

揚力面の翼端条件と数値解法

(その4 積分方程式の部分積分)

花 岡 達 郎*

Tip Condition and Numerical Method Concerning Lifting-Surface Theory

(4—Integration by Parts in the Integral Equation)

By

Tatsuro HANAOKA

Abstract

The numerical solutions of the well-known integral equation of a lifting-surface do not converge at the parabolic wing tip on account of the singularity.¹⁾ This forms a serious obstacle against the determination of exact lifting-surface solutions.

In this paper the author shows that the integral equation is changed in another form by means of the integration by parts and then the singularity can be removed by introducing the condition that the circulation on the lifting-surface is equal to zero at the tip. Furthermore, a numerical method to solve the integral equation is described.

ま え が き

揚力面の積分方程式を mode function 法で解こうとすると、円形翼端の近傍で解が安定しない。前後縁近傍の解が安定しない問題を Wagner²⁾が前後縁に標点をとることで解決したのにならって、翼端に標点をとる方法を前報³⁾で提案した。しかし、数値計算の結果¹⁾を見ると、解は翼端に孤立の特異性をもつらしく、依然問題は解決しない。解のこのような特異性は、実用上無意味なばかりでなく、収束解をはやく得たいという目的に対して、大きな障害である。この難問は、積分方程式をそのままにして、数値解法をどう工夫しても、解決しないことは明らかである。

本文では、元の式を部分積分すると、数値解が見せた翼端特異性の理論的要因が明らかになること、解のそのような特異性は、翼端条件を導入することで除去され得ること、それには新しい形の積分方程式を解かね

ばならないこと、等を示す。更に、その積分方程式の数値解法について簡単に述べる。ここでは、 x 軸の負の方向に一定速度で進む定常直進揚力面を例にとって解析を行う。

記号

x, y, z	任意点の座標
x', y', z'	特異点分布の座標
ρ	流体密度
Π	揚力面の圧力差
V	揚力面の前進速度 (x 軸の負の方向に進む)
$\gamma = \Pi / (\rho V^2)$	無次元循環密度
Γ	循環
Φ	速度ポテンシャル
$w = \frac{1}{V} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big _{z=0}$	無次元吹上げ流速
b	半翼幅

* 運動性能部 原稿受付 昭和53年2月21日

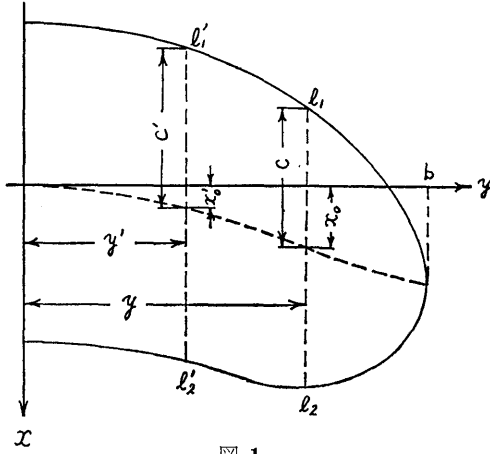


図-1

l_1, l_2 y 位置の前後縁の x 座標

l_1', l_2' y' 位置の前後縁の x 座標

$c = (l_2 - l_1)/2$, $x_0 = (l_1 + l_2)/2$

$c' = (l_2' - l_1')/2$, $x_0' = (l_1' + l_2')/2$

$\bar{c} = c'/b$ $\bar{x}_0 = x_0'/b$

$\lambda = b/c'$

$\xi = (x - x_0)/c = -\cos\theta$, $\xi' = (x' - x_0')/c' = -\cos\theta'$

$\xi^* = (x - x_0')/c'$

$\eta = y/b = \cos\varphi$, $\eta' = y'/b = \cos\varphi'$

$Y = \lambda|\eta - \eta'|$, $Y_1 = Y/2$

$\lambda_N(\xi)$ 翼弦方向の mode function

$\mathbf{H} \int_{-1}^1 d\eta'$ Hadamard の意味の発散積分の有限部分

$T(\xi', \eta') = \frac{1}{b} \left(\xi' \frac{dc'}{d\eta'} + \frac{dx_0'}{d\eta'} \right)$

$\lambda_N(\xi') = T(\xi', \eta') \lambda_N(\xi')$

1. 吹上げの表示式と発散積分の有限部分

吹上げの表示式を作って、それを形式的に揚力面の表面に移すと、積分は発散する。普通は Mangler の積分⁴⁾ が用いられるが、その証明には不備なところがある。本文では速度ポテンシャルを部分積分して解析を進めるので、吹上げに新たな発散積分が現われる。それらの取扱いは正確を期さねばならない。その準備の意味で、単純な場合を例にして、計算法を示しておく。

定常揚力面の無限後方の流場は 2 次元で、その速度ポテンシャルは

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(y')z}{(y-y')^2+z^2} dy' \quad (1.1)$$

(220)

のように表わされる。したがって、この流場の渦面上における吹上げ w は

$$w = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi V} \times \int_{-b}^b \Gamma(y') \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(y-y')^2+z^2} dy' \quad (1.2)$$

である。

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(y-y')^2+z^2} = -\frac{\partial}{\partial y'} \frac{y'-y}{(y'-y)^2+z^2} \quad (1.3)$$

の関係を利用して、(1.2) を y' について部分積分すると

$$w = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi V} \left[-\frac{\Gamma(b)(b-y)}{(b-y)^2+z^2} - \frac{\Gamma(-b)(b+y)}{(b+y)^2+z^2} + \int_{-b}^b \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{y'-y}{(y'-y)^2+z^2} dy' \right] \quad (1.4)$$

となる。普通は $\Gamma(\pm b) = 0$ としている。

(1.4) で $z \rightarrow 0$ とすれば

$$w = -\frac{1}{2\pi V} \int_{-b}^b \frac{d\Gamma/dy'}{y-y'} dy' \quad (1.5)$$

と同等になることが証明されている。その具体的な記述は手近な参考書⁵⁾ で見ることができるので、ここでは省略する。

(1.5) を部分積分して、元の形にもどすと

$$w = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi V} \left[\frac{\Gamma(b)}{b-y} + \frac{\Gamma(-b)}{y+b} - \frac{\Gamma(y-\epsilon)}{\epsilon} - \frac{\Gamma(y+\epsilon)}{\epsilon} + \left\{ \int_{-b}^{y-\epsilon} + \int_{y+\epsilon}^b \right\} \frac{\Gamma(y')}{(y-y')^2} dy' \right] \quad (1.6)$$

となる。 $\Gamma(y)$ が連続関数ならば

$$\frac{\Gamma(y-\epsilon)}{\epsilon} + \frac{\Gamma(y+\epsilon)}{\epsilon} = \frac{2\Gamma(y)}{\epsilon} + \epsilon \frac{d^2\Gamma}{dy^2} + \dots \quad (1.7)$$

であるから、

$$w = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi V} \left[\left\{ \int_{-b}^{y-\epsilon} + \int_{y+\epsilon}^b \right\} \frac{\Gamma(y')}{(y-y')^2} dy' - \frac{2\Gamma(y)}{\epsilon} \right] \quad (1.8)$$

となる。 $-b < y < b$ ならば、この式は Hadamard の発散積分の有限部分と同じ意味になるので

$$w = \frac{1}{2\pi V} \mathbf{H} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(y')}{(y-y')^2} dy' \quad (1.9)$$

と書く。(1.5) では $\Gamma(\pm b) = 0$ の必要があるが、(1.4) で $\Gamma(\pm b) \neq 0$ としておいても、(1.4) の第 1, 第 2 項は (1.6) のそれらと消し合って、(1.8) になるので、 $\Gamma(\pm b) \neq 0$ でも、(1.8) は成立つ。ただ $y = \pm b$ には適用できないから、それが必要なときは、 $y \rightarrow$

$\pm b$ の極限値を (1.8) より求めるようにする。数値計算では (1.8) そのままよりも、(1.9) を部分積分して、Cauchy の主値をとるように計算することが多いので、 $\Gamma(\pm b) \neq 0$ でもよいということは知っておく必要がある。又、(1.7) から明らかのように、(1.8) が成立つには、 $\Gamma(y')$ が少くとも 2 回微分可能でなければならない。 $\Gamma(y')$ だけを考えるならば、そう仮定することに特に物理的な無理はないだろう。しかし、3 次元揚力面の場合に、同じ演算を適用しようとする、数学的要因から不都合の生じることがある。

Mangler⁴⁾ は定常直進揚力面の吹上げの場合に、(1.8) のような発散積分の有限部分を計算するように提案した。そこでは $\Gamma(y')$ に対応するものが

$$f(y') = \frac{1}{2} \int_{l_1}^{l_2} \gamma(x', y') \left\{ 1 + \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right\} dx' \quad (1.10)$$

