

ける自由動揺試験にて求めた非線形減衰係数を用いた推算値よりかなり高い応答特性を示していることがわかる。なお、表-5-5の係数を用いて本研究に用いたフーティング型要素浮体支持型の全体浮体に対する抗力係数を周波数に対して示すと図-5-29のようになる。

ちなみに、本研究の非線形減衰係数として、自由動揺試験（フーティング型要素浮体支持型全体浮体の上下揺れ）から求めた抗力係数は約6.1である。

(2) 連成係数が動揺特性に及ぼす影響

本論文において提示した簡易推算法に静水中における自由動揺試験から求まる減衰係数を導入すれば、要素浮体の形状に関係なく縦波中における上下揺れ、前後揺れ及び縦揺れ並びに横波中における上下揺れの応答特性は、相当よい精度で推算できることが判った。

しかしながら、横波中における左右揺れ及び横揺れに関しては、推算値と実験値との差が依然として大きいため、ここでは、簡易推算法において(5.11)式の $\bar{m}(z)$ を1.0としているので、これを種々に変化させ連成係数が横波中における動揺特性に及ぼす影響を調べることにした。

そのために、(5.11)式中の $\bar{m}(z)$ の値を次のように変えて、連成係数 C_{20} 及び C_{02} を変化させた。

- i) $\bar{m}(z)=1.0$ (簡易計算法)
- ii) $\bar{m}(z)=0.0$
- iii) $\bar{m}(z)=m_y$ (左右揺れの付加質量係数 (m_y))
- iv) $\bar{m}(z)=\hat{m}(z)$ (ポテンシャル理論に基づく連成係数 $(\hat{m}(z))$)

このように連成係数を変化させて(5.2)式及び(5.3)式を用いて計算したフーティング型、ローハル型及びポンツーン型要素浮体支持型の全体浮体の横波中における左右揺れ及び横揺れの応答特性の推算値と実験値とを比較した結果を図-5-30～図-5-35に示す。なお、図-5-32～図-5-35の中に示す×印は、連成係数として上述のiv)の値を用いて、更に減衰係数として表-5-3に示した自由動揺試験にて求めた等価線形減衰係数(ローハル型は大きい方の値)を用いて推算した値である。

これらの図から、フーティング型要素浮体支
(344)

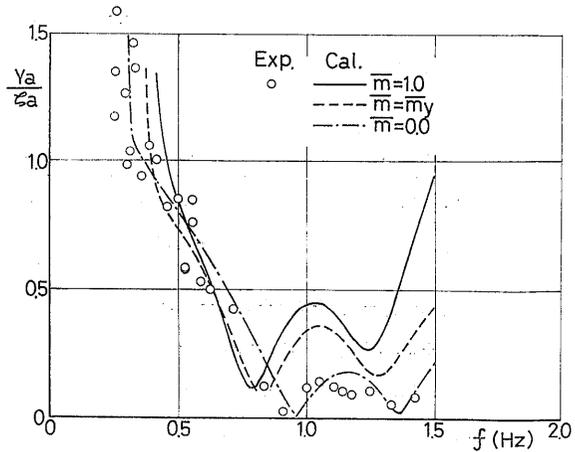


図-5-30 横波中の左右揺れ(連成係数の影響, フーティング型)

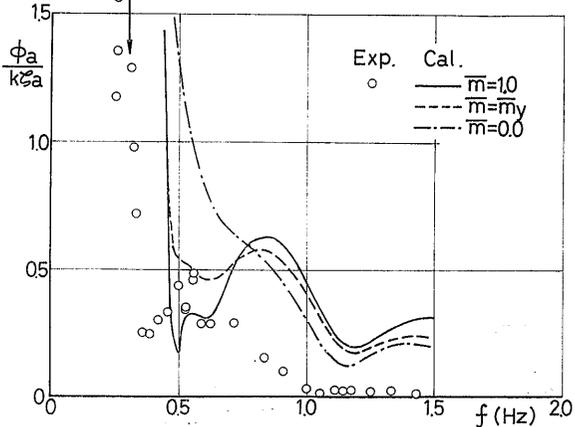


図-5-31 横波中の横揺れ(連成係数の影響, フーティング型)

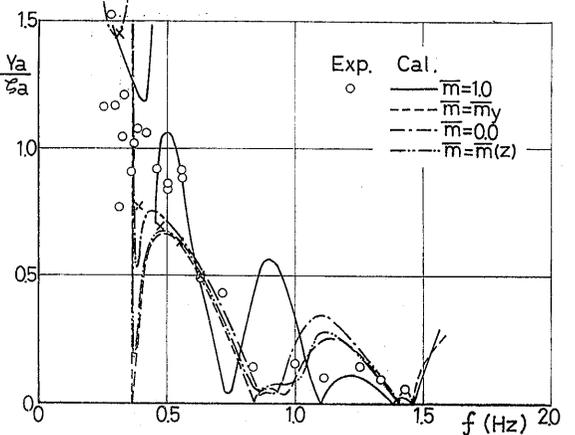


図-5-32 横波中の左右揺れ(連成係数の影響, ローハル型)

持型の全体浮体では、左右揺れの応答特性は $\bar{m}(z)=0.0$ にした場合が実験値に最も近い推算結果を示し、横揺れは、連成係数を変化しても波周波数によって実験値に近づく度合が変化する。

