

楕円形送受音子における音響レスポンス

山田 一成*

Acoustic Response of an Elliptic Receiver to an Elliptic Source

By

Kazunari YAMADA

Abstract

Ultrasonic response of an elliptic receiver to an elliptic piston source surrounded by an infinite rigid baffle is given as the total acoustic pressure which is derived from the sum of the acoustic velocity potential on the surface of the receiver. Following conditions are necessary for the deduction of the result:

1. The surface of the receiver is similar to that of the source.
2. The surfaces have a common center axis and the long radius on the surface of the receiver is parallel to that of the source.
3. The velocity of the source is uniform over the surface and is sufficiently small.
4. The effect of multiple reflection is omitted.
5. The medium through which the signal propagates is uniform.

The result obtained here has a form of double integral representation.

When the distance is sufficiently small, the result is approximated with the "plane-wave response." For sufficiently large distance, the "spherical-wave approximation" is allowed for the formula.

Numerical calculations for the acoustic response versus distance between the source and receiver given for several cases.

Numerical calculations for the radiation impedance at an elliptic piston source are given for two cases.

1. まえがき

さきに、円形及び矩形の送受音子の音響レスポンス特性について報告した^{1), 11)}。今回は円形状を含む楕円形のピストン型送音子から放射される超音波中に、送音子と同形状で大きさの異なる受音子を配置し、これの受音面上の全音圧力で与えられた音響レスポンス特性について理論的に考察した。

一般に、送受音子の間隔が音波の波長よりも十分大きいときは近似的に遠距離音場が形成され、音響レス

ポンスの特性は送受音子間の距離に反比例し、送受音子の形状によらない。しかし、振動数の高い超音波を用いた超音波計測や、水中音響等の送受波器の校正実験では媒質による音波減衰が大きく、遠距離音場における受波信号が微弱となるため、送受音子間隔の狭い近距離音場領域で実験が行われている。従って送受音子形状の回折効果について実測値の補正を行うため、近距離音場における音響レスポンス特性を知る必要がある。

近距離音場の音響レスポンス特性は送受音子の形状や音波の波数の値によって複雑に変わる¹⁾。たとえばピストン型の送受音子でも理想的な平面波による音響レ

* 共通工学部

原稿受付 昭和58年3月1日

スポンズ特性を必ずしも示さない。

この音響レスポンス特性については円形送受音子の場合が最も研究されている。例えば、同じ大きさの送受音子の場合 Williams²⁾ は King の音響速度ポテンシャルから計算して一重積分の表示式を求め、更に波数の大きい所でこの展開式を与えている。Bass³⁾ はこの積分表示式²⁾ について展開条件の改良を図ったが、Bagers and Van Buren⁶⁾ は Rayleigh の音響速度ポテンシャルを積分するとき Fresnel の回折に近似条件を入れ、この回折積分を実行して Bessel 関数による級数で高近似の表示式を得ている。また Khimunin^{7), 8)} は Williams²⁾ の積分表示式について詳細に数値計算を行っている。そして、山田と藤井⁴⁾ は大きさの異なる送受音子系について、Rayleigh の音響速度ポテンシャルの積分から、一重の積分表示式を得たが、Williams⁵⁾ も King の音響速度ポテンシャルから同様な結果を算出し、これを収束性のよい無限級数で表わした近似式を導いている。後に Beissner¹⁰⁾ は同じ問題について積分領域の異なる別型の積分表示式を得て、両積分表示式を考察している。同様に矩形送受音子の音響レスポンス特性についても、山田¹¹⁾ と Arase^{14), 16)} 等により夫々別型の積分表示式が得られている。しかし楕円送受音子の音響レスポンスについては殆ど見当たらない。楕円形状は円形と矩形の中間的形状であることから音響レスポンス特性における送受音子の形状効果の追跡に最適な形状と思われる。また、実際に楕円形状の音源としては音響スピーカ等に見られる。

そこで、本文は楕円形送受音子についての音響レスポンスを前報と同様な手法で理論的に計算して、この特性を考察する共に、この計算手法から余り明らかでない楕円形ピストン音源の放射インピーダンスも取扱うことにした。

ここで使用した記号を列記する。

$k=k_0-j\alpha$: 複素波数
λ	: 波長
k_0	: 波数 ($2\pi/\lambda$)
α	: 媒質中の吸収係数
ρ	: 媒質の密度
$V\exp(j\omega t)$: 音源の振動速度
ω	: 角振動数
c	: 媒質中の音速
dS_1	: 送音子の振動面の微分面積
dS_2	: 受音子の受音面の微分面積

$(x_1, y_1, 0)$: dS_1 の座標
(x_2, y_2, z)	: dS_2 の座標
Pe	: dS_2 における有効音圧
ϕ	: dS_2 における音響速度ポテンシャル
r	: dS_1 から dS_2 までの距離
R^2	: $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$
z	: 送音子と受音子の間隔
γ^2	: 受音子の受音面と送音子の振動面との面積比
$2a$: 送音子の楕円振動面の長径
e	: 楕円形送受音子の振動面と受音面における短径と長径の比

$$S = \left(\frac{\lambda}{a}\right) \left(\frac{z}{a}\right) : \text{正規化した送受音子間隔}$$

$$L = \int_{S_2} Pe dS_2 : \text{音響レスポンス}$$

$$\bar{L} = L / (\pi \gamma^2 a^2 e) / \left(\rho \frac{\omega}{k}\right) / V e^{j(\omega t - \frac{(ka)^2}{2\pi} S)}$$

: 正規化した音響レスポンス

Z : 楕円形ピストン音源の放射インピーダンス

$\bar{Z} = Z / (\pi a^2 e) / (\rho c)$: 正規化した楕円形ピストン音源の放射インピーダンス

P_S : 軸上の音圧

2. 楕円形送受音子の音響レスポンスの計算

Fig. 1 の様に置かれたピストン型の楕円形（円形も含む）送受音子の音響レスポンスを取扱うが、その詳細は次の通りである。

1. 送音子は楕円形の振動面をもつピストン音源であり、その振動面は無限大剛平壁で囲まれ、その面は一樣な振動速度で振動し、かつ振動振幅は十分小さいものとする。

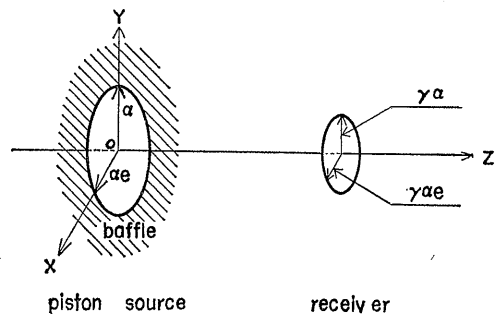


Fig. 1 Arrangement of an elliptic piston source and an elliptic receiver.