で定義される関数になっている。Mangler の証明は上記とほぼ同じ方法で行っていて、 $f(\pm b) = 0$ を条件としているが、上に示したように、その必要はない。よく知られているように、 $f(y')$ には $y-y'=0$ に対数特異性があり、2 回微分可能でない。 $f(y')/(y-y')^2$ を $1/(y-y')$ の多項式と可積分な関数に分ければ、この問題は一応回避できる。実用計算の対数補正⁵⁾ はこの処置に外ならないけれども、特異性の分離に無理があって、充分目的が達しられてはいない⁷⁾。

2 次元薄翼の場合も、速度ポテンシャルは (1.1) とほぼ同じ、ただ座標を z 軸まわりに 90° 回転させ、又積分の上限を ∞ に変えるだけのものであるから、吹上げの計算は Hadamard の有限部分をとればよい筈である。それを別の方法で証明してみる。前記の方法は部分積分して Cauchy の主値をとればよいという、既知の結果を利用したものであるが、今度は直接 Hadamard の有限部分を導くようにする。

半翼弦長を c とすると、速度ポテンシャルは

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-c}^{\infty} \frac{\Gamma(x')z}{(x-x')^2 + z^2} dx' \quad (1.11)$$

である。よって、渦面上の吹上げの表示式は

$$w = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi V} \int_{-c}^{\infty} \Gamma(x') \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(x-x')^2 + z^2} dx' \quad (1.12)$$

である。これは

$$w = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi V} \left[\int_{-c}^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \right] \frac{\Gamma(x')}{(x-x')^2} dx' - \lim_{z \rightarrow 0} \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \Gamma(x') \frac{\partial}{\partial x'} \frac{x'-x}{(x'-x)^2 + z^2} dx']$$

$$(1.13)$$

と書かれる。括弧内の第 2 項は、 $x'-x=\bar{x}$ と書くと

$$-\lim_{z \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left\{ \Gamma(x) + \Gamma'(x)\bar{x} + \frac{1}{2}\Gamma''(x)\bar{x}^2 \dots \right\} \times \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \frac{\bar{x}}{\bar{x}^2 + z^2} d\bar{x} = - \left\{ \frac{2\Gamma(x)}{\varepsilon} - \varepsilon\Gamma''(x) + \dots \right\}$$

であるから、(1.13) は

$$w = \frac{1}{2\pi V} H \int_{-c}^{\infty} \frac{\Gamma(x')}{(x-x')^2} dx' \quad (1.14)$$

に外ならない。これを x' で部分積分する。 $d\Gamma/dx'$ が揚力面の外で 0 となることを考慮すると、周知の式

$$w = - \frac{1}{2\pi V} \int_{-c}^{\infty} \frac{d\Gamma/dx'}{x-x'} dx' \quad (1.15)$$

が得られる。

(1.5), (1.15) を導く演算は、ここに示したものの方が、従来の計算より簡単である。(1.9), (1.14) 共に吹上げの表示式で、形式的に $z=0$ とし、Hadamard の有限部分をとる形になっている。しかし、吹上げの発散積分は、いつもこうしてよいという保証のないことは、3 次元揚力面の Mangler 積分の例に見る通りである。したがって、吹上げ表示式の発散積分を何う扱うかは、その都度吟味しておく必要がある。

2. 積分方程式の部分積分

定常揚力面の積分方程式は

$$w = \frac{1}{4\pi b} H \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-1}^1 \frac{c'\gamma}{(\eta-\eta')^2} \left\{ 1 + \frac{\xi^* - \xi'}{\sqrt{(\xi^* - \xi')^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2}} \right\} d\xi' \quad (2.1)$$

である。これを η' について部分積分を行ってみる。前節で指摘したように、(2.1) は厳密な意味の Hadamard の有限部分ではない。したがって、この式で直接部分積分するのでは、納得のいく演算はむづかしいだろう。以下の計算は形式的なことに終るが、(2.1) と後に示す厳密なものとの関係を理解するのに役立てようというのが解析のねらいである。

(2.1) の ξ^* は η' の関数と見ることができから

$$f(\xi', \eta') = (\xi^* - \xi')c'/b = (x-x_0' - c'\xi')/b \quad (2.2)$$

と書くことにする。

$$\frac{1}{\lambda(\eta-\eta')} = \frac{1}{2\lambda(\eta-\eta')} \int_{-1}^1 \gamma \times \left\{ 1 + \frac{\sqrt{f(\xi', \eta')^2 + (\eta-\eta')^2}}{f(\xi', \eta')} \right\} d\xi' \quad (2.3)$$

で定義される関数を η' で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial \eta'} \left\{ \frac{1}{\lambda(\eta-\eta')} \right\} = \frac{1}{2b} \int_{-1}^1 \frac{\partial(c'\gamma)/\partial \eta'}{\eta-\eta'}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ 1 + \frac{\sqrt{f(\xi', \eta')^2 + (\eta - \eta')^2}}{f(\xi', \eta')} \right\} d\xi' + \frac{1}{2b} \\
& \times \int_{-1}^1 \frac{c' \gamma}{(\eta - \eta')^2} \left\{ 1 + \frac{\xi^* - \xi'}{\sqrt{(\xi^* - \xi')^2 + \lambda^2 (\eta - \eta')^2}} \right\} d\xi' \\
& - \frac{1}{2b} \mathbf{H} \int_{-1}^1 \frac{c' \gamma (\eta - \eta')}{f(\xi', \eta')^2 \sqrt{f(\xi', \eta')^2 + (\eta - \eta')^2}} \\
& \times \frac{\partial}{\partial \eta'} f(\xi', \eta') d\xi' \quad (2.4)
\end{aligned}$$

である。この式の第2項は(2.1)の被積分関数と同じであるから、(2.4)を(2.1)に代入し、 η' の積分を行うと

$$\begin{aligned}
w = & -\frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\eta' \int_{-1}^1 \frac{\partial(\bar{c}\gamma)/\partial \eta'}{\eta - \eta'} \\
& \times \left\{ 1 + \frac{\sqrt{(\xi^* - \xi')^2 + \lambda^2 (\eta - \eta')^2}}{\xi^* - \xi'} \right\} d\xi' \\
& + \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \int_{-1}^1 d\eta' \\
& \times \int_{-1}^1 \frac{\gamma \lambda (\eta - \eta')}{\bar{c} (\xi^* - \xi')^2 \sqrt{(\xi^* - \xi')^2 + \lambda^2 (\eta - \eta')^2}} \frac{\partial f}{\partial \eta'} d\xi' \\
& + \frac{1}{2\pi} \left[\frac{I}{\lambda (\eta - \eta')} \right]_{\eta'=-1}^1 \quad (2.5)
\end{aligned}$$

となる。これが(2.1)を η' で部分積分した式である。(2.2)の f を η' で偏微分する際、 x および ξ' は η' に無関係とみなしてよいため、

$$\frac{\partial f}{\partial \eta'} = -\frac{1}{b} \left(\xi' \frac{dc'}{d\eta'} + \frac{dx_0'}{d\eta'} \right) = -T(\xi', \eta') \quad (2.6)$$

である。

(2.5)の右辺第3項の性質は次節で検討する。

3. influence function の特異性

特異積分方程式の解の性質は核関数の特異性に多くを依存するものであるが、(2.1)はその関係がなかなか捉え難い式である。それで、形を変えた(2.5)でそれを試してみようというのが、本節以下の解析の目的である。核関数の特異性は influence function の特異性でほぼ定まるので、先ずその解析から始める。

揚力面の無次元圧力差 γ を Glauert の mode function を用いて、

$$\left. \begin{aligned}
\gamma(\xi, \eta) = & A^{(0)}(\eta) \lambda_0(\xi) + A^{(1)}(\eta) \lambda_1(\xi) \\
& + A^{(2)}(\eta) \lambda_2(\xi) + \dots \\
\lambda_0 = & \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} = \cot \frac{\theta}{2}, \\
\lambda_N(\xi) = & \sin N\theta \quad (N=1, 2, 3, \dots)
\end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

のように表わすことにする。ただし、 $\xi = -\cos \theta$ であ

(222)

る。kernel function 法⁸⁾では、 $A^{(N)}(\eta = \pm 1) = 0$ となる関数形が用いられているが、(3.1)を(2.5)の γ に代入すると、円形翼端では、 $A^{(N)}(\eta) \neq 0$ となることが本文でほぼ証明されるので、以下では $A^{(N)}(\eta = \pm 1) \neq 0$ として運算を行う。

(3.1)を(2.5)に代入すると

$$\begin{aligned}
w = & -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \int_{-1}^1 \frac{d(\bar{c}A^{(N)})/d\eta' I_N(\xi^*, Y)}{\eta - \eta'} d\eta' \\
& - \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \int_{-1}^1 \frac{A^{(N)}}{\bar{c}} J_N(\xi^*, Y) d\eta' + \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \\
& \times \left[\frac{A^{(N)}(\eta') I_N}{\lambda(\eta - \eta')} \right]_{\eta'=-1}^1 \quad (3.2)
\end{aligned}$$