ローハル型要素浮体支持型の全体浮体では、左右揺れの応答特性は、 $\bar{m}(z)=1.0$ 以外の場合が実験値の応答特性のの傾向に近づき、横揺れも $\bar{m}(z)=1.0$ 以外の場合が実験値に近づく傾向が見受けられる。

ポンツーン型要素浮体支持型の全体浮体では、 $\bar{m}(z)$ を1.0以外にすると左右揺れ及び横揺れの応答特性が急激に変化し、実験値と定性的に一致する傾向を示すが、定量的には左右揺れでは $\bar{m}(z)=0.0$ が、横揺れでは $\bar{m}(z)=\hat{m}(z)$ が実験値に近づく傾向がある。

なお、自由動揺試験から求めた等価線形減衰係数を考慮しても応答特性の推算値は、ほとんど改善されないといえる。

今回実施した範囲から適正な連成係数を選定することは困難であるが、もし簡易推算法に取り入れるとするならば、左右揺れでは $\bar{m}(z)=0.0$ として横揺れではポテンシャル理論で求められる連成係数を用ると大略よいといえそうである。

(3) 波強制力が動揺特性に及ぼす影響

第4章において全体浮体に働く波強制力が要素浮体単体に働く波強制力と多少相違していることを示したので、その波強制力の相違が横波中における動揺特性に及ぼす影響を調べることとする。

要素浮体に働く波強制力に関して最も理論値と実験値とが相違しているのが、ローハル型要素浮体に働く波強制力(図-2-7)である。

そこで、図-2-7に示す波強制力の実験値を用いるとともに連成係数を $\bar{m}(z)=\hat{m}(z)$ として計算したローハル型要素浮体支持型の全体浮体の横波中における左右揺れ及び横揺れの応答特性の推算値と実験値との比較を図-5-36及び図-5-37に示す。なお、図中の実線は全体浮体に働く波強制力の計算に図-2-7に示す理論値を用いた場合で、破線は実験値の平均線を用いた場合である。

この図から、水槽模型実験にて求めた波強制制

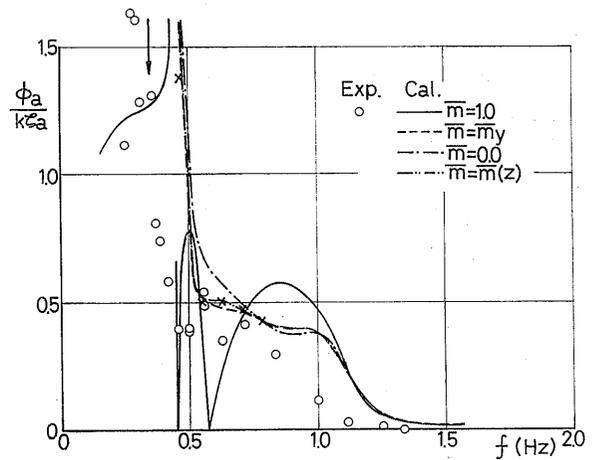


図-5-33 横波中の横揺れ(連成係数の影響, ローハル型)

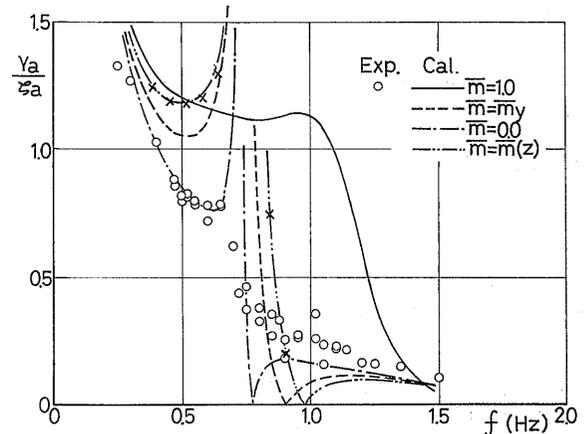


図-5-34 横波中の左右揺れ(連成係数の影響, ポンツーン型)

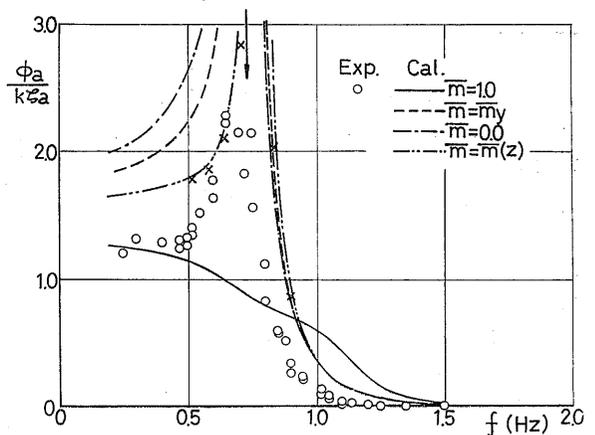


図-5-35 横波中の横揺れ(連成係数の影響, ポンツーン型)