2. 受音子の受音面は送音子の振動面と相似形であって、両面は常に平行になっていて、夫々の面中心を通る共通の軸を持ち、かつ両楕円面の長径は同じ方向を向いている。
3. 送受音子間の多重反射については短いパルス状の音波を用いることで多重反射の影響を取除くことが可能であるため、ここでは考慮しない。
4. 音波の伝搬媒質は均一であるが、音波の吸収は存在する。しかしこの吸収には緩和現象を伴わないことにする。

以上の点はこの種の問題を解析するに当って普通用いられるもので特に新しいものはない。

従って、楕円形送受音子の音響レスポンスは、受音子の受音面上における任意の点の有効音圧 P_e をこの面上で積分した全音圧力^{註1}となる。これを Rayleigh の音響速度ポテンシャル $\phi^{(3)}$ を用いて書けば

$$L \equiv \int_{S_2} P_e dS_2 = \rho \int_{S_2} \frac{\partial \phi}{\partial t} dS_2 \quad (1)$$

$$\phi = \frac{V e^{j\omega t}}{2\pi} \int_{S_1} \exp(-jkr) / r dS_1 \quad (2)$$

から

$$L = \frac{j\rho\omega}{2\pi} V e^{j\omega t} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{\exp(-jkr)}{r} dS_1 dS_2 \quad (3)$$

が得られ、(3)式の被積分関数を Hankel 関数第2種の $H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$ で置換えると、

$$L = \frac{\rho\omega k V e^{j\omega t}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{S_1} \int_{S_2} (kr)^{-\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) dS_1 dS_2 \quad (4)$$

となる。以下 $H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$ を単に $H_{\frac{1}{2}}(kr)$ と書くことにする。

この被積分関数は Lommel の関係式¹²⁾ で無限級数和に展開できる。すなわち

$$\begin{aligned} (kr)^{-\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{2}}(kr) &= (k\sqrt{R^2+z^2})^{-\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{2}}(k\sqrt{R^2+z^2}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k^2)^n R^{2n} H_{n+\frac{1}{2}}(kz)}{2^n n! (kz)^{n+\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (5)$$

(5)式を(4)式に代入し $\iint dS_1 dS_2$ と $\sum_{n=0}^{\infty}$ を入換えれば

$$\begin{aligned} L &= \frac{\rho\omega V e^{j\omega t}}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{2n+1} H_{n+\frac{1}{2}}(kz)}{2^n n! (kz)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &\quad \times \int_{S_2} \int_{S_1} R^{2n} dS_1 dS_2 \end{aligned} \quad (6)$$

註1 文献によっては、受音面上の全音圧力を受音面の面積で割った平均音圧で取扱っているものもある。

となり、(6)式中の積分を以下 J_{2n} と書く。ここで Fig. 1 の楕円形送受音面で J_{2n} を計算するときには次の変数変換を行う。

$$\begin{aligned} x_q &= r_q(Z_q + Z_q^{-1})/2, \quad y_q = er_q(Z_q - Z_q^{-1})/2j, \\ q &= 1, 2 \end{aligned} \quad (7)$$

(7)式を R^{2n} に代入し、二項定理で Z_1, Z_2 の多項式に展開すると、

$$\begin{aligned} J_{2n} &= -e^{2j} \int_0^a \int_0^a \oint_{Z_1} \oint_{Z_2} \sum_{m=0}^n n C_m \sum_{m'=0}^n n C_{m'} \\ &\quad \left(\frac{1+e}{2}\right)^{n+m-m'} \left(\frac{1-e}{2}\right)^{n-m+m'} \\ &\quad \times \sum_{l=0}^{m+m'} \sum_{l'=0}^{2n-m-m'} m+m' C_l {}_{2n-m-m'} C_{l'} r_1^{l+l'+1} \\ &\quad r_2^{2n-l-l'+1} \\ &\quad \times Z_1^{l-l'-1} Z_2^{2n-2(m+m')+l+l'-1} dZ_2 dZ_1 dr_1 dr_2 \end{aligned} \quad (8)$$

となる。そして Z_1 及び Z_2 の積分路は夫々複素平面 Z_1, Z_2 の原点に関する単一定積分である。

ここで Residues の定理により

$$l-l'=0, \quad m+m'-n=0 \quad (9)$$

が得られ r_1 と r_2 に関する積分を実行すれば

(8)式の J_{2n} は

$$\begin{aligned} J_{2n} &= \pi^2 e^{2j} \sum_{m=0}^n (n C_m)^2 \left(\frac{1+e}{2}\right)^{2n-2m} \left(\frac{1-e}{2}\right)^{2m} \\ &\quad \times \sum_{l=0}^n n_{+1} C_{l+n+1} C_{l+1} \gamma^{2l+2} - \frac{a^{2n+4}}{(n+1)^2} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。(10)式中では

$$(n C_l)^2 (l+1)(n-l+1) = n_{+1} C_l \cdot n_{+1} C_{l+1} / (n+1)^2 \quad (11)$$

の関係が使われている。

この(10)式を(6)式に代入して得られる音響レスポンスは二つの二重無限級数和の積として与えられるので実際の計算は甚だ取扱いにくい。

このため(10)式中の m 及び l についての級数和を Residues の定理と二項定理によって、夫々積分表示式に変換することにした。

(10)式の m に関する紙数和は次式の単一定積分すなわち

$$\begin{aligned} &\int_u \left\{ \left(\frac{1+e}{2}\right) + \left(\frac{1-e}{2}\right) u \right\}^n \left\{ \left(\frac{1+e}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1-e}{2}\right) / u \right\}^n \frac{du}{u} \end{aligned}$$

$$= 2\pi j \sum_{m=0}^n (nC_m)^2 \left(\frac{1+e}{2}\right)^{2n-2m} \left(\frac{1-e}{2}\right)^{2m} \quad (12)$$

で $u=e^{j\xi}$ と置けば

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^n (nC_m)^2 \left(\frac{1+e}{2}\right)^{2n-2m} \left(\frac{1-e}{2}\right)^{2m} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi \right\}^n d\xi \quad (13) \end{aligned}$$

