船舶技術研究所報告 第15巻 第6号 研究報告（昭和53年11月）

揚力面の翼端条件と数値解法

（その5 非定常の翼およびプロペラの揚力面）

花 岡 達 郎*

Tip Condition and Numerical Method Concerning Lifting-Surface Theory (5—Lifting-Surface Theory of Oscillating Wing and Screw Propeller)

By

Tatsuro HANAOKA

Abstract

In the previous paper[1], it was shown that the partial integration of the integral equation is absolutely necessary in order to get an accurate solution at the circular tip of steady lifting surface. And a new type of the integral equation of a lifting-surface was derived.

In this paper, the new types of the integral equations of lifting-surfaces about an oscillating wing and a screw propeller are derived by the same process. Practical method to solve the equations is not shown.

まえがき

前報[1]において，円形翼端の場合，揚力面の積分方程式は翼幅方向に部分積分してから数値計算を始める必要のあることを示した。これは揚力面全般に云えることであるから，本文では非定常の翼およびプロペラの揚力面積分方程式を部分積分すること，およびそれを数値計算へ導く方法について解説する。

手順は定常翼の場合と殆んど変わりなく，翼弦方向の圧力差を mode function で表わすことを前提として，翼幅方向に部分積分を行うものであるが，プロペラでは核関数が複雑になるので，実用性からは遠のくかも知れない。しかし，mode function 法は，問題点さえ解決されれば，高い信頼性をもった計算法になることは間違いないから，多少の繁雑さを伴っても，利用には耐えるだろう。

記 号

x, y, z	直交座標
x, r, θ	円柱座標
ρ	流体密度
$\boldsymbol{p}$	流体圧力
Φ	速度ポテンシャル
ν	流場の振動率
$\Phi=\Phi_0 e^{i\nu t}$	
Π	揚力面の圧力差
$\Pi=\Pi_0 e^{i\nu t}$	
w	揚力面上の無次元吹上げ
$w=w_0 e^{i\nu t}$	
$\boldsymbol{H}\int d\eta'$	Hadamard の意味の発散積分の有限部分

直進翼

V	前進速度
b	半翼幅
l_1', l_2'	y' 位置の翼断面の前後縁の x 座標
l_1, l_2	y 位置の翼断面の前後縁の x 座標
$c'=(l_2'-l_1')/2$, $c=(l_2-l_1)/2$	半翼弦長
$\bar{c}=c'/b,\ \lambda=b/c'$	

*運動性能部 原稿受付 昭和53年9月2日

$\gamma_0^* = \Pi_0/(\rho V^2)$ 無次元循環密度

Γ_0 循環の complex amplitude

$w_0 = \dfrac{1}{V}\left.\dfrac{\partial \Phi_0}{\partial z}\right|_{z=0}$ 無次元吹上げ

$\omega = (\nu c')/V, \quad \omega_0 = (\nu b)/V$

$x_0' = (l_1' + l_2')/2, \quad x_0 = (l_1 + l_2)/2$

$\xi' = (x' - x_0')/c', \quad \xi = (x - x_0)/c, \quad \xi^* = (x - x_0')/c'$

$T(\xi') = \xi' \dfrac{dc'}{dy'} + \dfrac{dx_0'}{dy'}$

プロペラ

V 前進速度

Ω 回転角速度

r_0 プロペラ半径

r_b ボス半径

l 翼数

$2\pi h$ 螺旋渦のピッチ

w_I 翼位置における定常自由渦の吹上げ

$\tan \varepsilon_I = h/r$

$w_a = -w_I \cos \varepsilon_I$

$w_t = w_I \sin \varepsilon_I$

$\overline{w_a}$ w_a の半径方向の平均値

$\overline{w_t/r}$ w_t/r の半径方向の平均値

$V^* = V + \overline{w_a}, \quad \Omega^* = \Omega + \overline{w_t/r}$

$h = V^*/\Omega^*$

$p = \nu/\Omega, \quad p^* = \nu/\Omega^*$

$r/h = \mu, \quad r'/h = \mu'$

$W^* = V^* \sqrt{1+\mu^2}, \quad W^{*\prime} = V^* \sqrt{1+\mu'^2}$

$\sin \varepsilon_I = 1/\sqrt{1+\mu^2}, \quad \cos \varepsilon_I = \mu/\sqrt{1+\mu^2}$

$\left.\begin{array}{l} \gamma^* = \Pi/(\rho W^* V^*) \\ \gamma_0^* = \Pi_0/(\rho W^* V^*) \end{array}\right\}$ 無次元循環密度

$w = \dfrac{1}{V^*}\left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial n}\right|_{\sigma=\sigma'}$ 無次元吹上げ

$\sigma = \theta - x/h, \quad \sigma' = \theta' - x'/h$

$\tau = \theta + x/h, \quad \tau' = \theta' + x'/h$

τ_1', τ_2' 半径 r' 位置の翼素の前後縁の τ 座標

$\bar{\tau}' = (\tau_2' - \tau_1')/2, \quad \tau_0' = (\tau_1' + \tau_2')/2$

$\left.\begin{array}{l} c' = h\sqrt{1+\mu'^2}\,\bar{\tau}'/2 \\ c = h\sqrt{1+\mu^2}\,\bar{\tau}/2 \end{array}\right\}$ 半翼弦長

$\bar{c} = 2c'/(r_0 - r_b) = \sqrt{1+\mu'^2}\,\bar{\tau}'/(2\mu^*)$ 無次元半翼弦長

$\xi' = (\tau' - \tau_0')/\bar{\tau}', \quad \xi = (\tau - \tau_0)/\bar{\tau}, \quad \xi^* = (\tau - \tau_0')/\bar{\tau}'$

$\mu^* = (\mu_0 - \mu_b)/2, \quad \bar{\mu} = (\mu_0 + \mu_b)/2$

$\eta' = (\mu' - \bar{\mu})/\mu^*, \quad \eta = (\mu - \bar{\mu})/\mu^*$

$\lambda = 1/\bar{c} = 2\mu^*/(\sqrt{1+\mu'^2}\,\bar{\tau}')$

$Y = \lambda|\eta - \eta'| = 2|\mu - \mu'|/(\sqrt{1+\mu'^2}\,\bar{\tau}')$

$v = (\tau - \tau')/2 = (\tau - \tau_0' - \bar{\tau}'\xi')/2$

$T(\xi') = -\dfrac{dv}{d\mu'} = \dfrac{1}{2}\left(\xi' \dfrac{d\bar{\tau}'}{d\mu'} + \dfrac{d\tau_0'}{d\mu'}\right)$

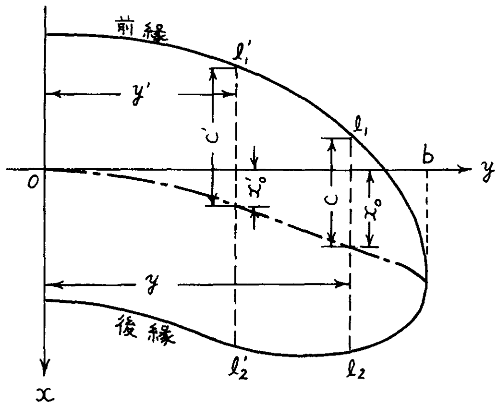

図-1 平面直進翼の輪郭と記号

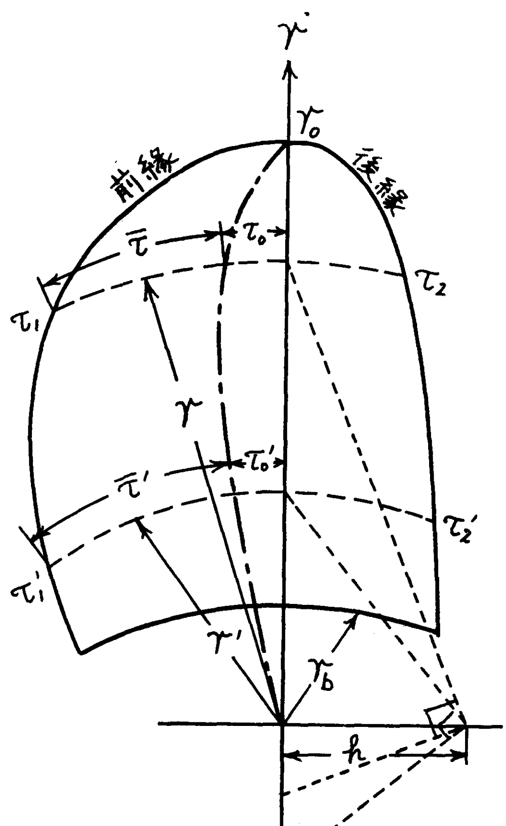

図-2 旋螺面上のプロペラ翼輪郭と記号

1. 非定常直進揚力面

1.1. 速度ポテンシャルの部分積分

非定常直進揚力面の速度ポテンシャルの complex amplitude は

$$\Phi_0(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int_{-b}^{b}dy'$$
$$\times\int_{l_1'}^{\infty}\frac{\Gamma_0(x',y')z}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\}^{3/2}}dx' \quad (1.1.1)$$

のように表わされる。これは定常翼の場合と全く同形の式であるし，又前縁および翼端の条件も同じに考えることができるから，y'で部分積分したものは全く同形で

$$\Phi_0=-\frac{z}{4\pi}\int_{-b}^{b}dy'\int_{l_1'}^{\infty}\frac{\partial\Gamma_0}{\partial y'}F(x-x',\ y-y')dx' \quad (1.1.2)$$

のように表わされる。ただし

$$F(x_0,\ y_0)=-\frac{y_0}{(x_0^2+z^2)\sqrt{x_0^2+y_0^2+z^2}} \quad (1.1.3)$$

である。

γ_0, γ_0^* をそれぞれ全循環および束縛循環の密度の無次元 complex amplitude とすると

$$\frac{\Gamma_0(x')}{V}=\int_{l_1'}^{x'}\gamma_0(x'')dx''$$
$$=\int_{l_1'}^{x'}\gamma_0^*(x'')e^{-\frac{i\nu}{V}(x'-x'')}dx'' \quad (1.1.4)$$

である。$\xi'=(x'-x_0')/c'$, $\xi''=(x''-x_0')/c'$ によって変数を ξ', ξ'' に変えると

$$\frac{\Gamma_0(x')}{V}=e^{-\frac{i\nu}{V}x'}\int_{-1}^{\xi'}c'\gamma_0^*e^{\frac{i\nu}{V}(c'\xi''+x_0')}d\xi'' \quad (1.1.5)$$

