

# 厚い境界層計算とその有効伴流推定への応用

日夏宗彦\*

## Thick Turbulent Boundary Layer Calculation and Its Application to Evaluation of Effective Wake

By

Munehiko HINATSU

### Summary

Turbulent boundary layers around ship's stern are thick in general, so an ordinary boundary layer approximation is not adequate. In order to estimate the characteristics of the flow around ship's stern, thick turbulent boundary layer calculations were carried out for two ship models, that is, an oil tanker and a container ship. Furthermore, making use of the results of the boundary layer calculations, a change of effective wake due to the variation of propeller load has been estimated for each ship and compared with the result of propeller load varying test.

### 1. ま え が き

船舶の推進性能は船を一定の速度で推進するための有効馬力EHPとプロペラ作動に要する馬力DHPの比である推進効率 $\eta$ によって評価されることが多い。この推進効率は船殻効率 $\eta_H$ とプロペラ単独効率 $\eta_p$ 及びプロペラ効率比 $\eta_R$ に分解され、そして船舶設計上効率改善にはプロペラ単独効率と船殻効率の向上に主として努力がはらわれている。このうち船体形状と密接な関係にあるのは船殻効率でありこれはスラスト減少率 $t$ 、伴流係数 $w$ を用いて $1-t/1-w$ と表わされる。従って船体形状が与えられたとき、あらかじめ $1-t$ 、 $1-w$ が十分な精度で推定できれば設計上好都合である。推力減少率に関してはPotential flow theoryのLagally theoremを用いることで推定が可能である。しかし伴流係数の推定には船尾まわりの流場を数値計算によって求めなければならない、任意船型に対してプロペラ流入速度分布を精度よく推定する手法は現在のところ確立されていない。

一方、足達らは船型試験で得られる自航要素をプロペラ荷重度の関数として取り扱い、プロペラ荷重度変化に対する $1-t$ 、 $1-w$ の変化の割合に注目して船体の推進

性能を評価する方法を示している。<sup>1)</sup>この方法によると有効伴流はプロペラ推力が0のときの伴流値とプロペラ荷重度変化に対する有効伴流の変化の割合を示す係数を用いることによって表現されており、これより広い荷重度の範囲で有効伴流値を推定することが可能となる。

本報告ではプロペラ荷重度の変化に対する伴流率の変化の割合に着目し、これを理論的に推定することを試みた。このためには船尾付近の粘性流場の計算が必要となる。船尾付近では境界層が厚くなり従来の境界層近似の仮定がもはや正しくなっていないことを考えて、厚い境界層近似を用いて境界層計算を行った。さらに境界層計算の結果を用いて、有効伴流のプロペラ荷重度に対する変化率を計算し、荷重度変更試験による実験値と比較して検討した。計算は肥大船とやせ型船の2種を考へTanker船型と高速コンテナ船のそれぞれ一隻ずつに対して行った。

### 2. 厚い境界層理論

船尾流場のように境界層が肥大すると、境界層厚さ $\delta$ と物体の曲率 $R$ との比 $(\frac{\delta}{R})$ が大きくなり、従来の境界層近似のように無視されなくなるので、この項を考慮した境界層方程式を用いる必要がある。以下にこの影響を考えた境界層方程式を導く。

\*推進性能部

原稿受付: 昭和58年10月31日

今、座標系として直交曲線座標  $(\xi, \eta, \zeta)$  を考え、それぞれの速度成分を  $(u, v, w)$  とすると Navier-Stokes の方程式は次のようになる。<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} & \frac{u\partial u}{h_1\partial\xi} + \frac{v\partial u}{h_2\partial\eta} + \frac{w\partial u}{h_3\partial\zeta} + (K_{12}u - K_{21}v)v \\ & + (K_{13}u - K_{31}w)w \\ & = -\frac{\partial}{h_1\partial\xi}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial\tau_{11}}{h_1\partial\xi} + \frac{\partial\tau_{12}}{h_2\partial\eta} + \frac{\partial\tau_{13}}{h_3\partial\zeta}\right. \\ & \quad + (2K_{12} + K_{32})\tau_{12} + (2K_{13} + K_{23})\tau_{13} \\ & \quad \left. + (K_{21} + K_{31})\tau_{11} - K_{21}\tau_{22} - K_{31}\tau_{33}\right\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u\partial v}{h_1\partial\xi} + \frac{v\partial v}{h_2\partial\eta} + \frac{w\partial v}{h_3\partial\zeta} + (K_{23}v - K_{32}w)w \\ & + (K_{21}v - K_{12}u)u \\ & = -\frac{\partial}{h_2\partial\eta}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial\tau_{12}}{h_1\partial\xi} + \frac{\partial\tau_{22}}{h_2\partial\eta} + \frac{\partial\tau_{32}}{h_3\partial\zeta}\right. \\ & \quad + (2K_{21} + K_{31})\tau_{21} + (2K_{23} + K_{13})\tau_{23} \\ & \quad \left. - \tau_{11}K_{12} + (K_{32} + K_{12})\tau_{22} - K_{32}\tau_{33}\right\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u\partial w}{h_1\partial\xi} + \frac{v\partial w}{h_2\partial\eta} + \frac{w\partial w}{h_3\partial\zeta} + (K_{31}w - K_{13}u)u \\ & + (K_{32}w - K_{23}v)v \\ & = -\frac{\partial}{h_3\partial\zeta}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial\tau_{13}}{h_1\partial\xi} + \frac{\partial\tau_{23}}{h_2\partial\eta} + \frac{\partial\tau_{33}}{h_3\partial\zeta}\right. \\ & \quad + (2K_{31} + K_{21})\tau_{13} + (2K_{32} + K_{12})\tau_{23} \\ & \quad \left. - K_{13}\tau_{11} - K_{23}\tau_{22} + (K_{13} + K_{23})\tau_{33}\right\} \end{aligned} \quad (1.3)$$

