な扇形翼素で，$\Pi(r)=\text{const.}$ としたものは $\bar{\gamma}(r)=\text{const.}$ に対応し，馬蹄形渦を面状に分布させた流体モデルということになる。半径上 $\mu=(\mu_k+\mu_{k+1})/2$（これを $\bar{\mu}_k$ で表わす）位置の圧力差分布を

$$\frac{\Pi}{\rho V^{*2}}=B_k{}^{(0)}\lambda_0(\xi)+B_k{}^{(1)}\lambda_1(\xi)+B_k{}^{(2)}\lambda_2(\xi)+\cdots$$

$$\lambda_0(\xi)=\sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}},\quad \lambda_n(\xi)=\xi^{n-1}\sqrt{1-\xi^2}\,(n\geq1) \tag{3.1.2}$$

のように表わす。これは (1.6.6) と同形，ただ係数に $A^{(j)}=(V^*/W^*)^2B^{(j)}$ の違いがある。翼素の前後縁の座標を τ_1, τ_2 とすると，ξ と τ', s^* の関係は

$$s^*/c=\xi=(\tau'-\tau_0)/\tau_c,\quad \tau_c=(\tau_2-\tau_1)/2,$$
$$\tau_0=(\tau_1+\tau_2)/2 \tag{3.1.3}$$

である。

吹上げの標点位置を τ_α, 又

$$v=(\tau_\alpha-\tau')/2 \tag{3.1.4}$$

とし，(2.2.2) の v を上記の v で置き換えたものを $Z_k^{\alpha\beta}(v)$ の記号で表わすことにすると，(τ_α,μ_β) 位置の吹上げ $w_{\alpha\beta}$ は

$$\frac{w_{\alpha\beta}}{V^*}=\sum_{k=1}^{Nr}\sum_{j=0}^{Nc-1}B_k{}^{(j)}H_{jk}^{\alpha\beta} \tag{3.1.5}$$

$$H_{jk}^{\alpha\beta}=\frac{h}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\lambda_j(\xi')Z_k^{\alpha\beta}(v)d\tau' \tag{3.1.6}$$

のように表わされる。

(3.1.6) の積分では (2.3.4) の右辺最終項だけは特異積分を行う必要がある。$\xi_\alpha=(\tau_\alpha-\tau_0)/\tau_c$ とすると

$$-\frac{1}{4\pi\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\frac{\lambda_j(\xi')}{v}d\tau'=-\frac{1}{2\pi\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}\times\int_{-1}^{1}\frac{\lambda_j(\xi')}{\xi_\alpha-\xi'}d\xi' \tag{3.1.7}$$

となり，薄翼理論の公式で計算できる。これ以外のところは普通の数値積分でよい。(3.1.7) は２次元流の吹上げと同等のもの，分母の $\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}$ はこれで Π を循環 γ^* に変えているわけである（(1.1.7)参照）。

(3.1.5) を $B_k{}^{(j)}$ について解いてその値が得られれば，(3.1.2) によって圧力差の分布が求められる。h の計算は前節とほぼ同じようにして行う。μ_β 上の吹

上げ標点はどこに定めてもよいが，数は N_c 個にする必要がある。

3.2 非定常プロペラ

非定常プロペラの場合も循環密度 $\gamma_0{}^*$ を(3.1.2) のように表わす。定常流と区別するため $B_k{}^{(j)}$ に相当するものに $\tilde{B}_k{}^{(j)}$ の記号を用いる。(2.2.5)，(2.3.7) の $\tilde{Z}^{\alpha\beta}_{jk}$ の変数 v を(3.1.4)で置き換えたものを $\tilde{Z}^{\alpha\beta}_k(v)$ の記号で表わすことにすると，(τ_α, μ_β) 位置の吹上げの complex amplitude $\tilde{w}_{\alpha\beta}$ は

$$\frac{\tilde{w}_{\alpha\beta}}{V^*}=\sum_{k=1}^{Nr}\sum_{j=0}^{Nc-1}\tilde{B}_k{}^{(j)}\tilde{H}^{\alpha\beta}_{jk} \tag{3.2.1}$$