と書かれる。 I_N および J_N は(2.5)式における influence function であって

$$I_N(\xi^*, Y) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') \left\{ 1 + \frac{\sqrt{(\xi^* - \xi')^2 + Y^2}}{\xi^* - \xi'} \right\} d\xi' \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
J_N(\xi^*, Y) = & \frac{\text{sgn}(\eta - \eta')}{2} \mathbf{H} \int_{-1}^1 A_N(\xi') \\
& \times \frac{Y}{(\xi^* - \xi')^2 \sqrt{(\xi^* - \xi')^2 + Y^2}} d\xi' \quad (3.4)
\end{aligned}$$

で与えられる。ただし、 $A_N(\xi') = \lambda_N(\xi') T(\xi', \eta')$ とする。この influence function の特異性は $|\xi^*|$ が1より小さいか、等しいか、大きいかで変わる。

(1) $|\xi^*| < 1$ の場合

この場合は、点 $Y=0$ 以外には特異性がなく、それは ξ' の積分のうち、 $\xi' = \xi^*$ の附近の積分に由来する。したがって、 I_N の $Y=0$ における漸近式は

$$\begin{aligned}
I_N(\xi^*, Y) \simeq & \int_{-1}^{\xi^*} \lambda_N(\xi') d\xi' + \frac{1}{2} \int_{\xi^*-\delta}^{\xi^*+\delta} \\
& \left\{ \lambda_N(\xi^*) + (\xi' - \xi^*) \lambda^{(1)}(\xi^*) + \dots \right\} \\
& \times \left\{ 1 - \frac{\sqrt{(\xi' - \xi^*)^2 + Y^2}}{\xi' - \xi^*} \right\} d\xi'
\end{aligned}$$

によって求められる。これを計算すると

$$I_N(\xi^*, Y) \simeq \int_{-1}^{\xi^*} \lambda_N(\xi') d\xi' + \frac{1}{2} \lambda_N^{(1)}(\xi^*) Y^2 \ln Y + \quad (3.5)$$

となる。よって、(3.2)の第1項の核関数の特異性は1位の極だけと考えてよい。

同様の計算を J_N について行ってみると

$$\begin{aligned}
J_N(\xi^*, Y) \simeq & \text{sgn}(\eta - \eta') A_N^{(2)}(\xi^*) \mathbf{H} \int_0^\delta \frac{Y}{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + Y^2}} d\xi \\
& + \frac{1}{2} \text{sgn}(\eta - \eta') A_N^{(2)}(\xi^*) \int_0^\delta \frac{Y}{\sqrt{\xi^2 + Y^2}} d\xi + \dots \\
= & \frac{\text{sgn}(\eta - \eta')}{Y} A_N(\xi^*) \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_\epsilon^\delta \frac{\sqrt{\xi^2 + Y^2}}{\xi^2} d\xi \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{Y}{\varepsilon} \left\{ -\int_0^{\xi^*} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2 + Y^2}} \right\} \\
& -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\eta - \eta') A_N^{(2)}(\xi^*) Y \ln Y + \dots \\
& = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\eta - \eta') A_N^{(2)}(\xi^*) Y \ln Y + \dots
\end{aligned} \quad (3.6)$$

のように、 J_N には特異性がないことがわかる（追記参照）。ただし、 $A_N^{(k)} = (d/d\xi)^k A_N(\xi)$ である。

(2) $|\xi^*| > 1$ の場合

$Y \neq 0$ とする。 $(\xi^* - \xi')^2 / Y^2 \ll 1$ として（こうしても不都合はない。附録参照）、 $\sqrt{1 + (\xi^* - \xi')^2 / Y^2}$ をべき級数に展開すると

$$\begin{aligned}
I_N(\xi^*, Y) & \simeq \frac{Y}{2} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\xi^* - \xi'} d\xi' + \frac{1}{4Y} \\
& \times \int_{-1}^1 (\xi^* - \xi') \lambda_N(\xi') d\xi' + \dots
\end{aligned} \quad (3.7)$$

である。第2項以下には特異性がないので省略する。ここで

$$\mathcal{J}_N(\xi^*) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos N\theta'}{\xi^* + \cos \theta'} d\theta' \quad (3.8)$$

によって定義される関数を導入する。この関数には

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{J}_0(\xi^*) & = \frac{\operatorname{sgn}(\xi^* + 1)}{\sqrt{\xi^{*2} - 1}}, \quad \mathcal{J}_1(\xi^*) = 1 - \frac{\xi^* \operatorname{sgn}(\xi^* + 1)}{\sqrt{\xi^{*2} - 1}} \\
\mathcal{J}_{N+1} + \mathcal{J}_{N-1} & = -2\xi^* \mathcal{J}_N
\end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

の関係があるので、任意の整数 N に対する \mathcal{J}_N の表示式が得られ、それには $1/\sqrt{\xi^{*2} - 1}$ の項が含まれる。この \mathcal{J}_N を用いると

$$\left. \begin{aligned}
I_0(\xi^*, Y) & \simeq \frac{\pi Y}{2} (\mathcal{J}_0 + \mathcal{J}_1) \\
I_N(\xi^*, Y) & \simeq \frac{\pi Y}{4} (\mathcal{J}_{N-1} - \mathcal{J}_{N+1}) \quad (N \geq 1)
\end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

と書かれる。したがって、influence function I_N は $Y \neq 0$ でも、 $\xi^* = 1$ に特異点を持ち、その翼幅方向の位置は吹上げ標点の位置に依存する。

J_N でも同様で、 $Y \neq 0$ とすると

$$\begin{aligned}
J_N(\xi^*, Y) & \simeq \frac{\operatorname{sgn}(\eta - \eta')}{2} \int_{-1}^1 \frac{A_N(\xi')}{(\xi^* - \xi')^2} d\xi' \\
& = \frac{\operatorname{sgn}(\eta - \eta')}{2} \left\{ -\frac{d\bar{c}}{d\eta'} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\xi^* - \xi'} d\xi' \right. \\
& \quad \left. + T(\xi^*, \eta') \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{(\xi^* - \xi')^2} d\xi' \right\}
\end{aligned} \quad (3.11)$$

である。この式の計算には

$$\mathcal{J}_N(\xi^*) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos N\theta'}{(\xi^* + \cos \theta')^2} d\theta' \quad (3.12)$$

の形の関数を用いるのがよい。これは \mathcal{J}_N と

$$\mathcal{J}_N(\xi^*) = -\frac{d}{d\xi^*} \mathcal{J}_N(\xi^*) \quad (3.13)$$

の関係にあるから、(3.9) を用いると

$$\left. \begin{aligned}
\mathcal{J}_0(\xi^*) & = -\frac{\xi^* \operatorname{sgn}(\xi^* + 1)}{(\xi^{*2} - 1)^{3/2}}, \\
\mathcal{J}_1(\xi^*) & = -\frac{\operatorname{sgn}(\xi^* + 1)}{(\xi^{*2} - 1)^{3/2}} \\
\mathcal{J}_{N+1} + \mathcal{J}_{N-1} & = 2\mathcal{J}_N - 2\xi^* \mathcal{J}_N
\end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

が得られる。よって、 J_N も $\xi^* = 1$ に極を持ち、しかもその位数は $3/2$ である。この場合は、 η' の積分が発散するから、Hadamard の有限部分をとるようにする。

(3) 同時に、 $Y \rightarrow 0$ 、 $|\xi^*| \rightarrow 1$ となる場合

これは吹上げ標点が前縁又は後縁上にある場合に該当する。

(3.3) で変数 ξ' 、 ξ^* を

$$X' = (1 + \xi')/2, \quad X = (1 + \xi^*)/2 \quad (3.15)$$

によって、 X' 、 X に変えると

$$I_N(X, Y_1) = \int_0^1 \lambda_N(\xi') \left\{ 1 + \frac{\sqrt{(X - X')^2 + Y_1^2}}{X - X'} \right\} dX' \quad (3.16)$$

である。ただし、 $Y_1 = Y/2$ とする。

X を前縁に沿って変える。 y' が y の右にある場合（図-2参照）、

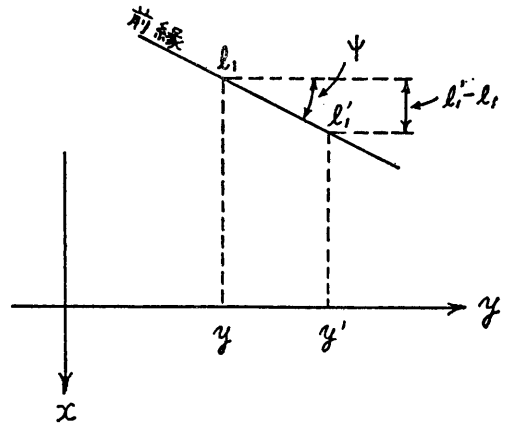


図-2

$$\delta = \frac{l_1' - l_1}{2c'}$$

と書くと、 $X = -\delta$ であるから、 $N=0$ の場合

$$I_0(-\delta, Y_1) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - X'}{X'}} \left\{ 1 - \frac{\sqrt{(\delta + X')^2 + Y_1^2}}{\delta + X'} \right\} dX' \quad (3.17)$$

