船舶技術研究所報告　第20巻　第6号　研究報告　(昭和58年11月)

待ち時間最短化による作業計画の一手法

——理論の展開と救命艇降下作業への適用——

金湖富士夫*

A Method of Scheduling Activities by Minimizing Waiting Time

—Development of Theory and It's Application to the Activities of Launching Life Boats—

By
Fujio KANEKO

Abstract

The complicated activities like the assembling parts would be preferable to be completed in a short time. The required time for finishing the activities may be generally shorter as the number of operators engaged in the activities increases. However, too many operators would be unnecessary when the ammount and the procedure of the activities are fixed. The most important problem is to arrange the limited number of the operators properly for finishing the series of the activities in a short time.

In this paper a method of minimizing the completion time of the activities is presented. Further, the work process solved by the computer technique to minimize the waiting time is introduced, and the application to the activities of launching life boats is also described.

目　　次

* 艤装部
原稿受付：昭和58年9月2日

1. 緒　　言

組立て作業をはじめ何らかの作業を行う場合，可能な限り短い時間で終了することが重要な課題になる。作業の所要時間を短縮する合理的な作業計画を作成する手法として，PERT[1] (Program Evaluation and Review Technique) があるが，この手法は作業を構成する各要素の所要時間が変化しないとの仮定を前提としている。しかしながら，作業はそれに携わる人数が増えれば所要時間は反比例的に短縮されると考えられ，この仮定を取り入れた手法として，RAMPS[1] (Resource Allocation and Multi-Project Scheduling) があるが，これは作業の各要素の所要時間を3段階にしか変化できない。またこれらの手法は，得られた作業計画が最適なものであって，最短時間で作業を終了するものであるとの保証を提供しない。そこで限られた人数（又は機械）で作業を行う際，所要時間が携わる人数の増加によって反比例的に短縮されるとの仮定を取り入れ，かつ最短時間で終了するとの確実な保証をもたらす作業計画を作成する手法を開発することは非常に有用性をもたらすことになるであろう。

ところで，作業に携わる人数が1人より2人，2人より3人と増えるに従い，所要時間は反比例的に減少していくが，ある人数以上になると作業に携わることができなくて余ってしまう者がでてくることは誰しも経験的に知っている事実である。このことが待ち時間を生じさせる主要な原因であり，人数・機械の台数などに制約がある場合，所要時間を長くするものとなる。したがって，いかにしてそのような遊休人数，あるいは機械を少なくするように作業を計画するかが，作業を短時間で終了するための本質的な問題となる。この論文では，このような問題を解決するために種々の理論を展開し，それらに基づいた，作業の所要時間を最短化するための作業計画を求めるアルゴリズムを構成し，その作業計画が所要時間を最短にするものであることの証明を与える。さらに，そのアルゴリズムをコンピュータにプログラムし，それを救命艇の降下作業へ適用した結果を紹介する。

2. 作業の記述及び待ち時間と所要時間との関係

2.1 作業の記述

作業を行う人（又は機械）の能力は全て同等とし，ある要素を m 人で行って終了するまでに要した時間を t とすると，$m \times t$ をもってその要素の作業量と定義する（以下要素量と呼ぶ)。各要素には携わる人数がある数以上増加しても所要時間が短くならない上限の人数が存在し，それを限界人数と呼ぶ。

```
 12345678901
 -----------
 1:01110000000
 2:00001000000
 3:00001100000
 4:00000110000
 5:00000001100
 6:00000000110
 7:00000000010
 8:00000000001
 9:00000000001
10:00000000001
11:00000000000
```

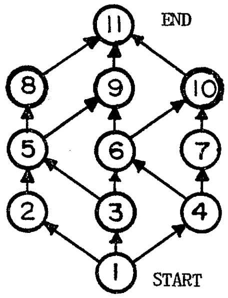
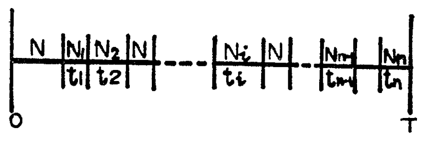


図-1　作業グラフと結合行列

さらに要素間には前後関係が存在し，各要素は他の幾つかの要素が終了しないと開始できない。それを定量的に表現するため，各要素を点で，前後関係を有向線分で表わした図（作業グラフと呼ぶ）を用いることにする。また計算機プログラムに識別させるために，要素 i の次に行える要素をと j すると，i 行 j 列を 1，それ以外を 0 とした行列（結合行列と呼ぶ）を用いる（図-1 参照)。このとき，要素番号の最初と最後はそれぞれ開始，終了を示す要素量 0 のダミーの要素とする。

2.2 待ち時間と所要時間との関係

作業を N 人で行い時間 T で終了したとすると，その履行状況は 図-2 にて表わすことができる。各要素の要素量を w_i，待ち時間の生じている時間を t_i，その時間に作業に携わっている人数を N_i とすれば，



ti：Ni人（＜N）で行なっている時間

図-2　作業履行状況

$$N\left(T-\sum_{i=1}^{n} t_i\right)+\sum_{i=1}^{n} N_i t_i=\sum_{i=1}^{n} w_i$$

$$\therefore \quad T=\frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{N}+\sum_{i=1}^{n}\frac{N-N_i}{N}t_i \qquad (2.1)$$

(2.1) 式より，作業に携わっていない人数が多ければ多いほど，また待ちを生じている時間が長ければ長いほど所要時間 T は長くなることがわかる。したが

って作業に要する時間を短くすることは (2.1) 式の右辺第2項（これをその作業の待ち時間と定義する）を小さくすることである。また (2.1) 式より所要時間の下限は，$\sum_{i=1}^{n} w_i/N$ である。すなわち

$$T \geqq \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i}{N} \qquad (2.2)$$

3. 並行作業要素における解

この章では基本的な場合として，図-3 のような同時に行える要素のみでなる作業を考える。

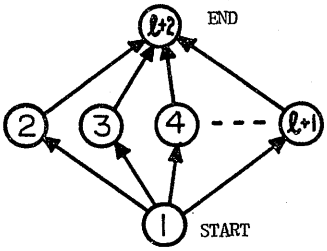
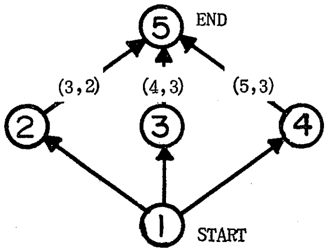


図-3 並行作業要素作業グラフ

3.1 例題による考察

図-4 で表わされる作業を 5 人で行う場合を考える。図-5 のようにして行うと



(要素量，限界人数)

図-4 並行作業要素例題

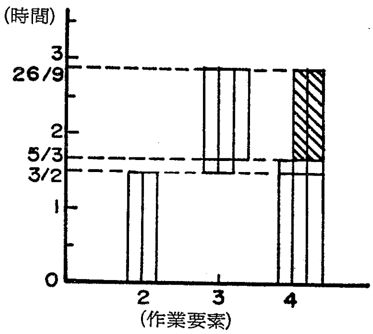


図-5 待ち時間の生じる場合

$$T=\frac{5}{3}+\left\{4-\left(\frac{5}{3}-\frac{3}{2}\right)\times 2\right\}\Big/3=\frac{26}{9}$$

となり，待ち時間 T_w は

$$T_w=\left(\frac{26}{9}-\frac{5}{3}\right)\times(5-3)/5=\frac{26}{45}$$

となる。この例を 図-2 の図式に当てはめて考えてみると，すべての N_i を N すなわち 5 に等しくできれば待ち時間を生じることなく最短時間で作業は終了することになる。ここである時点での作業状況を (a_2, a_3, a_4) のようなベクトルで表現すると（a_i: 要素 i に携わっている人数），どの時点でも $a_2+a_3+a_4=5$ であれば待ち時間は生じないことになる。この例では待ち時間の生じない状態は以下のベクトルで表わされる。

(0,2,3), (0,3,2), (1,1,3), (1,2,2), (1,3,1),
(2,0,3), (2,1,2), (2,2,1), (2,3,0)

よって，これら 9 つのベクトルのうち 3 つを適当に選び，それぞれの状態が時間 $t_j\,(\geqq 0,\ j=1,2,3)$ ずつ続いた時に仕上がった作業量がちょうど (3,4,5) になれば，待ち時間無しで作業を終了する方法が得られたことになる。たとえば，こ

$$\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}t_1+\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}t_2+\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}t_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}$$

の方程式を解くと，

$$t_1=\frac{13}{30},\quad t_2=\frac{9}{10},\quad t_3=\frac{16}{15},$$

$$T=\sum_{j=1}^{3} t_j=\frac{12}{5}=\sum_{i=1}^{3} w_i/N$$

この結果を 図-6 に示す。

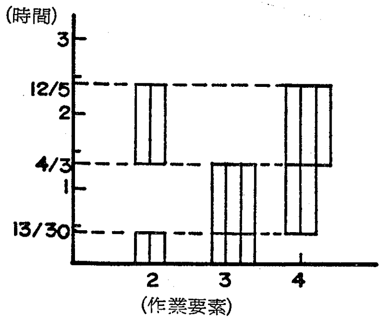


図-6 待ち時間の生じない場合

3.2 並行作業要素における一般解

前節の例題では待ち時間の生じない場合を扱ったが，作業によっては必ず待ち時間の生じる場合がでて

る。それで並行要素の場合，最短所要時間 $T_{\min}$ は次のような性質を持つ。(2.2) 式より，$T_{\min} \geqq \sum_{i=1}^{n} w_i/N$。また個々の要素は，要素量を w_i，限界人数と m_i とすると w_i/m_i より短時間では終了できない。

$$\therefore \quad T_{\min} \geqq \max_{j=1\sim n}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i/N,\ \frac{w_j}{m_j}\right) \qquad (3.1)$$