力を用いると実験値に近づく傾向を示すが、依然として定量的に不十分である。また、フーティング型要素浮体に働く波強制力は、図-2-4から判るように理論値と実験値との差異は、ほとんどない。そして、ポンツーン型要素浮体に働く波強制力も、図-2-8から判るように理論値と実験値との差異が小さい。したがって、簡易推算法の確立という立場から見ると全体浮体に働く波強制力は、4.2で示した理論計算法による値を用いてもよいといえる。なぜならば、本論文では、多行多列の要素浮体群で支持された超大型の浮遊式海洋構造物を対象としているが、実際には、縦方向、横方向共に要素浮体の列数は、本論文で扱ったモデルよりも多くなることが予想される。そのような状態では、横波中においても、本論文の縦波中の場合と同様に、複数要素浮体の効果により、簡易推算値にても動揺応答特性を精度よく推定できると考えられるからである。

6. 結言

以上、超大型浮遊式海洋構造物の波浪中における波強制力、及び動揺応答特性に関する研究の成果について述べてきたが、研究の結果得られた結論、及び今後の問題点をまとめると、次のようになる。

(1) 要素浮体に働く波強制力について

今回実験を行なった波高・喫水比 (0.5(高周波数)~0.8(低周波数)) では、フーティング型、ポンツーン型要素浮体に働く波強制力は、微小波高を仮定した線形理論で精度よく推算できる。しかし、ローハル型要素浮体に働く波強制力を線形理論で推定することは精度が悪く不十分である。また、波高・喫水比を小さくするに伴って、実験値は線形理論値に近づく。

過渡水波を用いても、波高影響という問題を考慮すれば、要素浮体の形状に関係なく要素浮体に働く波強制力の特性を、規則波を用いた実験と同程度の精度で求められる。

(2) 波強制力に及ぼす要素浮体間の流体力学的相互干渉効果について

ローハル型要素浮体群の中の個々の要素浮体、あるいはローハル型要素浮体群の波下側におかれたポンツーン型要素浮体に働く波強制力は、高周波数領域

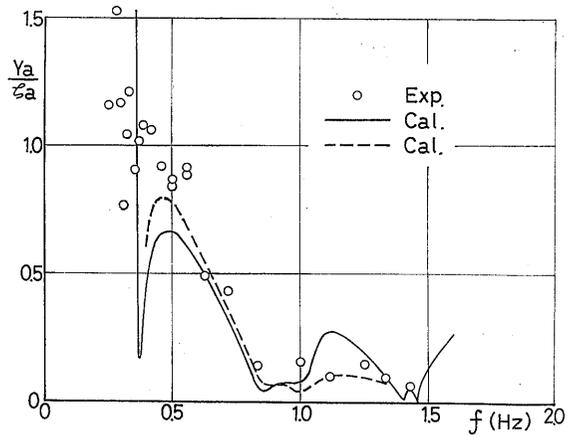


図-5-36 横波中の左右揺れ (波強制力の影響, ローハル型)

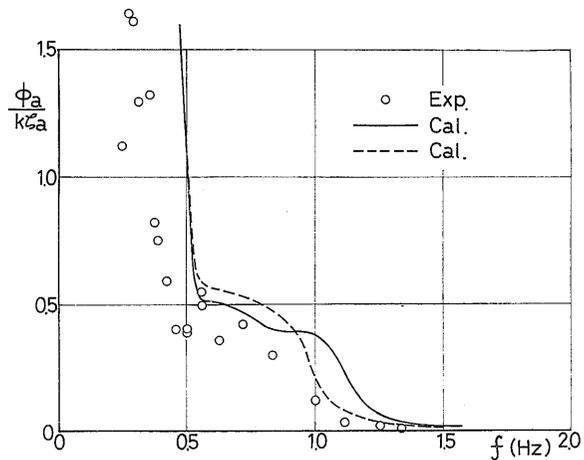


図-5-37 横波中の横揺れ (波強制力の影響, ローハル型)

では、周波数が高くなるに伴い、また波下側の要素浮体になるに伴って水平方向波強制力、鉛直方向波強制力共に小さくなり、要素浮体による波の遮蔽、要素浮体間を進行する波の減衰などに基づく波高の減衰が、波下側の要素浮体に働く波強制力を減少させる主たる要因であることがわかる。

ポンツーン型要素浮体の波下側におかれたローハル型要素浮体に働く波強制力は、ポンツーン前面における波の反射等による遮蔽効果のため、水平方向波強制力、鉛直方向波強制力共に著しく小さくなる。ポテンシャル理論によってポンツーン型要素浮体に対する透過波を計算し、その波高を用いてローハル型要素浮体に働く波強制力を計算すると、定量的にかなり実験値に近い値が得られる。

(3) 全体浮体に働く波強制力について

ローワーハル型要素浮体支持型,あるいはポンツーン型要素浮体支持型の全体浮体に働く波強制力の実験値は,要素浮体単体に働く波強制力の理論値を用い,かつ要素浮体間の流体力学的相互干渉効果を無視して全体浮体に働く波強制力を推算した値と比較すると,縦波中においては,低周波数領域では推算値と実験値とが大略よい一致を示す傾向が見られるが,高周波数領域では実験値が推算値より小さくなる傾向が見られる。なお,要素浮体単体に働く波強制力の実験値を用いて全体浮体に働く波強制力を推算すれば,実験値により近づく傾向が見受けられる。

横波中においては,ポンツーン型要素浮体支持型の全体浮体に対する水平方向の波強制力以外は,要素浮体単体に働く波強制力の実験値を用いることによりかなりの精度で全体浮体の波強制力を推算できることが判明した。

従って,全体浮体に働く波強制力は,要素浮体単体に働く波強制力を何らかの方法で精度よく推定することができれば,要素浮体間の流体力学的な相互干渉効果を無視してもかなり精度よく推算できることが判明した。