である。 $\delta + X' = Y_1 s$ と置いて、変数 X' を s に変えると

$$I_0(-\delta, Y_1) = Y_1 \int_{\delta/Y_1}^{(1+\delta)/Y_1} \sqrt{\frac{1+\delta-Y_1 s}{Y_1 s - \delta}} \times \left(1 - \frac{\sqrt{1+s^2}}{s}\right) ds$$

である。

$$\lim_{Y_1 \rightarrow 0} \frac{\delta}{Y_1} = \frac{l'_1 - l_1}{|y - y'|} = \tan \phi = k$$

であるから、 $Y_1 = 0$ の近傍では

$$\left. \begin{aligned} I_0(-\delta, Y_1) &\simeq \sqrt{Y_1} h_0 \\ h_0 &= \int_k^\infty \frac{1}{\sqrt{s-k}} \left(1 - \frac{\sqrt{1+s^2}}{s}\right) ds \\ &= -2 \int_k^\infty \frac{\sqrt{s-k}}{s^2 \sqrt{1+s^2}} ds \end{aligned} \right\} (3.18)$$

となる。

したがって、(3.2) の第1項では、前縁の特異性は位数 $1/2$ の極となる。 y' が y の左にある場合でも、 h_0 の形が少し違うだけ、ほぼ同じ結果となる。後縁には特異性は現われない。 $N \geq 1$ の場合の前後縁も同様である。

$J_0(-\delta, Y_1)$ について、同じ計算を行うと

$$\left. \begin{aligned} J_0(-\delta, Y_1) &\simeq \frac{\text{sgn}(\eta - \eta')}{4} \frac{T(-1, \eta')}{Y_1^{3/2}} g_0 \\ g_0 &= \int_k^\infty \frac{1}{\sqrt{s-k}} \frac{1}{s^2 \sqrt{1+s^2}} ds \end{aligned} \right\} (3.19)$$

となる。したがって、(3.2) の第2項は前縁に位数 $3/2$ の極が現われ、積分は発散するが、Hadamard の有限部分をとる。 J_N では、 $N=0$ の後縁にも、又 $N \geq 1$ でも前後縁に極が現われる。

以上のように、積分方程式 (3.2) の核関数の特異性は複雑であるから、数値計算にはかなりの工夫が必要である。

次に (3.2) の右辺第3項について考える。 $|\eta - \eta'| \gg 0$ ならば、この項は0であるが、 $\eta - \eta'$ が0に近いところでは、様子が違って来る。

(3.5) より

$$\begin{aligned} \frac{I_N(\xi^*, Y)}{Y} &= \frac{c'}{b|\eta - \eta'|} \int_{-1}^{\xi^*} \lambda_N(\xi^*) d\xi^* \\ &\quad + \frac{b}{2c'} \lambda_N^{(1)}(\xi^*) |\eta - \eta'| \ln Y + \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

である。したがって、矩形翼端のように $\eta' = \pm 1$ で c' が有限、 $A^{(N)}(\eta')$ が0ならば、 $\eta - \eta' \rightarrow 0$ でも問題なく (3.2) の第3項は0とみなしてよい。 $\xi^* = \pm 1$ では I_N の漸近式が (3.18) のように変わり、 $\lambda_N^{(1)}$ が現われないので、同様に考えてよい。

(224)

一方、円形翼端 ($c'=0$) では、(3.20) を見るまでもなく、(6.19) を (2.3) に適用してみれば、(3.2) の第3項が

$$\left. \begin{aligned} I/Y &= 0, \quad |\eta| < 1 \\ I/Y &\rightarrow \infty, \quad |\eta| \rightarrow 1 \quad ((6.19) \text{参照}) \end{aligned} \right\} (3.21)$$

の形の特異な関数であることがわかる。しかも、これは数値計算に直接使うことができない。(3.2) の第3項をどうするかの問題は5節で再び取り上げる。

4. 速度ポテンシャルの部分積分

定常揚力面の速度ポテンシャルを渦理論で書くと

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b dy' \int_{l_1}^{\infty} \Gamma(x', y') \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \Big|_{z'=0} dx' \end{aligned} \quad (4.1)$$

である。循環 Γ は揚力面の圧力差 Π と

$$\Gamma(x', y') = \frac{1}{\rho V} \int_{l_1}^{x'} \Pi(x'', y') dx'' \quad (4.2)$$

の関係にある。

$$\begin{aligned} F(x-x', y-y') &= \int^{y'} \frac{dy''}{\{(x-x')^2 + (y-y'')^2 + z^2\}^{3/2}} \\ &= \frac{y' - y}{\{(x-x')^2 + z^2\} \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}} \end{aligned} \quad (4.3)$$

の積分公式を用いると

$$\begin{aligned} &\int_{l_1}^{\infty} \Gamma(x', y') \frac{z}{\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2\}^{3/2}} dx' \\ &= \frac{dl'_1}{dy'} \Gamma(l'_1, y') \cdot z F(x-l'_1, y-y') \\ &\quad - z \int_{l_1}^{\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial y'} F(x-x', y-y') dx' \\ &\quad + z \frac{\partial}{\partial y'} \int_{l_1}^{\infty} \Gamma(x', y') F(x-x', y-y') dx' \end{aligned} \quad (4.4)$$

の恒等式が得られるから、これを (4.1) に代入して、 y' の積分を行う。ここで、一般に認められている条件

$$\Gamma(y' = \pm b) = 0 \quad (4.5)$$

$$\Gamma(l'_1, y') = 0 \quad (4.6)$$

を導入すると、(4.4) の右辺第1項と第3項は消える。ただ、第1項の dl'_1/dy' は円形翼端で無限大になるから、そこは検討を要する。その部分だけ残すと、結局、(4.1) は

$$\Phi = -\frac{z}{4\pi} \int_{-b}^b dy' \int_{l_1}^{\infty} \frac{\partial \Gamma}{\partial y'} F(x-x', y-y') dx'$$

$$-\frac{B_{+z}}{4\pi}F(x-l_1', y-b) - \frac{B_{-z}}{4\pi}F(x-l_1', y+b) \quad (4.7)$$

のように書かれる。ただし

$$B_{\pm} = \lim_{y' \rightarrow \pm b} \frac{dl_1}{dy'} \Gamma(l_1', y') \quad (4.8)$$

である。

ここで B_{\pm} が 0 か有限かを吟味する。(3.1) の λ_N の中で、前縁付近で循環が最も大きくなるのは λ_0 であるから、その場合を解析しておけば、あとは詳細を省略してもよいだろう。

(3.1) の第 1 項による循環 $\Gamma^{(0)}$ の前縁近傍の関数形は

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma^{(0)}}{V} &= A^{(0)}(\eta') \int_{l_1'}^{x'} \sqrt{\frac{l_2' - x''}{x'' - l_1'}} dx'' \doteq 2A^{(0)}(\eta') \\ &\quad \times \sqrt{2c'} \sqrt{x' - l_1'} \end{aligned} \quad (4.9)$$

である。平面形の翼端曲率半径を ba_0 とすると、その付近では、 $c' = ba_0 \sin \varphi_0$ のように表わされる。又翼端近傍では $y' = b(1 - a_0 + a_0 \cos \varphi_0)$ であるから、

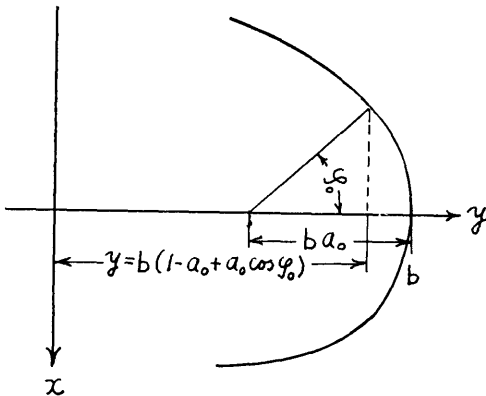


図-3

$$\frac{dl_1'}{dy'} \doteq -\frac{dc'}{dy'} = -\frac{dc'}{d\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{dy'} = \cot \varphi_0 \quad (4.10)$$

である。(4.9)、(4.10) を (4.8) に代入すると

$$B_{\pm}^{(0)} = \lim_{\varphi_0 \rightarrow 0} 2\sqrt{2}ba_0VA^{(0)}(\eta') \cos \varphi_0 \sqrt{\frac{x' - l_1}{c'}} \Big|_{x'=l_1} \quad (4.11)$$