しかしながら並行要素のみで成る作業を行う場合，次の定理が成立する。

n 個の並行作業要素（要素量 w_i 限界人数 m_i）を N 人で行う場合の最短所要時間は次のようになる。

(1) $\sum_{i=1}^{n} w_i/N \geqq \max_{i=1\sim n} \frac{w_i}{m_i}$ のとき

$$T_{\min} = \sum_{i=1}^{n} w_i/N$$

(2) $\sum_{i=1}^{n} w_i/N < \max_{i=1\sim n} \frac{w_i}{m_i}$ のとき

$$T_{\min} = \max_{i=1\sim n} \frac{w_i}{m_i}$$

以下にこれらを証明する。

(1) n 次元空間で各面が $x_i=0$ 又は m_i なる超平面によって構成される超直方体 α と $\sum_{i=1}^{n} x_i = N$ なる超

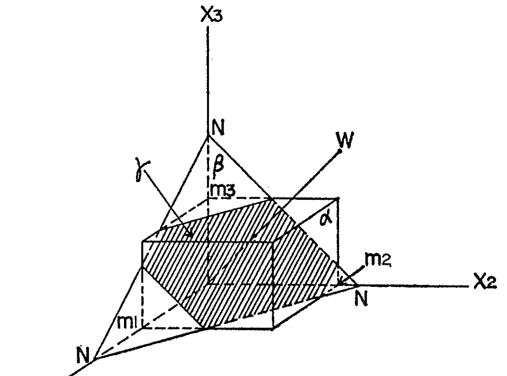


図-7 並行作業要素解空間

平面 β との共通部分である超多角形 γ の頂点をなす n 次元ベクトル $\boldsymbol{m}_i$ は

$$\boldsymbol{m}_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} a_i = 0 \text{ or } m_i \text{ or} \\ \quad N - \sum m_j \ (>0 \text{ and } <m_i) \end{array} \qquad (3.2)$$

のように表わされる。

n 次元空間内の各座標成分が負でない点を W，位置ベクトルを $\boldsymbol{w}^t = (w_1, \cdots, w_n)$ とし，$\boldsymbol{m}_i$ のうち一次独立なもの n 個を選び

$$t_1\boldsymbol{m}_1 + \cdots + t_i\boldsymbol{m}_i + \cdots + t_n\boldsymbol{m}_n = \boldsymbol{w} \qquad (3.3)$$

とおくと，(3.2) より

$$N\sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} w_i$$

ここで，$s = \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} w_i/N$ とおき，(3.3) の両辺を s で割ると

$$\frac{t_1}{s}\boldsymbol{m}_1 + \cdots + \frac{t_i}{s}\boldsymbol{m}_i + \cdots + \frac{t_n}{s}\boldsymbol{m}_n = \frac{\boldsymbol{w}}{s}$$

$\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{s} = 1$ より $\frac{\boldsymbol{w}}{s}$ は $\boldsymbol{m}_i$ より張られる $\sum_{i=1}^{n} x_i = N$ なる $n-1$ 次元の超平面 β 上にある。

ここで $\boldsymbol{w}/s$ 超多角形 γ の内部の点であれば

$$0 \leqq \frac{w_i}{s} \leqq m_i \qquad (i=1\sim n) \qquad (3.4)$$

$$\therefore \quad 0 \leqq \frac{w_i}{m_i} \leqq \sum_{i=1}^{n} w_i/N \qquad (i=1\sim n) \qquad (3.5)$$

逆に (3.5) が成り立っていれば (3.4) が言えて，$\frac{\boldsymbol{w}}{s}$ は $\sum_{i=1}^{n} x_i = N$ なる超平面 β 上の点であり，かつ超直方体 α の内部の点である。したがって $\boldsymbol{w}/s$ は超多角形 γ 内部の点であり，γ の頂点のうち適当な n 点より構成される γ 内の超 n 角形内にある。よって，その頂点ベクトルを $\boldsymbol{m}_i$ $(i=1\sim n)$ とすると，

$$l_1\boldsymbol{m}_1 + \cdots + l_i\boldsymbol{m}_i + \cdots + l_n\boldsymbol{m}_n = \frac{\boldsymbol{w}}{s}$$

が成り立つ。ただし，$0 \leqq l_i \leqq 1$ $(i=1\sim n)$，$\sum_{i=1}^{n} l_i = 1$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} sl_i\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{w}$$

$sl_i = t_i$ とおくと

$$\sum_{i=1}^{n} t_i\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{w} \quad \left(0 \leqq t_i,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} w_i/N\right) \qquad (3.6)$$

すなわち，超多角形 γ の頂点ベクトル $\boldsymbol{m}_i$ のうち適当なもの n 個を選び，$n\times n$ 行列 $\boldsymbol{M}\{\boldsymbol{m}_1, \cdots, \boldsymbol{m}_n\}$ を作って，$\boldsymbol{Mt} = \boldsymbol{w}$ の解 $\boldsymbol{t}$ の各成分を非負にできる。また (3.6) より $T = \sum_{i=1}^{n} t_1 = \sum_{i=1}^{n} w_i/N$ したがって，(1) が成り立つ。

(2) 要素番号は w_i/m_i の小さい順に付けられているとすると，$\sum_{i=1}^{n} w_i/N < \frac{w_n}{m_n}$ より

$$m_n\left(\sum_{i=1}^{n-1} w_i + w_n\right) < (N - m_n + m_n)w_n$$

$$m_n\sum_{i=1}^{n-1} w_i < (N - m_n)w_n$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} w_i}{N - m_n} < \frac{w_n}{m_n} \qquad (3.7)$$

よって，要素 w_n に m_n 人割り当て，残りの人数で他の要素を行うことにすると，$\sum_{i=1}^{n-1} w_i/(N-m_n) \geqq \frac{w_{n-1}}{m_{n-1}}$ であれば (1) から $1\sim n-1$ の要素を同時に行

う場合の最短所要時間は w_n/m_n となり (3.7) より作業全体の所要時間は w_n/m_n となる。もし, $\sum_{i=1}^{n-1} w_i/(N-m_n)<\frac{w_{n-1}}{m_{n-1}}$ の場合は，この手続きを不等号が逆になるまで行えば良い。

以上により定理は証明された。

4. 一般的な作業における解

この章では要素間に前後関係があり，すべての要素は同時には行えない一般的な場合の一般的解法について説明し，この手法によって得られた作業計画が最短時間をもたらすことを言う。また章末にこの手法により解いた，簡単な例題を示す。

4.1 例題による考察

図-8 で表わされる作業を5人で行う場合を考える。すぐに思いつく方法として，要素 2, 3, 4 は同時にでき，5, 6 は 2, 3 の終了後同時にできるので，初めに要素 2, 3, 4 を同時に行い，次に 5, 6 を同時に行うというものがあるが，この場合の所要時間は次のようになる。

$$\sum_{i=2}^{4}\frac{w_i}{N}=2<\max_{i=2\sim4}\frac{w_i}{m_i}=3$$

$$\sum_{i=5}^{6}\frac{w_i}{N}=\frac{7}{5}<\max_{i=5,6}\frac{w_i}{m_i}=\frac{3}{2}$$

よってどちらも待ち時間を生じ，所要時間は 9/2 である。しかし要素 4, 5, 6 も同時にできるので，要素 4 のうち要素量 2 を要素 2, 3 と同時に行い，残った要素量 4 を要素 5, 6 と同時に行うことにすると，

$$\sum_{i=2}^{4}\frac{w_i}{N}=\frac{6}{5}>\max_{i=2\sim4}\frac{w_i}{m_i}=1$$

$$\sum_{i=4}^{6}\frac{w_i}{N}=\frac{11}{5}>\max_{i=5,6}\frac{w_i}{m_i}=2$$

よってどちらも待ち時間を生じず，所要時間は 17/5

表-1 作業要素パラメータ

NO	要素量 (wi)	限界人数 (mi)	wi／mi
2	2	3	2／3
3	2	2	1
4	6	2	3
5	4	3	4／3
6	3	2	3／2

作業人数 N=5

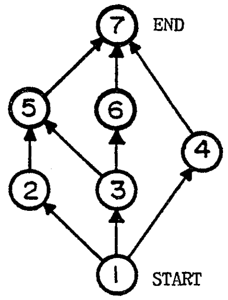


図-8 例題作業グラフ

(<9/2) である。この例からわかるように，要素間に前後関係のある一般的な作業を行う場合は，前後する要素のグループと同時に行える要素のそれぞれのグループへの要素量配分が重要となる。

4.2 極大集合とライン

4.1 より，一般的な作業を行う場合，同時に行える要素のグループが解を求める際重要な役割を果たすであろうことが予想される。それはまた理論を展開するときの基礎概念としても重要なものである。以下に基礎概念として重要な2つの概念の説明を行う。

(1) 極大集合

同時に行える作業要素よりなる集合で，あと1つの要素を加えるとそれらすべては同時には行えなくなるものをいう。図-8 の例では {2,3,4}, {4,5,6} は極大集合であるが，{2,3}, {5,6} はそうではない。他に {1}, {2,4,6}, {7} が極大集合である。(定義から明らかなように，初めと終わりを表わすダミー要素は，それだけで極大集合を構成する。)