(4) 全体浮体の波浪中における動揺応答特性について

本論文で示した簡易推算値と実験値を比較した結果,フーティング型要素浮体支持型,ローワーハル型要素浮体支持型,ポンツーン型要素浮体支持型の全体浮体共に,縦波中の上下揺れ,前後揺れ,縦揺れ,及び横波中の上下揺れに関しては,推算値と実験値は動揺の固有周波数付近を除いて良く一致する。

動揺の固有周波数付近では,減衰係数として自由動揺試験から得られる値を用いるなどの方法により減衰力を正しく考慮すると推算値は実験値に一致する。

横波中の左右揺れ,横揺れについては,本論文で示した簡易推算法では不十分であり,また減衰係数を修正しても推算精度はほとんど改善されない。連成係数を変化させると応答特性が大きく変化し,連成係数を適当にとると推算値が実験値に近づくが,本研究の結果から,適正な連成係数の選定の基準を示すことはできない。しかし,本論文では対象としている超大型浮遊式海洋構造物は,実際には本論文で扱った模型よりも縦方向,横方向の要素浮体の列数が多くなることが予想されるため,横波中においても,本論文の縦波中の場合と同様に,複数要素浮体の効果により,簡易推算値にても動揺応答特性を精度よく推定できるといえ

る。

- (5) 今後究明すべき問題点について
今後究明すべき問題点を列挙すると以下のようになる。
 - (i) 波高・喫水比が大きい場合に,単体の要素浮体に働く波強制力の推定精度の向上
 - (ii) 要素浮体群において個々の要素浮体に働く波強制力を,要素浮体間の流体力学的干渉効果を考慮して推算する手法の開発
 - (iii) 全体浮体の同調周波数付近における減衰力の推算手法の開発
 - (iv) 全体浮体の運動方程式の連成係数の正しい評価法の研究
 - (v) 全体浮体の左右揺れ,横揺れの正しい推定法の開発

謝 辞

本研究を実施するにあたって,御指導をいただいた当所海洋開発工学部の安藤室長,計算の一部を快く引き受けていただいた大川主任研究官,および実験の補助をしていただいた海洋開発工学部の方々に感謝します。

なお,計算には当所大型計算機センターのFACOM M-180 II AD を使用した。

本研究は科学技術振興調整費による研究「海洋構造物による海洋空間等の有効利用に関する研究」の一部として実施されたものであることを付記する。

参 考 文 献

- 1) 安藤定雄,大川 豊,上野 勲;浮体工法による海上空港建設に係わる評価のための技術調査研究,船研報告,別冊第4号,昭58年3月
- 2) 安藤定雄,星野邦弘;フーティング型浮体群に働く波強制力について,船研講演集,昭57年秋季(第40回),p.20~23
- 3) 浮遊式海洋構造物に関する調査研究 報告書,運輸省船舶技術研究所,昭57年3月
- 4) 安藤定雄;作業用船舶の諸性能向上について,西部造船会々報,第50号,昭50年8月,p.p.83~98
- 5) 大川 豊;コラム付没水体に働く波強制力について,船研講演集,昭57年秋季(第40回)p.9~13
- 6) 瀬戸秀幸,山本善之;有限要素法による定常波動問題の基礎的研究,日本造船学会論文集,第136号,昭49年12月,p.p.181~190

- 7) 山本善之, 中野孝昭, 光田哲久; 有限要素法による定常波動問題の基礎的研究, 日本造船学会論文集, 第140号, 昭51年12月, p. p.121~126
- 8) J.C. Luke, A Variational Principle for a Fluid with a Free Surface, J of Fluid Mech., Vol 27, Part 2, 1967, p. p.395~398
- 9) 大橋 丹; 複数本の鉛直円柱に働く波力について, 日本造船学会論文集, 第131号, 昭47年6月, p. p.53~64
- 10) 安藤定雄, 影本 浩; 大型海洋構造物の洋上接合時における接合部荷重について, 西部造船会々報, 第60号, 昭55年8月, p. p.101~112
- 11) 元良誠三; 船体運動力学, 共立出版, 訂正版, p. p.72~76
- 12) G.H. Keulegan, L.H. Carpenter; Forces on Cylinders and Plates in an Oscillating Fluid, J. of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 60, No. 5, 1958, p. p. 423~440
- 13) T. Sarpkaya; Forces on Cylinders and Spheres in a Sinusoidally Oscillating Fluid, Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics, 1975, p. p. 32~37
- 14) 工藤君明, 木下 篤; 上下動するフーティング付カラムの造渦減衰力について, 第68回試験水槽委員会第2部会資料, 昭55年

付録 軸対称体に対する波強制力の計算法

図-A-1に示すように, 座標軸の x, y 軸を静止水面上にとり, z 軸を鉛直上向きにとる。さらに, 直交座標系 (x, y, z) と同じ原点を有する円筒座標系 (r, θ, z) を考え, 両座標系間には次の関係があるものとする。

$$x = r \cos \theta \quad \dots(A.1)$$

$$y = r \sin \theta \quad \dots(A.2)$$

$$z = z \quad \dots(A.3)$$

次に, 水深は一様で h とし, x 軸の正方向から負の方向に進行する周期 $2\pi/\omega$ の規則的な入射波を考え, 浮体は座標原点に固定されているものとする。そして, 静止水面を S_f , 物体表面を S_h , 水底を S_b , 原点中心半径 r_0 の円筒状の仮想境界を S_r とし, S_f, S_h, S_b, S_r によって囲まれた領域を D とする。