ここで  $K_{ij} = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial x_j}$  ( $i, j = 1, 2, 3 = \xi, \eta, \zeta$ ) は  $ij$  面における  $i$  軸の曲率を表わし、metric coefficient  $h_i$  は  $h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2$  である。 $\tau_{ij}$  は変形速度テンソルを用いて

(2)

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2\mu_e \left( \frac{\partial u}{h_1 \partial \xi} + K_{12}v + K_{13}w \right), \\ \tau_{22} &= 2\mu_e \left( \frac{\partial v}{h_2 \partial \eta} + K_{23}w + K_{21}u \right), \\ \tau_{33} &= 2\mu_e \left( \frac{\partial w}{h_3 \partial \zeta} + K_{31}u + K_{32}v \right), \\ \tau_{12} &= \tau_{21} = \mu_e \left( \frac{\partial v}{h_1 \partial \xi} + \frac{\partial u}{h_2 \partial \eta} - K_{21}v - K_{12}u \right), \\ \tau_{23} &= \tau_{32} = \mu_e \left( \frac{\partial w}{h_2 \partial \eta} + \frac{\partial v}{h_3 \partial \zeta} - K_{23}v - K_{32}w \right), \\ \tau_{31} &= \tau_{13} = \mu_e \left( \frac{\partial u}{h_3 \partial \zeta} + \frac{\partial w}{h_1 \partial \xi} - K_{13}u - K_{31}w \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

のように表わされる。

ここで乱流の影響は渦粘性係数  $\mu_e$  を用いて表現されている。また連続の式は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{h_1 \partial \xi} + \frac{\partial v}{h_2 \partial \eta} + \frac{\partial w}{h_3 \partial \zeta} + (K_{21} + K_{31})u + (K_{32} + K_{12})v \\ & + (K_{13} + K_{23})w = 0 \quad \text{である。} \end{aligned} \quad (1.5)$$

次に厚い境界層近似を考える。本論では Nagamatsu が提案した仮定<sup>3)</sup> にならって次のような物理量の order を仮定する。

$$u, v, K_{ij} = O(1), \quad w = O\left(\frac{\delta}{R}\right), \quad \mu_e = O\left(\frac{\delta}{R}\right)^2 \quad (2.1)$$

また微分操作に関しては次の order の変化があるとすると

$$\frac{\partial}{h_1 \partial \xi}, \frac{\partial}{h_2 \partial \eta} = O(1), \quad \frac{\partial}{h_3 \partial \zeta} = O\left(\frac{\delta}{R}\right)^{-1} \quad (2.2)$$

また  $\zeta$  軸は直線とみなして  $h_3 = 1$  とおく。こうすると定義から  $K_{31} = K_{32} = 0$  が得られる。以上の仮定を (1.1) ~ (1.5) 式まで適用して  $O\left(\frac{\delta}{R}\right)$  の項までとると、Navier-Stokes の方程式からは

$$\begin{aligned} & \frac{u\partial u}{h_1\partial\xi} + \frac{v\partial u}{h_2\partial\eta} + \frac{w\partial u}{\partial\zeta} + (K_{12}u - K_{21}v)v + K_{13}uw \\ & = -\frac{\partial}{h_1\partial\xi}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial\tau_{13}}{\partial\zeta} + (2K_{13} + K_{23})\tau_{13}\right\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u\partial v}{h_1\partial\xi} + \frac{v\partial v}{h_2\partial\eta} + w\frac{\partial v}{\partial\zeta} + (K_{21}v - K_{12}u)u + K_{23}vw \\ & = -\frac{\partial}{h_2\partial\eta}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial\tau_{23}}{\partial\zeta} + (2K_{23} + K_{13})\tau_{23}\right\} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u\partial w}{h_1\partial\xi} + \frac{v\partial w}{h_2\partial\eta} + \frac{w\partial w}{\partial\xi} - K_{13}u^2 - K_{23}v^2 \\ &= -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial\tau_{13}}{h_1\partial\xi} + \frac{\partial\tau_{23}}{h_2\partial\eta} + \frac{\partial\tau_{33}}{\partial\xi}\right. \\ & \quad \left.+ K_{21}\tau_{13} + K_{12}\tau_{23}\right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