が得られる。また(10式の l に関する無限級数和も同様に次式の単一定積分から求めることができる。すなわち

$$\begin{aligned} & \int_u (1+\gamma u)^{n+1} (1+\gamma/u)^{n+1} du \\ &= 2\pi j \sum_{l=0}^n n_{+1} C_l \cdot n_{+1} C_{l+1} \gamma^{2l+1} \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{\rho\omega}{k}\right) (\pi\gamma^2 a^2 e) (V e^{j\omega t}) \left(\frac{e}{2\pi^2}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times (-1) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left\{ -a^2 k^2 (1+2\gamma \cos \eta + \gamma^2) \left(\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi \right) \right\}^{n+1} H_{n+1-\frac{1}{2}}(kz)}{2^{n+1} (n+1)! (kz)^{n+1-\frac{1}{2}}} \\ & \times \frac{\sin^2 \eta d\eta d\xi}{(1+2\gamma \cos \eta + \gamma^2) \left(\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi \right)} \quad (17) \end{aligned}$$

が得られる。ここで、この無限級数和を Lommel の関係式を用いて書換えると

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{\rho\omega}{k}\right) (\pi\gamma^2 a^2 e) (V e^{j\omega t}) \left(\frac{e}{2\pi^2}\right) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ & \times \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[(kz)^{\frac{1}{2}} H_{-\frac{1}{2}}(kz) - \left(k\sqrt{a^2 (1+2\gamma \cos \eta + \gamma^2) \left(\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi \right) + z^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. \times H_{-\frac{1}{2}} \left(k\sqrt{a^2 (1+2\gamma \cos \eta + \gamma^2) \left(\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi \right) + z^2} \right) \right] \frac{\sin^2 \eta d\eta d\xi}{(1+2\gamma \cos \eta + \gamma^2) \left(\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi \right)} \quad (18) \end{aligned}$$

となり、(18式の第1項の積分は計算されて

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \eta d\eta d\xi}{(1+2\gamma \cos \eta + \gamma^2) \left(\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi \right)} \\ &= \frac{2\pi^2 \varepsilon(\gamma)}{e} \quad (19) \end{aligned}$$

ここで(14式の両辺に γ を掛けて $u=e^{j\eta}$ と置けば

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^n n_{+1} C_l \cdot n_{+1} C_{l+1} \gamma^{2l+1} \\ &= \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1+2\gamma \cos \eta + \gamma^2)^{n+1} (\cos \eta - j \sin \eta) d\eta \quad (15) \end{aligned}$$

となり、(15式の右辺で部分積分を行えば

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^n n_{+1} C_l \cdot n_{+1} C_{l+1} \gamma^{2l+2} \\ &= \frac{\gamma^2 (n+1)}{\pi} \int_0^{2\pi} (1+2\gamma \cos \eta + \gamma^2)^n \sin^2 \eta d\eta \quad (16) \end{aligned}$$

となる。尚、虚数部は零である。

(6式に(13式と(16式を代入すると

ただし

$$\varepsilon(\gamma) = \begin{cases} 1 & \gamma \leq 1 \\ 1/\gamma^2 & \gamma \geq 1 \end{cases} \quad (20)$$

である。次に(18式中の Hankel の関数を指数関数で置換えると(21式が与えられ、

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{\rho\omega}{k}\right) (\pi\gamma^2 a^2 e) (V e^{j\omega t}) \\ & \times \left[\varepsilon(\gamma) \exp(-jkz) - \frac{e}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(-jk\sqrt{a^2 (1+2\gamma \cos \eta + \gamma^2) \left(\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi \right) + z^2} \right) \right. \\ & \left. \times \frac{\sin^2 \eta d\eta d\xi}{(1+2\gamma \cos \eta + \gamma^2) \left(\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi \right)} \right] \quad (21) \end{aligned}$$

ここで送受音子の間隔を

$$S = \left(\frac{\lambda}{a}\right) \left(\frac{z}{a}\right) \quad (22)$$

$$L = \left(\frac{\rho\omega}{k}\right) (\pi\gamma^2 a^2 e) \left(V \exp\left(j\left(\omega t - \frac{(ak)^2}{2\pi} S\right)\right) \right) \\ \times \left[\varepsilon(\gamma) - \frac{e}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(j\frac{(ak)^2}{2\pi} S - jak\sqrt{(1+2\gamma\cos\eta+\gamma^2)\left(\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right)\cos\xi\right) + \left(\frac{ak}{2\pi}\right)^2 S^2}\right) d\eta d\xi \right] \\ \times \frac{\sin^2\eta d\eta d\xi}{(1+2\gamma\cos\eta+\gamma^2)\left(\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right)\cos\xi\right)} \quad (23)$$

が最終的に導びかれる。従って楕円形送受音子の音響レスポンスは送受音子の形状に関する γ と e の他、音波の波数と楕円形の放射面の長半径による ak と、送受音子間の距離 S の4変数で定まることが示された。

3. 特別な場合の音響レスポンス

3.1 遠距離音場の音響レスポンス

送音子と受音子が十分離れている場合の音響レスポンスは、(10)式を(6)式に代入して Hankel 関数を指数関数に置換え、結果を整理すると

$$L = \left(\frac{\rho\omega}{k}\right) (\pi\gamma^2 a^2 e) (\pi a^2 e) \frac{V \exp\left(j\omega t - jkz + j\frac{\pi}{2}\right)}{z} \\ \times \left[1 - j \frac{a^2 k (1+\gamma^2)(1+e^2)}{8z} - \frac{a^2}{z^2} \left\{ \frac{(1+e^2)(1+\gamma^2)}{8} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(ak)^2}{19z} (3+2e^2+3e^4)(2+\gamma^2)(1+2\gamma^2) \right\} + \dots \right] \quad (24)$$

が得られ、送受音子間隔 z が

$z \gg a^2 k (1+\gamma^2)(1+e^2)/8 \equiv Z_0$ であれば(24)式中の [] は1の値に近付き、この場合の音響レスポンスは送受音子間隔に反比例し、送音子の振動面と受音子の受音面の各面積に比例することがわかる。またこのレスポンスで球面波領域の開始点 Z_0 について、 $2a$ と $2ae$ の二辺とする短形送受音子の音響レスポンス¹¹⁾ におけ

$$P_S = \left(\frac{\rho\omega}{k}\right) (V e^{j\omega t}) \left[\exp(-jkz) - \frac{e}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{a^2\left\{\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right)\cos\xi\right\} + z^2}\right)}{\left\{\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right)\cos\xi\right\}} d\xi \right] \quad (25)$$