であるから、 $B_{\pm}^{(0)} = 0$ である。同様の計算をすれば $B_{\pm}^{(N)} = 0$ としてよいこともわかる。よって、(4.7) の第 2 項以下は消える。

(4.2) の積分変数を $\xi'' = (x'' - x_0')/c'$ によって ξ'' に変えらる

$$\frac{\Gamma(\xi', y')}{V} = \int_{-1}^{\xi'} \gamma(\xi'', y') c' d\xi'' \quad (4.12)$$

である。 ξ' が y' の関数であることに留意して、 y' で微分すると、

$$\frac{1}{V} \frac{\partial \Gamma}{\partial y'} = \int_{-1}^{\xi'} \frac{\partial(c'\gamma)}{\partial y'} d\xi'' + c'\gamma \frac{d\xi'}{dy'} \quad (4.13)$$

となる。 $d\xi'/dy'$ は x' を一定としたときの ξ' の翼幅方向の変化を表わすもので、 $c'\xi' = x' - x_0'$ の両辺を y' で微分すれば得られる。即ち

$$\frac{d\xi'}{dy'} = -\frac{1}{c'} T(\xi', \eta') \quad (4.14)$$

である。よって、(4.7) は

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{Vz}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{dy'}{c'} \int_{l_1'}^{x'} \int_{l_1'}^{x'} \frac{\partial(c'\gamma)}{\partial y'} dx'' \\ &\quad \times F(x-x', y-y') dx' \\ &\quad + \frac{Vz}{4\pi} \int_{-b}^b dy' \int_{l_1'}^{x'} \gamma T(\xi', \eta') F(x-x', y-y') dx' \end{aligned}$$

と書かれる。Dirichlet 変換を用いて、第 1 項の x'' 、 x' の積分順序を交換する。そして、 x'' 、 x' の記号も交換すると

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{Vz}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{dy'}{c'} \int_{l_1'}^{x'} \frac{\partial(c'\gamma)}{\partial y'} dx' \\ &\quad \times \int_x^{\infty} F(x-x', y-y') dx'' \\ &\quad + \frac{Vz}{4\pi} \int_{-b}^b dy' \int_{l_1'}^{x'} \gamma T(\xi', \eta') F(x-x', y-y') dx' \end{aligned} \quad (4.15)$$

が得られる。

5. 積分方程式と翼端条件

揚力面上の吹上げ w の表示式を (4.15) より示める。

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a'+x^2)\sqrt{a+x^2}} &= \frac{1}{a'} \sqrt{\frac{a'}{a-a'}} \\ &\quad \times \tan^{-1} x \sqrt{\frac{a-a'}{a'(a+x^2)}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

の公式を利用すると、(4.15) の x'' の積分が行えて

$$\begin{aligned} & z \int_x^{\infty} F(x-x', y-y') dx'' \\ &= - \left\{ \tan^{-1} \frac{y-y'}{z} + \tan^{-1} \frac{(x-x')(y-y')}{zR} \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

となる。ただし、 $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$ とする。よって

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left\{ z \int_x^{\infty} F(x-x', y-y') dx'' \right\} \\ &= \frac{y-y'}{(y-y')^2 + z^2} + \frac{(x-x')(y-y')R}{z^2 R^2 + (x-x')^2 (y-y')^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{z^2(x-x')(y-y')}{z^2R^2+(x-x')^2(y-y')^2R} \quad (5.3)$$

である。又

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\{zF(x-x', y-y')\} &= \frac{\partial}{\partial x'}\left\{\frac{x'-x}{(x-x')^2+z^2}\right\} \\ &\times \frac{y-y'}{R} + \frac{z^2(y-y')}{R^2\{(x-x')^2+z^2\}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

と書かれる。

吹上げの表示式は

$$w = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{V} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (5.5)$$

によって求められるが、(4.15)をこれに代入したとき、(5.3)の第3項と(5.4)の第2項に対応するものは0になる。

$$\frac{\partial(c'\gamma)}{\partial y'} = \kappa(x', y'), \quad \gamma T = \chi(x', y') \quad (5.6)$$

又

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{-b}^{y-\varepsilon_1} + \int_{y+\varepsilon_1}^b \right\} dy' &= \int_{-b}^b dy' \\ \left\{ \int_{l_1'}^{x-\varepsilon_2} + \int_{x+\varepsilon_2}^{l_2'} \right\} dx' &= \int_{l_1'}^{l_2'} dx' \end{aligned}$$

と書くことにすると

$$\begin{aligned} w &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{dy'}{c'} \int_{l_1'}^{l_2'} \frac{\kappa(x', y')}{y-y'} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}{x-x'} \right\} dx' \\ &- \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b dy' \\ &\int_{l_1'}^{l_2'} \frac{\chi(x', y')(y-y')}{(x-x')^2 \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} dx' \\ &- \lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0}} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \left\{ \int_{y-\varepsilon_1}^{y+\varepsilon_1} \int_{l_1'}^{l_2'} + \int_{-b}^b \int_{x-\varepsilon_2}^{x+\varepsilon_2} + \int_{y-\varepsilon_1}^{y+\varepsilon_1} \int_{x-\varepsilon_2}^{x+\varepsilon_2} \right\} \\ &\times \frac{\kappa(x', y')}{c'} \left\{ \frac{y-y'}{(y-y')^2+z^2} \right. \\ &+ \left. \frac{(x-x')(y-y')R}{z^2R^2+(x-x')^2(y-y')^2} \right\} dy' dx' \\ &+ \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b dy' \int_{x-\varepsilon_2}^{x+\varepsilon_2} \chi(x', y') \\ &\frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \frac{x'-x}{(x-x')^2+z^2} \right\} \frac{y-y'}{R} dx' \end{aligned} \quad (5.7)$$

のように表わされる。 $x'-x=\bar{x}$, $y'-y=\bar{y}$ と書き、 κ を x, y の近傍で級数展開して

$$\kappa(x', y') = \kappa(x, y) + \bar{x}\kappa_x(x, y) + \bar{y}\kappa_y(x, y) + \dots \quad (5.8)$$

のように表わし、(5.7)の第3項に代入すると、被積分関数が \bar{x}, \bar{y} について奇関数となるものは消える。又偶関数となるものでも、 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$, $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ にすると消え

(226)

てしまう。したがって、(5.7)の第1項でCauchyの主値をとれば、第3項は省略してよい。

$$\frac{\chi(x', y')(y-y')}{R} = B(x', y') \quad (5.9)$$

と書くと、(5.7)の第4項の x' の積分は、(1.13)の括弧内の第2項と同形になる。 $y-y' \neq 0$ として $B(x', y')$ を x の近傍で級数展開して、その積分を行うと

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \int_{x-\varepsilon_2}^{x+\varepsilon_2} B(x', y') \frac{\partial}{\partial x'} \left\{ \frac{x'-x}{(x-x')^2+z^2} \right\} dx' \\ = \frac{2B(x, y')}{\varepsilon_2} - \varepsilon_2 B_x''(x, y') + \dots \end{aligned} \quad (5.10)$$

となるから、(5.7)の第2項でHadamardの有限部分をとれば、第4項はその項に含ませたことになる。

結局、揚力面上の吹上げは

$$\begin{aligned} w &= -\frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{dy'}{c'} \int_{l_1'}^{l_2'} \frac{\kappa(x', y')}{y-y'} \\ &\times \left\{ 1 + \frac{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}{x-x'} \right\} dx' \\ &- \frac{1}{4\pi} H \int_{-b}^b dy' \\ &\times \int_{l_1'}^{l_2'} \frac{\chi(x', y')(y-y')}{(x-x')^2 \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} dx' \end{aligned} \quad (5.11)$$

を計算すればよいことになる。

(5.11)を見ると、第1項および第2項の $1/(x-x')$ と $1/(x-x')^2$ にかかるとは、それぞれ

$$\begin{aligned} \kappa(x', y') \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}, \\ \frac{\chi(x', y')(y-y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} \end{aligned}$$

であるから、 $y-y'=0$ のとき、 \bar{x} について連続でない。このため、(3.5)、(3.6)のようにinfluence functionに対数項が出て来る。(5.11)を計算する限り、問題はないが、第1項のinfluence functionは $\eta-\eta'=0$ において、1回微分可能なだけであるから、(1.5)より(1.8)を作ったように、(5.11)を部分積分して、(2.1)の形にもどすと、Hadamardの有限部分だけでは処理しきれない項が出て来てしまう。これが(2.1)の核関数の対数特異性である。つまり、influence functionが無限回微分可能でないこと、それと、1節で説明したように、翼理論では発散積分の有限部分は翼端標点には適用できないことなどが、Hadamardの有限部分の計算の障害となり、揚力面理論をむつかしいものになっているわけである。