ただし

$$\tilde{H}^{\alpha\beta}_{jk}=\frac{h}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\lambda_j(\xi')\tilde{Z}^{\alpha\beta}_k(v)d\tau' \tag{3.2.2}$$

のように表わされる。この積分で，(2.3.7) の右辺最終項は，定常流の場合と同様，特異積分となる。1位の極の方は前節で計算した通りである。対数特異性の積分は次の様にする。$\ln v=\ln|\xi-\xi'|+\ln(\tau_c/2)$ であるから，第2項を他の数値積分に含ませることにすると

$$\frac{ip^*}{\pi h\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}\frac{h}{2}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\lambda_j(\xi')\ln|\xi_\alpha-\xi'|d\tau'$$
$$=\frac{ip^*\tau_{c\beta}}{2\pi\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}}\int_{-1}^{1}\lambda_j(\xi')\ln|\xi_\alpha-\xi'|d\xi' \tag{3.2.3}$$

を計算すればよいことになる。$\tau_{c\beta}$ は μ_β のところの τ_c である。変数 ξ' を $\xi'=\cos\theta'$ によって θ' に変え

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\cos n\theta'\ln|\cos\theta_\alpha-\cos\theta'|d\theta'=\left(\begin{array}{ll}-\ln 2, & n=0\\ -\dfrac{\cos n\theta}{n}, & n\neq 0\end{array}\right.$$

の公式を利用すると，(3.2.3) は初等関数で表わされる。

(3.2.1) を $\tilde{B}_k{}^{(j)}$ について解き $\gamma_0{}^*$ を求める手順は定常流の場合と同じである。

3.3 合力の計算法

この方法で求めた $\gamma^*, \gamma_0{}^*$ は翼弦方向には連続関数であるから，1.6節の合力の表示式に入れた場合，そこは数値積分を行わねばならない。

定常プロペラの推力およびトルクは

$$\left.\begin{aligned}S&=l\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta\Big[\rho V^{*2}c_\beta\sum_{j=0}^{Nc-1}B_\beta{}^{(j)}\int_{-1}^{1}\lambda_j\cos\varepsilon_{0\beta}d\xi\\&\quad+\frac{\pi}{2}\rho c_\beta\frac{V^{*4}}{W_\beta{}^{*2}}(B_\beta{}^{(0)})^2\sec\Lambda_\beta\sin\varepsilon_{I\beta}-\delta D_{f\beta}\sin\varepsilon_{I\beta}\Big]\\Q&=l\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta r_\beta\Big[\rho V^{*2}c_\beta\sum_{j=0}^{Nc-1}B_\beta{}^{(j)}\int_{-1}^{1}\lambda_j\sin\varepsilon_{0\beta}d\xi\\&\quad-\frac{\pi}{2}\rho c_\beta\frac{V^{*4}}{W_\beta{}^{*2}}(B_\beta{}^{(0)})^2\sec\Lambda_\beta\cos\varepsilon_{I\beta}+\delta D_{f\beta}\cos\varepsilon_{I\beta}\Big]\end{aligned}\right\} \tag{3.3.1}$$

である。ただし c_β は μ_β 位置の半翼弦長で，$\tau_{c\beta}h\sqrt{1+\mu_\beta{}^2}/2$ によって計算される。

非定常プロペラの変動流体合力は

$$\left.\begin{aligned}\tilde{S}&=\rho l\boldsymbol{I}(p/l)\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta\Big\{V^{*2}c_\beta\sum_{j=0}^{Nc-1}\tilde{B}_\beta{}^{(j)}\int_{-1}^{1}\lambda_j\cos\varepsilon_{0\beta}\,\alpha\xi\\&\quad+\pi\frac{V^{*4}}{W_\beta{}^{*2}}c_\beta B_\beta{}^{(0)}\tilde{B}_\beta{}^{(0)}\sec\Lambda_\beta\sin\varepsilon_{I\beta}\Big\}e^{i\nu t}\\\tilde{Q}&=\rho l\boldsymbol{I}(p/l)\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta r_\beta\Big\{V^{*2}c_\beta\sum_{j=0}^{Nc-1}\tilde{B}_\beta{}^{(j)}\int_{-1}^{1}\lambda_j\sin\varepsilon_{0\beta}d\xi\\&\quad-\pi\frac{V^{*4}}{W_\beta{}^{*2}}c_\beta B_\beta{}^{(0)}\tilde{B}_\beta{}^{(0)}\sec\Lambda_\beta\cos\varepsilon_{I\beta}\Big\}e^{i\nu t}\end{aligned}\right\} \tag{3.3.2}$$