が得られる。更に $e=1$ とすれば

$$P_S = \left(\frac{\rho\omega}{k}\right) (V e^{j\omega t}) \\ \times [\exp(-jkz) - \exp(-jk\sqrt{a^2+z^2})] \quad (26)$$

となり、周知の円形ピストン音源に対する軸上音圧式

で正規化して、(21)式の第一項の平面波に関する部分を前に出すと、

る $Z'_0 = k(1+\gamma^2)(a^2+(ea)^2)/6$ と比較すれば分母の係数に違いが顕われている。

3.2 円形送受音子の音響レスポンス

円形送受音子の音響レスポンスは(21)式で $e=1$ と置けば

$$L = \left(\frac{\rho\omega}{k}\right) (\pi\gamma^2 a^2) (V e^{j\omega t}) \left[\varepsilon(\gamma) \exp(-jkz) \right. \\ \left. - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-jk\sqrt{a^2(1+2\gamma\cos\eta+\gamma^2)+z^2}) \right. \\ \left. \times \frac{\sin^2\eta d\eta}{(1+2\gamma\cos\eta+\gamma^2)} \right] \quad (25)$$

となり、これは以前発表⁴⁾ した半径の異なる円形送・受音子の場合と同じであり、更に送・受音子の大きさが同じ場合では $\gamma=1$ と置けば

$$L = \left(\frac{\rho\omega}{k}\right) (\pi a^2) (V e^{j\omega t}) \left[\exp(-jkz) \right. \\ \left. - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-jk\sqrt{a^2\cos^2\beta+z^2}) \sin^2\beta d\beta \right] \quad (26)$$

となって、(26)式は Williams²⁾ の(17)式の積分表示式と一致する。

3.3 楕円ピストン音源の軸上音圧

楕円ピストン音源による音場の軸上音圧 P_s は(21)式の音響レスポンスで

$$P_S = \lim_{\gamma \rightarrow 0} L / (\pi\gamma^2 a^2 e) \quad (27)$$

と置けば

$$P_S = \left(\frac{\rho\omega}{k}\right) (V e^{j\omega t}) \left[\exp(-jkz) - \frac{e}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{a^2\left\{\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right)\cos\xi\right\} + z^2}\right)}{\left\{\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right)\cos\xi\right\}} d\xi \right] \quad (28)$$

になる。

4. 楕円形ピストン音源の放射インピーダンス

(21)式で $\gamma=1$, $z=0$ と置けば(21)式は音源の振動面における全音圧力であり、この全音圧力は音源を振動さ

せる力に等しく、これを振動面の振動速度で割れば楕円形ピストン音源における放射インピーダンス Z が求められる。

$$Z = (\pi a^2 e) (\rho \omega / k) \times \left[1 - \frac{e}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-j2ak \left| \cos \frac{\eta}{2} \right| \sqrt{\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi}) \frac{\sin^2 \frac{\eta}{2} d\eta d\xi}{\left\{ \left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi \right\}} \right] \quad (30)$$

ここで、 η について積分を実行すると③1が得られる。

$$Z = (\pi a^2 e) (\rho \omega / k) \times \left[1 - \frac{e}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{J_1 \left(2ak \sqrt{\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi} \right)}{\left(2ak \sqrt{\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi} \right)} - j \frac{H_1 \left(2ak \sqrt{\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi} \right)}{\left(2ak \sqrt{\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi} \right)} \right\} \times \frac{d\xi}{\left(\left(\frac{1+e^2}{2}\right) + \left(\frac{1-e^2}{2}\right) \cos \xi \right)} \right] \quad (31)$$

この J_1 と H_1 は一次の Bessel 関数及び Struve¹⁷⁾ 関数である。

更に $e=1$ と置いて③1式の積分を行えば、周知の円形ピストンの放射インピーダンスになる。

また、 ka が小さい場合には③0式の被積分関数を展開すれば

$$Z = (\pi a^2 e) \left(\rho \frac{\omega}{k} \right) \times \left[1 - \frac{e}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2ak)^{2m}}{(2m)!} \times \left(\left(\frac{1+e^2}{2} \right) + \left(\frac{1-e^2}{2} \right) \cos \xi \right)^{m-1} \left| \cos^{2m} \frac{\eta}{2} \right| - j \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2ak)^{2m+1}}{(2m+1)!} \times \left(\left(\frac{1+e^2}{2} \right) + \left(\frac{1-e^2}{2} \right) \cos \xi \right)^{m-\frac{1}{2}} \left| \cos^{2m+1} \frac{\eta}{2} \right| \right\} \times \sin^2 \frac{\eta}{2} d\eta d\xi \right] \quad (32)$$

であり、ここで $m=2$ まで採って、 η と ξ について積分可能なものを実行して整理すると

$$Z = (\pi a^2 e) \left(\rho \frac{\omega}{k} \right) \left[\left\{ \frac{(ak)^2 e}{2} - \frac{(ak)^4 (1+e^2) e}{8} \dots \right\} + i \left\{ \frac{16(ak)e}{3\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2 \varphi}} - \frac{64(ak)^3 e}{45\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(1-e^2)\sin^2 \varphi} d\varphi \right\} \dots \right] \quad (33)$$

が得られる。

なお③3式中の積分は夫々第一種と第二種の完全楕円積分になる。

5. 数値計算例と考察

数値計算例は楕円形送受音子の音響レスポンスと楕円形ピストン音源の放射インピーダンスについて行っている。

音響レスポンスの特性は送受音子の間隔に対する値を②1式又は②2式で計算して図示する。

各図の縦軸における音響レスポンスの値は受音子の受音面積 $\pi \gamma^2 a^2 e$ 、媒質の特性インピーダンス $\rho \omega / k$ 、音源の振動速度 $V \exp(j\omega t)$ 、及び平面波の $\exp(-jkz)$ 又は $\exp(-j(ak)^2 / 2\pi \cdot S)$ の夫々で割り、これの絶対値を採って正規化する。また横軸の送受音子の間隔についても特に断らないかぎり $S = (\lambda/a)(z/a)$ で正規化を行う。そして図中の黒丸印は②4式の [] 内の第2項迄と②2式から得られた $\pi(1+\gamma^2)(1+e^2)/4 \equiv S_0$ 又は $a^2 k_0 (1+\gamma^2)(1+e^2)/8 \equiv Z_0$ の値であり、この値は既に3.1で述べた様に音響レスポンスが送受音子の間隔 z に反比例する球面波領域の開始点である。