である。c', x_0', ξ' が y' の関数であることに留意して，y' で微分すると

$$\frac{1}{V}\frac{\partial\Gamma_0}{\partial y'}=e^{-\frac{i\nu}{V}x'}\int_{-1}^{\xi'}\left\{\frac{\partial(c'\gamma_0^*)}{\partial y'}+\frac{i\nu}{V}\left(\xi''\frac{dc'}{dy'}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{dx_0'}{dy'}\right)c'\gamma_0^*\right\}e^{\frac{i\nu}{V}(c'\xi''+x_0')}d\xi''+c'\gamma_0^*\frac{d\xi'}{dy'} \quad (1.1.6)$$

となる。$d\xi'/dy'$ は，定常翼のとき示したように，x' を一定としたときの ξ' の翼幅方向の変化を表わすもので，$c'\xi'=x'-x_0'$ の両辺を y' で微分すれば得られる。

即ち，

$$T(\xi')=\xi'\frac{dc'}{dy'}+\frac{dx_0'}{dy'} \quad (1.1.7)$$

と書くと

$$\frac{d\xi'}{dy'}=-\frac{T(\xi')}{c'} \quad (1.1.8)$$

である。

(1.1.6) を (1.1.2)に代入し，(1.1.7)の記号を用いると

$$\Phi_0=-\frac{Vz}{4\pi}\int_{-b}^{b}\frac{dy'}{c'}\int_{l_1'}^{\infty}\int_{l_1'}^{x'}\left\{\frac{\partial(c'\gamma_0^*)}{\partial y'}\right.$$
$$\left.+\frac{i\nu}{V}T(\xi')c'\gamma_0^*\right\}e^{-\frac{i\nu}{V}(x'-x'')}dx''$$
$$\times F(x-x',y-y')dx'+\frac{Vz}{4\pi}\int_{-b}^{b}dy'\int_{l_1'}^{l_2'}\gamma_0^*$$
$$\times T(\xi')F(x-x',\ y-y')dx'$$

と書かれる。第1項の x'', x' の積分順序を交換し，記号も交換すると

$$\Phi_0=-\frac{Vz}{4\pi}\int_{-b}^{b}\frac{dy'}{c'}\int_{l_1'}^{l_2'}\left\{\frac{\partial(c'\gamma_0^*)}{\partial y'}\right.$$
$$\left.+\frac{i\nu}{V}T(\xi')c'\gamma_0^*\right\}dx'\int_{x'}^{\infty}e^{-\frac{i\nu}{V}(x''-x')}F(x-x'',y-y')dx''$$
$$+\frac{Vz}{4\pi}\int_{-b}^{b}dy'\int_{l_1'}^{l_2'}\gamma_0^*\ T(\xi')F(x-x',\ y-y')dx' \quad (1.1.9)$$

が得られる。これが翼幅方向に部分積分された非定常揚力面の速度ポテンシャルである。

1.2. 吹上げの表示式

揚力面上の吹上げの complex amplitude の表示式は (1.1.9) を

$$w_0=\frac{1}{V}\left.\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\right|_{z=0} \quad (1.2.1)$$

に代入すれば得られる。これには厳密な証明が必要であるが，定常翼の場合にそれを行っているので[1]，ここでは省略する。w_0 を具体的に書くと

$$w_0=-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\int_{-b}^{b}\frac{dy'}{c'}\int_{l_1'}^{l_2'}\left\{\frac{\partial(c'\gamma_0^*)}{\partial y'}+\frac{i\nu}{V}T(\xi')c'\gamma_0^*\right\}dx'$$
$$\times\int_{x'}^{\infty}e^{-\frac{i\nu}{V}(x''-x')}F_0(x-x'',\ y-y')dx''$$
$$+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\int_{-b}^{b}dy'\int_{l_1'}^{l_2'}\gamma_0^*T(\xi')F_0(x-x',\ y-y')dx' \quad (1.2.2)$$

である。この式の F_0 は(1.1.3)の F の式で，$z=0$ としたもの，即ち

$$F_0(x_0,\ y_0)=-\frac{y_0}{x_0^2\sqrt{x_0^2+y_0^2}} \quad (1.2.3)$$

である。

(1.2.2) を無次元形に書くと

$$w_0=\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}\frac{d\eta'}{\bar{c}}\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0^*)}{\partial\eta'}+i\omega T(\xi')\gamma_0^*\right\}d\xi'$$

$$\times\int_{\xi'}^{\infty}\frac{e^{-i\omega(\xi''-\xi')}\lambda(\eta-\eta')}{(\xi^*-\xi'')^2\sqrt{(\xi^*-\xi'')^2+\lambda^2(\eta-\eta')^2}}d\xi''$$

$$-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\frac{\gamma_0^*\lambda(\eta-\eta')T(\xi')}{\bar{c}(\xi^*-\xi')^2\sqrt{(\xi^*-\xi')^2+\lambda^2(\eta-\eta')^2}}d\xi' \qquad (1.2.4)$$

となる。ただし，$\omega=(\nu c')/V$ とする。

1.3. 積分方程式の部分積分

(1.2.4) は w_0 を与えて γ_0^* を求める積分方程式であるが，従来用いられている非定常揚力面の積分方程式

$$w_0=\frac{1}{4\pi}\int_{-b}^{b}\int_{l_1'}^{l_2'}\gamma_0^*dx'dy'$$

$$\times\int_{-\infty}^{x}\frac{e^{-\frac{i\nu}{V}(x-X)}}{\{(X-x')^2+(y-y')^2\}^{3/2}}dX \qquad (1.3.1)^{注)}$$

を翼幅方向に部分積分しても導かれる筈である。それを行ってみる。

積分変数を，$X-x'=bX'$, $y'=b\eta'$, $x'=c'\xi'+x_0'$ によって，X', η', ξ' に変える。又 $x=\xi^*c'+x_0'$ によって，x を ξ^* に変える。更に，$f(\xi',\eta')$ を

$$f(\xi',\eta')=(\xi^*-\xi')c'/b=(x-x_0'-c'\xi')/b \qquad (1.3.2)$$

のように定義すると，(1.3.1) は

$$w_0=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0^*\,d\xi'\,e^{-i\omega_0 f(\xi',\eta')}$$

$$\times\int_{-\infty}^{f(\xi',\eta')}\frac{e^{i\omega_0 X'}}{\{X'^2+(\eta-\eta')^2\}^{3/2}}dX' \qquad (1.3.3)$$

のように表わされる。ただし，$\omega_0=\nu b/V$ とする。

$$I=\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0^*d\xi'\,e^{-i\omega_0 f(\xi',\eta')}$$

$$\times\int_{-\infty}^{f(\xi',\eta')}\frac{e^{i\omega_0 X'}(\eta'-\eta)}{X'^2\sqrt{X'^2+(\eta-\eta')^2}}dX' \qquad (1.3.4)$$

で定義される関数を η' で微分すると

$$\frac{\partial I}{\partial\eta'}=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0^*)}{\partial\eta'}-i\omega_0\bar{c}\gamma_0^*\frac{\partial f}{\partial\eta'}\right\}d\xi'\,e^{-i\omega_0 f}$$

$$\times\int_{-\infty}^{f(\xi',\eta')}\frac{e^{i\omega_0 X'}(\eta'-\eta)}{X'^2\sqrt{X'^2+(\eta-\eta')^2}}dX'$$

$$+\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0^*\frac{\eta'-\eta}{f^2\sqrt{f^2+(\eta-\eta')^2}}\frac{\partial f}{\partial\eta'}d\xi'$$

$$+\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0^*d\xi'\,e^{-i\omega_0 f}\int_{-\infty}^{f(\xi',\eta')}\frac{e^{i\omega_0 X'}}{\{X'^2+(\eta-\eta')^2\}^{3/2}}dX' \qquad (1.3.5)$$

である。$\partial f/\partial\eta'$ は (1.3.2) を，x, ξ' を常数とみなして，微分すれば得られるもので

$$\frac{\partial f}{\partial\eta'}=-T(\xi') \qquad (1.3.6)$$

となる。

(1.3.5)の右辺最終項 (1.3.3) の被積分関数と同じであるから，(1.3.5) を (1.3.3) に代入し，η' の積分を行う。(1.3.4) の I は定常翼の場合同様，翼端に特異性があるが，$\Gamma_0(\eta'=\pm1)=0$ の翼端条件により，$I(\eta=\pm1)=0$ とすることができる。結局

$$w_0=\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0^*)}{\partial\eta'}+i\omega T(\xi')\gamma_0^*\right\}d\xi'$$

$$\times e^{-i\omega_0 f}\int_{-\infty}^{f}\frac{e^{i\omega_0 X'}(\eta-\eta')}{X'^2\sqrt{X'^2+(\eta-\eta')^2}}dX'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0^*T(\xi')\frac{\eta-\eta'}{f^2\sqrt{f^2+(\eta-\eta')^2}}d\xi' \qquad (1.3.7)$$

となる。第1項の積分変数 X' を$(f-X')=\bar{c}(\xi''-\xi')$ によって ξ'' に変えると，(1.2.4)に一致する。

以上の計算は，発散積分で表わされるものに形式的運算を試みただけのものである。厳密には前節までの方法をとる必要があるが，本節のようにしても，結果が同じになることは確かめられた。

1.4. 翼弦方向の特異性の分離

(1.3.7) はそのままでは数値計算がとてもむつかしい。それで，本節では核関数の翼弦方向の特異性を分離する運算を行う。

第1項の翼弦方向の特異性を分離するため

$$w_0=\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0^*)}{\partial\eta'}d\xi'\int_{-\infty}^{f}\frac{e^{-i\omega_0(f-X')}}{X'^2}$$

$$\times\left\{\frac{\eta-\eta'}{\sqrt{X'^2+(\eta-\eta')^2}}-\mathrm{sgn}(\eta-\eta')\right\}dX'$$

$$+\frac{i}{4\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\omega T(\xi')\gamma_0^*d\xi'$$

$$\times\int_{-\infty}^{f}\frac{e^{-i\omega_0(f-X')}(\eta-\eta')}{X'^2\sqrt{X'^2+(\eta-\eta')^2}}dX'$$

注) 文献 2)の(2.1.3)式では右辺の符号が，これと逆になっているが，誤記である。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0{}^*T(\xi')\frac{\eta-\eta'}{f^2\sqrt{f^2+(\eta-\eta')^2}}d\xi'\\
&+\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0{}^*)}{\partial\eta'}\mathrm{sgn}(\eta-\eta')d\xi'\\
&\times\boldsymbol{H}\int_{-\infty}^{f}\frac{e^{-i\omega_0(f-X')}}{X'^2}dX' \qquad (1.4.1)
\end{aligned}
$$

と書く。第4項の η' について部分積分を行うと

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0)}{\partial\eta'}\mathrm{sgn}(\eta-\eta')d\xi'\\
&\times\boldsymbol{H}\int_{-\infty}^{f}\frac{e^{-i\omega_0(f-X')}}{X'^2}dX'=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0{}^*d\xi\\
&\times\boldsymbol{H}\int_{-\infty}^{f}\frac{e^{-i\omega_0(f-X')}}{X'^2}dX'-\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0{}^*\\
&\times\mathrm{sgn}(\eta-\eta')d\xi'T(\xi')\\
&\times\left\{\boldsymbol{H}\int_{-\infty}^{f}\frac{i\omega_0e^{-i\omega_0(f-X')}}{X'^2}dX'-\frac{1}{f^2}\right\} \qquad (1.4.2)
\end{aligned}
$$