が得られ連続の式からは

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{h_1\partial\xi} + \frac{\partial v}{h_2\partial\eta} + \frac{\partial w}{\partial\xi} + K_{21}u + K_{12}v \\ & + (K_{13} + K_{23})w = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

が得られる。ここで(3.3)式に対しては、 $\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{p}{\rho}\right)$ の項が $O\left(\frac{\delta}{R}\right)^{-1}$ であるために Nagamatsu は(3.3)式に対応する式のみ $O\left(\frac{\delta}{R}\right)^{-1}$ 、 $O(1)$ までとって

$$-K_{13}u^2 - K_{23}v^2 = -\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{p}{\rho}\right) \quad (3.5)$$

を採用している。(3.5)式は流線が曲っているために生じる流体粒子の向心力と厚さ方向の圧力勾配が等しいことを示している。粘性圧力抵抗まで求めるには(3.5)式を用いればよいが、このとき Reynolds 応力の境界層内分布を考慮する必要が生じる。ただし本報告では粘性圧力抵抗まで考えていないので(3.4)式は実際には使用していない。

境界層方程式を厚さ方向に積分すれば運動量積分式が得られる。これより以降、座標系としては便利のために流線座標系（ $\xi$ 軸が流線に一致するようにとる）を考える。境界層の外端速度を $(U, 0, W)$ とすれば、境界層外端では

$$\frac{U\partial U}{h_1\partial\xi} + K_{13}UW = -\frac{\partial}{h_1\partial\xi}\left(\frac{p_e}{\rho}\right) \quad (4.1)$$

( $p_e$ : 境界層外端での圧力)

$$-K_{12}U^2 = -\frac{\partial}{h_2\partial\eta}\left(\frac{p_e}{\rho}\right) \quad (4.2)$$

となる。運動量積分式は(3.1)、(3.2)から(4.1)、(4.2)をそれぞれ差し引いて $\xi$ 方向に積分すると得られる。ただし、このとき、連続の式を変形した次式

$$\begin{aligned} w\frac{\partial u}{\partial\xi} &= \frac{\partial w}{\partial\xi}(U-u) - \frac{\partial}{\partial\xi}\left\{w(U-u)\right\} \\ &= -\left\{\frac{\partial u}{h_1\partial\xi} + \frac{\partial v}{h_2\partial\eta} + K_{21}u + K_{12}v + (K_{13} + K_{23})\right. \\ & \quad \left.w\right\}(U-u) - \frac{\partial}{\partial\xi}\left\{w(U-u)\right\} \end{aligned} \quad (5)$$

を用いている。若干の計算の後、運動量積分式は境界層パラメータを用いて次のように表わされる。

$$\theta_{11} = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)d\xi, \quad \theta_{12} = \int_0^\infty \frac{v}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)d\xi,$$

$$\theta_{21} = -\int_0^\infty \frac{uv}{U^2}d\xi$$

$$\theta_{22} = -\int_0^\infty \left(\frac{v}{U}\right)^2 d\xi, \quad \theta_{13} = \int_0^\infty \frac{w}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)d\xi,$$

$$\theta_{23} = -\int_0^\infty \frac{vw}{U^2}d\xi$$

$$\theta_{31} = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(\frac{W}{U} - \frac{w}{U}\right)d\xi, \quad \delta_1^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right)d\xi,$$

$$\delta_2^* = -\int_0^\infty \frac{v}{U}d\xi$$

$$\delta_3^* = \int_0^\infty \left(\frac{W}{U} - \frac{w}{U}\right)d\xi, \quad I_1 = \int_0^\delta d\xi \int_\xi^\delta \left(\frac{u}{U}\right)^2 d\xi,$$