非粘性で非圧縮性の流体を考え, 速度ポテンシャル

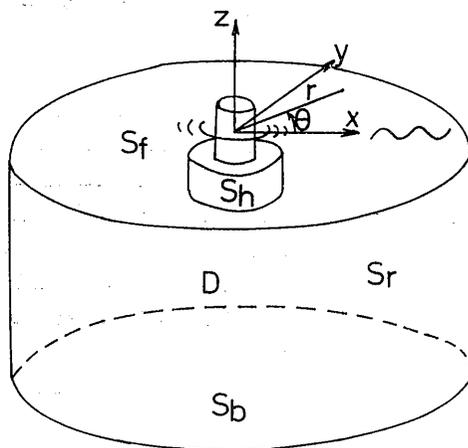


図-A-1 有限要素法による解析領域

が存在するとして, 微小波高を仮定すると, 流場を表わす速度ポテンシャル Φ が満たすべき条件は次式のように示される。

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{in } D \quad \dots(A.4)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{on } S_f \quad \dots(A.5)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_h, S_b \quad \dots(A.6)$$

ここで, g は重力加速度, t は時間を表わし, $\frac{\partial}{\partial n}$ は境界における外向き法線ベクトルの方向に関する微分を表わす。(A.4)式は流場の連続の条件, (A.5)式は自由表面条件, (A.6)式は物体表面条件, 水底条件である。速度ポテンシャル Φ は, (A.4)~(A.6)式の条件の他に, 放射条件(物体による散乱波のうちで, 進行波は物体から遠ざかる方向へ進行し, 定在波は物体から十分遠方で零となる)を満たす必要がある。

物体外部の無限流体領域にまで有限要素法を適用することは困難であるので, 領域 D 内部の流場を表わす速度ポテンシャルのみを有限要素法で求め, 領域 D の外部の流場は解析解により近似する。

領域 D 内部, 及び外部の流場を表わす速度ポテンシャルを各々 Φ_{in}, Φ_{out} として次のように表わす。

$$\Phi_{in} = \Phi_w + \Phi \quad \dots(A.7)$$

$$\Phi_{out} = \Phi_w + \Phi_u \quad \dots(A.8)$$

ここで, Φ_w は入射波の速度ポテンシャル, Φ, Φ_u

は各々領域 D の内部, 及び外部における散乱波のポテンシャルである。

入射波としては, x 軸の正方向から負の方向へ進行する周期 $2\pi/\omega$ の規則波を考えているから, 入射波の速度ポテンシャル $\Phi_w(r, \theta, z)$ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\Phi_w &= \text{Re} \left[\frac{ig_a}{\omega} \phi_w \cdot e^{i\omega t} \right] \\ &= \text{Re} \left[\frac{ig_a}{\omega} \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h} \cdot e^{i\kappa_0 r} e^{i\omega t} \right] \\ &= \text{Re} \left[\frac{ig_a}{\omega} \cdot \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h} \right. \\ &\quad \left. \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cdot i^m J_m(\kappa_0 r) \cdot \cos m\theta \cdot e^{i\omega t} \right] \\ &= \frac{ga}{\omega} \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \{ \varepsilon_{2m+1} \cdot J_{2m+1}(\kappa_0 r) \\ &\quad \cdot \cos(2m+1)\theta \cdot (-1)^{m+1} \cos \omega t \\ &\quad + \varepsilon_{2m} \cdot J_{2m}(\kappa_0 r) \cdot \cos 2m\theta \cdot (-1)^{m+1} \sin \omega t \} \\ &\quad \dots (A.9)\end{aligned}$$

($\varepsilon_0=1, \varepsilon_m=2 (m \neq 0)$, a ; 入射波振幅, J_m ; m 次第一種ベッセル関数, g ; 重力加速度)

さらに,

$$\Phi = \text{Re} \left[\frac{ig_a}{\omega} \phi e^{i\omega t} \right] \quad \dots (A.10)$$

$$\Phi_a = \text{Re} \left[\frac{ig_a}{\omega} \phi_a e^{i\omega t} \right] \quad \dots (A.11)$$

と表わすことにすれば, (A.7) 及び (A.8) 式は,

$$\begin{aligned}\Phi_{in} &= \Phi_w + \text{Re} \left[\frac{ig_a}{\omega} \phi e^{i\omega t} \right] \\ &= \Phi_w - \frac{ga}{\omega} \{ \text{Re}(\phi) \cdot \sin \omega t + \text{Im}(\phi) \cdot \cos \omega t \} \\ &\quad \dots (A.12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{out} &= \Phi_w + \text{Re} \left[\frac{ig_a}{\omega} \phi_a e^{i\omega t} \right] \\ &= \Phi_w - \frac{ga}{\omega} \{ \text{Re}(\phi_a) \sin \omega t + \text{Im}(\phi_a) \cdot \cos \omega t \} \\ &\quad \dots (A.13)\end{aligned}$$

とかける。ここで, $\phi_a(r, \theta, z)$ は次式のように具体的な形で書き表わすことができる。

$$\phi_a = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ C_{0m} \cdot H_m^{(2)}(\kappa_0 r) \cdot \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h} \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^N C_{nm} \cdot K_m(\kappa_n r) \cos \kappa_n(z+h) \right\} \cos m\theta \quad \dots (A.14)$$