である。右辺第1項の変数を $X'-f=\bar{c}(\xi''-\xi)$ によって ξ'' に変えて，(1.4.2) を (1.4.1) に代入すると

$$
\begin{aligned}
w_0=&\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\gamma_0{}^*d\xi'\boldsymbol{H}\int_{-\infty}^{\xi}\frac{e^{-i\omega(\xi-\xi'')}}{(\xi'-\xi'')^2}d\xi''\\
&+\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0{}^*)}{\partial\eta'}+i\omega T(\xi')\gamma_0{}^*\right\}d\xi'\\
&\times\int_{-\infty}^{f}\frac{e^{-i\omega_0(f-X')}}{X'^2}\left\{\frac{\eta-\eta'}{\sqrt{X'^2+(\eta-\eta')^2}}\right.\\
&\left.-\mathrm{sgn}(\eta-\eta')\right\}dX'-\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\frac{T(\xi')\gamma_0{}^*}{\bar{c}(\xi^*-\xi')^2}\\
&\times\left\{\frac{\lambda(\eta-\eta')}{\sqrt{(\xi^*-\xi')^2+\lambda^2(\eta-\eta')^2}}-\mathrm{sgn}(\eta-\eta')\right\}d\xi' \qquad (1.4.3)
\end{aligned}
$$

となる。第1項は2次元振動翼の吹上げである[2)]。このように書くと，核関数の特異性のうち，翼弦方向のものは第1項に集められるので，数値計算に際し，核関数の特異性は翼幅方向のものだけに注意すればよいことになる。(1.4.3) の第2項の X' の積分区間を $(-\infty, 0]$, $[0, f]$ の二つに分ければ，振動揚力線の吹上げを分離することができるが，その為の利点が特にあるようにも思われないから，(1.4.3) をそのまま計算するのがよいだろう。

Acum[3)]がしたように，吹上げおよび圧力差を

$$
\left.\begin{aligned}
w_0e^{i\nu x/V}&=\bar{w}_0\\
\gamma_0{}^*e^{i\nu x/V}&=\bar{\gamma}_0
\end{aligned}\right\} \qquad (1.4.4)
$$

のようなパラメターに変えて表わすと，(1.4.3) はもう少し簡単な式になる。それの具体的な運算はプロペラのところに示してある。

2. ペロペラ揚力面

ここではプロペラ揚力面の積分方程式の部分積分と核関数の特異性の分離に関する解析だけを示す。既に直進翼で部分積分を行う方法が示してあるから，それをたどっていけば，おのずと結果に到達する。速度ポテンシャルまでさかのぼって結果を吟味する必要はないだろう。

2.1. 積分方程式の部分積分

非定常プロペラ揚力面の積分方程式の無次元表示式は

$$
\begin{aligned}
w_0=&\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{8\pi}\int_{\mu b}^{\mu_0}d\mu'\int_{-1}^{1}\gamma_0{}^*\sqrt{1+\mu'^2}\,\bar{\tau}'d\xi'\\
&\times\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\int_{-\infty}^{v}e^{-ip^*(v-s)}\\
&\times\left\{\frac{3(1+\mu'^2)s\sin s_m}{R^5}+\frac{1}{1+\mu^2}\right.\\
&\left.\times\frac{\partial}{\partial s}\;\frac{\mu\mu's+\sin s_m}{R^3}\right\}ds \qquad (2.1.1)
\end{aligned}
$$

である。この式は文献[4)] の (A.22)式を引用したものであるが，そこでは s で部分積分しているので，少し形が異なる。又 w_0 は該文献の吹下しに対し，本文では吹上げを意味しているので，全体の符号が逆になっている。更に p と p^* が含まれるのは文献[5)] に従ったものである。ここで用いた記号の意味は

$$
\gamma_0{}^*=\Pi^0(\rho V^{*2}\sqrt{1+\mu'^2}),\quad w_0=\frac{1}{V^*}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right|_{\sigma=\sigma'} \qquad (2.1.2)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&s_m=s-2\mathrm{m}\pi/l,\quad v=(\tau-\tau')/2,\quad v_m=v-2\mathrm{m}\pi/l\\
&R=\sqrt{s^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos s_m}
\end{aligned}\right\} \qquad (2.1.3)
$$

である。

$\gamma_0{}^*$ の翼弦方向の分布形が ξ' を変数とする mode function によって表わされるものとして，(2.1.1)を μ' について部分積分する。

文献[5)] に示すように，$X(s,\mu,\mu')$, $Y(s,\mu,\mu')$ を

$$
\left.\begin{aligned}
X(s,\mu,\mu')=&\frac{1}{BR}\left\{3(\mu'-\mu\cos s_m)-\frac{2\mu\cos s_m\cdot B}{R^2}\right.\\
&-(s^2+\mu^2-2\mu^2\cos^2 s_m-1)(\mu'-\mu\cos s_m)\\
&\left.\times\left(\frac{1}{R^2}+\frac{2}{B}\right)\right\}\\
Y(s,\mu,\mu')&\\
=&\frac{-\mu sB+(\mu^2s\cos s_m+\sin s_m)(\mu'-\mu\cos s_m)}{BR}
\end{aligned}\right\}
$$

$$(2.1.4)$$

と定義すると

$$\left.\begin{aligned}\frac{3(1+\mu'^2)}{R^5}&=\frac{\partial}{\partial\mu'}X(s,\mu,\mu')\\ \frac{\mu\mu' s+\sin s_m}{R^3}&=\frac{\partial}{\partial\mu'}Y(s,\mu,\mu')\end{aligned}\right\}\qquad(2.1.5)$$

である。ただし B は

$$B=s^2+\mu^2\sin^2 s_m=R^2-(\mu'-\mu\cos s_m)^2 \qquad (2.1.6)$$

とする。(2.1.4) の X を整理すると

$$X(s,\mu,\mu')=-\frac{2\mu(s^2\cos s_m+\mu\mu'\sin^2 s_m)}{B^2R}+\frac{\mu'-\mu\cos s_m}{BR}\left\{\frac{1+\mu'^2}{R^2}+\frac{2(1+\mu^2)}{B}\right\} \qquad (2.1.7)$$

となる。

$$v=(\tau-\tau_0'-\bar{\tau}'\xi')/2 \qquad (2.1.8)$$

であるから，これが μ' の関数とみなされることを考慮して，

$$I=\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0{}^*d\xi'\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l-ip^*v}\int_{-\infty}^{v}e^{ip^*s}\times\left\{s\sin s_m X(s,\mu,\mu')+\frac{1}{1+\mu^2}\frac{\partial}{\partial s}Y(s,\mu,\mu')\right\}ds \qquad (2.1.9)$$

で定義される関数を μ' で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial\mu'}=&\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0{}^*)}{\partial\mu'}-ip^*\bar{c}\gamma_0{}^*\frac{dv}{d\mu'}\right\}d\xi'\\ &\times\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l-ip^*v}\\ &\times\int_{-\infty}^{v}e^{ip^*s}\left\{s\sin s_m X(s,\mu,\mu')\right.\\ &\left.+\frac{1}{1+\mu^2}\frac{\partial}{\partial s}Y(s,\mu,\mu')\right\}ds\\ &+\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0{}^*d\xi'\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\left\{v\sin v_m X(v,\mu,\mu')\right.\\ &\left.+\frac{1}{1+\mu^2}\frac{\partial}{\partial v}Y(v,\mu,\mu')\right\}\frac{dv}{d\mu'}\\ &+\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0{}^*d\xi'\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l-ip^*v}\int_{-\infty}^{v}e^{ip^*s}\\ &\times\left\{\frac{3(1+\mu'^2)s\sin s_m}{R^5}\right.\\ &\left.+\frac{1}{1+\mu^2}\frac{\partial}{\partial s}\frac{\mu\mu' s+\sin s_m}{R^3}\right\}ds\end{aligned} \qquad (2.1.10)$$

となる。$dv/d\mu'$ は τ, ξ' を常数とみなして，(2.1.8) を微分すれば得られる。

$$T(\xi')=\frac{1}{2}\left(\xi'\frac{d\bar{\tau}'}{d\mu'}+\frac{d\tau_0'}{d\mu'}\right) \qquad (2.1.11)$$

と書くと

$$\frac{dv}{d\mu'}=-T(\xi') \qquad (2.1.12)$$

である。

$\bar{c}=\sqrt{1+\mu'^2}\,\bar{\tau}'/(2\mu^*)$ を考慮すると，(2.1.10) の最終項は (2.1.1) の被積分関数と同形である。よって，この式を (2.1.1) に代入して，μ' に関する積分を行う。$\mu'=\mu_b, \mu_0$ で $I=0$，としてよいから，

$$\begin{aligned}w_0=&-\frac{\mu^*\sqrt{1+\mu^2}}{4\pi}\int_{\mu_b}^{\mu_0}\left\{\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0{}^*)}{\partial\mu'}+ip^*\bar{c}\gamma_0{}^*T(\xi')\right\}d\mu'\\ &\times\int_{-1}^{1}d\xi'\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l-ip^*v}\int_{-\infty}^{v}e^{ip^*s}\\ &\times\left\{s\sin s_m Y(s,\mu,\mu')+\frac{1}{1+\mu^2}\frac{\partial}{\partial s}Y(s,\mu,\mu')\right\}ds\\ &+\frac{\mu^*\sqrt{1+\mu^2}}{4\pi}\int_{\mu_b}^{\mu_0}\bar{c}\gamma_0{}^*d\mu'\int_{-1}^{1}\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\\ &\times\left\{v\sin v_m X(v,\mu,\mu')+\frac{1}{1+\mu^2}\frac{\partial}{\partial v}Y(v,\mu,\mu')\right\}\\ &\times T(\xi')d\xi'\end{aligned} \qquad (2.1.13)$$

となる。これがプロペラ揚力面の積分方程式を半径方向に部分積分した式である。

2.2. 定常プロペラの揚力面と揚力線

積分方程式 (2.1.13) の核関数はかなり複雑である。それで，まず定常プロペラに限定して，核関数の特異性分離の解析を行ってみる。定常プロペラの吹上げの表示式は (2.1.13) で，$p=0$，$p^*=0$ とすれば得られる。

$$Z(s,\mu,\mu')=(1+\mu^2)s\sin s_m X(s,\mu,\mu')+\frac{\partial}{\partial s}Y(s,\mu,\mu') \qquad (2.2.1)$$