$$\left.\begin{array}{l}Y\\Z\end{array}\right)=\rho l\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta\Big\{V^{*2}c_\beta\sum_{j=0}^{Nc-1}\tilde{B}_\beta{}^{(j)}\int_{-1}^{1}\lambda_j\cos\Psi\sin\varepsilon_{0\beta}d\xi$$
$$-\pi\frac{V^{*4}}{W_\beta{}^{*2}}c_\beta B_\beta{}^{(0)}\tilde{B}_\beta{}^{(0)}\sec\Lambda_\beta\cos\Psi_0\cos\varepsilon_{I\beta}\cdot\left(\begin{array}{l}\sum s\\\sum c\end{array}\right. \tag{3.3.3}$$

$$\left.\begin{array}{l}My\\Mz\end{array}\right)=\rho l\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta r_\beta\Big\{V^{*2}c_\beta\sum_{j=0}^{Nc-1}\tilde{B}_\beta{}^{(j)}\int_{-1}^{1}\lambda_j\cos\varepsilon_{0\beta}d\xi$$
$$+\pi\frac{V^{*4}}{W_\beta{}^{*2}}c_\beta B_\beta{}^{(0)}\tilde{B}_\beta{}^{(0)}\sec\Lambda_\beta\sin\varepsilon_{I\beta}\Big\}\cdot\left(\begin{array}{l}\sum s\\\sum c\end{array}\right)$$
$$-\rho l\sum_{\beta=1}^{Nr}\hat{r}_\beta V^{*2}c_\beta\sum_{j=0}^{Nc-1}\tilde{B}_\beta{}^{(j)}\int_{-1}^{1}\lambda_j\cdot\frac{\xi-\xi_0}{a^*{}_\beta}d\xi\cdot\left(\begin{array}{l}\sum c\\-\sum s\end{array}\right. \tag{3.3.4}$$

である。

あとがき

vortex-lattice 法というと馬蹄形渦の誘導速度の積み重ねを考えるのが普通で，プロペラ揚力面でもそうした手法によった解法は幾つかあった。式の展開の複雑さをいとわなければ，それなりの応用はいくらもある方法である。本文に記載した方法はそれとかなり趣を異にしている。ポテンシャル論的方法によったもので，式の展開を簡潔にし，プロペラ揚力面の discrete function による解法の基本形を作ろうとしたものである。

馬蹄形渦は翼幅方向の束縛を一定と仮定したものである。これを要素とした vortex-lattice は，モデルとしては最も単純であるが，とにかくこの方法による広範な計算の結果がよいという事実は尊重しなければならない。束縛渦を面分布で表わす finite panel 法の場合，Shen 等[6]のように box 内束縛循環を一定にしたものは馬蹄形渦を稠密に分布させたのと同じで，モデルとしては一歩前進，よい結果の得られるのは当然であろう。更に手を加えた box内循環が一様でないモデルとなると，Mercer等[27] の方法のように mode function 法とあまり変らないことになってしまう。

数値解法は過去の実績の上に更に検定を重ねながら，より簡便で精度のよい方法を開発するという過程を繰返す。プロペラでは半径方向に流入速度が変るところが直進翼と際立って異なる点であるが，その流場を馬蹄形渦の集団で表わせば，直進翼の経験がその中でもかなり生かされるものと思われる。そのため本文では box 内循環を半径方向に一定と仮定することで解法を作ってみた。実際の運算では更に実状に即した工夫が必要になるであろう。

「プロペラの基礎理論」[8),12)] はこれまで定常流に限定して述べて来た。しかし揚力面の解法を取上げる場合，現状では定常流だけに限ることは許されない。それで定常，非定常共に使える解法を示したわけであるが，内容の理解には非定常プロペラ理論の知識が必要になる。一応の解説は記載したけれども，文献 9) をこのシリーズに加えて参照されることを希望する。