(2) ライン

4.3.1 の方法により求めた極大集合の前後関係を有向線分で表わし，各極大集合を点で表わした図（ライングラフと言う。図-9 参照）をつくり，それをもとに {START} から {END} までたどる際にできる極大集合の列をラインという。図-8 の例ではラインは2つあり，それぞれ, $(\bar{1}\cdot\bar{2}\cdot\bar{3}\cdot\bar{4}\cdot\bar{5})$, $(\bar{1}\cdot\bar{2}\cdot\bar{4}\cdot\bar{5})$ である。またラインには次のような性質がある。すなわち各々のラインを構成する極大集合の和をとると，作業を構成するすべての要素の集合になる。これを式で表わすと

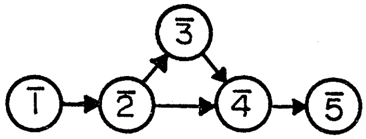


図-9 例題ライングラフ

$$\bigcup_{i=1}^{n(j_1)} {}_{j_1}L_i = \bigcup_{i=1}^{n(j_2)} {}_{j_2}L_i = \Omega \qquad (4.1)$$

${}_jL_i$ ： ライン j の i 番目の極大集合

$n(j)$： ライン j を構成する極大集合の数

Ω ： 作業を構成するすべての要素より成る集合

このことは，どのラインに従って作業を行っても，やり残しの要素は１つも無いということを意味する。

4.3　手法の概要

この節では手法の重要な部分である，前後する極大集合の共通要素の要素量配分について説明し，それに前後して，極大集合の前後関係の求め方を説明し，手法のフローを示す。

4.3.1　極大集合の前後関係の求め方

２つの極大集合があった場合，一方が他方の終了後直ちに行えるということは，前に行う極大集合に属す要素すべてが終了したと仮定した場合に，後に行うべき極大集合に属す要素すべてを開始するのに必要な要素がすべて終了していることが保証されているということである。

ある２つの極大集合 A，B があって，A の直後に B ができると仮定する。B に属す要素で $A\cap B$ に属さない任意の要素を x とし，x を行うために終了していなければならない直前の要素を y_i とすると，y_i のすべてが A に属している場合か，あるいは y_i を始点とする有向線分の向きに従って要素を順次たどっていくとそれらの要素のあるもの (v) が A に含まれており，かつその要素を終点とする有向線分を逆方向に要素を順次たどって y_i に行きつく場合に，それらの要素がすべて B に含まれていないことが必要十分である。しかしながら，後者の場合，y_i と v との間に要素は一つも介在しないのである。以下にこのことを証明する。

いま，図-10 (a) のように記号をつけると，$x\in B-A$ だから $v_{k_2}\to x$ なる関係が存在する ($v_{k_2}\in A-B$)。よって x を含む極大集合はすべて A が終了してからでないと開始できない。ここで $z_j\to x$ なる関係がないとすると，z_j，x はある極大集合 C に含まれる。ところが v_{k_1} は z_j の終了後に開始できるので A は C が終了してからでないと開始できない。これは矛盾である。よって $z_j\to x$ なる関係が存在する。(明らかなように，$z_j\to u\to x$ のような u は存在しない) すると $a \overset{\nearrow c \searrow}{\longrightarrow} b$ のような関係が存在することになり，これは要素の前後関係の表わし方に矛盾する。よって z_j なる要素は存在しない。また，もし $v_{k_1}\in A-B$ ならば $v_{k_1}\to x$ となり，これも要素の前後関係の表わし方に矛盾する。よって，$v_{k_1}\in A\cap B$。逆に，$B-A$ に属する任意の要素 x の直前の要素のあるものが A に必ず含まれ，また直前の要素の他のものの直後の要素のあるものが $A\cap B$ に含まれているならば，B は A の直後に開始できる。よって上記のことは証明された。

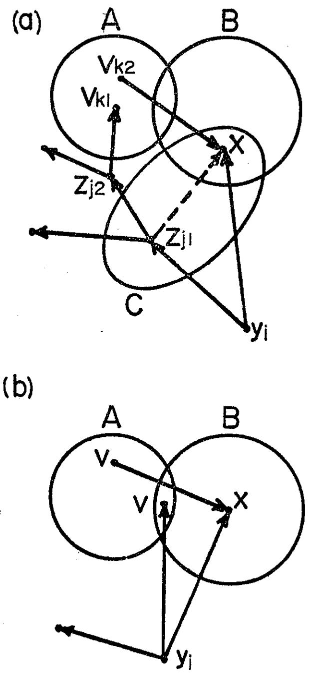


図-10　極大集合前後関係

以上のことより，２つの極大集合の前後関係の求め方がわかったことになる。すなわち，ある極大集合 A，B で，$B-A$ に含まれる要素の直前の要素のあるものが $A-B$ に含まれ，かつそれ以外のすべての直前の要素の直後の要素のあるものが $A\cap B$ に含まれているならば，$A\to B$ なる前後関係が存在する。(図-10(b))

4.3.2　要素量配分

あるラインを構成する極大集合をその前後関係に従って {START} から {END} まで行い作業を完了した時，各極大集合が待ち時間無しであれば，最短時間で作業が完了したことになる。しかし一般的には，そのラインの極大集合のあるものは待ち時間が生じ，他のものは待ち時間を生じない。仮に極大集合間に共通部分がなかったとしたら，並行作業要素の問題に帰着し，それぞれの極大集合の最短所要時間の和が，そのラインの最短所要時間になる。しかしながら極大集合

間には共通部分が存在し，その部分に含まれる要素の各極大集合への要素量配分方法によって，極大集合は待ち時間を生じたり生じなかったりする（4.1 参照)。以下に，極大集合の共通部分の要素の最適配分方法について説明する。

この方法の重要なポイントを把握するために，1つのラインが，{START} と {END} を除いた2つの極大集合 $(\bar{1}, \bar{2})$ によって構成されている場合について考えてみよう。2つの極大集合の関係には次の3つがある。

(i) 両方とも待ち時間を生じない

(ii) 一方は待ち時間を生じ，他方は待ち時間を生じない

(iii) 両方とも待ち時間を生じる

これらの各々について配分方法は異なる。

(i) の場合

この場合は両方とも最短時間が $\sum w_{j|i}/N$ $(j=\bar{1}, \bar{2})$ ($w_{j|i}$: 要素 i の極大集合 j への要素配分量) だから，共通要素 k のうち Δw_k を $\bar{1}$ から $\bar{2}$ へ移すと，$\bar{1}$: $T_1'=T_1-\Delta w_k/N$, $\bar{2}$: $T_2'=T_2+\Delta w_k/N$ よって，$T_1'+T_2'=T_1+T_2$ となり所要時間は変化しない。したがって $\sum w_{j|i}/N>\max(w_{j|i}/m_i)$ $(j=\bar{1}, \bar{2})$ となるように共通要素を配分できる。

(ii) の場合

まず，共通要素の要素量すべてを待ち時間有の極大集合 $(\bar{1})$ に配分し，その幾らかを待ち時間無 $(\bar{2})$ の方へ移すことにすると

(a) 共通要素が $\bar{1}$ の最長時間要素でない場合

$$\bar{1}:\ T_1'=T_1,\quad \bar{2}:\ T_2'=T_2+\Delta w_k/N$$

$$\therefore\quad T_1'+T_2'=T_1+T_2+\Delta w_k/N$$

よって，この場合は，共通要素の要素量すべてを待ち時間有 $(\bar{1})$ の方へ配分する。

(b) 共通要素が $\bar{1}$ の最長時間要素の場合

$$\bar{1}:\ T_1'=T_1-\Delta w_k/m_k,\quad \bar{2}:\ T_2'=T_2+\Delta w_k/N$$

$$\therefore\quad T_1'+T_2'=T_1+T_2+(\Delta w_k/N-\Delta w_k/m_k)$$

よって，$N>m_k$ の場合，その要素量を待ち時間有の極大集合の2番目の最長時間要素の所要時間と等しくなるまで，待ち時間無の極大集合に移動する。2番目の最長時間要素も共通要素であれば，それら2つの要素の要素量の幾らかをさらに $\bar{2}$ へ移すと

$$\bar{1}:\ T_1'=T_1-\alpha\quad (\alpha=\Delta w_k/m_k=\Delta w_l/m_l)$$

$$\bar{2}:\ T_2'=T_2+(\Delta w_k+\Delta w_l)/N$$

$$\therefore\quad T_1'+T_2'=T_1+T_2-\alpha+(\Delta w_k+\Delta w_l)/N$$

$$=T_1+T_2+\alpha\left(\frac{m_k+m_l}{N}-1\right)$$

よって，$m_k+m_l<N$ の時はさらに待ち時間無の方へ移す。このことを $\sum m_i \geqq N$ になるまで，あるいは待ち時間有 $(\bar{1})$ の最長時間要素が共通要素でなくなるまで続ける。

(iii) の場合

一方 $(\bar{1})$ の最長時間要素が共通要素でなく，他方 $(\bar{2})$ の最長時間要素が共通要素 (k) とし，Δw_k を $\bar{2}$ から $\bar{1}$ へ移したとすると

$$\bar{1}:\ T_1'=T_1,\quad \bar{2}:\ T_2'=T_2-\Delta w_k/m_k$$

$$\therefore\quad T_1'+T_2'=T_1+T_2-\Delta w_k/m_k$$

よって，$\bar{1}$ の最長時間要素が k になるか，$\bar{2}$ の最長時間要素が k でなくなるまで Δw_k を $\bar{1}$ に移す。この場合の最短所要時間は，$\bar{1}, \bar{2}$ の共通要素以外の要素での最長時間要素を k_1 ($\bar{1}$ において)，k_2 ($\bar{2}$ において) とすると，$T_{\min}=\max(w_{k_1}/m_{k_1}+w_{k_2}/m_{k_2}, w_k/m_k)$ となる。