で定義される関数を用いると

$$\begin{aligned}w=&-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu_b}^{\mu_0}\frac{\partial(\bar{c}\gamma^*)}{\partial\mu'}d\mu'\int_{-1}^{1}d\xi'\\ &\times\int_{-\infty}^{v}\sum_{m=0}^{l-1}Z(s,\mu,\mu')ds\\ &+\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu_b}^{\mu_0}\bar{c}\gamma^*d\mu'\int_{-1}^{1}T(\xi')\sum_{m=0}^{l-1}Z(v,\mu,\mu')d\xi'\end{aligned} \qquad (2.2.2)$$

のように表わされる。$Z(s,\mu,\mu')$ を整理すると

$$Z(s,\mu,\mu')=\frac{\mu^2(\mu'-\mu\cos s_m)(\sin s_m-s\cos s_m)}{BR}$$
$$\times\frac{(s-\sin s_m\cos s_m)}{}\times\left(\frac{1}{R^2}+\frac{2}{B}\right)+\frac{\mu'-\mu\cos s_m}{R}$$
$$\times\left\{-\frac{s\sin s_m}{R^2}+\frac{s\sin s_m+(1+\mu^2)\cos s_m}{B}\right\}$$
$$+\frac{\mu\{s(s-\sin s_m\cos s_m)+\sin s_m(\sin s_m-s\cos s_m)\}}{R^3}$$
$$-\frac{\mu}{R} \qquad (2.2.3)$$

と書かれる。ただし，R, B は (2.1.3)，(2.1.6) で定義した関数である。

$\mu-\mu'\neq 0$ とすると，Z は $m=0$ のとき，$s=0$ に

$$Z(s,\mu,\mu')\simeq\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2} \qquad (2.2.4)$$

の特異性がある。(2.2.2) の第1項の核関数からこの特異性を分離して

$$w=-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}\frac{\partial(\bar{c}\gamma^*)}{\partial\mu'}d\mu'\int_{-1}^{1}d\xi'$$
$$\times\int_{-\infty}^{v}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}Z(s,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds$$
$$+\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)\frac{\partial(\bar{c}\gamma^*)}{\partial\mu'}d\mu'\int_{-1}^{1}\frac{1}{v}d\xi'$$
$$+\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}\bar{c}\gamma^*d\mu'\int_{-1}^{1}T(\xi')\sum_{m=0}^{l-1}Z(v,\mu,\mu')d\xi'$$
$$(2.2.5)$$

と書く。第2項の μ' について部分積分を行うと

$$\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)\frac{\partial(\bar{c}\gamma^*)}{\partial\mu'}d\mu'\int_{-1}^{1}\frac{1}{v}d\xi'$$
$$=-\frac{\mu^*}{2\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\bar{c}\gamma^*}{v}d\xi'$$
$$+\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)\bar{c}\gamma^*d\mu'$$
$$\times\int_{-1}^{1}\frac{1}{v^2}\frac{dv}{d\mu'}d\xi'$$

であるから，(2.1.12) を考慮すると，(2.2.5) は

$$w=-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma^*}{\xi-\xi'}d\xi'$$
$$-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu_0}^{\mu_0}\frac{\partial(\bar{c}\gamma^*)}{\partial\mu'}d\mu'\int_{-1}^{1}d\xi'$$
$$\times\int_{-\infty}^{v}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}Z(s,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds$$
$$+\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}\bar{c}\gamma^*d\mu'\int_{-1}^{1}T(\xi')$$
$$\times\left\{\sum_{m=0}^{l-1}Z(v,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{v^2}\right\}d\xi' \qquad (2.2.6)$$

となる。第1項は2次元薄翼の吹上げであって，積分方程式 (2.2.6) の核関数の特異性のうち，ξ' に関するものはすべてこの中に集められている。したがって，核関数の特異性は，以降 μ' に関するものだけに留意すればよい。注意すべきことだが，翼数が偶数のときは，Z は $m=l/z$ のところにも $1/s^2$ の特異性がある。それを分離するには，上の演算でわかるように，(2.2.6) の中括弧それぞれに，更に $-1/s^2$, $-1/v^2$ を加えるとよい。以下の記述にもこの項が書いてないが，偶数翼数のときは同様の配慮が必要である。

(2.2.6)の第2項の s の積分区間を $(-\infty, 0]$, $[0, v]$ の二つに分ければ，プロペラ揚力線の吹上げを分離することができる。そうしないでも，数値計算上，大きな違いはないが，自由渦の吹上げ w_I は螺旋渦のピッチの算出に必要であるから，揚力線を分離することは，全般の計算の構成上好都合であろう。

まず，s の積分区間を二つに分けて

$$\int_{-\infty}^{v}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}Z(s,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds$$
$$=\int_{0}^{v}\{\quad\}ds+\int_{-\infty}^{0}\{\quad\}ds \qquad (2.2.7)$$

と書く。ただし，右辺の { } の中の被積分関数は左辺の中括弧の中の関数と同じものとする。

$Z(s,\mu,\mu')$ は (2.2.1)に示す関数である。$\mu-\mu'\neq 0$ とすると，$m=0$ の $s=0$ 近傍および $\mu\to-\infty$ では

$$\left.\begin{aligned}&s\sin s\cdot X(s,\mu,\mu')\simeq 2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)\\&\quad\times\left\{\frac{1}{1+\mu^2}\,\frac{1}{s^2}+\frac{1+3\mu^2}{3(1+\mu^2)^2}+\cdots\cdots\right\}\\&Y(s,\mu,\mu')\simeq\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s}+0(s)\\&\lim_{s\to-\infty}Y(s,\mu,\mu')\to\mu\end{aligned}\right\} \qquad (2.2.8)$$

である。以上を考慮して

$$\int_{-\infty}^{0}\{\quad\}ds=\int_{-\infty}^{0}\left[\left\{\sum_{m=0}^{l-1}(1+\mu^2)s\sin s_m X(s,\mu,\mu')\right.\right.$$
$$\left.-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial s}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}Y(s,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s}\right\}\right]ds$$
$$(2.2.9)$$

の大括弧の中の第2項の積分を行うと

$$\int_{-\infty}^{0}\left\{\quad\right\}ds=\int_{-\infty}^{0}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}(1+\mu^2)s\sin s_m X(s,\mu,\mu)\right.$$
$$\left.-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds$$
$$+\lim_{s\to 0}\left\{\sum_{m=1}^{l-1}Y(s,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s}\right\}-l\mu \tag{2.2.10}$$

となる。(2.1.5) より

$$Y(s,\mu,\mu')=\int^{\mu'}\frac{\mu\mu' s+\sin s_m}{R^3}d\mu' \tag{2.2.11}$$

であるから,

$$R^*=\sqrt{s^2+\mu^2+\mu'^2-2\mu\mu'\cos\varphi}$$

とすると

$$\sum_{m=0}^{l-1}Y(s,\mu,\mu')=-\sum_{m=0}^{l-1}\int^{\mu'}\left(\mu\mu'\frac{\partial}{\partial s}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\mu\mu'}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\frac{1}{R^*}\Bigg|_{\varphi=s_m}d\mu' \tag{2.2.12}$$

と書かれる。

μ, μ' のうち，大きい方および小さい方を $\mu_>$，$\mu_<$ の記号で表わし,

$$\frac{1}{R^*}=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda s+in\varphi}$$
$$\times I_n(|\lambda|\mu_<)K_n(|\lambda|\mu_>)\,d\lambda \tag{2.2.13}$$

の公式を用いると

$$\sum_{m=0}^{l-1}Y(s,\mu,\mu')=-\frac{i}{\pi}\sum_{m=0}^{l-1}\int^{\mu'}d\mu'\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\mu\mu'\lambda\right.$$
$$\left.+\frac{n}{\mu\mu'}\right)e^{i\lambda s+in(s-2m\pi/l)}I_n(|\lambda|\mu_<)K_n(|\lambda|\mu_>)d\lambda$$

のように表わされる。

$$\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2nm\pi/l}=\begin{cases}0, & n\neq kl\\ l, & n=kl\end{cases}\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

である。又

$$I_n(z)=I_{-n}(z),\quad K_n(z)=K_{-n}(z)$$

であるから,

$$\sum_{m=0}^{l-1}Y(s,\mu,\mu')=\frac{2l}{\pi}\int^{\mu'}d\mu'$$
$$\times\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\mu\mu'\lambda+\frac{kl}{\mu\mu'}\right)\sin(\lambda+kl)\,s$$
$$\times I_{kl}(\lambda\mu_<)K_{kl}(\lambda\mu_>)d\lambda \tag{2.2.14}$$

となる。

(2.2.8) に示すように，ΣY には $s=0$ に特異性がある。それを差引いたものは(2.2.14)から明らかなように，$s=0$ で0になる。したがって

$$\lim_{s\to 0}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}Y-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s}\right\}=0 \tag{2.2.15}$$

である。よって，(2.2.10)の第2項は消える。第3項の $l\mu$ は，これを (2.2.6) に代入すれば，μ' の積分は直ちに行うことができる。$\mu'=\mu_0$, μ_b で $\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma^* d\xi'=0$ の翼端条件により，$l\mu$ の項も消える。

結局，プロペラ揚力線の吹上げは

$$\hat{w}=-\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\gamma^*}{\xi-\xi'}d\xi'-\frac{\mu^*}{4\pi}\int_{\mu b}^{\mu_0}d\mu'\int_{-1}^{1}\frac{\partial(\bar{c}\gamma^*)}{\partial\mu'}d\xi'$$
$$\times\int_{-\infty}^{0}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}\sqrt{1+\mu^2}\,s\sin s_m X(s,\mu,\mu')\right.$$
$$\left.-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2\sqrt{1+\mu^2}}\right\}ds \tag{2.2.16}$$

となり，揚力面の吹上げは

$$w=\hat{w}-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}\frac{\partial(\bar{c}\gamma^*)}{\partial\mu'}d\mu'\int_{-1}^{1}d\xi'$$
$$\times\int_{-\infty}^{v}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}Z(s,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds$$
$$+\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}\bar{c}\gamma^* d\mu'\int_{-1}^{1}T(\xi')\left\{\sum_{m=0}^{l-1}Z(v,\mu,\mu')\right.$$
$$\left.-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{v^2}\right\}d\xi' \tag{2.2.17}$$

のように表わされる。

螺旋渦のピッチを計算するのに必要な揚力線の自由渦の吹上げ w_I は (2.2.16) の第2項に V^* を乗じたものであって

$$w_I=\frac{\partial\Phi}{\partial n}\bigg|_{\substack{\sigma=\sigma'\\ \tau=\tau'}}=-\frac{V\mu^*}{4\pi}\int_{\mu b}^{\mu_0}d\mu'\int_{-1}^{1}\frac{\partial(\bar{c}\gamma^*)}{\partial\mu'}d\xi'$$
$$\times\int_{-\infty}^{0}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}\sqrt{1+\mu^2}\,s\sin s_m X(s,\mu,\mu')\right.$$
$$\left.-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2\sqrt{1+\mu^2}}\right\}ds \tag{2.2.18}$$