$$I_2 = \int_0^\delta d\xi \int_\xi^\delta \left(\frac{v}{U}\right)^2 d\xi$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\theta_{11}}{h_1\partial\xi} + \left\{2\theta_{11} + \delta_1^* + 2(K_{13}I_1 + K_{23}I_2)\right\} \frac{1}{U} \frac{\partial U}{h_1\partial\xi} \\ & + \frac{\partial\theta_{12}}{h_2\partial\eta} + K_{21}(\theta_{11} - \theta_{22}) + K_{13}(\theta_{13} + \theta_{31} + \frac{W}{U}\delta_1^*) \\ & + K_{23}\theta_{13} + \frac{\partial}{h_1\partial\xi}\left\{K_{13}I_1 + K_{23}I_2\right\} \\ & = \frac{\tau_{13}w}{\rho U^2} - \frac{2K_{13} + K_{23}}{\rho U^2} \int_0^\delta \tau_{13} d\xi \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial\theta_{21}}{h_1\partial\xi} + \frac{\partial\theta_{22}}{h_2\partial\eta} + \frac{1}{U} \frac{\partial U}{h_1\partial\xi} \cdot 2\theta_{21} + 2\theta_{22} \cdot \frac{1}{U} \frac{\partial U}{h_2\partial\eta} + 2K_{21}\theta_{21}$$

$$-K_{12}(\theta_{11} - \theta_{22} + \delta_1^*) + (K_{13} + 2K_{23})\theta_{23}$$

$$+ \frac{\partial}{h_2\partial\eta}\left\{K_{13}I_1 + K_{23}I_2\right\} + \frac{2}{U} \frac{\partial U}{h_2\partial\eta}\left\{K_{13}I_1$$

$$+ K_{23}I_2\right\} = \frac{\tau_{23}w}{\rho U^2} - \frac{2K_{23} + K_{13}}{\rho U^2} \int_0^\delta \tau_{23} d\xi$$

(7.2)

(3)

ここに  $K_{ij}$  は  $\xi$  方向には const. として演算しており、  
 $(2\theta_{12} + \delta_2^*) = \theta_{12} + \theta_{21}$ ,  $K_{12} = -\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \eta}$  等の関係を使っている。

これらの式を実際に解くには、境界層内の速度分布を仮定する必要がある。ここでは Coles の wall-wake law による次の表式

$$\left(\frac{u}{U}\right) = 1 + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{u_*}{U}\right) \log \left(\frac{\xi}{\delta}\right) \cos \beta - \frac{k_1}{2} \left\{ 1 + \cos \left(\frac{\xi}{\delta} \pi\right) \right\}$$

$$\left(\frac{v}{U}\right) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{u_*}{U}\right) \log \left(\frac{\xi}{\delta}\right) \sin \beta - \frac{k_2}{2} \left\{ 1 + \cos \left(\frac{\xi}{\delta} \pi\right) \right\}$$

$$k_1 = 1 - \left(\frac{u_*}{U}\right) \left\{ \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{u_* \delta}{\nu}\right) + 5.0 \right\} \cos \beta$$

$$k_2 = -\left(\frac{u_*}{U}\right) \left\{ \frac{1}{\kappa} \log \left(\frac{u_* \delta}{\nu}\right) + 5.0 \right\} \sin \beta$$

$$\kappa = 0.41$$

を用いる。ここで  $\beta$  は 2 次流れ角、 $u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$  は摩擦速度である。 $w$  は連続の式 (3.4) より  $u, v$  を積分して求める。(8)式において未知数は  $\left(\frac{u_*}{U}\right)$ ,  $\delta$ ,  $\beta$  の 3 つであり方程式は (7.1), (7.2) 式の 2 つであるので今一つ別の式が必要である。このための補助方程式としては連続の式を  $\xi$  方向に積分した式と Head が与えた関係式を用いる。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (\delta - \delta_1^*) + \frac{\partial \delta_2^*}{\partial \eta} = F - (\delta - \delta_1^*) \left\{ \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial \xi} + K_{21} \right\} - (K_{13} + K_{23}) \left\{ \frac{W}{U} \delta - \delta_3^* \right\}$$

$$F = 0.0306 (H^* - 3.0)^{-0.653} \quad (9)$$

$$H^* = (\delta - \delta_1^*) / \theta_{11}$$

(8)式を (7.1), (7.2) 及び (9) 式に代入し、かつ  $\mu_e$  に対しては姫野らが与えた関係式<sup>4)</sup>

$$\mu_e = \rho U \delta \left[ e_1 \left\{ \left(\frac{\xi}{\delta}\right) - 3 \left(\frac{\xi}{\delta}\right)^2 + 2 \left(\frac{\xi}{\delta}\right)^3 \right\} \right]$$

(4)

$$+ 12 e_2 \left(\frac{\xi}{\delta}\right)^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\xi}{\delta}\right) \right\} \quad (10)$$

$$e_1 = \kappa \left(\frac{u_*}{U}\right),$$

$$e_2 = 0.018 \left\{ \frac{1}{\kappa} \left(\frac{u_*}{U}\right) + \frac{1}{2} / \overline{k_1^2 + k_2^2} \right\}$$