次に，ラインを構成する極大集合が，{START} と {END} を除いて N 個 $(\geqq 2)$ である一般的な場合における，共通要素の最適要素量配分方法について理論と共に説明する。この手法の概略は以下の通りである。まず，あるラインを構成する極大集合の一部を待ち時間無，残りを待ち時間有と仮定し，その仮定に基づき，(3) に述べる方法によって，共通要素の要素量配分を行い，次に配分された要素量を用いて各極大集合の所要時間を計算し，それぞれの待ち時間有，無の仮定と一致したらその仮定は正しいことになり，同時にその仮定での共通要素の最適要素量配分がなされていることになる。以上のことをすべてのラインで行い，待ち時間有，無の仮定をすべて尽くして，そのうちで最短所要時間を与えるものを選ぶ，という方法である。この手法を説明するに先立って，待ち時間有，無の極大集合グループの共通要素の要素量配分の際に重要な概念となる，最短時間可能組合わせについて，(1), (2) で説明する。

(1) 待ち時間有の極大集合グループの最短所要時間について

ある一つの待ち時間有の極大集合にのみ含まれる要素を α_{ij} (極大集合 i にのみ含まれる j 番目の要素)，$\sigma=\{i_1, i_2, \cdots, i_n\}$ (i_j: 極大集合の番号) により表わされる極大集合のグループの共通部分にのみ含まれる要素を β_j $\left(\bigcap_{k=1}^{n} L_{i_k}\right.$ に含まれる要素の j 番目のもの$\left.\right)$ と表わす。ここで，σ の各極大集合の最長時間要素が，$\sigma_1=\{p(1), p(2), \cdots, p(n_1)\}$ の極大集合では β_j で，$\sigma_2=\{q(1), q(2), \cdots, q(n_2)\}$ の極大集合では $\alpha_{q(i)k(i)}$ であ

ると仮定する。($\sigma_1 \oplus \sigma_2 = \sigma$, $n_1+n_2=n$) また $w_{i|j}$ は要素 j のうち極大集合 i に含まれる要素量, m_i は要素 i の限界人数である。この場合次のような関係が成立する。

$$\frac{w_{p(1)|\beta_j}}{m_{\beta_j}} = \frac{w_{p(1)|\alpha_{p(1)l(1)}}}{m_{\alpha_{p(1)l(1)}}} + \gamma_{p(1)}$$
$$\vdots$$
$$\frac{w_{p(n_1)|\beta_j}}{m_{\beta_j}} = \frac{w_{p(n_1)|\alpha_{p(n_1)l(n_1)}}}{m_{\alpha_{p(n_1)l(n_1)}}} + \gamma p_{(n_1)}$$
$$\vdots$$
$$\frac{w_{q(1)|\beta_j}}{m_{\beta_j}} = \frac{w_{q(1)|\alpha_{q(1)k(1)}}}{m_{\alpha_{q(1)k(1)}}} - \gamma_{q(1)}$$
$$\vdots$$
$$\frac{w_{q(n_2)|\beta_j}}{m_{\beta_j}} = \frac{w_{q(n_2)|\alpha_{q(n_2)k(n_2)}}}{m_{\alpha_{q(n_2)k(n_2)}}} - \gamma_{q(n_2)}$$
$$\sum_{i=1}^{n_1} w_{p(i)|\beta_j} + \sum_{i=1}^{n_2} w_{q(i)|\beta_j} = w_{\beta_j}$$

ここで

$$\sum_{i=1}^{n_1} \gamma_{p(i)} - \sum_{i=1}^{n_2} \gamma_{q(i)} = \varepsilon \ (>0)$$

とおき

$$w'_{p(1)|\beta_j} = w_{p(1)|\beta_j} - m_{\beta_j}(\gamma_{p(1)} - \varepsilon/2n_1)$$
$$\vdots$$
$$w'_{p(n_1)|\beta_j} = w_{p(1)|\beta_j} + m_{\beta_j}(\gamma_{q(n_1)} - \varepsilon/2n_1)$$
$$w'_{q(1)|\beta_j} = w_{q(1)|\beta_j} + m_{\beta_j}(\gamma_{q(1)} + \varepsilon/2n_2)$$
$$\vdots$$
$$w'_{q(n_2)|\beta_j} = w_{q(n_2)|\beta_j} + m_{\beta_j}(\gamma_{q(n_2)} + \varepsilon/2n_2)$$

のように, β_j の要素配分量を変更すると

$$\sum_{i=1}^{n_1} w'_{p(i)|\beta_j} + \sum_{i=1}^{n_2} w'_{q(i)|\beta_j} = w_{\beta_j}$$
$$\frac{w'_{p(1)|\beta_j}}{m_{\beta_j}} > \frac{w_{p(1)|\alpha_{p(1)l(1)}}}{m_{\alpha_{p(1)l(1)}}}$$
$$\vdots$$
$$\frac{w'_{p(n_1)|\beta_j}}{m_{\beta_j}} > \frac{w_{p(n_1)|\alpha_{p(n_1)l(n_1)}}}{m_{\alpha_{p(n_1)l(n_1)}}}$$
$$\frac{w'_{q(1)|\beta_j}}{m_{\beta_j}} > \frac{w_{q(1)|\alpha_{q(1)k(1)}}}{m_{\alpha_{q(1)k(1)}}}$$
$$\vdots$$
$$\frac{w'_{q(n_2)|\beta_j}}{m_{\beta_j}} > \frac{w_{q(n_2)|\alpha_{q(n_2)k(n_2)}}}{m_{\alpha_{q(n_2)k(n_2)}}}$$

逆に, $\varepsilon<0$ であれば, 上式の不等号を逆にすることができる。よって, 最短所要時間をもたらす要素量配分の際, 待ち時間有の極大集合グループの共通要素は, それが属す待ち時間有のグループ内のすべての極大集合の最長時間要素になるか, すべての極大集合の最長時間要素にならないかのいずれかでなければならない。なぜなら上記の式で

$$t_{p(i)\beta_j} = \frac{w_{p(i)|\beta_j}}{m_{\beta_j}}, \qquad t_{q(i)\beta_j} = \frac{w_{q(i)|\beta_j}}{m_{\beta_j}}$$
$$t_{\alpha_{p(i)l(i)}} = \frac{w_{p(i)|\alpha_{p(i)l(i)}}}{m_{\alpha_{p(i)l(i)}}}, \qquad t_{\alpha_{q(i)k(i)}} = \frac{w_{q(i)|\alpha_{q(i)k(i)}}}{m_{\alpha_{q(i)k(i)}}}$$

とおくと,

$$t_{p(i)\beta_j} > t_{\alpha_{p(i)l(i)}} \quad (i=1\sim n_1)$$
$$t_{q(i)\beta_j} < t_{\alpha_{q(i)k(i)}} \quad (i=1\sim n_2)$$

とすれば, これらの極大集合グループ (待ち時間有) の所要時間 T は,

$$T = \sum_{i=1}^{n_1} t_{p(i)\beta_j} + \sum_{i=1}^{n_2} t_{\alpha_{q(i)k(i)}}$$
$$> \sum_{i=1}^{n_1} t_{\alpha_{p(i)l(i)}} + \sum_{i=1}^{n_2} t_{\alpha_{q(i)k(i)}}$$
$$> \frac{w_{\beta_j}}{m_{\beta_j}}$$

となり, $\varepsilon>0$ の時, w_{β_j}/m_{β_j} が最短であり, $\varepsilon<0$ の時, 共通要素でない各極大集合のみに含まれている最長要素の合計時間が最短になるからである。

(2) 待ち時間有の極大集合グループの最短時間可能組合わせについて

待ち時間有のグループの各極大集合の最長時間を t_i とすれば, $\sum t_i$ がそのグループの最短所要時間となる。(1) より, 共通要素はそれが属すすべての極大集合の最長時間要素となり得るので, 待ち時間有と無のグループ間の最適要素量配分を考慮する際, 待ち時間有の極大集合グループの各極大集合の最長時間をもたらす可能性のある要素の組合わせ, すなわち, 待ち時間有のグループの最短所要時間をもたらす可能性のある要素の組合わせ (最短時間可能組合わせ) は次のようになる。

f_i: 待ち時間有の極大集合番号 ($i=1\sim n_L$)
e_i: 待ち時間有の極大集合に属す要素番号
$I(e_i)$: 要素 e_i の層す極大集合番号の集合
Ω: $\{f_1, \cdots, f_{n_L}\}$

とおき

$$\bigcup_{i=i_1,\cdots,i_k} I(f_i) = \Omega, \qquad \bigcup_{i_{k1} \neq i_{k2}} I(f_i) = \phi$$

なる要素の組合わせを $\{e_i\}$ ($i=i_1, \cdots, i_k$) とおけば, $\sum_{i=i_1,\cdots,i_k} \frac{w_{e_i}}{m_{e_i}}$ が最短所要時間の可能性を持ち, $\{e_i\}$ が最短時間可能組合わせとなる。

(3) ある仮定における最適要素量配分方法

(i) 最初に, 待ち時間有と仮定された極大集合のグループに待ち時間有と無のグループ間の共通要素の要素量をすべて配分する。その際, 図-11 (a) のように待ち時間有の仮定の極大集合グループ内の各々の極大