Fig. 2 と Fig. 3 は送・受音子が同じ形状であるが大きさの異なる場合、すなわち $\gamma=0.5, 1.0, 2.0$ と変えたときの音響レスポンス特性で、前者は送音子の形状が円形 ($e=1$) で、後者は楕円形 ($e=1/\sqrt{2}$) である。また他の変数は $ak_0=12.5$ と媒質中に音波吸収のときの $\alpha_2=0.0$ neper の値を用いている。両図の音響レスポンス特性から、送受音子の間隔 S が S_0 の値よりも大きい所では、この間隔に反比例する球面波領域を示している。また S_0 以下では音響レスポンスの値はほぼ一定となり平面波領域と見なすことができる。この平面波領域は受音面が音源の振動面よりも大きくなると、 $1+\gamma^2$ に比例して拡がる。そして両図で音響レスポンス特性上の揺らぎを比較すると、Fig. 3 の楕円形送受音子の方が Fig. 2 の円形送受音子の場合よりも少くないことがわかる。

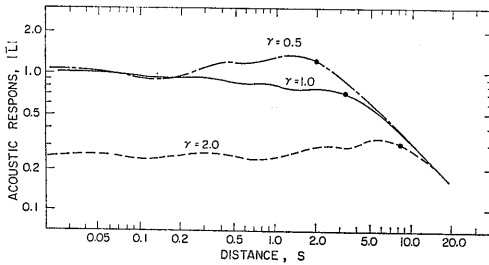


Fig. 2 Acoustic response divided by the product of the receiving area, the acoustic impedance of the medium, the velocity of the source, and $\exp(-jk_0z - \alpha z)$, $|L|$ which is written as the normalized acoustic response, vs. normalized distance. Curves are corresponding to the cases of the circular source and receiver at $k_0a = 12.5$, $\alpha_\lambda = 0.0$ neper, and $e = 1.0$. The round marks are values corresponding to $\pi(1+\gamma^2)(1+e^2)/4$.

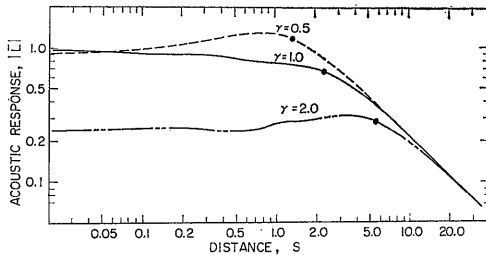


Fig. 3 Normalized acoustic response, $|L|$, vs. normalized distance. Curves are corresponding to the cases of the elliptic source and receiver at $k_0a = 12.5$, $\alpha_\lambda = 0.0$ neper, and $e = 1/\sqrt{2}$. The round marks are values corresponding to $\pi(1+\gamma^2)(1+e^2)/4$.

Fig. 4 は $ak_0 = 2.5$, $\alpha_\lambda = 0.0$ neper で円形送受音子の場合 ($e=1$) である。この音響レスポンス特性の様子は Fig. 2 の $k_0a = 12.5$ の場合と殆ど同じ傾向で Fig. 4 と Fig. 2 の波数比だけ間隔 z の平面波領域は狭くなる。また、受音子が送音子よりも小さい ($\gamma < 1$) 場合で、送受音子の間隔 S が狭い所の音響レスポンスの値は 1 よりも大きくなっているが、この極限值は 2 式の軸上音圧の振幅特性の値 2 に近づく。

Fig. 5 は $ak_0 = 12.5$, $\alpha_\lambda = 0.0$ neper で送受音子の

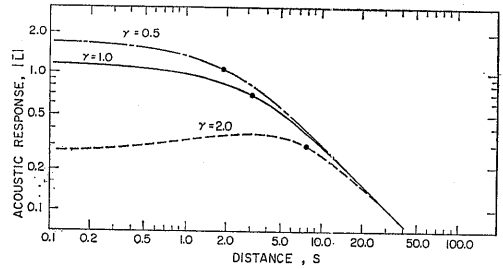


Fig. 4 Normalized acoustic response, $|L|$, vs. normalized distance. Curves are corresponding to the cases of the circular source and receiver at $k_0a = 2.5$, $\alpha_\lambda = 0.0$ neper, and $e = 0.1$. The round marks are values corresponding to $\pi(1+\gamma^2)(1+e^2)/4$.

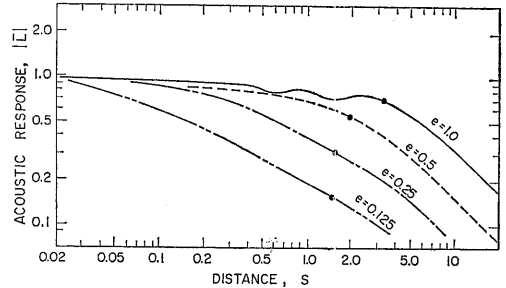


Fig. 5 Normalized acoustic response, $|L|$, vs. normalized distance. Curves are corresponding to the cases of the elliptic source and receiver at $k_0a = 12.5$, $\alpha_\lambda = 0.0$ neper, and $\gamma = 1.0$. The round marks are values corresponding to $\pi(1+\gamma^2)(1+e^2)/4$.

楕円形状変数 e を 1.0, 0.5, 0.25 と変え、送・受音子の大きさを同じ ($\gamma=1$) とした場合の音響レスポンス特性である。

Fig. 6 は $ak_0 = 12.5$, $\alpha_\lambda = 0.0$ neper, $\gamma=1$ で受音子の受音面積 $\pi\gamma^2a^2e$ を 19.63cm^2 と一定にし、楕円の形状変数 e を 1.0, 0.5, 0.25 とした場合の音響レスポンス特性である。なお、Fig. 6 では横軸の送受音子間隔 z を正規化しないで直接記入している。

Fig. 5 と Fig. 6 の音響レスポンス特性からは楕円形送受音子の形状が長楕円になる程、平面波領域と球面波領域の境で送受音子間隔の $1/2$ 乗に反比例する円筒波の特性を示す領域が現われてくる。

Fig. 7 は楕円形送受音子の音響レスポンス特性と矩形送受音子の音響レスポンス特性を比較したもので

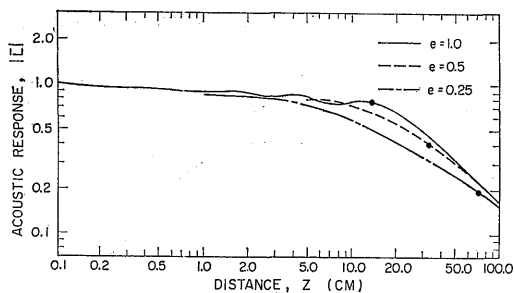


Fig. 6 Normalized acoustic response, $|L|$, vs. distance. Curves are corresponding to the cases of the elliptic source and receiver at $k_0=5.0\text{cm}^{-1}$, $\alpha_2=0.0$ neper, $\gamma=1.0$, $\pi a^2 e=19.63\text{cm}^2$, when the receiving area is a constant. The round marks are values corresponding to $ka^2(1+\gamma^2)(1+e^2)/8$.