(5.11)を無次元形に書くと

$$\begin{aligned}
w = & -\frac{1}{4\pi} \oint_{-1}^1 d\eta' \oint_{-1}^1 \frac{\partial(\bar{c}\gamma)/\partial\eta'}{\eta-\eta'} \\
& \times \left\{ 1 + \frac{\sqrt{(\xi^*-\xi')^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2}}{\xi^*-\xi'} \right\} d\xi' \\
& - \frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \int_{-1}^1 d\eta' \\
& \times \int_{-1}^1 \frac{\gamma \cdot \lambda(\eta-\eta') \cdot T(\xi', \eta')}{\bar{c}(\xi^*-\xi')^2 \sqrt{(\xi^*-\xi')^2 + \lambda^2(\eta-\eta')^2}} d\xi'
\end{aligned} \quad (5.12)$$

のように、(2.5)の第2項までと全く同じ式になる。以下で、(2.5)に第3項が余分に加わっている違いを吟味する。

仮に(4.5)の条件を否定して、翼端で Γ が0でないとする、(4.4)の第3項が残るから、積分方程式は、(5.12)に更に

$$\begin{aligned}
w_3 = & \left[\frac{1}{4\pi} \int_{l_1}^{\infty} \Gamma(x', y') \right. \\
& \times \left. \frac{y'-y}{(x-x')^2 \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} dx' \right]_{y'=-b}^b
\end{aligned} \quad (5.13)$$

が加わったものになる。この Γ に(4.2)を代入する。そこで、 x' 、 x' の積分順序を交換し、 x'' と x' の記号も交換する。更に、 x'' の積分を行うと

$$\begin{aligned}
w_3 = & \left[\frac{1}{4\pi} \int_{l_1}^{l_2} \frac{\gamma(x', y')}{y-y'} \right. \\
& \times \left. \left\{ 1 + \frac{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}{x-x'} \right\} dx' \right]_{y'=-b}^b
\end{aligned} \quad (5.14)$$

が得られる。これの変数 x' 、 y' 等を無次元量 ξ' 、 η' 等に変えれば、(2.5)の第3項と全く同じ式になる。したがって、(4.5)の翼端条件を無視すると、(5.14)が新たに加わり、吹上げの積分表示は(2.1)と同じになる。つまり、(5.12)と(2.1)の違いは、(4.5)の条件が入っているか、いないかにかかっている。この翼端条件は物理的には殆んど無理がない。一方、その入らない(2.1)の解の翼端特異性には物理的不自然さがある。こうしてみると、(5.12)の解に翼端特異性が出なければ、この方程式をとるのが自然だろう。

(5.12)の解についての検討は次節で行う。

6. 揚力面と揚力線の吹上げ

2節で説明したように、積分方程式(5.12)の核関数は大変込み入っている、そのままでは解の形を推測するのも、又実際の数値計算を行うのにも不便である。そこで、特異性を分離するような方法で変形を行ってみる。

influence function (3.3), (3.4)の被積分関数の特異性を分離して、

$$\begin{aligned}
I_N(\xi^*, Y) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') d\xi' \\
& + \frac{Y}{2} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\xi^*-\xi'} d\xi' + i_N(\xi^*, Y)
\end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned}
I_N(\xi^*, Y) = & \frac{\text{sgn}(\eta-\eta')}{2} \mathbf{H} \int_{-1}^1 \frac{T(\xi') \lambda_N(\xi')}{(\xi^*-\xi')^2} d\xi' \\
& + j_N(\xi^*, Y)
\end{aligned} \quad (6.2)$$

ただし

$$\begin{aligned}
i_N(\xi^*, Y) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\xi^*-\xi'} \\
& \times \{ \sqrt{(\xi^*-\xi')^2 + Y^2} - Y \} d\xi'
\end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned}
j_N(\xi^*, Y) = & \frac{\text{sgn}(\eta-\eta')}{2} \\
& \times \int_{-1}^1 \frac{T(\xi') \lambda_N(\xi')}{(\xi^*-\xi')^2} \left\{ \frac{Y}{\sqrt{(\xi^*-\xi')^2 + Y^2}} - 1 \right\} d\xi'
\end{aligned} \quad (6.4)$$

のように書く。 i_N 、 j_N を新たに influence function と呼ぶことにする。これは $Y=0$ のとき

$$i_N(\xi^*, 0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sgn}(\xi-\xi') \cdot \lambda_N(\xi') d\xi' \quad (6.5)$$

$$j_N(\xi^*, 0) = -\frac{\text{sgn}(\eta-\eta')}{2} \mathbf{H} \int_{-1}^1 \frac{T(\xi') \lambda_N(\xi')}{(\xi-\xi')^2} d\xi' \quad (6.6)$$

である。 J_N は $Y=0$ で0であるが、 j_N では有限値をとり、しかも、 $\eta-\eta'$ が正から負に変るとき不連続となる。これは η' の数値積分に幾分制約が出て来るが、 i_N 、 j_N では、被積分関数に特異性が無いので、普通の数値積分法で値が得られる。

(5.12)を(3.2)のように、 N の和の形に書いておいて、そこへ(6.1)、(6.2)を代入すると

$$\begin{aligned}
w = & -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \left[\frac{k_N}{2} \int_{-1}^1 \frac{d(\bar{c}A^{(N)})/d\eta'}{\eta-\eta'} d\eta' \right. \\
& + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sgn}(\eta-\eta') \frac{1}{c'} \frac{d(c'A^{(N)})}{d\eta'} \\
& \times \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\xi^*(\eta')-\xi'} d\xi' d\eta' \\
& - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sgn}(\eta-\eta') \frac{1}{c'} \frac{dc'}{d\eta'} A^{(N)} \\
& \times \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\xi^*(\eta')-\xi'} d\xi' d\eta' \\
& + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sgn}(\eta-\eta') A^{(N)} \lambda T(\xi^*) \\
& \left. \times \mathbf{H} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\{\xi^*(\eta')-\xi'\}^2} d\xi' d\eta' \right]
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \int_{-1}^1 \frac{d(\bar{c}A^{(N)})/d\eta' i_N(\xi^*, \eta')}{\eta - \eta'} d\eta'$$

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \int_{-1}^1 \lambda A^{(N)} j_N(\xi^*, Y) d\eta' \quad (6.7)$$

となる。ただし

$$k_N = \int_{-1}^1 \lambda_N(\xi') d\xi' = \begin{cases} \pi, & N=0 \\ \pi/2, & N=1 \\ 0, & N \geq 2 \end{cases} \quad (6.8)$$

とする。又、 $\xi^* = (x - x_0)/c'$ のように ξ^* は x_0', c' の関数であるから、 $\xi^*(\eta')$ と書いてある。

(6.7) の第1項を \hat{w} の記号で表わすことにする。その大括弧の中の第2項の一部と第3項は消し合うので、

$$\hat{w} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \left[\frac{k_N}{2} \int_{-1}^1 \frac{d(\bar{c}A^{(N)})/d\eta'}{\eta - \eta'} d\eta' \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sgn}(\eta - \eta') \frac{dA^{(N)}}{d\eta'} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\xi^*(\eta') - \xi'} d\xi' d\eta' \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sgn}(\eta - \eta') A^{(N)} \lambda T(\xi^*) \right. \\ \left. \times H \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\{\xi^*(\eta') - \xi'\}^2} d\xi' d\eta' \right] \quad (6.9)$$

となる。第2項を η' について部分積分すると

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sgn}(\eta - \eta') \frac{dA^{(N)}}{d\eta'} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\xi^*(\eta') - \xi'} d\xi' d\eta'$$

$$= A^{(N)}(\eta) \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\xi - \xi'} d\xi' + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \text{sgn}(\eta - \eta') A^{(N)}$$

$$\times H \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\{\xi^*(\eta') - \xi'\}^2} d\xi' \frac{d\xi^*}{d\eta'} d\eta'$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\text{sgn}(\eta - \eta') A^{(N)} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\xi^*(\eta') - \xi'} d\xi' \right]_{\eta'=-1}^1 \quad (6.10)$$

である。 $\lim_{\eta' \rightarrow \pm 1} \xi^*(\eta') \rightarrow \infty$ であるから、第3項は0としてよい。又 $d\xi^*/d\eta'$ は、 x を常数とみて、 ξ^* を η' で微分したものであるから、 $-\lambda T(\xi^*)$ に等しい。(6.10) を (6.9) に代入すると

$$\hat{w} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \left[\frac{k_N}{2} \int_{-1}^1 \frac{d(\bar{c}A^{(N)})/d\eta'}{\eta - \eta'} d\eta' \right. \\ \left. + A^{(N)}(\eta) \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\xi - \xi'} d\xi' \right] \quad (6.11)$$

となる。これは揚力線の吹上げの式と全く同じである⁹⁾。

$$w_1 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \int_{-1}^1 \frac{d(\bar{c}A^{(N)})/d\eta' i_N(\xi^*, Y)}{\eta - \eta'} d\eta' \quad (6.12)$$

$$w_2 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \int_{-1}^1 \lambda A^{(N)}(\eta') j_N(\xi^*, Y) d\eta' \quad (6.13)$$