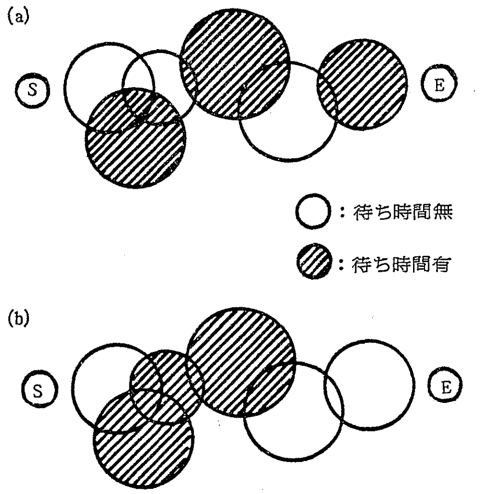


図-11　待ち時間有・無の仮定

集合が互いに共通部分を持たないならば，極大集合が2つの場合の（ii）の方法を各々の極大集合に適用すれば良いことになる。

しかし，図-11(b)のようにそれらが共通部分を持つ場合は以下の手続きを踏まなければならない。（以下の手続きは，図-11(a)の場合にも適用できる。したがって，どの仮定であってもこの節で述べる(i)～(vi)の方法で良い。）

(ii)　次に，(2)で述べたように，待ち時間有のグループの最短時間可能組合わせ（以下，単に「組合わせ」と言う）をすべてつくり，それらを所要時間の長い順に番号をつける。

(iii)　1番目の組合わせの所要時間と2番目の組合わせの所要時間の差を Δt とすると，1番目の組合わせのうち，待ち時間有と無のグループ間の共通要素で，1番目と2番目の組合わせの共通要素でない要素のうち限界人数（m_i）が最も小さい要素を k とすると，$m_k \times \Delta t$ だけその要素の要素量を待ち時間無の方へ移す。

(iv)　移動後の要素量に基づき，(ii)を行う。

(v)　(iv)の手続きにより，最長所要時間の組合わせが幾つかできるが，そのグループを1番目のグループと呼ぶことにする。1番目のグループの各組合わせから2番目（所要時間において）の組合わせと共通要素でない要素をひとつずつ取り出し（ある要素は，1番目のグループの幾つかの組合わせに共通している場合もある），それらの組合わせ（要素量移動組合わせと呼ぶことにする）のうち $\sum m_i$ の最小のものを $\{M\}$ とする。$\{M\}$ の $\sum m_i$ が作業人数（N）未満であれば，1番目のグループと2番目の組合わせとの所要時間の差を Δt とすると，$\{M\}$ の各要素 i から待ち時間無のグループに，$m_i \times \Delta t$ だけ要素量を移動する。

(vi)　(iv), (v) を続け，$\{M\}$ の $\sum m_i$ が N 以上，または，待ち時間有のグループのみに含まれている要

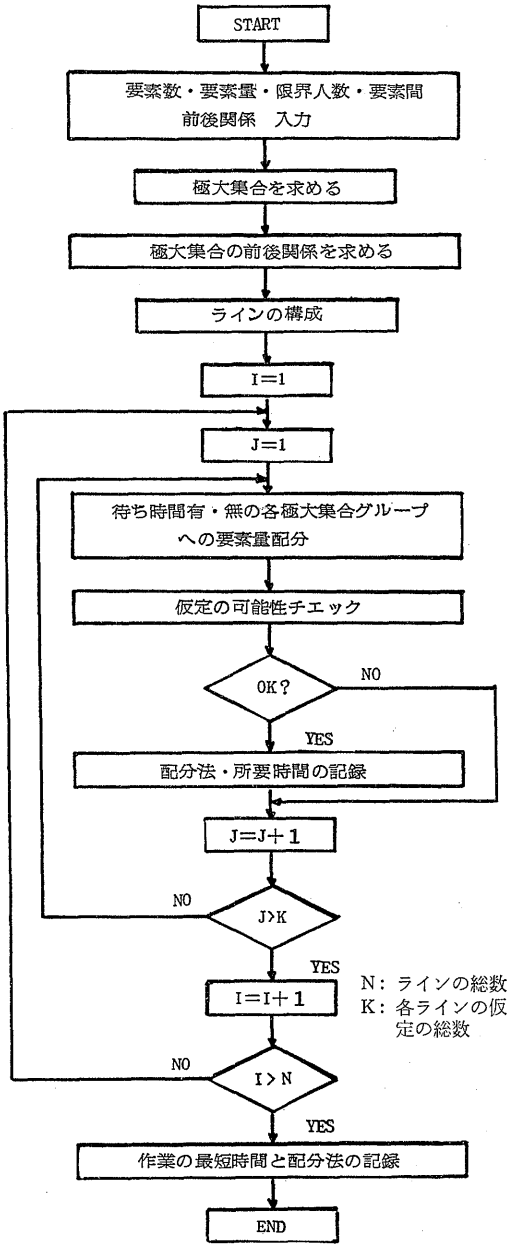


図-12　待ち時間最短化のフロー

素による組合わせの最長所要時間に，１番目のグループの所要時間が等しくなった時に以上の手続きを終了する。

4.3.3 手法のフロー

以上述べてきたことをまとめて，作業時間を最短化する手続きを，図-12 にフローチャートにして示す。

4.4 手法の最短性の証明

4.4.1 で，極大集合の前後関係に従い，それぞれの極大集合に含まれている要素を同時に行い作業を完了する場合，この手法が最短時間を与えることを証明し，4.4.2 において極大集合を意識せずに作った任意の作業計画に従って作業を行った場合も，必ず所要時間がこの手法で得られたものよりも短くなることがないことを証明する。したがって，２章で述べた仮定に基づいて作業が行われた場合，この手法が最短時間を与えることが保証される。

4.4.1 同時に行う要素の集合がすべて極大集合である場合

この方法で得られた所要時間より短い所要時間をもたらす配分方法があったとすると，その方法で得られる待ち時間有の極大集合グループの所要時間（T_1）とこの手法での待ち時間有の極大集合グループの所要時間（T_0）との関係は，(i) $T_0>T_1$, (ii) $T_0<T_1$, (iii) $T_0=T_1$ のうちのいずれかである。

また，この方法で得られた待ち時間有の極大集合グループの最短所要時間を与える最短時間可能組合わせの集合を A，残りの組合わせの集合を B，また，他の方法による最短所要時間を与える組合わせの集合を C，残りの組合わせの集合を D とすると，明らかなように，

$$A\cup B=C\cup D,\ A\cap B=\phi,\ C\cap D=\phi$$

(i) $T_0>T_1$ の場合

この場合は，以下の関係が成り立っている。

$$T_1=T(C)=T(A\cap C)<T(A)=T_0$$
$$T(A\cap D)<T(C)$$
$$A=(A\cap C)\cup(A\cap D)$$

以上より，$T_0>T_1$ であるためには，A の各組合わせからそれぞれある要素量を減らさなければならない。しかし，A の各組合わせによる要素量移動組合わせの $\sum m_i$ すべて N 以上なので，このことは作業全体の所要時間を長くすることになり，仮定に矛盾する。

(ii) $T_0<T_1$ の場合

この場合は，$T_1=T(A\cap C)=T(B\cap C)>T(A)>T(B)$ であるので，A の一部と B の一部の組合わせのある要素の要素量の幾らかを待ち時間有のグループに戻さなければならない。ところが，A の各組合わせの各要素は待ち時間有の各極大集合の最長時間要素であり，B の各組合わせのある要素は最長時間要素ではない。また，A の組合わせの待ち時間有のグループでの所要時間を長くするということは，ある極大集合の最長時間要素のある要素量を待ち時間無のグループから待ち時間有のグループに戻すことなので，B の組合わせの最長時間要素でない要素は，この手続きを経ても最長時間要素とはならない。したがって，$T(A\cap C)=T(B\cap C)>T(A)$ となることはあり得ない。よって，$B\cap C=\phi$，∴ $C\subset A$，しかしながら，C に属す組合わせより要素量移動組合わせをつくると，そのうちのあるものの $\sum m_i$ は N より小さいものができ，それらのある要素量を待ち時間無のグループに移せば，作業全体の所要時間をさらに短くできる。よって仮定に矛盾する。

(iii) $T_0=T_1$ の場合

(ii) と同様の考え方より，$B\cap C=\phi$，また，$T(C)>T(D)$ より，$A\cap D\neq\phi$ であれば，A の一部の組合わせのある要素量をさらに待ち時間無のグループに移さなければならない。しかし，T_0 は変わらないので，待ち時間無のグループへ移動した要素量分だけ作業全体の所要時間は長くなる。よって $A\cap D=\phi$。以上のことより

$$A=C,\quad B=D$$

よって，この場合は T_0 になった時点での A に属す各組合わせの，既に待ち時間無へ移動した要素のうち幾らかを待ち時間有の方へ戻し，まだ待ち時間無へ移動していない要素のある量を待ち時間無へ移すということになる。この場合の要素量の移動方法は，次の２つが考えられる。

① 待ち時間有のグループに属し，互いに共通部分を持たないある２つの極大集合に含まれる，最長時間要素の要素量移動，あるいは，互いに共通部分を持つ一群の極大集合と，それらとは共通部分を持たない極大集合，または極大集合群に含まれる最長時間要素の要素量移動