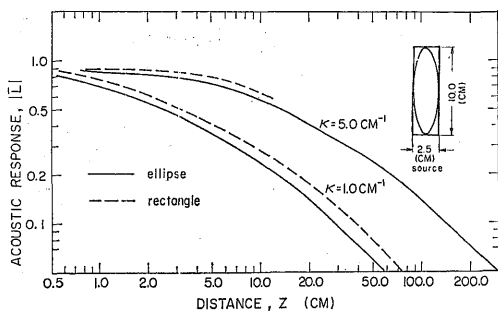


Fig. 7 Normalized acoustic response, $|L|$, vs. distance. Curves in a full line are corresponding to the cases of the elliptic source and receiver at $\alpha_2=0.0$ neper, $2a=10\text{cm}$, $2ae=2.5\text{cm}$, and $\gamma=1.0$. Curves in a dashed line are corresponding to the cases of the rectangular at $\alpha_2=0.0$ neper, $\gamma=1.0$, $2A=10\text{cm}$, and $2B=2.5\text{cm}$. $2A$ and $2B$ are lengths of the sides of the rectangular source and receiver.

ある。矩形及び楕円形の送音子形状は Fig. 7 の右上に示した通りであり、矩形の二辺の比は $1/4$ で楕円形はこの矩形に内接する形状とする。そして受音子の形状は夫々送音子のそれと同じ大きさである。

媒質は音波吸収がなく $\alpha_2=0.0$ neper で波数 k_0 の値は 5.0cm^{-1} と 1.0cm^{-1} の二例について計算を行っている。両者の音響レスポンス特性では受音子の受音面積の違いで矩形送受音子の方が楕円形送受音子の場

(230)

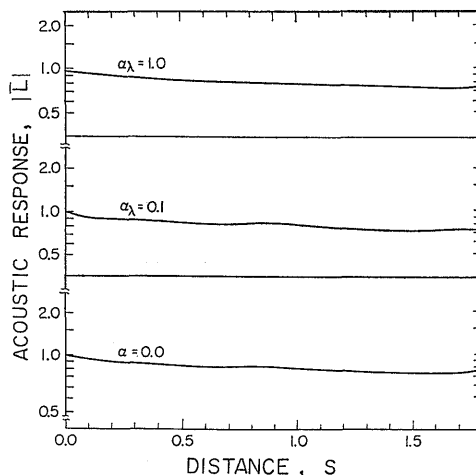


Fig. 8 Normalized acoustic response, $|L|$, normalized distance. Curves correspond to three different cases of $\alpha_2=1.0, 0.1, 0.0$ neper at $\gamma=1.0$, and $e=1.0$.

合よりも広い平面波領域を示している。しかしこの点を除けば両者の特性はほぼ同じ傾向をもつことが示された。

Fig. 8 は $ak_0=12.5$, $\gamma=1$, $e=1$ における音響レスポンス特性で、媒質中の音波吸収による依存性を示したものである。Fig. 8 の各図は上から吸収係数 α_2 に 1.0, 0.1, 0.0 neper の値を夫々用いている。

Fig. 8 中の一連の図から、吸収係数まで含めて正規化した音響レスポンス特性は、媒質中の音波吸収係数が 1.0 以下の場合余り影響されない。そして、正規化した送受音子間隔 S の 0 から 1.8 までの区間ではほぼ平面波近似が成り立つことがわかる。したがってこの区間で送受音子の回折効果による平均損失を Fig. 8 から読取ると約 0.159 neper/S であり、これを 1 波長の損失に書換えれば $0.159 \times \left(\frac{2\pi}{ak_0}\right)^2 \approx 0.04$ neper となって、実測した吸収係数値を補正することが可能である。

次は、音響レスポンスにおける位相特性を調べるため、音響レスポンスの変動位相角 φ (度) は式(23)中で平面波による位相変化分を除いた [] 内の複素数値の偏角とする。

Fig. 9 はこの変動位相角 φ と送受音子の間隔 S の関係を示したもので、この計算条件は Fig. 8 の場合と同じ値、すなわち $ak_0=12.5$, $\gamma=1.0$, $e=1.0$ であ

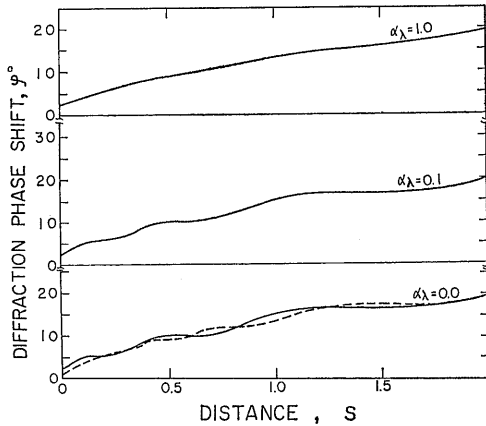


Fig. 9 Diffraction phase shift defined as the argument in the complex normalized acoustic response vs. normalized distance. Curves correspond to three different cases of $\alpha_\lambda = 1.0, 0.1, 0.0$ neper at $\gamma = 1.0$, and $e = 1.0$. Full lines $k_0 a = 12.5$. Dashed lines $k_0 a = 25.0$.