で与えられる。文献[5] の w_I の演算子 Z_k^B には $Y(0,\mu,\mu')$ の項が含まれているが，上に示したように，0になるから，計算から除外してよい。

2.3. 核関数の特異性

半径方向の座標変数を μ の代わりに，それと

$$\eta=(\mu-\bar{\mu})/\mu^*,\quad \mu^*=(\mu_0-\mu_b)/2,\quad \bar{\mu}=(\mu_0+\mu_b)/2 \tag{2.3.1}$$

の関係にある η にとり，γ^* を ξ, η の関数として

$$\gamma^*(\xi,\eta)=B^{(0)}(\eta)\lambda_0(\xi)+B^{(1)}(\eta)\lambda_1(\xi)$$
$$+B^{(2)}(\eta)\lambda_2(\xi)+\cdots\cdots \tag{2.3.2}$$

のように仮定する。ここで influence function を

$$\left.\begin{aligned} i_N(\xi^*,\eta,\eta') &= \frac{\mu-\mu'}{2\sqrt{1+\mu^2}}\int_{-1}^{1}\lambda_N(\xi') \\ &\times\int_0^v\left\{\sum_{m=0}^{l-1}Z(s,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds\,d\xi' \\ j_N(\xi^*,\eta,\eta') &= -\frac{\mu^*\bar{c}(\mu-\mu')}{2\sqrt{1+\mu^2}}\int_{-1}^{1}\lambda_N(\xi')T(\xi') \\ &\times\left\{\sum_{m=0}^{l-1}Z(v,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{v^2}\right\}d\xi' \end{aligned}\right\} \tag{2.3.3}$$

のように定義すると，(2.2.17)の吹上げは

$$w=\hat{w}-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\int_{-1}^{1}\frac{d(\bar{c}B^{(N)})}{d\eta'}\frac{i_N(\xi^*,\eta,\eta')}{\eta-\eta'}d\eta'$$
$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\int_{-1}^{1}\frac{B^{(N)}(\eta')j_N(\xi^*,\eta,\eta')}{\eta-\eta'}d\eta' \tag{2.3.4}$$

のように $B^{(N)}$ の方程式の形に表わされる。 mode function 法ではこれを $B^{(N)}$ の積分方程式として数値計算するわけであるが，それには i_N, j_N の特異性が判明していなければならない。 翼弦方向の mode function $\lambda_N(\xi)$ の選定は，Birnbaum その他，そのときの都合に従えばよい。

(1) i_N, j_N の特異性

i_N, j_N の特異性は $\mu=\mu'$ のところにあり，m に関する総和の中の $m=0$ の項だけに含まれる。

Z の $m=0$ の場合で，s と $\mu-\mu'$ が小さいときの近似式を (2.2.3) より求めると

$$Z\simeq\frac{\mu'-\mu}{s^2\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{s^2+Y'^2}}-\frac{\mu}{2\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{s^2+Y'^2}}+\cdots \tag{2.3.5}$$

ただし

$$Y'=|\mu-\mu'|/\sqrt{1+\mu^2} \tag{2.3.6}$$

である。繁雑さをさけるため， ここでは $(\mu'-\mu)/\sqrt{s^2+Y'^2}$ の項は省略した。その係数があまり大きくないので，これに基因する特異性は，数値計算で取上げる必要は殆んど生じないだろう。(2.3.5) を s で積分すると

$$\int_0^v\left\{\sum_{m=0}^{l-1}Z(s,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds$$
$$\simeq\frac{\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{v^2+Y'^2}}{v(\mu-\mu')}-\frac{\mathrm{sgn}(\mu-\mu')}{v}$$
$$+\frac{\mu}{2\sqrt{1+\mu^2}}\,\mathrm{sgn}\,v\,l_n\,Y' \tag{2.3.7}$$

となる。

$$Y=\lambda|\eta-\eta'|$$

とし

$$g_{1,N}(\xi^*,Y)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\lambda_N(\xi')}{\xi^*-\xi'}\left\{\sqrt{(\xi^*-\xi')^2+Y^2}-Y\right\}d\xi' \tag{2.3.8}$$

と書くと，$Y=0$ の近傍では

$$i_N(\xi^*,\eta,\eta')\simeq g_{1,N}(\xi^*,Y)+\frac{\mu}{4(1+\mu^2)}\int_{-1}^{1}\lambda_N(\xi')\mathrm{sgn}(\xi-\xi')d\xi'\times(\mu-\mu')\ln Y+\cdots \tag{2.3.9}$$

である。前報で示したように，$Y=0$ では

$$g_{1,N}(\xi^*,Y)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{sgn}(\xi-\xi')\lambda_N(\xi')d\xi' \tag{2.3.10}$$

$Y=0$ の近傍では

$$g_{1,N}(\xi^*,Y)\simeq g_{1,N}(\xi^*,0)+\frac{1}{2}\lambda_N^{(1)}(\xi^*)Y^2\ln Y+\cdots \tag{2.3.11}$$

である。(2.3.10)，(2.3.11)を用いると，$i_N(\xi^*,\eta,\eta')$ の $\eta=\eta'$ の近傍における近似式

$$i_N(\xi^*,\eta,\eta')\simeq g_{1,N}(\xi,0)+\frac{\lambda^2}{2}\lambda_N^{(1)}(\xi)(\eta-\eta')^2 l_n|\eta-\eta'|$$
$$+\frac{\mu\mu^*}{4(1+\mu^2)}\int_{-1}^{1}\mathrm{sgn}(\xi-\xi')\lambda_N(\xi')d\xi'(\eta-\eta')\times l_n|\eta-\eta'|+\cdots \tag{2.3.12}$$

が得られる。(2.3.5) で省略した$(\mu'-\mu)/\sqrt{s^2+Y'^2}$ はここへ来ると，$(\eta-\eta')^2 l_n|\eta-\eta'|$ になるのに，それを無視しておきながら，$g_{1,N}$ でだけその項を取出した理由は，その係数が，翼端および前縁の近くで大きくなり，数値計算の補正に必要が生じるかも知れないからである。

j_N の特異性は (2.3.5) を参照すると直ちに導かれる。前報の中で j_N と定義した関数に $\lambda(\eta-\eta')$ を乗じたものを $g_{2,N}$ と書く。即ち

$$g_{2,N}(\xi^*,Y)=\frac{Y}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\Lambda_N(\xi')}{(\xi^*-\xi')^2}\left\{\frac{Y}{\sqrt{(\xi^*-\xi')^2+Y^2}}-1\right\}d\xi' \tag{2.3.13}$$

とすると，$Y=0$ の近傍で

$$j_N(\xi^*,\eta,\eta')\simeq\sqrt{1+\mu^2}\,g_{2,N}(\xi^*,Y)+\frac{\mu(\mu-\mu')}{4\sqrt{1+\mu^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\Lambda_N(\xi')}{\sqrt{(\xi^*-\xi')^2+Y^2}}d\xi'+\cdots \tag{2.3.14}$$

となる。$g_{2,N}$ は $Y=0$ の近傍で

$$g_{2,N}(\xi^*,Y)\simeq-\Lambda_N(\xi)-\frac{1}{2}\Lambda_N^{(2)}(\xi)Y^2 l_n Y+\cdots$$

であるから（附録参照），j_N の $\eta=\eta'$ の近傍における近似式は

$$\begin{aligned}j_N(\xi^*,\eta,\eta')\simeq&-\sqrt{1+\mu^2}\,\Lambda_N(\xi)\\&-\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{2}\Lambda_N^{(2)}(\xi)\lambda^2(\eta-\eta')^2 l_n|\eta-\eta'|\\&-\frac{\mu^*\mu}{2\sqrt{1+\mu^2}}\Lambda_N(\xi^*)(\eta-\eta')l_n|\eta-\eta'|+\cdots\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

となる。ただし，$\Lambda_N(\xi)=T(\xi)\lambda_N(\xi)$, $\Lambda_N^{(2)}(\xi)=d^2\Lambda_N/d\xi^2$ とする。(2.3.14) の右辺の $g_{2,N}$ に $\sqrt{1+\mu^2}$ がかかっているのは，$\sqrt{1+\mu^2}\,T(\xi)$ が直進翼の $T(\xi)$ に対応するためである。

(2) w_I の核関数の特異性

$$k_N=\int_{-1}^{1}\lambda_N(\xi')d\xi' \tag{2.3.16}$$

とし，

$$\begin{aligned}l_N(\eta,\eta')=&\frac{k_N(\mu-\mu')}{2}\\&\times\int_{-\infty}^{0}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}\sqrt{1+\mu^2}\,s\sin s_m X(s,\mu,\mu')\right.\\&\left.-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2\sqrt{1+\mu^2}}\right\}ds\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

と書くと，(2.2.18) より

$$w_I=-\frac{V^*}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\int_{-1}^{1}\frac{d(\bar{c}B^{(N)})}{d\eta'}\frac{l_N(\eta,\eta')}{\eta-\eta'}d\eta' \tag{2.3.18}$$

のように表わされる。

(2.2.18) の w_I の核関数は，(2.2.7) にもどると

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{0}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}\sqrt{1+\mu^2}\,s\sin s_m X(s,\mu,\mu')-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2\sqrt{1+\mu^2}}\right\}ds\\&\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\int_{-\infty}^{0}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}Z(s,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

である。ここで $\mu-\mu'=0$ の近傍を考える。$S\gg|\mu-\mu'|$ とすると，(2.3.5) より

$$\begin{aligned}l_N(\eta,\eta')\simeq&\frac{k_N}{2}\frac{\mu-\mu'}{\sqrt{1+\mu^2}}\int_{-S}^{0}\left\{\frac{\mu'-\mu}{s^2\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{s^2+Y'^2}}\right.\\&\left.-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}-\frac{\mu}{2\sqrt{1+\mu^2}}\frac{1}{\sqrt{s^2+Y'^2}}\right\}ds\\\simeq&\frac{k_N}{2}+\frac{\mu^*\mu k_N}{4(1+\mu^2)}(\eta-\eta')l_n|\eta-\eta'|+\cdots\end{aligned} \tag{2.3.20}$$