C_{0m}, C_{nm} は後に述べる方法によって決定される複素定数であり, $H_m^{(2)}$ は第二種のハンケル関数, K_m は第二種の変形ベッセル関数である。また, κ_0, κ_n は次式から求まる実根である。

$$\kappa_0 \tanh \kappa_0 h = \frac{\omega^2}{g} \quad \dots (A.15)$$

$$\kappa_n \tan \kappa_n h = -\frac{\omega^2}{g} \quad \dots (A.16)$$

ϕ_a は, 連続の条件, 自由表面条件, 水底条件, 及び放射条件を満たす。また, (A.14) 式において,

$$C_{0m} = A_{0m} + iB_{0m} \quad \dots (A.17)$$

$$C_{nm} = A_{nm} + iB_{nm} \quad \dots (A.18)$$

($A_{0m}, B_{0m}, A_{nm}, B_{nm}$ は実数)

とすると,

$$\begin{aligned}\text{Re}(\phi_a) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\{ A_{0m} \cdot J_m(\kappa_0 r) + B_{0m} \cdot Y_m(\kappa_0 r) \} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h} + \sum_{n=1}^N A_{nm} \cdot K_m(\kappa_n r) \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos \kappa_n(z+h) \right] \cdot \cos m\theta \quad \dots (A.19)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_m(\phi_a) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\{ B_{0m} \cdot J_m(\kappa_0 r) - A_{0m} \cdot Y_m(\kappa_0 r) \} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h} + \sum_{n=1}^N B_{nm} \cdot K_m(\kappa_n r) \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos \kappa_n(z+h) \right] \cdot \cos m\theta \quad \dots (A.20)\end{aligned}$$

となる。なお, (A.14) 式中の N の値をいくらにするかは, 仮想境界 S_r と物体との距離 r_0 によって決まり, r_0 が大きくなれば, 小さな N の値で (A.13) 式により領域 D の外部の流場の速度ポテンシャルを精度よく近似できる。

領域 D の内部流場を表わす速度ポテンシャル Φ_{in} には, 放射条件の代わりに仮想境界 S_r において次の条件を課す。

$$\frac{\partial}{\partial n} (\Phi_{in} - \Phi_{out}) = 0 \quad \text{on } S_r \quad \dots (A.21)$$

$$\Phi_{in} = \Phi_{out} \quad \text{on } S_r \quad \dots (A.22)$$

よって,

$$\Phi_{in} = \Phi_w + Re \left[\frac{g a_i}{\omega} \cdot \phi \cdot e^{i \omega t} \right] \quad \dots (A.23)$$

と書くとき、 ϕ の満たすべき条件は次式のようになる。

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{in } D \quad \dots (A.24)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0 \quad \text{on } S_f \quad \dots (A.25)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_b \quad \dots (A.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (\phi + \phi_w) = 0 \quad \text{on } S_h \quad \dots (A.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} (\phi - \phi_a) = 0 \quad \text{on } S_r \quad \dots (A.28)$$

$$\phi = \phi_a \quad \text{on } S_r \quad \dots (A.29)$$

そして、(A.24)~(A.29)式を満足する速度ポテンシャル ϕ は、次の手順で求められる。

(i) 次の条件を満たす速度ポテンシャル ϕ_{0m} を求める。($m=0 \sim 2M-1$)

$$\Delta \phi_{0m} = 0 \quad \text{in } D$$

$$\frac{\partial \phi_{0m}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_{0m} = 0 \quad \text{on } S_f$$

$$\frac{\partial \phi_{0m}}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_d, S_r$$

$$\frac{\partial \phi_{0m}}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left\{ \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h} \cdot \varepsilon_m \cdot J_m(\kappa_0 r) \cdot \cos m \theta \cdot L \right\} \quad \text{on } S_h$$

ここで L は、

$$L = (-1)^{\frac{m}{2} + 1} \quad (m \text{ が偶数のとき})$$

$$L = (-1)^{\frac{m+1}{2}} \quad (m \text{ が奇数のとき})$$

である。

(ii) 次の条件を満たす速度ポテンシャル ϕ_p を求める。

$$\Delta \phi_p = 0 \quad \text{in } D$$

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_p = 0 \quad \text{on } S_f$$

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_h, S_b$$

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial n} = \kappa_0 \cdot \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h} \quad \text{on } S_r$$

(iii) 次の条件を満たす速度ポテンシャル ϕ_{nm} を求める。($n=0 \sim N, m=0 \sim 2M-1$)

$$\Delta \phi_{nm} = 0 \quad \text{in } D$$

$$\frac{\partial \phi_{nm}}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi_{nm} = 0 \quad \text{on } S_f$$

$$\frac{\partial \phi_{nm}}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_h, S_b$$

$$\frac{\partial \phi_{nm}}{\partial n} = \kappa_n \cdot \cos \kappa_n(z+h) \quad \text{on } S_r$$

一般に、

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{in } D$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0 \quad \text{on } S_f$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = v_h \quad \text{on } S_h$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = v_b \quad \text{on } S_b$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = v_r \quad \text{on } S_r$$