② 待ち時間有のグループに属する極大集合で，互いに共通部分を持つ一群の極大集合内の要素の要素量移動

以下にそれぞれを吟味する。

① の場合

この場合は，各極大集合の最長時間要素の $\sum m_i$ は

N 以上であり，そのうちのある要素は要素量を移動していない。したがって，ある極大集合の最長時間要素のある要素量を待ち時間有の方へ房す時，それらの要素の $\sum m_i$ は N 未満である。その際，α だけその極大集合の所要時間が長くなったとすると，他の極大集合の最長時間要素から各々 $\alpha\times m_i'$ だけ待ち時間無へ移さなければならない。その場合，$\sum m_i'>N$ である。この時の時間変化は

$$\Delta T=\alpha-\frac{1}{N}(\sum \alpha m_i)+\left\{-\alpha+\frac{1}{N}(\sum \alpha m_i')\right\}$$
$$=\frac{\alpha}{N}(\sum m_i'-\sum m_i)$$
$$>0$$

したがって，この場合は作業全体の所要時間は長くなる。よって仮定に矛盾する。

② の場合

この場合，図-13 のような例をとると，要素量移動組合わせとして，(i_1, j_1, k_1), $(i_1, j_3, k_1)\cdots$ が考えられる。ところで，(i_1, j_1) が要素量を移動した場合には，

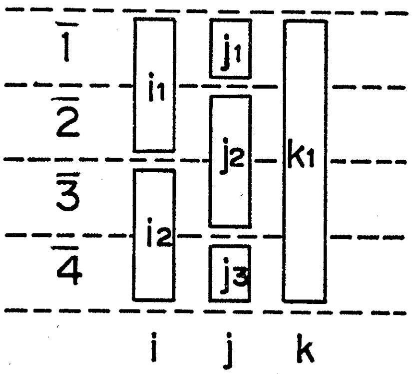


図-13 要素量移動組合わせ

組合わせ i, j で (i_1, j_1) 以外の要素量移動組合わせ（例，$(i_2, j_3)\cdots$）がある要素量を待ち時間無の方へ移動するということはない。なぜなら，$m_{i_1}+m_{j_1}<m_{j_2}+m_{j_3}\cdots$ であり，i, j 以外の他の組合わせも含めた場合の要素量移動組合わせを考える際に，m_{j_2}, m_{j_3} etc が含まれていれば，それらを，m_{i_1}, m_{j_1} に替える方が $\sum m_i$ は小さくなるからである。よって，この場合は一般的に次のことが言える。

A に属す組合わせを f_i $(i=1\sim n)$, f_1 の中で互いに共通部分を持つ一群の極大集合に含まれる要素を $f_i(j)$ $(j=1\sim k_i)$ と表わすことにする。($f_{i_1}(k)=f_{i_2}(l)$ の場合もある）T_0 になった各組合わせの中の要素量を移動した要素の組合わせを $\{f_i(l_i)\}$ とし，その中から待ち時間無のグループからある要素を戻す要素の組合わせを $\{f_k(l_k)\}$ $(\{f_i(l_i)\}\supset\{f_k(l_k)\})$ とする。そして f_k の中から l_k でない要素 p_k のある要素量を待ち時間無の方へ移動する（待ち時間有のグループの所要時間が変化しないよう移動する）ことにすると，$\sum m_{l_k}\leqq\sum m_{p_k}$。なぜなら，ここで用いる方法では，常に組合わせ中の要素量移動組合わせのうち $\sum m_i$ の最小のものを移動させているので，$\sum m_{l_k}>\sum m_{p_k}$ であれば，要素 p_k を l_k の替わりに入れているはずだからである。よって，この場合も作業全体の所要時間を短くすることはできない。

(i), (ii), (iii) より，同時に行う要素の集合が極大集合である場合は，この方法が最短所要時間を与えることが証明された。

4.4.2 同時に行う要素の集合が必ずしも極大集合とは限らない場合

ある作業計画に従って作業が終了したとすると，同時に行える幾つかの要素の集合をある時間行うことを続けることによって，作業が終了することになる。

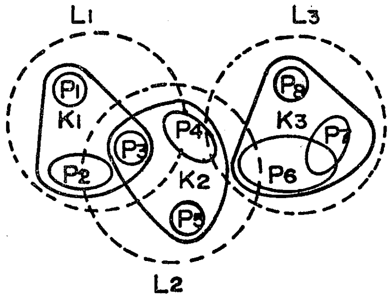


図-14 任意の並行要素集合と極大集合との関係

それらの要素の集合を，{START} から始めて i 番目のものを P_i と表わす。 に P_i と同時にできる集合を集め，それ以上合わせるとそれらすべての集合の要素は同時にはできなくなる和集合を K_1 とし，その最後の順番の集合を P_{l_1} とする。さらに，P_{l_1+1} と同時にできる集合を合わせ，それ以上合わせると同時にできなくなる和集合を K_2 とする。これらの操作を続け，END までたどる。

以上の操作によりできた和集合の数を n とすると，

$$K_i\subseteq L_i \quad (i=1\sim n,\ L_i\text{: 極大集合}) \qquad (4.2)$$
$$\bigcup_{i=1}^{n} K_i=\bigcup_{i=1}^{n} L_i \qquad (4.3)$$

なる極大集合 L_i を選ぶことができる。

次に，K_i を行うことは，L_i を行う方法の1つであ

ることを言う。

まず, $K_i-\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j=L_i-\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j$ を証明する。

$$A_i=K_i-\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j,\qquad B_i=L_i-\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j$$

とおくと, (4.2) より

$$A_i\subseteq B_i$$

ここで, $x\in B_i$, かつ, $x\notin A_i$ なる要素 x が存在すると仮定すると, A_i, B_i の定義より

$$A_i\cap B_j=\phi,\ B_i\cap B_j=\phi\qquad (i\neq j)$$

$$\therefore\ x\notin B_j,\ x\notin A_j\qquad (i\neq j)$$

同じく, A_i, B_i の定義より

$$x\notin L_j,\ x\notin K_j\qquad (i\neq j)\tag{4.4}$$

$$\therefore\ x\notin\bigcup_{j\neq i}^{n}\mathrm{K}_j\tag{4.5}$$

また, $K_i=\left\{K_i-\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j\right\}\cup\left\{K_i\cap\left(\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j\right)\right\}$ と (4.4) より

$$x\notin\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j$$

$$\therefore\ x\notin\left\{K_i\cap\left(\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j\right)\right\}$$

$$\therefore\ x\notin K_i\tag{4.6}$$

(4.5), (4.6) より

$$x\notin\bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

$$\therefore\ \bigcup_{i=1}^{n} K_i\neq\bigcup_{i=1}^{n} L_i$$

これは (4.3) と矛盾する。したがって

$$K_i-\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j=L_i-\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j$$

また $K_i-\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j=K_i-K_i\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n} L_j\right)$, $L_i-\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j=L_i-L_i\cap\left(\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j\right)$ より

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n}\left\{K_i\cap\left(\bigcap_{j\neq i} L_j\right)\right\}&=\bigcup_{i=1}^{n}\left\{L_i\cap\left(\bigcup_{j\neq i} L_j\right)\right\}\\&=\bigcup_{i=1}^{n} K_i-\bigcup_{i=1}^{n}\left\{K_i-\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j\right\}\\&=\bigcup_{i=1}^{n} L_i-\bigcup_{i=1}^{n}\left\{L_i-\bigcup_{j\neq i}^{n} L_j\right\}\end{aligned}\tag{4.7}$$

極大集合を行う時, 所要時間は, $\bigcup_{i=1}^{n}\left\{L_i\cap\left(\bigcup_{j\neq i} L_i\right)\right\}$ に属す要素の要素量配分によって決定した。K_i を順次行う場合は, $\bigcup_{i=1}^{n}\left\{K_i\cap\left(\bigcup_{j\neq i} K_i\right)\right\}$ に属す要素の要素量配分で決定するが, この場合は, $\bigcup_{i=1}^{n}\left\{K_i\cap\left(\bigcup_{j\neq i}^{n} L_i\right)\right\}-\bigcup_{i=1}^{n}\left\{K_i\cap\left(\bigcup_{j\neq i} K_i\right)\right\}$ に属す要素の要素量移は動せず, $\bigcup_{i=1}^{n}\left\{K_i\cap\left(\bigcup_{j\neq i} K_i\right)\right\}$ に属す要素の要素量のみが移動するという, $\bigcup_{i=1}\left\{L_i\cap\left(\bigcup_{j\neq i} L_j\right)\right\}$ に属す要素量配分の特殊な場合である((4.7)より)。したがって, K_i を行うことは, あるラインを構成する極大集合を行う際の特殊な場合になる。ところで K_i は, $P_{l_{(i-1)}+1}\sim P_{l_i}$ までの集合を含んでいるが, $\max(a_1+a_2, b_1+b_2)\leqq\max(a_1, b_1)+\max(a_2, b_2)$ より P_i を順次行う場合の所要時間は, K_i を順次行う場合よりも短くはならない。よって以上のことより, この手法で得られた作業方法は最短所要時間を与えることが証明できた。

4.5 例題への適用

図-1 の例題を, これまで述べてきた理論をコンピュータ・プログラムにして解いた結果を以下に示す。表-2 はこの例題の作業要素の限界人数, 要素量を示し, 図-15 はそれらの要素より構成された, 極大集合とライングラフである。

図-16 は最短の方法である。図-17 は直観によって

表-2　作業要素パラメータ

No.	要素量 (w_i)	限界人数 (m_i)	w_i／m_i
2	5.0	2	2.5
3	7.0	3	2.33
4	2.0	3	0.68
5	8.0	2	4.0
6	2.0	4	0.5
7	5.0	2	2.5
8	5.0	3	1.67
9	5.0	4	1.25
10	3.0	3	1.0