を用いて演算すると、最終的に

$$A_i \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u_*}{U}\right) + B_i \frac{\partial \beta}{\partial \xi} + C_i \frac{\partial \delta}{\partial \xi} = D_i \quad (i=1,2,3) \quad (11)$$

なる連立方程式にまとめられる。これを各流線に沿って解けば境界層の諸量を求めることができる。

境界層計算に必要な流線は Hess & Smith 法によって計算された船体表面上のポテンシャル流速を Runge-Kutta 法で数値積分して求めた。厚い境界層近似をしたときに現われる  $K_{13}$   $K_{23}$  は、 $K_{13}$  に対しては定義式

$$e_{\xi} \frac{\partial e_{\xi}}{\partial \xi} = \frac{u}{|u|} \frac{\partial n}{\partial \xi}$$

を数値微分して、また  $K_{23}$  に対しては square station 面内の girth line の曲率で代用することにした。さらに厚い境界層の計算をするときの外部ポテンシャル流れには境界層の影響を考慮が必要がある。このために姫野、奥野が提案した方法<sup>5)</sup> を用いて Hess & Smith 法を修正し、ポテンシャル流れを再計算した。ただし、境界層の影響がポテンシャル流線の位置そのものを大きくかえることはないであろうと考えて流線の再追跡は行っておらず、先に求めた流線上に修正されたポテンシャル流速を補間することにした。なおこのときの境界層計算は田中-姫野の第一近似理論<sup>6)</sup> を用いた。

### 3. 計算結果とその考察

今回計算を行った船型は  $C_B = 0.82$  の Tanker ship model (Model-A) と  $C_B = 0.57$  の Container Ship model (Model-B) である。これらの Body plan と流線の一部を図-1 に示す。

境界層方程式 (7.1), (7.2) において  $K_{13}$   $K_{23}$  を 0 とおくと small cross flow を仮定しない従来の境界層方程式、すなわち  $O\left(\frac{\delta}{R}\right)$  を無視した式となる。ここでは

$K_{13}$ ,  $K_{23}$  の影響をみるためにこれらを 0 とした計算も行った。なお、厚い境界層計算を行ったときに求まった解は girth 方向に振動する傾向がみられ、このため

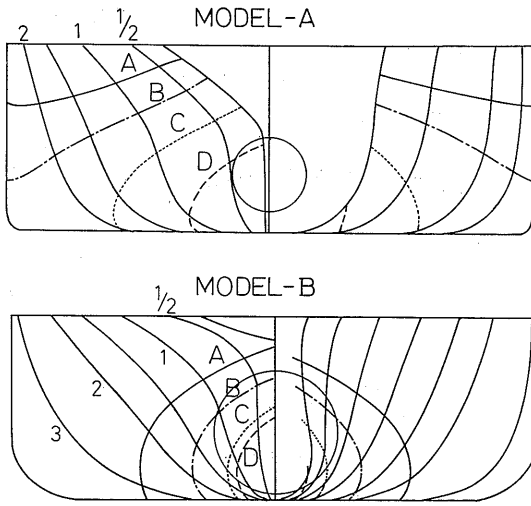


Fig. 1 Body plan and streamline

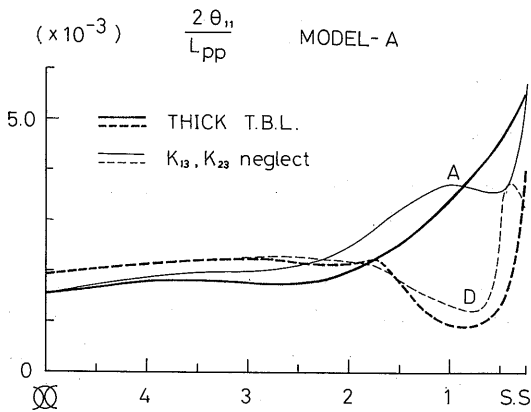


Fig. 2 Comparison of momentum thickness  $\theta_{11}$

これらの girth 方向の微分値は大きく振動し、解が船尾付近で発散した。このため今回は一応、 $\frac{\partial U}{\partial \eta}$ の項を除く全ての  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  の項を省略して計算を行い、この結果を厚い境界層の結果と呼ぶことにする。

$K_{13}$ ,  $K_{23}$  の項を除いて計算を行った結果とこれらを考慮した計算結果を示す。まず Model-A について、代表的な 2 本の流線として船側に沿って船尾まで流れる流線 A と、船底からビルジをまわってプロペラチップに流入する流線 D を採り上げた。これらに沿う境界層の渚量に対して上記 2 種の計算法の結果を比較する。