の条件を満たす速度ポテンシャル ϕ は、

$$\begin{aligned} \pi \equiv & \frac{1}{2} \int_D (\nabla \phi)^2 dx dy dz - \frac{\omega^2}{2g} \int_{S_f} \phi^2 dx dy \\ & - \int_{S_h} v_h \phi dS_h - \int_{S_b} v_b \phi dS_b - \int_{S_r} v_r \phi dS_r \end{aligned} \quad \dots (A.30)$$

としたとき、

$$\delta \pi = 0 \quad \dots (A.31)$$

なる停留値問題より求められる^{6),7),8)}。

軸対称体の場合は、円筒座標系 (r, θ, z) を用いると、

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} \int_D r \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} d\theta dr dz \\ & - \frac{\omega^2}{2g} \int_{S_f} r \cdot \phi^2 d\theta \cdot dr - \int_{S_h} r \cdot v_h \cdot \phi d\theta ds \\ & - \int_{S_b} r \cdot v_b \cdot \phi d\theta dr - \int_{S_r} r \cdot v_r \cdot \phi d\theta ds \end{aligned} \quad \dots (A.32)$$

(ds は $\theta = \text{const.}$ の断面における境界の微小線分要素) となり、

$$\phi = \sum_{m=0}^{2M-1} \phi_m(r, z) \cdot \cos m\theta \quad \cdots (A.33)$$

$$v = \sum_{m=0}^{2M-1} v_m(r, z) \cdot \cos m\theta \quad \cdots (A.34)$$

とすると,

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cdot \cos n\theta \, d\theta = 0 \quad (m \neq n) \\ = \pi \quad (m = n) \quad \cdots (A.35)$$

の関係から, (A.32)式の θ に関する積分は解析的に行なうことができ,

$$\pi = \sum_{m=0}^{2M-1} \left[\frac{1}{2} \int_D r \left\{ \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial r} \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} \phi_m^2 \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\partial \phi_m}{\partial z} \right)^2 \right\} dr \, dz - \frac{\omega^2}{2g} \int_{S_f} r \cdot \phi_m^2 \, dr \right. \\ \left. - \int_{S_h} r \cdot v_{hm} \phi_m \, ds - \int_{S_b} r \cdot v_{bm} \cdot \phi_m \, dr \right. \\ \left. - \int_{S_r} r \cdot v_{rm} \cdot \phi_m \, d\theta \, ds \right] \quad \cdots (A.36)$$

(ただし積分は $\theta = \text{const.}$ の断面について行なう)

となって, 2次元問題と同様に取り扱える。従って, (A.36)式で表わされる汎関数を使って,

$$\delta\pi = 0 \quad \cdots (A.37)$$

なる停留値問題を有限要素法により離散化して解けば, 速度ポテンシャル ϕ が求められる。

この方法により, (i)(ii)(iii)の手順で求めた速度ポテンシャル ϕ_{0m} , ϕ_p , ϕ_{nm} を使って,

$$\text{Re}(\phi) = - \sum_{m=0}^{M-1} \phi_{02m} \cdot \cos m\theta \\ + \sum_{m=0}^{2M-1} \left[A_{0m} \left\{ m \cdot \frac{1}{\kappa_0 r_0} J_m(\kappa_0 r_0) \right. \right. \\ \left. \left. - J_{m+1}(\kappa_0 r_0) \right\} + B_{0m} \left\{ m \cdot \frac{1}{\kappa_0 r_0} Y_m(\kappa_0 r_0) \right. \right. \\ \left. \left. - Y_{m+1}(\kappa_0 r_0) \right\} \right] \cdot \cos m\theta \\ + \sum_{m=0}^{2M-1} \sum_{n=1}^N A_{nm} \left\{ m \cdot \frac{1}{\kappa_n r_0} K_m(\kappa_n r_0) \right. \\ \left. - K_{m+1}(\kappa_n r_0) \right\} \cdot \phi_{nm} \cdot \cos m\theta \quad \cdots (A.38)$$

$$\text{Im}(\phi) = - \sum_{m=0}^{M-1} \phi_{02m+1} \cdot \cos(2m+1)\theta$$

$$+ \sum_{m=0}^{2M-1} \left[B_{0m} \left\{ m \cdot \frac{1}{\kappa_0 r_0} J_m(\kappa_0 r_0) \right. \right. \\ \left. \left. - J_{m+1}(\kappa_0 r_0) \right\} - A_{0m} \left\{ m \cdot \frac{1}{\kappa_0 r_0} Y_m(\kappa_0 r_0) \right. \right. \\ \left. \left. - Y_{m+1}(\kappa_0 r_0) \right\} \right] \cos m\theta \\ + \sum_{m=0}^{2M-1} \sum_{n=1}^N B_{nm} \left\{ m \cdot \frac{1}{\kappa_n r_0} K_m(\kappa_n r_0) \right. \\ \left. - K_{m+1}(\kappa_n r_0) \right\} \cdot \phi_{nm} \cdot \cos m\theta \quad \cdots (A.39)$$