参 考 文 献

1) 花岡達郎，“プロペラ理論と揚力面理論”，船研報告 第14巻 第5号 昭和52年
2) Albano, E. and Rodden, W. P., “A Doublet-Lattice Method for Calculating Lift Distributions on Oscillating Surfaces in Subsonic Flows”, AIAA Journal, Vol. 7, No. 2, 1969
3) NASA Langley Research Center, “Vortex-Lattice Utilization”, NASA, SP-405, 1976
4) James, R.M., “On the Remarkable Accuracy of the Vortex Lattice Method”, Computer Methods Appl. Mech. Eng. Vol. 1, No. 1, 1972
5) Hewitt, B. L., “Developments in Subsonic Lifting Surface Theory”, British Aircraft Corporation Report Ae 282, 1967
6) Shen, C.C., Lopez, M.L. and Wasson, N. F., “A Jet-Wing Lifting-Surface Theory Using Elementary Vortex Distributions”, AIAA, Paper, No. 73-652, 1973
7) 花岡達郎，“非定常プロペラ揚力面の数値解法（その1 基礎理論）” 船研執告 第6巻，第5号 昭和44年
8) 花岡達郎，“プロペラの基礎理論（特に Munk の定理と揚力線理論について），” 船研報告 第5巻，第6号 昭和43年
9) Hanaoka, T., “Hydrodynamics of an Oscillating Screw Propeller”, 4th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, Aug. 1962
10) Kálmán, T.P., Giesing, J.P and Rodden, W.P., “Spanwise Distribution of Induced Drag in Subsonic Flow by the Vortex Lattice Method”, J. Aircraft Vol. 7 No. 6, 1970
11) Hancock, G.J. and Garner, H. C., “On the Application of Subsonic Linearized Wing Theory to Second-Order Forces and Moments”, R&M No. 3758, 1973
12) 花岡達郎，“プロペラの基礎理論—II（定ピッチ非線型理論）”，船研報告 第8巻 第1号 昭和46年
13) Flax, A.H., “General Reverse Flow and Variational Theorems in Lifting-Surface Theory”, J. Aero. Sci. Vol. 19, No. 6, 1952
14) Grammel, R., “Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges”, Braunschweig, 1917
15) Wagner, S., “On the Singularity Method of Subsonic Lifting-Surface Theory, “J. Aircraft, Vol. 6, No. 6, 1969
16) Garner, H. C., “Some Remarks on Vortex Drag and its Spanwise Distribution in Incompressible Flow”, Roy. Aero. Soci. Aero. J. Vol. 72, 1968
17) 花岡達郎，“揚力面の翼端条件と数値解法（その3 円形翼端理論の改訂），” 船研報告 第13巻 第6号 昭和51年
18) Pistolesi, E., “Aerodinamica”, Unione Tipografico—Editrice Torinese, 1932 pp. 203
19) Durand, W. F., “Aerodynamic Theory”, Vol. II pp. 306
20) 木下昌雄，花岡達郎，“双螺旋船に於て推進器軸に対する斜流不均一流及び旋回流が船の操縦性能及びトリムに及ぼす影響について，” 造船協会会報 第83号 昭和26年
21) Lan, C.E., “A Quasi-Vortex-Lattice Method in Thin Wing Theory, “J. Aircraft Vol. 11, No. 9, 1974
22) Multhopp, H., “Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting-Surface Theory)”, R & M No. 2884, 1950
23) 近藤一夫，“プロペラ理論の再展開”，日本航空学会誌 第6巻，第51号，昭和14年
24) Hough, G. R., “Remarks on Vortex-Lattice Methods”, J. Aircraft Vol. 10, No. 5, 1973

25) Hough, G.R., "Lattice Arrangements for Rapid Convergence", NASA SP-405, 1976
26) 花岡達郎, "揚力面の数値解における問題点", 日本航空宇宙学会誌, 第23巻, 第263号, 1975
27) Mercer, J.E. and Weber, J.A., "Aerodynamic Influence Coefficient Method Using Singularity Splines", AIAA Paper No. 73-123, 1973