作数人数　N＝5

```
LIMIT SET
  1: 1
  2: 2, 3, 4
  3: 2, 3, 7
  4: 2, 6, 7
  5: 2,10
  6: 4, 5
  7: 4, 8
  8: 5, 6, 7
  9: 5,10
 10: 6, 7, 8
 11: 7, 8, 9
 12: 8, 9,10
 13:11
```

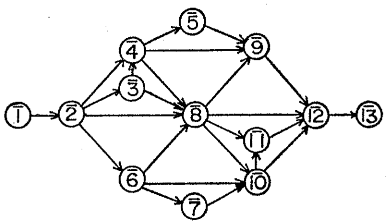


図-15　極大集合とライングラフ

```
     LINE:  1-  2-  6-  8-  9- 12- 13
W.LIMSET:  8
N.LIMSET:  2,  6,  9, 12
TOTAL TIME=    8.50000
     ETIME:<  2>=  2.500,<  6>=  0.500,<  8>=  2.500,
           <  9>=  1.000,< 12>=  2.000
ALLOCATED VOLUME
EL/LM    2           6           8           9          12
   2   5.0000      0.0         0.0         0.0         0.0
   3   7.0000      0.0         0.0         0.0         0.0
   4   0.5000      1.5000      0.0         0.0         0.0
   5   0.0         1.0000      5.0000      2.0000      0.0
   6   0.0         0.0         2.0000      0.0         0.0
   7   0.0         0.0         5.0000      0.0         0.0
   8   0.0         0.0         0.0         0.0         5.0000
   9   0.0         0.0         0.0         0.0         5.0000
  10   0.0         0.0         0.0         3.0000      0.0
```

図-16　最短時間要素量配分

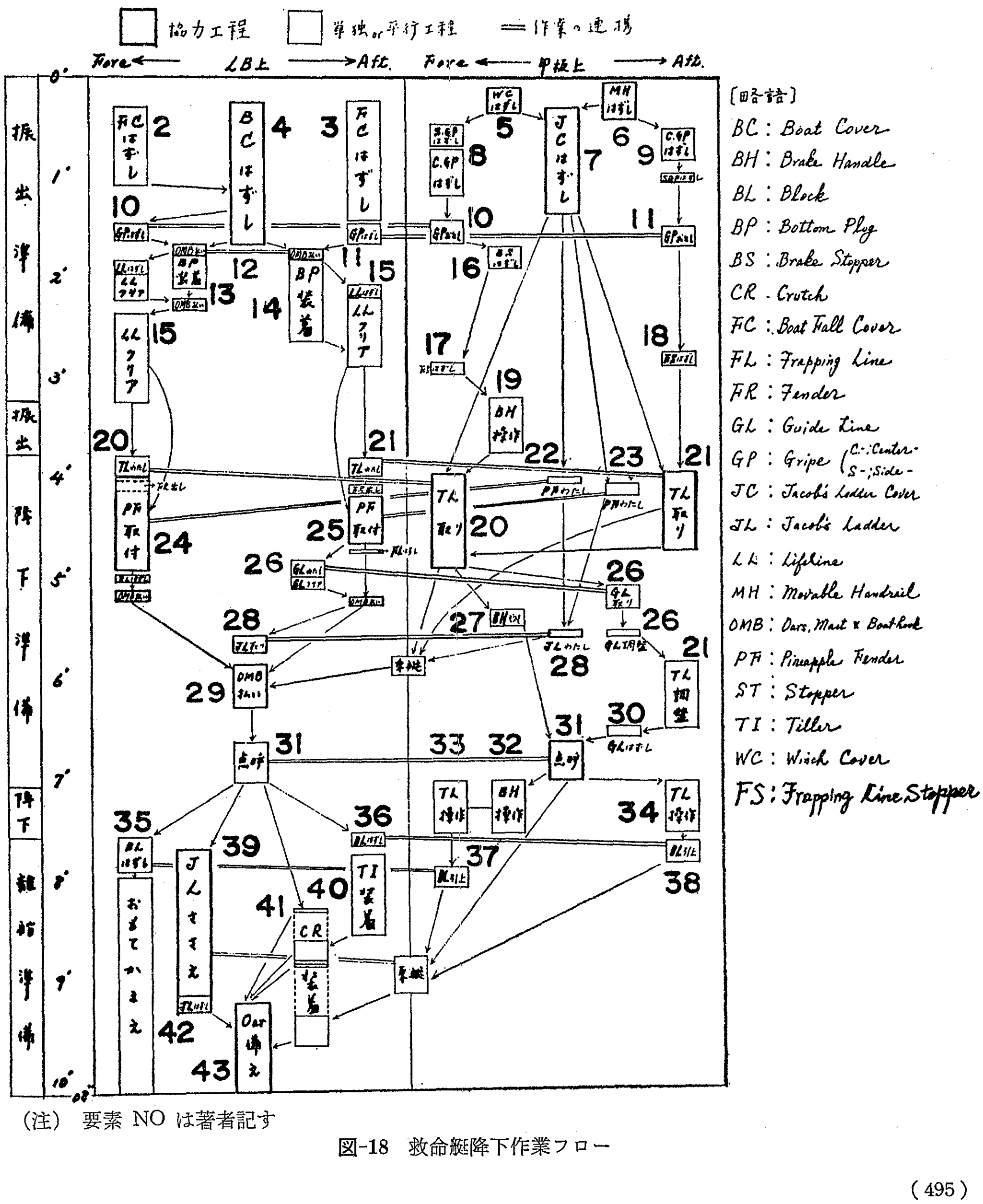
```
     LINE:  1-  2-  8- 12- 13
W.LIMSET:  8
N.LIMSET:  2, 12
TOTAL TIME=    9.40000
     ETIME:<  2>=   2.800,<  8>=   4.000,< 12>=   2.600
ALLOCATED VOLUME
EL/LM      2          8          12
   2    5.0000      0.0         0.0
   3    7.0000      0.0         0.0
   4    2.0000      0.0         0.0
   5    0.0         8.0000      0.0
   6    0.0         2.0000      0.0
   7    0.0         5.0000      0.0
   8    0.0         0.0         5.0000
   9    0.0         0.0         5.0000
  10    0.0         0.0         3.0000
```

図-17　要素量配分の一方法

すぐに出てくる配分方法であるが，特に要素5の各極大集合への要素量配分に注目すると，最短のものは，たいへん巧妙な方法であることがわかる。

5.　救命艇降下作業への適用

救命艇降下作業は，緊急時における人間の能力に不確実性が存在するが，一応，作業に携わる人員は十分習熟し能力的に一定であり，かつ，適当な指揮の下に作業要素間の人員の移動がスムーズに行なわれると仮



（注）　要素 NO は著者記す

図-18　救命艇降下作業フロー

定して，この手法を適用してみた。

5.1 実験時の作業の記述

図-18 に救命艇降下作業のフローを示す。これは航海訓練所練習船青雲丸での救命艇降下作業の実験時の作業の進行を中村祐三氏等がフローにしたものであり，作業は指揮者1人，作業員10人で行なわれた。それらの人々のうち5人は熟練者であり，適切な指揮のもとに行われたにもかかわらず，10分少々の時間を要している。

図-18 と救命艇降下作業の8ミリフィルム等に基づいて作成した各作業のパラメータ，作業グラフをそれぞれ 表-3，図-19 に示す。

5.2 本手法による作業のシミュレーション結果

図-19 よりわかるように，救命艇降下作業は，振出時における BH 操作，降下準備作業における BH 操作，点呼によって，大きく4つに分けられる。よって，プログラムにかける時は，分けられた部分毎に行った。その方が計算時間は大幅に短縮される。また離船準備作業は，BL はずしの他は，本質的に人数が増しても時間は短縮されないので，図-18 と同じ手順

表-3 作業要素パラメータ

要素NO.	作業名	要素量 (wi)	限界人数 (mi)	wi／mi
1	START	—	—	—
2	Fore FC はずし	47	1	47
3	Aft FC はずし	47	1	47
4	BC はずし	168	4	42
5	WC はずし	30	2	15
6	MH はずし	43	3	14. 3
7	JC はずし	189	4	47. 3
8	ForeS. C. GPはずし	30	2	15
9	AftS. C. GPはずし	30	2	15
10	ForeGPはずし・おとし	26	2	13
11	AftGPはずし・おとし	26	2	13
12	OMB 払い	28	4	7
13	Fore BP 装着	21	1	21
14	Aft BP 装着	21	1	21
15	Fore LLはずし・クリア Aft LLはずし・クリア	126	5	25. 2
16	BS はずし	13	1	13
17	Fore FS はずし	9	1	9
18	Aft FS はずし	9	1	9
19	BH 操作	32. 2	1	32. 2
20	ForeTLわたし・取り	122	2	61
21	AftTLわたし・取り	122	2	61
22	Fore PF わたし	4	1	4
23	Aft PF わたし	4	1	4
24	Fore PF 取付	94	2	47
25	Aft PF 取付	94	2	47
26	GLわたしクリア・取り	69	4	17. 3
27	BH 操作	11	1	11
28	JL わたし・取り	21	4	5. 3
29	OMB 払い	77	3	25. 7
30	GL はずし	5	1	5