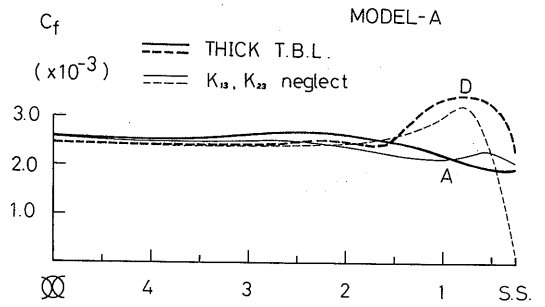


Fig. 3 Comparison of skin friction coefficient  $C_f$

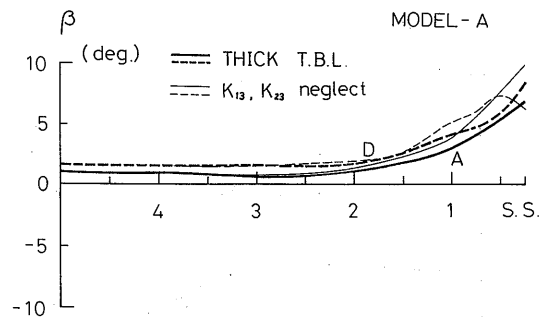


Fig. 4 Comparison of crossflow angle  $\beta$  ( $\beta > 0$ : to water surface)

図-2 には運動量厚さ  $\theta_{11}$  を、図-3 には摩擦応力係数  $C_f$  ( $C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}$ ) を、図-4 には 2 次流れ角  $\beta$  をそれぞれ比較して示した。両計算法の結果も、ビルジをまわりこむ付近で運動量厚さが減少し摩擦応力が大きくなっているのが認められる。 $K_{13}$ ,  $K_{23}$  を計算から除くと S.S.,  $\frac{1}{2}$  付近において運動量厚さが急激に発散あるいは減少しており、この付近では正しく計算が行われていないことを思わせる。 $K_{13}$ ,  $K_{23}$  を含めた結果では S.S.,  $\frac{1}{4}$  まで解の発散を伴わず計算されている。A に沿う運動量厚さの変化をみると  $K_{13}$ ,  $K_{23}$  の影響は厚さを抑えるように働いている。 $C_f$  をみると D に沿う解は  $K_{13}$ ,  $K_{23}$  の項を省くと船尾で急激に減少し、やはりこの付近では正しく計算されていないようである。2 次流れ角は  $K_{13}$ ,  $K_{23}$  を省いた方が下流に行くに従っての変化量は大きく、 $K_{13}$ ,  $K_{23}$  を考慮するとその変化量は抑えられている。 $\beta$  について第一近似理論により求められたものと比較すると(図-5)、流線 A に沿う  $\beta$  の変化の傾向は第一近似理論と今回の計算法とはあまり違わな

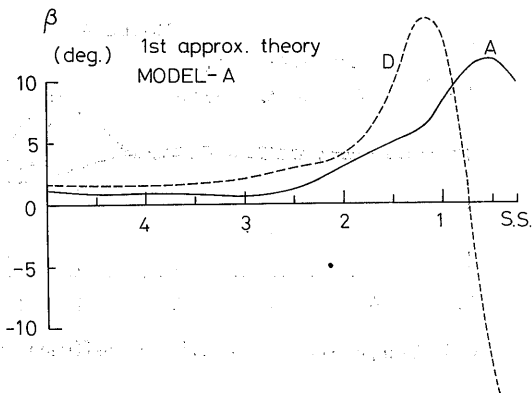


Fig. 5 Cross flow angle by first approximation method

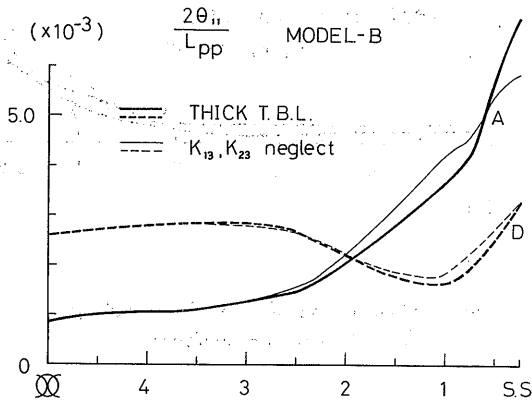


Fig. 6 Comparison of momentum thickness  $\theta_{11}$

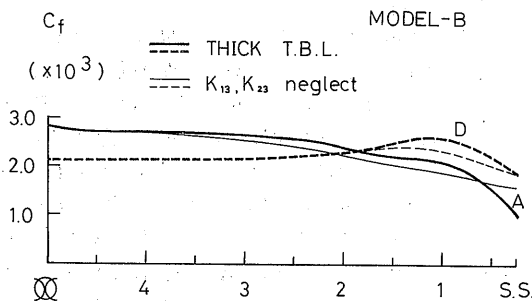


Fig. 7 Comparison of skin friction coefficient  $C_f$

いが、流線Dに沿う変化では正負が逆で明らかに異っている。

次に Model-B (container ship) に対する計算結果について考察する。Model-B に対しても同じく流線A, D に対して  $K_{13}, K_{23}$  を含んだものと含んでいないもの