と書くことにすると (追記参照)、全体の吹上げは

$$w = \hat{w} + w_1 + w_2 \quad (6.14)$$

である。 w_1, w_2 は揚力線の吹上げ \hat{w} に対する揚力面補正と見てもよい。

$\eta' = \cos \varphi'$ と置いたとき、 $\mathcal{F}(\xi', \varphi')$ を

$$\mathcal{F}(\xi', \varphi') = -\left(\xi' \frac{d\bar{c}}{d\varphi'} + \frac{d\bar{x}_0}{d\varphi'} \right) \quad (6.15)$$

のように定義すれば、これは $T(\xi', \eta')$ と

$$T(\xi', \eta') \sqrt{1 - \eta'^2} = \mathcal{F}(\xi', \varphi') \quad (6.16)$$

の関数にある。この $\mathcal{F}(\xi', \varphi')$ は円形翼端でも有限値になるので、数値計算には、 T の代りにこれを用いるのがよい。以下では、(6.4) の中の $T(\xi')$ を $\mathcal{F}(\xi', \varphi')/\sqrt{1 - \eta'^2}$ で置き変えた式を用いる。

ここで $i_N, \lambda j_N$ の翼端 ($\eta' \rightarrow \pm 1$) における状態を吟味しておく。まず、 $\eta - \eta' \neq 0$ とする。(6.3), (6.4) の積分変数 ξ' を x' にもどすと

$$i_N(\xi^*, Y) = \frac{1}{c'} \int_{l_1'}^{l_2'} \frac{\lambda_N(\xi')}{x - x'} \left. \begin{aligned} & \times \left\{ \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} - |y - y'| \right\} dx' \\ \lambda \cdot j_N(\xi^*, Y) &= \frac{b^2 a(\eta') \text{sgn}(\eta - \eta')}{2c'} \\ & \times \int_{l_1'}^{l_2'} \frac{\mathcal{F}(\xi') \lambda_N(\xi')}{(x - x')^2} \\ & \times \left\{ \frac{|y - y'|}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} - 1 \right\} dx' \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

である。この二つの式の被積分関数は積分区間内で有限である。その絶対値をそれぞれ M_i, M_j で表わすと

$$|i_N(\xi^*, Y)| \leq \frac{1}{c'} \cdot (l_2' - l_1') \max M_i \left. \begin{aligned} & \\ & | \lambda \cdot j_N(\xi^*, Y) | \leq \frac{b^2 a \text{sgn}(\eta - \eta')}{2c'} \\ & \quad \times (l_2' - l_1') \max M_j \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

であるから、 $i_N, \lambda j_N$ は $|\eta'| < 1$ だけでなく、 $|\eta'| \rightarrow 1$ でも有限値になる。

次に $\eta' \rightarrow \pm 1$ で、且つ $\eta - \eta' \rightarrow 0$ の場合を考える。

$$\lim_{\eta' \rightarrow 1} Y = \lim_{\varphi' \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\varphi + \varphi') / 2 \sin |\varphi - \varphi'| / 2}{a(1) \sin \varphi} = 0$$

$$\lim_{\eta' \rightarrow -1} Y = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \quad (6.19)$$

である。 $\eta' \rightarrow -1$ のときも同じ結果になる。即ち、円形翼端でも、矩形翼端同様、 $\eta - \eta' \rightarrow 0$ のときは $Y \rightarrow$

0 であるから, i_N, j_N は (6.5), (6.6) で与えられる。その式の ξ' の積分を行ったものが, 次節の (7.4), (7.5) に示してある。一見して明らかなように, $i_N(\xi, 0)$ は有限値であるから, w_1 は \hat{w} に含まれる積分とはほぼ同じ性質で, $|\eta| \rightarrow 1$ でも有限値となる。一方, $\lambda j_N(\xi, 0)$ は $\eta' = \pm 1$ に特異性はあるが, $\eta - \eta' = 0$ の両側で符号が変わる。(6.13) は $|\eta| < 1$ に対する表示式であるから, $|\eta| \rightarrow 1$ のときは, η' の積分は Hadamard の有限部分を計算するのと同じことになり, w_2 も $|\eta| \rightarrow 1$ で有限値となる。

(6.11) は揚力線の積分方程式であるが, 特定の平面形の翼の場合, 解析解が求められている¹⁰⁾。例えば, 楕円翼の断面揚力係数は翼端で有限値である。上述の如く, w_1, w_2 には特異性がないので, (6.14) 即ち (5.12) の解でも, 揚力線のときと同じに, $A^{(N)}(\eta = \pm 1) \neq 0$ であることが推定できる。

7. influence function の数値計算法

本節と次節では, (5.12) の数値解法について述べる。先ず, influence function の数値計算であるが, 被積分関数に特異性がないので, 容易に行える。(6.3), (6.4) に Chebychev の積分公式を適用すると

$$i_N(\xi^*, Y) = \frac{\pi}{2n} \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_N(\xi_j) \sin \theta_j}{\xi^* - \xi_j} \times \left\{ \sqrt{(\xi^* - \xi_j)^2 + Y^2} - Y \right\} \quad (7.1)$$

$$j_N(\xi^*, Y) = \frac{\pi \operatorname{sgn}(\eta - \eta')}{2n \sqrt{1 - \eta'^2}} \sum_{j=1}^n \frac{\mathcal{F}(\xi_j) \lambda_N(\xi_j) \sin \theta_j}{(\xi^* - \xi_j)^2} \times \left\{ \frac{Y}{\sqrt{(\xi^* - \xi_j)^2 + Y^2}} - 1 \right\} \quad (7.2)$$

となる。ただし

$$\theta_j = (2j-1)\pi / (2n), \quad \xi_j = -\cos \theta_j \quad (7.3)$$

である。一般には, この式で i_N, j_N の値が求められる。 $\xi^* - \xi_j = 0$ のときは, (7.1) では 0, (7.2) では $-\mathcal{F} \lambda_N / (2Y^2)$ とすればよい。

$Y=0$ のときは, (6.5), (6.6) を計算する。その場合 $\xi^* = \xi$ であるから, $\xi = -\cos \theta$ と書くと

$$\left. \begin{aligned} i_0(\xi, 0) &= -\frac{\pi}{2} + \theta + \sin \theta \\ i_1(\xi, 0) &= -\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} - \frac{\sin^2 2\theta}{4} \\ i_N(\xi, 0) &= \frac{1}{2} \\ &\times \left\{ \frac{\sin(N-1)\theta}{N-1} - \frac{\sin(N+1)\theta}{N+1} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

である。又 $j_N(\xi, 0)$ は

$$j_N(\xi, 0) = -\pi \frac{\operatorname{sgn}(\eta - \eta')}{\sqrt{1 - \eta'^2}} \times \left\{ \frac{d\bar{c}}{d\varphi'} C^{(N)}(\xi) + \mathcal{F}(\xi) D^{(N)}(\xi) \right\} \quad (7.5)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} C^{(N)}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{\xi - \xi'} d\xi' \\ D^{(N)}(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \mathbf{H} \int_{-1}^1 \frac{\lambda_N(\xi')}{(\xi - \xi')^2} d\xi' \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

と書かれる。 $Y=0$ では $|\xi| \leq 1$ の場合だけが計算に必要である。(7.6) を積分したものは

$$C^{(N)}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & N=0 \\ -\frac{1}{2} \cos N\theta, & N \geq 1 \end{cases} \quad (7.7)$$

である。(3.13) を利用すると

$$D^{(N)}(\xi) = -\frac{dC^{(N)}}{d\theta} \frac{1}{\sin \theta} \quad (7.8)$$

であるから, $D^{(N)}(\xi)$ の表示式は (7.7) から容易に導かれる。

8. $A^{(N)}$ の連立方程式

(6.14) の w 中で支配的な項は, 揚力線の吹上げ \hat{w} であるから, この項の計算法に重点を置いて, $A^{(N)}$ の連立方程式を作る。 \hat{w} の計算には, 揚力線理論で実績のあった Multhopp 法¹¹⁾ を採用することにし, その他の項, w_1, w_2 については, それに準じた計算法を考える。

$\bar{c} A^{(N)}(\eta') = g(\eta')$ と書く。 $\eta' = \cos \varphi'$, $\varphi_s = s\pi / (m+1)$ として, $g(\eta')$ を近似式

$$g(\eta') = \frac{2}{m+1} \sum_{s=1}^m g_s \sum_{q=1}^m \sin q \varphi_s \sin q \varphi' \quad (8.1)$$

で置き変える。これを (6.11) に代入して, 積分を行うと,

$$\hat{w}_\nu(\xi) = - \sum_{N=0}^R \left[\frac{k_N}{2} \left\{ b_{\nu\nu} g_\nu - \sum_{s=1}^m b_{\nu s} g_s \right\} + A_{\nu}^{(N)} C^{(N)}(\xi) \right] \quad (8.2)$$