作業人数 N=10

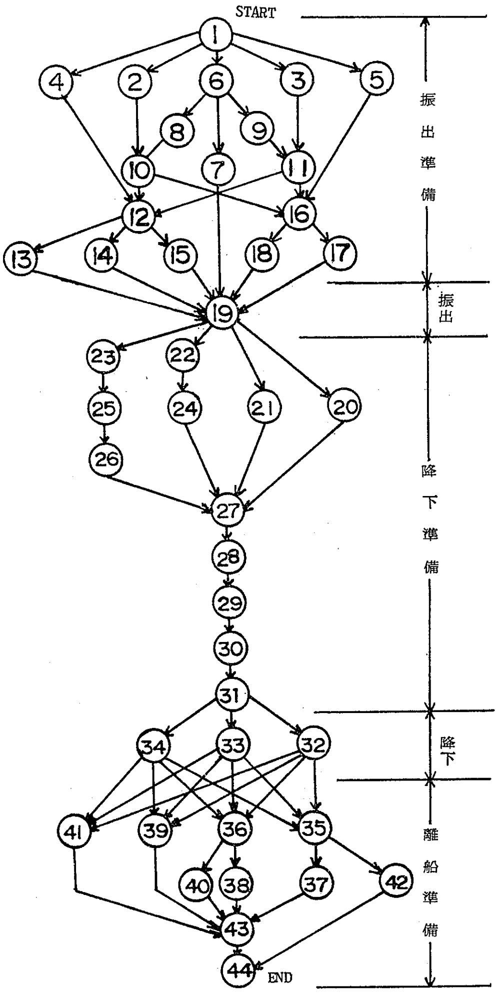


図-19 救命艇降下作業グラフ

表-4 極 大 集 合

極大集合	要 素	極大集合	要 素
$\overline{1}$	1	$\overline{12}$	7，12，17，18
$\overline{2}$	2，3，4，5，6	$\overline{13}$	7，13，14，15，16
$\overline{3}$	2，3，4，5，7，8，9	$\overline{14}$	7，13，14，15，17，18
$\overline{4}$	2，4，5，7，8，11	$\overline{15}$	19
$\overline{5}$	3，4，5，7，9，10	$\overline{16}$	20，21，22，23
$\overline{6}$	4，5，7，10，11	$\overline{17}$	20，21，22，25
$\overline{7}$	4，7，16	$\overline{18}$	20，21，22，26
$\overline{8}$	4，7，17，18	$\overline{19}$	20，21，23，24
$\overline{9}$	5，7，12	$\overline{20}$	20，21，24，25
$\overline{10}$	5，7，13，14，15	$\overline{21}$	20，21，24，26
$\overline{11}$	7，12，16	$\overline{22}$	27

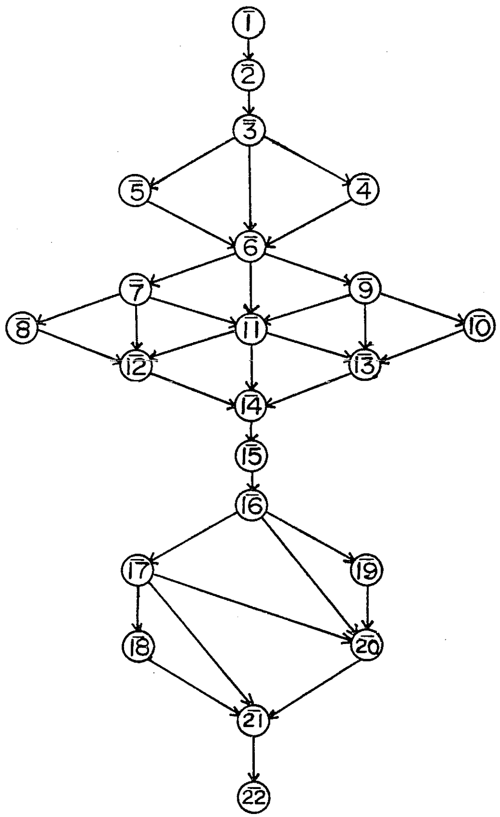


図-20　ライングラフ

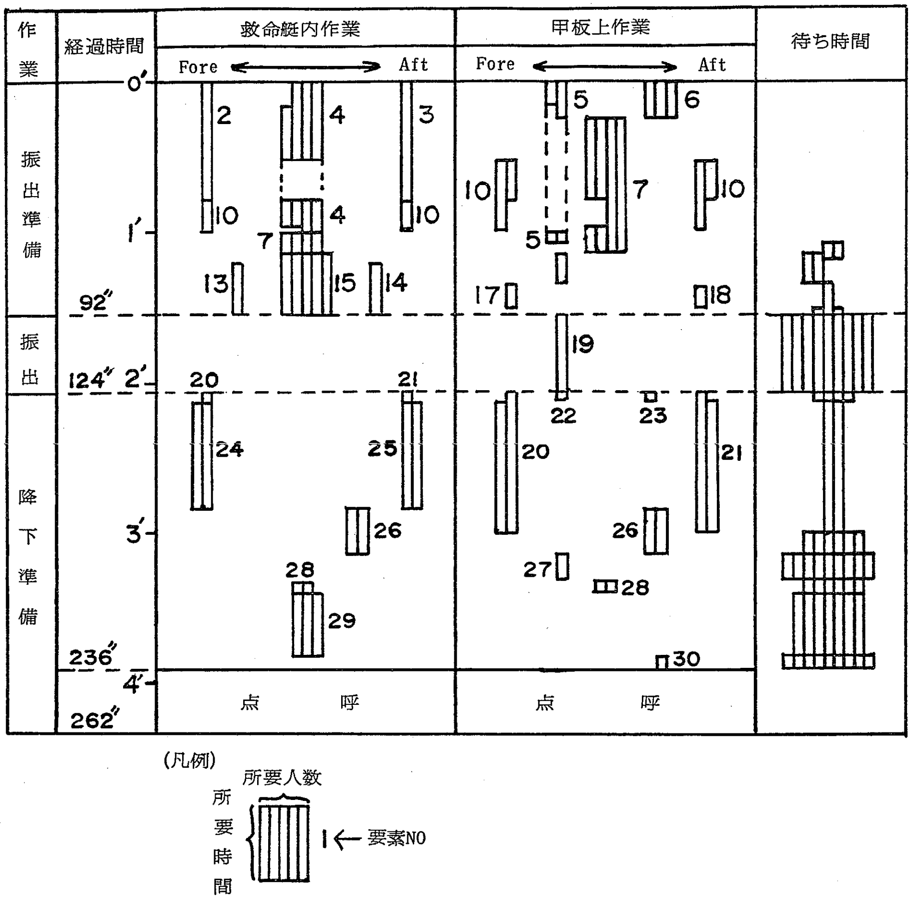


図-21　最短解作業履行状況

表-5　最短解所要時間と待ち時間

作業区分		振出準備	振出	降下準備	降下	離船準備	計
所要時間	文献2)（A）	3′−14″	0′−32″	3′−18″	0′−31″	2′−33″	10′−08″
	最短解（B）	1′−32″	同上	2′−18″	同上	同上	7′−26″
A−B		1′−42″	−	1′−00″	−	−	2′−42″
最短解待ち時間＊（秒）		5.4	28.8	52.7	−	−	86.9+

＊　(2-1) 式参照
+　降下準備作業までの合計

に従うこととし，振出準備作業，降下準備作業のみをプログラムにかけた。表-4，図-20 はそれぞれこの手法により求まった極大集合とライングラフである。

図-21 の最短解の作業履行状況を見ると，振出準備作業において，個々の要素の所要人数を満たすために救命艇と甲板との間で人の移動が必要であるが，実際にはそのようなことは難しいだろう。それでも，表-5 から文献 2) の所要時間より，1分 42 秒も短縮されていることがわかるので，最短解の作業手順を実際に可能なように修正するだけで，かなり時間が短縮されることが期待できる。また，最短解において，待ち時間の多くは降下準備作業で発生しているが，これは，PF 取付や TL 取りのような索による取付，索取り作業は人数効果が小さく，かつ時間がかかるためで，救命艇降下作業の所要時間を長くしている本質的な問題のように思われる。

6. 結　　言

この研究によって，種々の作業要素が組み合わさって構成される作業を，個々の要素はその限界人数を越えない限り携わる人数が増加すればそれに反比例して所要時間が短くなるとの仮定のもとに，最短時間で完了する作業手順を求める手法が得られたことになる。仮定の妥当性，解の現実性等についてはかなり問題が残るが，5章の救命艇降下作業への適用例からもわかるように，解を少し修正するだけでかなり効果が期待でき，かつ作業の問題点をもある程度把握することが可能である。しかしながら，そのような解に基づく作業の安全性については別途議論の必要があろう。また，緒言でも述べたように，現実にどのような作業にでも起こりうる事実を手法の前提として用いているので，この手法はかなりの一般性を持ち，広範な作業に適用可能と思われる。しかし，この手法は極めて特異な場合にはこの探索過程に含まれない最短解の存在もあり得るので，理論とアルゴリズムの整備をさらに行い，その結果は続報として報告する予定である。なお，使用した計算機は当所の中央電算機 M-180 II AD である。

謝　辞

本研究を遂行するに当たって，救命艇降下作業の作業フロー図の転載を快く許可して下さり，また，貴重な救命艇降下作業の実験風景を写したビデオ，8ミリフィルム等を貸して下さった，日本パイロット協会の中村祐三氏に深甚の謝意を表します。

参　考　文　献

1)　関根智明：PERT・CPM，日科技連，初版（1965）
2)　中村祐三，伊藤良夫，中島保司：救命艇と膨張式救命いかだの性能比較実験—II，——操作運用に関する実船実験の考察——，日本航海学会論文集，第 54 号（1976）p. 69〜76