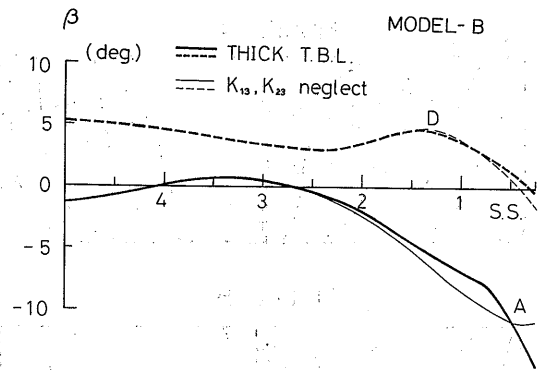


Fig. 8 Comparison of cross flow angle  $\beta$  ( $\beta > 0$  : to water surface)

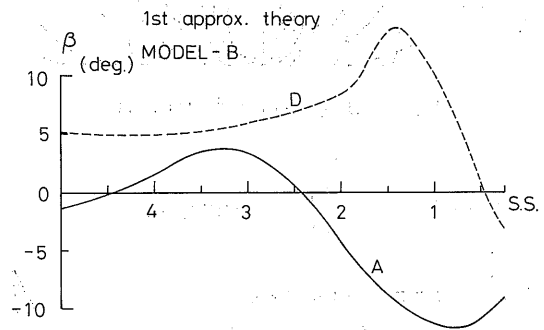


Fig. 9 Cross flow angle by first approximation method

を比較する形で図示する。図-6には  $\theta_{11}$  を示した。Model-A と同様  $K_{13}, K_{23}$  を省いた方は  $\theta_{11}$  の増加が大きい。図-7には  $C_f$  の変化を示す。 $C_f$  の変化は  $K_{13}, K_{23}$  を省いた方が下流に行くに従っての変化が抑えられている。流線Dに沿う変化でもビルジをまわるときの  $C_f$  の増加は抑えられている。2次流れ角は(図-8)逆に  $K_{13}, K_{23}$  を考慮した方が流線に沿っての変化が抑えられている。図-9に第一近似理論で求めた  $\beta$  を示すが、今回の計算法によると2次流れ角は第一近似理論に比べてかなりその変化が抑えられているのがわかる。今回の計算結果では、運動量厚さや摩擦応力係数に対しては他の研究者が行った同類船型の結果<sup>7)</sup>と比較しても傾向や計算値はほぼ似た様な結果が得られている。しかしながら  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  の項を省略した点や  $\beta$

の計算結果の大きさ及び傾向が第一近似理論の結果とよく合わない点等を考えると計算方法や定式上の仮定などに対して詳細な検討が必要である。

#### 4. プロペラ荷重度に対する有効伴流の変化率について

厚い境界層計算を利用してプロペラが作動するときの有効伴流の変化を考察する。有効流速は、船尾で作動しているプロペラの直前での流入速度からプロペラ誘導速度を差し引いたもので、一般に公称流速とは一致しない。有効流速の計算は、Huang & Groves<sup>8)</sup>、Nagamatsu & Tokunaga<sup>9)</sup>、戸田・田中・岩崎<sup>10)</sup>、Adachi & Hinatsu<sup>11)</sup>らによって計算されている。Nagamatsu et al. は流体を非粘性として軸対称物体まわりの流れに対して渦度方程式を簡略化した式を、Lagrange 的に解いて有効流速を求めている。この方法は直交曲線座標系で示した渦度方程式を座標交換して境界層近似を行って変形すれば導くことができる。これより渦度の配置がプロペラ誘導速度により変化するために、有効流速の変化が引き起こされるものと解釈することができる。(付録参照) 戸田らは Nagamatsu et al. が無視した粘性項を考慮して厚い境界層近似を軸対称物体まわりの流れに適用して有効流速を計算している。そして粘性項を考慮すると Nagamatsu et al. の得た結果ほど有効流速の変化は大きくならないことを示している。Adachi & Hinatsu はプロペラ荷重度の変化に対する有効伴流の変化率を計算し、やせ型船に対しては荷重度変更試験による結果とよく一致した値を求めている。