となる。第2項の対数特異性に対し，数値計算上の議論がなされた例は見当らない。この項に関する限り，対数補正の必要性が揚力面の場合程切実でないということであろうか。

2.4. 非定常プロペラ揚力面の翼弦方向特異性の分離

(2.1.13)の第1項の翼弦方向の特異性を分離するため

$$\begin{aligned}w_0=&-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}d\mu'\int_{-1}^{1}\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0^*)}{\partial\mu'}d\xi'\\&\times\int_{-\infty}^{v}e^{-ip^*(v-s)}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}Z(s,\mu,\mu')\right.\\&\left.-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds-\frac{ip^*\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}d\mu'\\&\times\int_{-1}^{1}\bar{c}T(\xi')\gamma_0^*d\xi'\int_{-\infty}^{v}e^{-ip^*(v-s)}\\&\times\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}Z(s,\mu,\mu')ds\\&+\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}\bar{c}\gamma_0^*d\mu'\int_{-1}^{1}\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\\&\times Z(v,\mu,\mu')T(\xi')d\xi'\\&-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}d\mu'\int_{-1}^{1}\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0^*)}{\partial\mu'}\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)d\xi'\\&\times\int_{-\infty}^{v}\frac{e^{-ip^*(v-s)}}{s^2}ds\end{aligned} \tag{2.4.1}$$

と書く。第4項の μ' について部分積分を行うと

$$\begin{aligned}&-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}d\mu'\int_{-1}^{1}\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0^*)}{\partial\mu'}\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)d\xi'\\&\times\int_{-\infty}^{v}\frac{e^{-ip^*(v-s)}}{s^2}ds\\=&\frac{\mu^*}{2\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0^*d\xi'\int_{-\infty}^{v}\frac{e^{-ip^*(v-s)}}{s^2}ds\\&+\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}d\mu'\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0^*\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)d\xi'\,T(\xi')\\&\times\left\{\int_{-\infty}^{v}\frac{ip^*e^{-ip^*(v-s)}}{s}ds-\frac{1}{v^2}\right\}\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

となる。これを(2.4.1)に適用する。その際，(2.4.2)の右辺第1項の変数を $s-v=\bar{\tau}(\xi''-\xi)/2$ によって ξ'' に変えると

$$w_0=\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}\gamma_0{}^*d\xi'\int_{-\infty}^{\xi}\frac{e^{-ip^*(\xi-\xi'')\bar{\tau}/2}}{(\xi''-\xi')^2}d\xi''$$
$$-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}d\mu'\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0{}^*)}{\partial\mu'}\right.$$
$$\left.+ip^*\bar{c}\gamma_0{}^*\,T(\xi')\right\}d\xi'\int_{-\infty}^{v}e^{-ip^*(v-s)}$$
$$\times\left\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\,Z(s,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds$$
$$+\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}\bar{c}\gamma_0{}^*d\mu'\int_{-1}^{1}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\right.$$
$$\left.\times Z(v,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{v^2}\right\}T(\xi')d\xi' \qquad (2.4.3)$$

と書かれる。

半翼弦長 c は，$c=h\sqrt{1+\mu^2}\,\bar{\tau}/2$ であるから，

$$\frac{p^*\bar{\tau}}{2}=\frac{\nu h\bar{\tau}}{2V^*}=\frac{\nu c}{W^*} \qquad (2.4.4)$$

となる。したがって，(2.4.3) の第1項は2次元振動翼の吹上げと全く同等の式である。そして (1.4.3) の場合と同様，核関数の特異性のうち，翼弦方向のものは第1項に集められたことになる。

(2.4.3) の第2項の s に関する積分は，このままでは数値積分の計算に時間がかかり過ぎるので，積分区間を $(-\infty,0]$，$[0,v]$ の二つに分けて

$$\int_{-\infty}^{v}\left[e^{-ip^*(v-s)}\left\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\,Z(s,\mu,\mu')\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}\right]ds=\int_0^v\left[\ \right]ds+\int_{-\infty}^{0}\left[\ \right]ds$$
$$(2.4.5)$$

のようにする。ただし，右辺の [ ] の中の被積分関数は左辺の大括弧の中の関数と同じものとする。第2項の Z を (2.2.1) の右辺の形にして

$$\int_{-\infty}^{0}\left[\ \right]ds=\int_{-\infty}^{0}e^{-ip^*(v-s)}$$
$$\times\left\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}(1+\mu^2)s\sin s_m\,X(s,\mu,\mu')\right.$$
$$\left.-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds+\int_{-\infty}^{0}e^{-ip^*(v-s)}$$
$$\times\frac{\partial}{\partial s}\left[\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\left\{Y(s,\mu,\mu')-\mu\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s}\right]ds \qquad (2.4.6)$$

と書き，これの第2項を部分積分する。

$$\left\{\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0{}^*)}{\partial\mu'}+ip^*\bar{c}\gamma_0{}^*\,T(\xi')\right\}e^{-ip^*v}$$
$$=\frac{\partial}{\partial\mu'}(\bar{c}\gamma_0{}^*\,e^{-ip^*v}) \qquad (2.4.7)$$

であるから，これを μ' で μ_b より μ_0 まで積分すれば，翼端条件により0である。したがって，積分されたもののうち，$-\mu$ の項は消える。又 Y の m に関する総和のうち，$m=0$ の項は (2.2.8) により消える。よって

$$\int_{-\infty}^{0}\left[\ \right]ds=\sum_{m=1}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l-ip^*v}\,Y(0,\mu,\mu')$$
$$+\int_{-\infty}^{0}e^{-ip^*(v-s)}$$
$$\times\left[\left\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\,(1+\mu^2)s\sin s_m\,X(s,\mu,\mu')\right.\right.$$
$$\left.-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}$$
$$-ip^*\left\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}(Y(s,\mu,\mu')-\mu)\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s}\right\}\right]ds \qquad (2.4.8)$$

となる。これを (2.4.3) に適用すると

$$w_0=\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}\gamma_0{}^*\,d\xi'\int_{-\infty}^{\xi}\frac{e^{-ip^*(\xi-\xi'')\bar{\tau}/2}}{(\xi''-\xi')^2}d\xi''$$
$$-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}d\mu'\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0{}^*)}{\partial\mu'}\right.$$
$$\left.+ip^*\bar{c}\gamma_0{}^*\,T(\xi')\right\}d\xi'$$
$$\times\left[\sum_{m=1}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l-ip^*v}\,Y(0,\mu,\mu')+\int_{-\infty}^{0}e^{-ip^*(v-s)}\right.$$
$$\times\left\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}(1+\mu^2)s\sin s_m\,X(s,\mu,\mu')\right.$$
$$-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}-ip^*\left(\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}(Y(s,\mu,\mu')-\mu)\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s}\right)\right\}ds\right]$$
$$-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}d\mu'\int_{-1}^{1}\left\{\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0{}^*)}{\partial\mu'}\right.$$
$$\left.+ip^*\bar{c}\gamma_0{}^*\,T(\xi')\right\}d\xi'\int_0^v e^{-ip^*(v-s)}$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l}\ Z(s,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds$$

$$+\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}d\mu'\int_{-1}^{1}\bar{c}\gamma_0^*\ T(\xi')$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l}\ Z(v,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{v^2}\right\}d\xi' \tag{2.4.9}$$

となる。この式は複雑に見えるけれども，第1項，第2項が揚力線の吹上げ，第3項，第4項が揚力面補正項であるから，実際の運算は見掛け程繁雑ではないだろう。

(2.4.9) の第2項の s の被積分関数のうち $s\sin s_m X$ と $Y-\mu$ は $s\to-\infty$ で $1/s^2$ の order になるから，このままで数値積分してよいが，$\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)/s$ の項は少し形を変えて計算する必要がある。それで

$$\int_{-\infty}^{0} e^{ip^*s}\left\{\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l}(Y(s,\mu,\mu')-\mu)-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s}\right\}ds$$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{ip^*s}\left\{\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l}(Y(s,\mu,\mu')-\mu)-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s}\mathbf{1}(s+k)\right\}ds$$

$$-\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)\int_{-\infty}^{-k}\frac{e^{ip^*s}}{s}ds \tag{2.4.10}$$

のように書く。ただし

$$\mathbf{1}(a)=\begin{cases}1, & a>0\\ 0, & a<0\end{cases} \tag{2.4.11}$$

とする。k は正の数であって，どう選んでもよい。S_i, C_i をそれぞれ正弦積分，余弦積分とすると

$$\int_{-\infty}^{-k}\frac{e^{ip^*s}}{s}ds=C_i(kp^*)-iS_i(kp^*)-i\frac{\pi}{2} \tag{2.4.12}$$

である。(2.4.10) の第2項は (2.4.12) によって計算する。

$dv/d\mu'$ は (2.1.8) の τ, ξ' を常数とみなして微分するものであるから，(2.4.7) より

$$\left\{\frac{\partial(\bar{c}\gamma_0^*)}{\partial\mu'}+ip^*\bar{c}\gamma_0^*\ T(\xi')\right\}e^{-ip^*v}$$

$$=e^{-ip^*\tau/2}\frac{\partial}{\partial\mu'}(\bar{c}\gamma_0^*\ e^{ip^*\tau'/2}) \tag{2.4.13}$$

である。(2.4.9) の第1項の ξ'' の積分を (2.4.2) の右辺第1項の形にもどしておいて

$$\left.\begin{aligned} w_0e^{ip^*\tau/2}&=\bar{w}_0\\ \gamma_0^*e^{ip^*\tau'/2}&=\bar{\gamma}_0\end{aligned}\right\} \tag{2.4.14}$$

と書くと，

$$\bar{w}_0=\frac{\mu^*}{2\pi\sqrt{1+\mu^2}}\boldsymbol{H}\int_{-1}^{1}\bar{c}\bar{\gamma}_0\,d\xi'\int_{-\infty}^{v}\frac{e^{ip^*s}}{s^2}ds$$

$$-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}\frac{\partial(\bar{c}\bar{\gamma}_0)}{\partial\mu'}d\mu'\int_{-1}^{1}d\xi'$$

$$\times\Bigg[\sum_{m=1}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l}\ Y(0,\mu,\mu')$$

$$+\int_{-\infty}^{0} e^{ip^*s}\left\{\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l}(1+\mu^2)s\sin s_m X(s,\mu,\mu')\right.$$

$$-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}-ip^*\left(\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l}(Y(s,\mu,\mu')-\mu)\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s}\right)\right\}ds\Bigg]$$

$$-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu_0}\frac{\partial(\bar{c}\bar{\gamma}_0)}{\partial\mu'}d\mu'\int_{-1}^{1}d\xi'$$

$$\times\int_{0}^{v} e^{ip^*s}\left\{\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l}\ Z(s,\mu,\mu')\right.$$

$$\left.-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\right\}ds+\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}$$

$$\times\int_{\mu b}^{\mu 0}\bar{c}\bar{\gamma}_0\,d\mu'\int_{-1}^{1}T(\xi')\ e^{ip^*v}$$

$$\times\left\{\sum_{m=0}^{l-1} e^{-i2pm\pi/l}\ Z(v,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{v^2}\right\}d\xi' \tag{2.4.15}$$