る。また Fig. 9 の各図は上から媒質中の吸収係数 α_λ に 1.0, 0.1, 0.0 neper の値を用いている。そして $\alpha_\lambda = 0.0$ neper の図中の点線は $ak_0 = 25.0$ の場合であり、他の $\alpha_\lambda = 1.0, 0.1$ neper ときは殆ど実線 $ak_0 = 12.5$ の曲線と重なるため省略している。図中の変動位相角 φ の特性は送受音子間隔 S の増加に伴っ

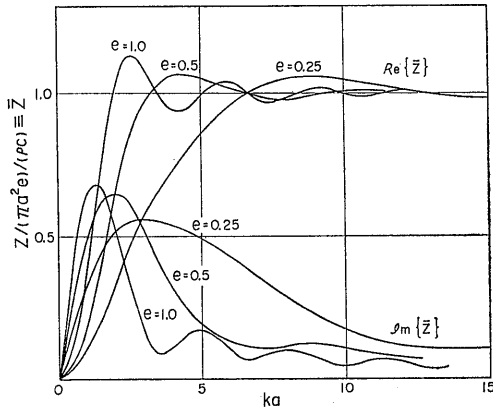


Fig. 10 Radiation impedance divided by the product of the radiation area, the acoustic impedance of the medium vs. ka . Curves are corresponding to the cases of the elliptic piston source at $e = 1.0, 0.5, 0.25$ respectively.

Table 1 Radiation impedance at the circular piston source for a set of parameter values e .

$e = 1.0$			
ka	Real $Re(Z)$	Imaginary $Im(Z)$	Absolute $ Z $
+0.000	+0.000	+0.000	+0.000
+0.500	+0.120	+0.397	+0.415
+1.000	+0.423	+0.647	+0.775
+1.500	+0.774	+0.680	+1.030
+2.000	+1.033	+0.535	+1.163
+2.500	+1.131	+0.323	+1.176
+3.000	+1.092	+0.160	+1.104
+3.500	+1.001	+0.099	+1.006
+4.000	+0.941	+0.122	+0.949
+4.500	+0.945	+0.167	+0.960
+5.000	+0.991	+0.179	+1.007
+5.500	+1.032	+0.147	+1.043
+6.000	+1.037	+0.098	+1.042
+6.500	+1.011	+0.067	+1.013
+7.000	+0.981	+0.068	+0.983
+7.500	+0.973	+0.088	+0.977
+8.000	+0.989	+0.102	+0.994
+8.500	+1.011	+0.095	+1.016
+9.000	+1.021	+0.072	+1.023
+9.500	+1.011	+0.052	+0.994
+10.000	+0.993	+0.047	+0.994
+10.500	+0.984	+0.058	+0.985
+11.000	+0.989	+0.069	+0.992
+11.500	+1.003	+0.070	+1.006
+12.000	+1.013	+0.058	+1.014
+12.500	+1.010	+0.043	+1.011
+13.000	+0.999	+0.037	+1.000
+13.500	+0.990	+0.042	+0.991

て 90° の値に近付くものであるが、この変動位相角の特性に現われる揺らぎは媒質中における音の吸収が大きくなるに従って小さくなる傾向を示している。この揺らぎ点を除けば変動位相角の特性は余り媒質の吸収係数に影響されないことがわかる。従って Fig. 9 の特性から音速測定で用いる送受音子間隔 ΔS に対する変動位相角 $\Delta\varphi$ を得れば、送受音子系の回折効果による音速変動分 Δc を Khimunin^{8),9)} の関係式 $\Delta c/c = \frac{1}{90} \left(\frac{\pi}{ak_0} \right)^2 \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta S} \right)$ で算出することができる。

Fig. 10 と Table 1~3 は ak の値に対して、円形 ($e = 1.0$) 及び楕円形 ($e = 0.5, 0.25$) のピストン音

Table 2 Radiation impedance at the elliptic piston source of a set of parameter values e .

$e=0.5$			
ka	Real $Re(Z)$	Imaginary $Im(Z)$	Absolute $ Z $
+0.000	+0.000	+0.000	+0.000
+0.500	+0.061	+0.281	+0.287
+1.000	+0.225	+0.502	+0.550
+1.500	+0.447	+0.626	+0.769
+2.000	+0.671	+0.648	+0.933
+2.500	+0.852	+0.592	+1.037
+3.000	+0.972	+0.495	+1.091
+3.500	+1.033	+0.394	+1.106
+4.000	+1.055	+0.308	+1.100
+4.500	+1.056	+0.244	+1.084
+5.000	+0.048	+0.196	+1.066
+5.500	+1.036	+0.160	+1.048
+6.000	+1.019	+0.134	+1.028
+6.500	+1.000	+0.119	+1.007
+7.000	+0.984	+0.115	+0.991
+7.500	+0.975	+0.119	+0.982
+8.000	+0.975	+0.126	+0.983
+8.500	+0.682	+0.129	+0.991
+9.000	+0.993	+0.127	+1.001
+9.500	+1.002	+0.120	+1.009
+10.000	+1.008	+0.110	+1.014
+10.500	+1.010	+0.100	+1.015
+11.000	+1.010	+0.090	+1.014
+11.500	+1.009	+0.082	+1.012
+12.000	+1.006	+0.075	+1.009
+12.500	+1.002	+0.070	+1.005

源における放射インピーダンス Z を式により計算したものである。この放射インピーダンスの値は伝搬媒質の音響インピーダンス $\rho\omega/k$ と音波の放射面積 $\pi a^2 e$ で割って正規化し、この放射インピーダンスの実数部 $Re(Z)$ とこれの虚数部 $Im(Z)$ に分けて記入している。Fig. 10 中の楕円形 ($e=0.5, 0.25$) 放射インピーダンスの $Re(Z)$ 特性は円形 ($e=1$) の場合の $Re(Z)$ 特性よりも ak の増加するときに、ゆっくりと1の値へ立ち上がる。また、楕円形の $Im(Z)$ 特性上のピークは円形の場合よりも ak の大きい方に移動することが示されている。これらの傾向はピストン音源の形状が円形から長楕円に成る程顕著になっている。

Table 3 Radiation impedance at the elliptic piston source for a set of parameter values e .