と書かれる。ただし, $\eta_\nu = \cos \nu\pi / (m+1)$, $g_\nu = g(\eta_\nu)$ $\hat{w}_\nu(\xi) = \hat{w}(\xi, \eta_\nu)$ である。又 $C^{(N)}(\xi)$ は (7.7) に示す関数である。 $b_{\nu s}$ は Multhopp 行列であって

$$\left. \begin{aligned} b_{\nu\nu} &= \frac{m+1}{4 \sin \varphi_\nu} \\ b_{\nu s} &= \frac{1 - (-1)^{s-\nu}}{2(m+1)} \cdot \frac{\sin \varphi_s}{(\cos \varphi_s - \cos \varphi_\nu)^2} \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

(229)

で与えられる。ただし、 \sum'_s は $s=\nu$ を除いた s についての総和を意味する。

w_1 の核関数の特異性は1位の極だけであるから、上記の方法を利用することができる。先ず(6.12)を

$$w_1 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R i_N(\xi^*, 0) \int_{-1}^1 \frac{d(\bar{c}A^{(N)})/d\eta'}{\eta-\eta'} d\eta' \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \int_{-1}^1 \frac{d(\bar{c}A^{(N)})/d\eta' \cdot i_N(\xi^*, Y)}{\eta-\eta'} d\eta' \quad (8.4)$$

ただし

$$\hat{i}_N(\xi^*, Y) = i_N(\xi^*, Y) - i_N(\xi, 0) \quad (8.5)$$

のように書く。 i_N は $Y=0$ ならば、翼端で0にならないことに注意する(8.4)の第1項は上記の Multhopp 法で数値積分を行う。第2項は変数 η' を φ' に変え、 $\bar{c}A^{(N)}$ を(8.1)で置き変えたあとで、Chebychev の積分公式によって数値積分を行うようにする。その結果は

$$w_{1,\nu}(\xi) = -\sum_{N=0}^R i_N(\xi, 0) \left\{ b_{\nu} g_{\nu} - \sum_{s=1}^m b_{\nu s} g_s \right\} \\ + \frac{1}{n(m+1)} \sum_{N=0}^R \sum_{s=1}^m g_s \sum_{q=1}^m q \sin q\varphi_s \sum_{j=1}^n \cos q\varphi_j \\ \times \frac{i_N(\xi^*, Y_{\nu j})}{\cos\varphi_{\nu} - \cos\varphi_j} \quad (8.6)$$

である。ただし

$$\varphi_j = (2j-1)\pi/(2n), \quad \eta_j = \cos \varphi_j$$

$$Y_{\nu j} = \frac{1}{c_j} |\eta_{\nu} - \eta_j|$$

とする。この式の n は $m+1$ の4倍程度にとるとよい。(8.1)を微分したものは、 φ_s 上では誤差が大きいので、それを含む関数の数値積分では、 φ_s の間の点を積分点にとる方がよいだろう。 n を $m+1$ の偶数倍にとれば、 φ_j が φ_s と重なることはないから、上の条件を充たす。

次に、 w_2 の計算法を示す。 $j_N(\xi^*, Y)$ は $J_N(\xi^*, Y)$ と同様、特異性が無いから(追記参照)、(6.13)の積分には、梯形法則が利用できる。ただ、積分方程式(6.14)を $A^{(N)}$ の代数方程式に変えるのが最終目的だから、積分点を(8.1)の標点と一致させる必要がある。(6.13)の積分変数を φ' に変えると

$$w_2(\xi) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \int_0^{\pi} \lambda A^{(N)}(\eta') j_N(\xi^*, Y) \\ \times \sin \varphi' d\varphi' \quad (8.7)$$

である。この積分を数値的に行うのに梯形法則を適用

(230)

する。 λj_N は翼端で有限だから、被積分関数は両端で0になる。又、 η' が η を通過するとき、 j_N は絶対値等しく、符号が変るので、 $\eta=\eta'$ のところは0としてよい。よって

$$w_{2,\nu}(\xi) = -\frac{1}{2(m+1)} \sum_{N=0}^R \sum_{s=1}^m A_s^{(N)} \\ \times \frac{1}{c_s} j_N(\xi^*, Y_{\nu s}) \sin \varphi_s \quad (8.8)$$

のように表わされる。ただし、 \sum'_s は $s=\nu$ を除いた s の総和を意味する。

(8.2)、(8.6)、(8.8)を辺々加えたものが、 $A_s^{(N)}$ の連立方程式である。それを解けば $A^{(N)}$ の値が得られる。

結 言

本論文関係の報告は4回を重ねた。これまでのものは、主題の解明に役立っている部分があるとはいえ、何れも直接問題の解決にはつながらなかった。

今回の研究の動機は文献¹⁾の数値計算の結果に多くを依存している。揚力面理論では数値実験は重要なことで、その積み重ねが現在の発展をもたらした。この研究にしても、数値計算による確認は必要なわけであるが、そこに行く前に、理論の側から、できるだけ予想の裏付けが得られるよう、精細な解析を試みた。これで円形翼端問題は一応の結着をみたように思う。けれども、とにかく、複雑な特異核の新しい形の積分方程式を解かねばならないという、新たな問題が生じて来ている。本文では、揚力線の吹上げを分離するような解法を提案したが、これには一石二鳥の効果があるので、おそらく、他種の揚力面についても、類似の手法がとられることだろう。

参 考 文 献

- 1) 小山鴻一, 原口富博, “揚力面の数値計算に関する一考察” 第30回船研発表会, 1977.
- 2) Wagner, S., “On the Singularity Method of Subsonic Lifting-Surface Theory”, J. Aircraft Vol. 6. No.6, 1969.
- 3) 花岡達郎, “揚力面の翼端条件と数値解法(その3 円形翼端理論の改訂)”, 船研報告第13巻第6号 昭和51年
- 4) Multhopp, H., “Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings (Subsonic Lifting-Surface Theory) R & M No. 2884, 1950.

- 5) 近藤次郎, “積分方程式とその応用” コロナ社, p.196 昭和34年
- 6) Mangler, K.W. and Spencer, B.F.R., “Some Remarks on Multhopp’s Lifting-Surface Theory”, R & M No.2926, 1952.
- 7) 花岡達郎, “揚力面の数値解における問題点”, 日本航空宇宙学会誌, 第23巻, 第263号, 1975.
- 8) Watkins, C.E., Woolston, D. S. and Cunningham, H. J., “A Systematic Kernel Function Procedure for Determining Aerodynamic Forces on Oscillating or Steady Finite Wings at Subsonic Speeds”, NASA T. R. R-48, 1959.
- 9) 花岡達郎, “プロペラの基礎理論(特に Munk の定理と揚力線理論について)”, 船研報告 第5巻 第6号 昭和43年
- 10) 近藤次郎, “積分方程式” 培風館, 1954.
- 11) Multhopp, H., “Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln,” Luftfahrtforschung Bd. 15, 1938.

附 録

$\xi^* < -1$ で, ξ^* が -1 に近いときの I_0 の漸近式を求める。この場合, $Y=0$ では $I_0=0$ である。そして, $\xi^* = -1$ の特異性は, ξ' の積分の $\xi' = -1$ の近傍の部分だけに依存すると考えてよい。よって, (2.3)

で, $1+\xi'=t$, $1+\xi^* = -\delta$ と置いて, $(0, \varepsilon)$ の区間の積分だけを取り出して, 計算する。

$$\begin{aligned} I_0(\xi^*, Y) &\simeq -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\sqrt{(\delta+t)^2 + Y^2}}{\delta+t} dt \\ &\simeq -\frac{Y}{\sqrt{2}} \int_0^\varepsilon \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{\delta+t} dt \\ &= -Y \sqrt{\frac{2}{\delta}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\delta}} \\ &= -Y \sqrt{\frac{2}{\delta}} \left\{ \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}} + \frac{1}{3} \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right)^{3/2} \dots \right\} \\ &\simeq -\frac{\pi Y}{\sqrt{2\delta}}, \quad \delta/\varepsilon < 1 \end{aligned}$$

となる。この結果は (3.10) で $\xi^* \rightarrow -1$ としたときの漸近式に一致する。

追 記

(3.4) の J_N には (3.6) のほかに $-\bar{c}A_N(\xi)/(\eta-\eta')$ の特異性がある。よって, (6.13) では $\lambda(\eta-\eta')$ $j_N = \bar{j}_N$ と書き,

$$w_2 = -\frac{1}{2\pi} \sum_{N=0}^R \int_{-1}^1 \frac{A_{(N)}(\eta) \bar{j}_N(\xi^*, Y)}{\eta-\eta'} d\eta'$$

のように表わす必要がある。これを用いると, w_2 が翼端で有限になるという証明は, 6節の終りのようなあいまいなものでなく, もっと明快に出来るようになる。