のように表わされる。伴流プロペラの場合

$$w_0=\frac{1}{V^*}\Big\{-(ic_p+d_q)\cos\varepsilon_I$$

$$+(ie_p+f_p)\sin\varepsilon_I\Big\}\ e^{-ip\tau/2} \tag{2.4.16}$$

であるから[5]，線型理論では，$p=p^*$ により，$\bar{w}_0$ の $e^{ip\tau/2}$ の項は消えてしまう。(2.4.15) は形の上では (2.2.17) の定常プロペラのものと大きな違いはない。$\bar{\gamma}_0$ を Birnbaum 等の mode function で表わして，(2.4.16) を解くようにするとよい。

$$\int_{-\infty}^{v}\frac{e^{ip^*s}}{s^2}ds=-\frac{e^{ip^*v}}{v}+ip^*\int_{-\infty}^{v}\frac{e^{ip^*s}}{s}ds \tag{2.4.17}$$

であるから，(2.4.15) の第1項の核関数は $v=0$ に1位の極と対数特異性がある。数値計算では，それを分離して計算する必要がある。

2.5. 非定常プロペラ揚力面の influence function とその特異性

$\bar{\gamma}_0$ を (2.3.2) と同形に

$$\bar{\gamma}_0(\xi,\eta)=\tilde{B}^{(0)}(\eta)\lambda_0(\xi)+\tilde{B}^{(1)}(\eta)\lambda_1(\xi)+\tilde{B}^{(2)}(\eta)\lambda_2(\xi)+\cdots \tag{2.5.1}$$

のように仮定する。$\tilde{B}^{(N)}(\eta)$ は一般に複素数である。

(2.4.15) の中の揚力線の吹上げを $\tilde{w}_0$ で表わすことにすると

$$\begin{aligned}\tilde{w}_0=&\frac{\mu^*}{2\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{-1}^{1}\bar{c}\bar{\gamma}_0 d\xi'\int_{-\infty}^{v}\frac{e^{ip^*s}}{s^2}ds\\&-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\int_{\mu b}^{\mu 0}\frac{\partial(\bar{c}\bar{\gamma}_0)}{\partial\mu'}d\mu'\int_{-1}^{1}d\xi'\\&\times\Big[\sum_{m=1}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\,Y(0,\mu,\mu')\\&+\int_{-\infty}^{0}e^{ip^*s}\Big\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}(1+\mu^2)\\&\times s\sin s_m\,X(s,\mu,\mu')-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\\&-ip^*\Big(\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\,(Y(s,\mu,\mu')-\mu)\\&-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s}\Big)\Big\}ds\Big]\end{aligned}$$

である。これの $\bar{\gamma}_0$ に (2.5.1) を代入すると

$$\begin{aligned}\tilde{w}_0=&\frac{\mu^*\bar{c}}{2\pi\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{N=0}^{R}\tilde{B}^{(N)}(\eta)\\&\times\int_{-1}^{1}\lambda_N(\xi')d\xi'\int_{-\infty}^{v}\frac{e^{ip^*s}}{s^2}ds\\&-\frac{\mu^*}{4\pi\sqrt{1+\mu^2}}\sum_{N=0}^{R}k_N\int_{\mu b}^{\mu 0}\frac{d(\bar{c}\tilde{B}^{(N)})}{d\mu'}d\mu'\\&\times\Big[\sum_{m=1}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\,Y(0,\mu,\mu')+\int_{-\infty}^{0}e^{ip^*s}\\&\times\Big\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}(1+\mu^2)\,s\sin s_m\,X(s,\mu,\mu')\\&-\frac{2\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}-ip^*\Big(\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\,(Y(s,\mu,\mu')-\mu)\\&-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s}\Big)\Big\}ds\Big]\end{aligned} \tag{2.5.2}$$

となる。

influence function を

$$\left.\begin{aligned}\bar{i}_N(\xi^*,\eta,\eta')=&\frac{\mu-\mu'}{2\sqrt{1+\mu^2}}\int_{-1}^{1}\lambda_N(\xi')d\xi'\\&\times\int_{0}^{v}e^{ip^*s}\Big\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\,Z(s,\mu,\mu')\\&-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\Big\}ds\\\bar{j}_N(\xi^*,\eta,\eta')=&-\frac{\mu^*\bar{c}(\mu-\mu')}{2\sqrt{1+\mu^2}}\\&\times\int_{-1}^{1}\lambda_N(\xi')\,T(\xi')\,e^{ip^*v}\\&\times\Big\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\,Z(v,\mu,\mu')\\&-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{v^2}\Big\}d\xi'\end{aligned}\right\} \tag{2.5.3}$$

のように定義すると，(2.4.15) は

$$\begin{aligned}\bar{w}_0=\tilde{w}_0&-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\int_{-1}^{1}\frac{d(\bar{c}\tilde{B}^{(N)})}{d\eta'}\frac{\bar{i}_N(\xi^*,\eta,\eta')}{\eta-\eta'}d\eta'\\&-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\int_{-1}^{1}\frac{\tilde{B}^{(N)}(\eta')\bar{j}_N(\xi^*,\eta,\eta')}{\eta-\eta'}d\eta'\end{aligned} \tag{2.5.4}$$

のように表わされる。

(2.5.3) を (2.3.3) と比較すると，(2.5.3) に e^{ip^*s} と $e^{-i2pm\pi/l}$ が余分に付いている外は全く同形である。$\bar{i}_N$, $\bar{j}_N$ の特異性は $m=0$ のところにあるので，e^{ip^*s} が付いていることによる違いだけを吟味すればよい。しかも特異性は s の小さいところに由来するので

$$e^{ip^*s}\simeq 1+ip^*s$$

として，s の小さいところを調べればよい。(2.3.5) を用いると

$$\begin{aligned}&\int_{0}^{v}e^{ip^*s}\Big\{\sum_{m=0}^{l-1}e^{-i2pm\pi/l}\,Z(s,\mu,\mu')-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\Big\}ds\\&\simeq\int_{0}^{v}(1+ip^*s)\Big\{\frac{\mu'-\mu}{s^2\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{s^2+Y'^2}}\\&\qquad-\frac{\mu}{2\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{s^2+Y'^2}}-\frac{\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)}{s^2}\Big\}ds\\&\simeq\Big\{\frac{\sqrt{1+\mu^2}\sqrt{v^2+Y'^2}}{v(\mu-\mu')}-\frac{\mathrm{sgn}(\mu-\mu')}{v}\\&\qquad+\frac{\mu}{2\sqrt{1+\mu^2}}\,\mathrm{sgn}\,v\,l_n\,Y'\Big\}\\&\quad-ip^*\,\mathrm{sgn}(\mu'-\mu)\Big\{l_n(Y'+\sqrt{v^2+Y'^2})-l_n\,2Y'\Big\}\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

である。この式の第2項の中括弧の中の第1項は特異性とならない。又第2項は積分の下限から出て来たも

ので，$\bar{w}_0$ の核の $(-\infty, 0)$ の区間の積分の上限から出る対数特異性と消し合うから，これも取上げる必要はない。したがって，数値計算では，$\mathring{i}_N$ の特異性は定常プロペラの i_N の特異性と全く同形として取扱ってよい。$\mathring{j}_N$, $\bar{w}_0$ の核関数についても同様に，その特異性は j_N および w_I のものと同形として処理してよい。以上により，積分方程式 (2.5.4) では対数補正の運算をしないでも，ほぼ満足な解が得られるものと推定される。

3. influence functionの不連続を除くこと

これまで用いて来た influence function は $\eta=\eta'$ で不連続になる。これは数値計算上の難点になるので，それを除くことを考えてみる。ここに示す方法では，断面吹上げのうち，2次元翼吹上げに該当するものを，揚力面全体の積分に変える操作によって目的を達している。

3.1. 定常直進揚力面

前報で，定常直進揚力面の積分方程式を

$$w=-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\left[\frac{k_N}{2}\oint_{-1}^{1}\frac{d(\bar{c}A^{(N)})/d\eta'}{\eta-\eta'}\,d\eta'+A^{(N)}(\eta)\oint_{-1}^{1}\frac{\lambda_N(\xi')}{\xi-\xi'}\,d\xi'\right]$$
$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\oint_{-1}^{1}\frac{d(\bar{c}A^{(N)})/d\eta'\,i_N(\xi^*,Y)}{\eta-\eta'}\,d\eta'$$
$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\oint_{-1}^{1}\frac{A^{(N)}(\eta')\lambda j_N(\xi^*,Y)}{\eta-\eta'}\,d\eta' \quad (3.1.1)$$

の様に書いた。ただし，第3項は本報告の附録に記載したものをとっている。そして

$$i_N(\xi^*,Y)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\lambda_N(\xi')}{\xi^*-\xi'}\left\{\sqrt{(\xi^*-\xi')^2+Y^2}-Y\right\}d\xi' \quad (3.1.2)$$

$$j_N(\xi^*,Y)=\frac{|\eta-\eta'|}{2}\int_{-1}^{1}\frac{T(\xi')\,\lambda_N(\xi')}{(\xi^*-\xi')^2}\times\left\{\frac{Y}{\sqrt{(*\xi-\xi')^2+Y^2}}-1\right\}d\xi' \quad (3.1.3)$$

である。

η が η' に重なったときの標点 ξ^* の ξ' 座標を $\hat{\xi}$ で表わすことにし，新たに influence function として

$$\mathring{i}_N(\xi^*,Y)=i_N(\xi^*,Y)+\frac{Y}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\lambda_N(\xi')}{\hat{\xi}-\xi'}d\xi' \quad (3.1.4)$$

$$\mathring{j}_N(\xi^*,Y)=\lambda j_N(\xi^*,Y)+\frac{Y}{2}\int_{-1}^{1}\frac{T(\xi')\,\lambda_N(\xi')}{(\hat{\xi}-\xi')^2}d\xi' \quad (3.1.5)$$

を定義する。これを (3.1.1) の第2項および第3項の i_N, λj_N と入れかえる。$\hat{\xi}$ は η' の関数であるから，influence function で新たに加わった項は(3.1.1) の第1項，大括弧内の第2項と消し合う。その演算は前報に詳しく書いたので，ここでは省略する。結局

$$w=-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\frac{k_N}{2}\oint_{-1}^{1}\frac{d(\bar{c}A^{(N)})/d\eta'}{\eta-\eta'}\,d\eta'$$
$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\oint_{-1}^{1}\frac{d(\bar{c}A^{(N)})/d\eta'\,\mathring{i}_N(\xi^*,Y)}{\eta-\eta'}\,d\eta'$$
$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\oint_{-1}^{1}\frac{A^{(N)}(\eta')\,\mathring{j}_N(\xi^*,Y)}{\eta-\eta'}\,d\eta' \quad (3.1.6)$$