なる ϕ を構成すると, ϕ は(A.24)~(A.29)の条件のうち, $\phi = \phi_a$ (on S_r) 以外の条件をすべて満たす。

$\phi = \phi_a$ (on S_r) の条件より, 係数 A_{0m} , B_{0m} , A_{nm} , B_{nm} が求められる。即ち,

cos 成分の連続条件

$$\left[B_{0m} \left\{ m \cdot \frac{1}{\kappa_0 r_0} J_m(\kappa_0 r_0) - J_{m+1}(\kappa_0 r_0) \right\} \right. \\ \left. - A_{0m} \left\{ m \cdot \frac{1}{\kappa_0 r_0} Y_m(\kappa_0 r_0) - Y_{m+1}(\kappa_0 r_0) \right\} \right] \phi_p \\ + \sum_{n=1}^N B_{nm} \left\{ m \cdot \frac{1}{\kappa_n r_0} K_m(\kappa_n r_0) \right. \\ \left. - K_{m+1}(\kappa_n r_0) \right\} \phi_{nm} - \phi_{0m} \cdot \frac{1}{2} \{1 - (-1)^m\} \\ = \{B_{0m} J_m(\kappa_0 r_0) - A_{0m} Y_m(\kappa_0 r_0)\} \cdot \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h} \\ + \sum_{n=1}^N B_{nm} \cdot K_m(\kappa_n r_0) \cdot \cos \kappa_n(z+h) \quad \cdots (A.40)$$

sin 成分の連続条件

$$\left[A_{0m} \left\{ m \cdot \frac{1}{\kappa_0 r_0} J_m(\kappa_0 r_0) - J_{m+1}(\kappa_0 r_0) \right\} \right. \\ \left. + B_{0m} \left\{ m \cdot \frac{1}{\kappa_0 r_0} Y_m(\kappa_0 r_0) - Y_{m+1}(\kappa_0 r_0) \right\} \right] \phi_p \\ + \sum_{n=1}^N A_{nm} \left\{ m \cdot \frac{1}{\kappa_n r_0} K_m(\kappa_n r_0) \right. \\ \left. - K_{m+1}(\kappa_n r_0) \right\} \phi_{nm} - \phi_{0m} \cdot \frac{1}{2} \{1 + (-1)^m\} \\ = \{A_{0m} J_m(\kappa_0 r_0) + B_{0m} Y_m(\kappa_0 r_0)\} \cdot \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h} \\ + \sum_{n=1}^N A_{nm} \cdot K_m(\kappa_n r_0) \cdot \cos \kappa_n(z+h) \quad \cdots (A.41)$$

から係数を求める。ここで、 r_0 は原点と仮想境界との距離である。

具体的には、次に示す直交関係を利用して、(A.40)、(A.41)式の両辺に $\cosh \kappa_0(z+h)$ 、 $\cos \kappa_n(z+h)$ を掛けて z について $-h$ から 0 まで積分して、係数に関する連立方程式をつくり、係数を求める。

$$\int_{-h}^0 \cosh^2 \kappa_0(z+h) dz = \frac{1}{4\kappa_0} \sinh 2\kappa_0 h + \frac{h}{2} \quad \dots(A.42)$$

$$\int_{-h}^0 \cosh \kappa_0(z+h) \cdot \cos \kappa_n(z+h) dz = 0 \quad \dots(A.43)$$

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 \cos \kappa_n(z+h) \cdot \cos \kappa_m(z+h) dz \\ = \frac{1}{4\kappa_n} \sin 2\kappa_n h + \frac{h}{2} \quad (n=m) \\ = 0 \quad (n \neq m) \quad \dots(A.44) \end{aligned}$$

このようにして求められた ϕ を使って、(A.12)式より領域D内部の流場を表わす速度ポテンシャル Φ_{in} が求められると、物体に働く力は物体表面の圧力を積分することにより計算できる。即ち、圧力 p は、

$$p/\rho = -\frac{\partial \Phi_{in}}{\partial t} - \frac{1}{2} (\text{grad } \Phi_{in})^2 - gz \quad \dots(A.45)$$

であるから、微小波高の仮定のもとで右辺第2項を省略し、さらに変動圧力のみを考えると、圧力 p は次式のようなになる。

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial t} \quad \dots(A.46)$$

したがって、波の進行方向の水平波強制力 F_s は次式で求められ、

$$F_s = \int_{S_h} -\rho \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial t} \cdot \left(-\frac{\partial x}{\partial n} \right) dS_h \quad \dots(A.47)$$

鉛直方向波強制力 F_h は次式で求められ、

$$F_h = \int_{S_h} -\rho \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial t} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial n} \right) dS_h \quad \dots(A.48)$$

そして、静止水面と z 軸の交点まわりの縦揺れモーメント M_p は次式で次められる。

$$M_p = \int_{S_h} -\rho \frac{\partial \Phi_{in}}{\partial t} \cdot \left(x \frac{\partial z}{\partial n} - z \frac{\partial x}{\partial n} \right) dS_h \quad \dots(A.49)$$

(反時計まわりを正方向とする)

なお、軸対称体ならば $x-y$ 平面に平行な各水平断面では、

$$\partial x / \partial n \propto \cos \theta, \quad \partial z / \partial n \propto \text{const.}$$

であるために、

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \cdot \cos m\theta \cdot d\theta = 0 \quad (m \neq 1) \quad \dots(A.50)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos m\theta \cdot d\theta = 0 \quad (m \neq 0) \quad \dots(A.51)$$

の関係より、鉛直方向波強制力は $m=0$ 、水平方向波強制力は $m=1$ のみで決定される。従って、水平方向強制力、鉛直方向波強制力、縦揺れモーメントだけを求めたいのなら、 $m=0, 1$ について計算すればよいといえる。