$e=0.25$			
ka	Real $Re(Z)$	Imaginary $Im(Z)$	Absolute $ Z $
+0.000	+0.000	+0.000	+0.000
+0.500	+0.032	+0.184	+0.187
+1.000	+0.116	+0.342	+0.362
+1.500	+0.234	+0.457	+0.513
+2.000	+0.361	+0.524	+0.636
+2.500	+0.480	+0.552	+0.732
+3.000	+0.581	+0.556	+0.804
+3.500	+0.664	+0.548	+0.861
+4.000	+0.736	+0.535	+0.910
+4.500	+0.801	+0.518	+0.954
+5.000	+0.861	+0.496	+0.993
+5.500	+0.914	+0.466	+1.026
+6.000	+0.958	+0.430	+1.050
+6.500	+0.992	+0.392	+1.066
+7.000	+1.017	+0.354	+1.076
+7.500	+1.034	+0.318	+1.082
+8.000	+1.046	+0.284	+1.084
+8.500	+1.054	+0.252	+1.083
+9.000	+1.057	+0.222	+1.080
+9.500	+1.055	+0.194	+1.073
+10.000	+1.049	+0.171	+1.063
+10.500	+1.041	+0.152	+1.052
+11.000	+1.032	+0.137	+1.041
+11.500	+1.023	+0.125	+1.031
+12.000	+1.014	+0.116	+1.021
+12.500	+1.006	+0.110	+1.012
+13.000	+0.998	+0.106	+1.003
+13.500	+0.991	+0.104	+0.996
+14.000	+0.985	+0.104	+0.991
+14.500	+0.982	+0.106	+0.987
+15.000	+0.980	+0.107	+0.986

6. むすび

本報告では楕円形状のピストン型送受音子における音響レスポンスについて Rayleigh の音響速度ポテンシャルから理論的に計算を行い簡単な式(23)の様な積分表示式を導びいた。この表示式中には送受音子の形状変数、すなわち、送音子の楕円形振動面における短径と長径の比 e と送受音子の大きさに関する変数、すなわち送音子の振動面と受音子の受音面についての相似

比 γ が含まれているため、円形送受音子の音響レスポンスの場合も、これら変数の特殊な値として取扱うことができる。

また、この(23)式の解析及び数値計算例から、楕円形送受音子の音響レスポンス特性上で明らかになった点は次の通りである。

1. 送受音子の間隔が $\pi(1+\gamma^2)(1+e^2)/4$ よりも大きい所では送受音子の形状に関係なく、この間隔に反比例する球面波の特性領域となる。
2. 平面波領域と球面波領域の境で現われ、近似的に円筒波と見なされる領域は、送受音子の形状が円形から長楕円になる程広がる傾向をもつ。
3. 送受音子間隔の狭い所で、平面波と見なされる領域は、受音子(受音面)が送音子(振動面)よりも大きくなる程 $1+\gamma^2$ に比例して広がる。
4. 正規化された平面波領域の音響レスポンス特性は $\alpha_2=1.0$ neper 程度の媒質中の音波吸収係数に余り影響されない。
5. 楕円形送受音子の音響レスポンス特性上に現われる揺らぎは円形送受音子の場合よりも少ない。

楕円形のピストン音源より放射インピーダンスについては(24)式の表示式を導びき、短径と長径の比が $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{4}$ の二例の楕円形状について数値計算を行った。その結果 ak の増加に従い、楕円形音源の放射インピーダンスにおける実数部の特性は円形音源の場合のそれに較べゆっくりと1の値へ立ち上がり、また楕円形の放射インピーダンスの虚数部の特性に現われるピークは円形の場合よりも ak の大きい方へ移動する等の特徴を確認した。

以上、本研究では、楕円形のピスト型送受音子における音響レスポンス特性で、送受音子の形状効果を考察した。その結果、気体や液体等の流体における超音波計測装置の送受波器系の設計及び実測値に含まれている送受音子の回折効果について、実験値の補正が可能となった。また、この音響レスポンス特性は水中音響機器の校正実験で、送受波器の形状を考慮した区間設定に役立つと思われる。更に楕円形ピストン音源の放射インピーダンス特性は、楕円形送受波器の設計資料になるものである。

謝 辞

本研究に当り、非常に有益なる種々の御助言をいただきました、東北大学 電気通信研究所 城戸健一教授(現在同大学応用情報学研究所教授、同セン

ター長)並びに運輸省電子航法研究所 藤井弥平所長及び当所共通工学部 岩柳順二郎長、田中健一室長に深く感謝の意を表わします。また、数値計算では終始協力を得た共通工学部有村信夫技官に感謝する。

参 考 文 献

- 1) H. Seke, A. Granato, and R. Truell; Diffraction Effects in the Ultrasonic Field of a Piston Source and their Importance in the Accurate Measurement of Attenuation, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 28 (1956), pp. 230—238
- 2) A. O. Williams, Jr.; the Piston Source at High Frequencies, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 23 (1951). pp. 1—6
- 3) R. Bass; Diffraction Effects in the Ultrasonic Field of a Piston Source, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 30 (1958), pp. 602—605
- 4) K. Yamada and Y. Fujii; Acoustic Response of a Circular Receiver to a Circular Source of Different Radius, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 40 (1966), pp. 1193—1194 (L)
- 5) A. O. Williams, Jr.; Integrated Signal on Circular Piston Receiver Centered in a Piston Beam, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 48 (1970), pp. 285—289
- 6) P. H. Ragers, and A. L. Van Buren; An Exact Expression for the Lommel Diffraction Correction Integral, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 55 (1974), pp. 724—728
- 7) A. S. Khimunin; Numerical Calculation of the Diffraction Corrections for the Precise Measurement of Ultrasound Absorption, Acustica Vol. 27 (1972), pp. 173—187
- 8) A. S. Khimunin; Numerical Calculation of the Diffraction Corrections for the Precise Measurement of Ultrasound Phase Velocity, Acustica Vol. 32 (1975), pp. 192—200
- 9) A. S. Khimunin; Ultrasonic Propagation Parameter Measurements Incorporating Exact Diffraction Corrections, Acustica Vol. 39 (1978), pp. 87—95
- 10) K. Beissner; Exact Integral Expression for the Diffraction Loss of a Circular Piston Source, Acustica Vol. 49 (1981), pp. 212—216

- 11) K. Yamada; Acoustic Response of a Rectangular Receiver to a Rectangular Source, Papers of Ship Research Institute No. 20, (1967)
- 12) G. N. Watson; A Treatise on the Theory of Bessel Functions (Cambridge University Press, England London 1922), pp. 140
- 13) L. Rayleigh; The Theory of Sound (Macmillan and Company, New York 1941) Vol. II
- 14) E. M. Arase; Mutual Radiation Impedance of Square and Rectangular Pistons in a Rigid Infinite Baffle, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 36 (1964), pp. 1521—1525
- 15) Y. Fujii, and K. Yamada; Acoustic Response of a Rectangular Receiver to a Rectangular Source, J. Acoust. Soc. Am. Vol. 40 (1966), pp. 249—251 (L)
- 16) E. M. Arase; Comments on "Ref. No. 15", J. Acoust. Soc. Am. Vol. 40 (1966), pp. 1195 (L)
- 17) 参照文献 No. 12, pp. 328