となる。$\mathring{i}_N$, $\mathring{j}_N$ は $\eta=\eta'$ で連続である。

3.2. 非定常直進揚力面

吹上げおよび圧力差の代わりに (1.4.4) のパラメターを用いると，(1.4.3) は

$$w_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\bar{c}\bar{\gamma}_0\,d\xi'\boldsymbol{H}\int_{-\infty}^{f}\frac{e^{i\omega_0X'}}{X'^2}\,dX'$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\frac{\partial(\bar{c}\bar{\gamma}_0)}{\partial\eta'}\,d\xi'\times\int_{-\infty}^{f}\frac{e^{i\omega_0X'}}{X'^2}\left\{\frac{\eta-\eta'}{\sqrt{X'^2+(\eta-\eta')^2}}-\mathrm{sgn}(\eta-\eta')\right\}dX'$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}d\eta'\int_{-1}^{1}\frac{\lambda T(\xi')\bar{\gamma}_0}{(\xi^*-\xi')^2}e^{i\omega_0f}\times\left\{\frac{\lambda(\eta-\eta')}{\sqrt{(\xi^*-\xi')^2+\lambda^2(\eta-\eta')^2}}-\mathrm{sgn}(\eta-\eta')\right\}d\xi' \quad (3.2.1)$$

と書かれる。

$\bar{\gamma}_0$ を (2.5.1) の mode function で表わし，不連続点のない influence function を

$$\mathring{i}_N(\xi^*,Y)=-\frac{(\eta-\eta')}{2}\int_{-1}^{1}\lambda_N(\xi')d\xi'\times\left[\int_{-\infty}^{f}\frac{e^{i\omega_0X'}}{X'^2}\left\{\frac{\eta-\eta'}{\sqrt{X'^2+(\eta-\eta')^2}}-\mathrm{sgn}(\eta-\eta')\right\}dX'+\mathrm{sgn}(\eta-\eta')\int_{-\infty}^{\hat{f}}\frac{e^{i\omega_0X'}}{X'^2}\,dX'\right] \quad (3.2.2)$$

ただし，$\hat{f}=(\hat{\xi}-\xi')\bar{c}$

$$j_N(\xi^*, Y) = \frac{Y}{2}\int_{-1}^{1} \frac{T(\xi')\lambda_N(\xi')}{(\xi^* - \xi')^2} e^{i\omega_0 f} \times \left\{ \frac{Y}{\sqrt{(\xi^* - \xi')^2 + Y^2}} - 1 \right\} d\xi' + \frac{Y}{2} \boldsymbol{H} \int_{-1}^{1} \frac{T(\xi')\lambda_N(\xi') e^{i\omega_0 \hat{f}}}{(\hat{\xi} - \xi')^2} d\xi' \quad (3.2.3)$$

のように定義すると，(3.2.1) は

$$\bar{w}_0 = -\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R} \oint_{-1}^{1} \frac{d(\bar{c}\tilde{B}^{(N)})/d\eta' \, \dot{i}_N(\xi^*, Y)}{\eta - \eta'} d\eta' - \frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R} \oint_{-1}^{1} \frac{\tilde{B}^{(N)}(\eta') \, \dot{j}_N(\xi^*, Y)}{\eta - \eta'} d\eta' \quad (3.2.4)$$

のように表わされる。これが不連続点のない influence function で表わした非定常直進揚力面の積分方程式である。この場合，influence function で新たに加わった項の計算が少しめんどうになる。γ_0 を (2.5.1) で表わすより，むしろ $\gamma_0{}^*$ をそれで表わした方が influence function の数値計算は容易になるだろう。

プロペラの場合についても，同様に不連続点のない influence function による積分方程式を導くことができる。その演算は上記と殆んど同じであるから省略する。

結　言

翼端問題処理の目的はプロペラ翼面の圧力分布を正確に算出することである。定常直進翼の研究はその予備的なものであるが，とにかくそこで問題が解決したので[6]，本文では，その手法をプロペラ理論に適用したものを示した。数値計算の具体的方法は示してないが，定常翼の場合に適当とされる方法をそのまま本文に示す積分方程式に応用すればよいだろう。

新しい積分方程式は従来のものに比べると，数値計算がやりにくい。しかし，従来の式の対数特異性の難問は，新しい式ではかなり緩和されている。したがって，翼端問題を別にしても，一般の揚力面の積分方程式の解法の一つとして，この方程式を研究する意義は充分あるように思う。

参考文献

1) 花岡達郎，“揚力面の翼端条件と数値解法（その4　積分方程式の部分積分）船研報告　第15巻　第4号昭和53年

2) 花岡達郎，“揚力面の積分方程式の新しい数値解法”，船研報告　第6巻　第1号　昭和44年

3) Acum, W. E. A., ''Theory of Lifting Surfaces Oscillating at General Frequencies in a Subsonic Stream'', R & M No. 3557. 1959

4) Hanaoka, T., ''Hydrodynamics of an Oscillating Screw Propeller'', 4 th Symposium on Naval Hydrodynamics, Washington, 1962

5) 花岡達郎，“プロペラの基礎理論— Ⅲ(discrete loading function によるプロペラ揚力面の二つの解法)”，船研報告　第14巻　第6号　昭和52年

6) 花岡達郎，小山鴻一，“新しい方法による円形揚力面の数値計算”，日本航空宇宙学会第10回流体力学講演会前刷集　1978

7) 花岡達郎，“揚力面の翼端条件と数値解法(続)”，船研報告　第13巻　第1号　昭和51年

附録　前報の補遺

A. $J_N(\xi^*, Y)$ の特異性

前報では

$$J_N(\xi^*, Y)=\frac{\mathrm{sgn}(\eta-\eta')}{2}$$

$$\times \boldsymbol{H}\int_{-1}^{1} \Lambda_N(\xi')\frac{Y}{(\xi^*-\xi')^2\sqrt{(\xi^*-\xi')^2+Y^2}}d\xi' \tag{A.1}$$

が $\eta=\eta'$ に1位の極をもつことを見落としていた。それを補っておく。

$|\xi^*|<1$ とし，δ を充分小さくとると

$$J_N(\xi^*, Y)=\frac{\lambda(\eta-\eta')}{2}\left\{\int_{-1}^{\xi^*-\delta}\right.$$

$$\left.+\int_{\xi^*+\delta}^{1}\right\}\frac{\Lambda_N(\xi')}{(\xi^*-\xi')^2\sqrt{(\xi^*-\xi')^2+Y^2}}d\xi'$$

$$+\frac{\Lambda_N(\xi)}{\lambda(\eta-\eta')}\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{\epsilon}^{\delta}\left\{\frac{\sqrt{\xi^2+Y^2}}{\xi^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\sqrt{\xi^2+Y^2}}\right\}d\xi-\frac{Y}{\epsilon}\right]$$

$$+\frac{\lambda(\eta-\eta')\Lambda^{(2)}(\xi)}{2}\int_0^{\delta}\frac{d\xi}{\sqrt{\xi^2+Y^2}}+\cdots$$

である。$Y=0$ の近傍を考える。$\varepsilon\ll Y$, $\delta\gg Y$ と仮定すると

$$J_N(\xi^*, Y)\simeq-\frac{\Lambda_N(\xi)}{\lambda(\eta-\eta')}$$

$$-\frac{\lambda\Lambda_N{}^{(2)}(\xi)}{2}(\eta-\eta')l_n(\eta-\eta')+\cdots \tag{A.2}$$

である。即ち $J_N(\xi^*, Y)$ は $\eta=\eta'$ に1位の極がある。

よって，前報 (6.4) 式の j_N の代りに influence function を

$$j_N(\xi^*, Y)=\frac{Y}{2\sqrt{1-\eta'^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\mathscr{T}(\xi')\lambda_N(\xi')}{(\xi^*-\xi')^2}$$

$$\times\left\{\frac{Y}{\sqrt{(\xi^*-\xi')^2+Y^2}}-1\right\}d\xi' \tag{A.3}$$

と定義すると，(6.13) の w_2 は

$$w_2=-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\oint_{-1}^{1}\frac{A^{(N)}(\eta')\,j_N(\xi^*,Y)}{\eta-\eta'}d\eta' \tag{A.4}$$

のように特異性が分離され，数値計算に使える式になる。数値計算の式 (8.8) は改める必要がある。

$Y=0$ では (A.3) の $j_N(\xi^*, Y)$ は

$$j_N(\xi, 0)=-\frac{(\xi, \varphi)\lambda_N(\xi)}{\sqrt{1-\eta'^2}} \tag{A.5}$$

となるので，前報の (7.5) 式の計算は不必要になる。

B. w_2 の吹上げ

前報6節で $A^{(N)}(\eta=\pm 1)$ が有限値のとき吹上げが有限になることを説いているが，核関数の1位の極を示さないままの説明であるから，証明の形をなさない。

以下でそれを補っておく。

$\eta\to 1$ のとき

$$j_N(\xi^*, 0)\sqrt{1-\eta^2}A^{(N)}(\eta)$$

$$=-\mathscr{T}(\xi, 0)\lambda_N(\xi)A^{(N)}(\eta=1) \tag{B.1}$$

であるから，δ を充分小さくとると

$$w^2(\eta\to 1)=-\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\int_{-1}^{1-\delta}\frac{A^{(N)}(\eta')\,j_N(\xi^*,Y)}{\eta-\eta'}d\eta'$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{N=0}^{R}\frac{\mathscr{T}(\xi, 0)\,\lambda_N(\xi)A^{(N)}(\eta=1)}{\sqrt{2}}$$

$$\times\oint_{1-\delta}^{1}\frac{d\eta'}{(\eta-\eta')\sqrt{1-\eta'}} \tag{B.2}$$

のように表わされる。第1項は明らかに有限値であるから，そのままにして第2項についてだけ吟味を行う。

$1-\eta'=a'^2$,　$1-\eta=a^2$ と置くと

$$\oint_{1-\delta}^{1}\frac{d\eta'}{(\eta-\eta')\sqrt{1-\eta'}}=2\oint_0^{\sqrt{\delta}}\frac{da'}{a'^2-a^2}$$

$$=\frac{1}{a}\,l_n\frac{\sqrt{\delta}-a}{\sqrt{\delta}+a}$$

である。$a\to 0$ の極限値をとると

$$\lim_{\eta\to 1}\oint_{1-\delta}^{1}\frac{d\eta'}{(\eta-\eta')\sqrt{1-\eta'}}=\lim_{a\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}-a}-\frac{1}{\sqrt{\delta}+a}\right)$$

$$=\lim_{\eta\to 1}\frac{2\sqrt{1-\eta}}{\delta}=0 \tag{B.3}$$

となる。したがって，w_2 は翼端で有限値となる。

$\hat{w}$, w_1, w_2 何れも $A^{(N)}(\eta=\pm 1)$ を有限とすると，翼端の吹上げは有限値となる。$A^{(N)}$ のこの解は，文献7) の 1.1.2 節で示した Kinner の一般解と基本的に異なる形であることに特に注意する必要がある。