荷重度変更法では<sup>1)</sup>、有効伴流係数はプロペラの荷重度  $C_T$  ( $C_T = T / \frac{1}{2} \rho V^2 A$ ,  $V$  = 船速,  $A$  = プロペラ円面積,  $T$  = プロペラ推力) と  $C_T = 0$  における伴流係数  $\bar{U}_{a0}$ , それと有効伴流の荷重度に対する変化率  $\bar{C}_0$  を用いて

$$1 - w_e = \bar{U}_{a0} + \bar{C}_0 (-\bar{U}_{a0} + \sqrt{\bar{U}_{a0} + C_T}) \quad (12)$$

と与えられている。ある船型に対して  $\bar{C}_0$ ,  $\bar{U}_{a0}$  がわかれば広い荷重度の範囲で  $1 - w_e$  が求められることになる。 $\bar{U}_{a0}$  を精度よく推定することは困難であるが、係数  $\bar{C}_0$  は今回示した境界層計算を用いると推定が可能である。また係数  $\bar{C}_0$  がどの程度プロペラ影響による境界層の変形に基くものなのかも調べることができる。以下に  $\bar{C}_0$  の推定法について述べる。

プロペラ影響は簡単のために Korvin-Kroukovsky が提案した渦円筒モデルを用いる<sup>(2)</sup>。ポテンシャル流速はプロペラ影響を考慮するために、プロペラ吸い込

み流速を Hess & Smith 法の外部流速に組み込んで計算した。流線はプロペラ影響を考慮した流速分布を数値積分して求めるべきであるが、ここでは簡単のためにあらかじめ計算されているプロペラ無しの状態における流線の位置をそのまま用いることにした。ポテンシャル流速はこの流線上に補間した。このために流線の拡大縮少率を表わす  $K_1$  ( $= -K_{21}$ ) にはプロペラ影響は考慮されていない。また  $K_2$  ( $= -K_{12}$ ) に対しては補間して与えた流速に対して  $-\frac{1}{U} \frac{\partial U}{h_2 \partial \eta}$  を計算して与えた。

次にプロペラありなしで計算された境界層内速度分布から有効流速の変化を求める方法を述べる。船尾に流入する流速をポテンシャル成分  $u_p$ , 境界層内速度  $u_v$ , 及び境界層外端速度を  $u_c$  とに分けると、船尾流速  $u$  は

$$u = u_p + u_v - u_c \\ = u_{H\&S} + u_v - u_c$$

と書ける。ここに添字 H & S は Hess & Smith 法によって求まる流速であることを示す。今、プロペラありの状態を  $u'$  をつけて表わすと

$$u' = u'_{H\&S} + u_{prop} + u'_v - u'_c \quad (14)$$

となる。プロペラありなしでの流速の差をとると

$$u' - u = (u'_{H\&S} - u_{H\&S}) + u_{prop} + u'_v - u_v - (u'_c - u_c) \quad (15)$$

となる。有効流速の変化を調べるにはプロペラ誘導速度を差し引かねばならないことと、Potential wake はプロペラありなしとでほとんど変化がないこと<sup>11)</sup> を考えると結局、有効流速の変化分は

$$\Delta u_e \doteq (u'_v - u_v) - (u'_c - u_c) \quad (16)$$

となる。これは図-10に示すようにプロペラなしのと

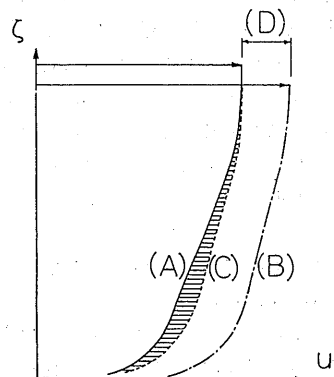


Fig. 10 Change of velocity profile due to propeller action

きの境界層速度分布を(A), プロペラありのときのそれを(B), 境界層外端における速度差を(D)とすると  
 $(B)-(A)-(D)$

に相当する。この部分は図中にハッチングを施して示した。正確に wake 変化を求めるには境界層内の速度分布を座標変換して船長方向の速度成分に変換し、さらにプロペラ面全域にわたって速度差の面積分を行う必要がある。しかしプロペラ荷重量に対する有効伴流の変化の割合は、境界層主流方向成分が受ける変化の割合と一対一に対応すると考えられること、またプロペラ面全域にわたって流線を追跡するのが困難であったことからここでは次のようにした。まずそれぞれの代表的な流線として肥大船に対してはプロペラ上半円付近に流入する流線を、やせ型船に対してはプロペラ中央付近に流入する流線を取りあげた。それらの流線に沿う主流方向速度分布に対して図-10の方法を用いて面積分し有効伴流の変化の割合を調べた。

プロペラ影響を考慮した境界層計算の結果を示す。まず Model-A に対して示す。図-11はプロペラありなしに対する形状係数  $H(H = \delta_1^*/\theta_{11})$  を示す。 $H$  に対してはプロペラ影響がそれほど認められない。図-12に示す  $\theta_{11}$  を比較するとプロペラ吸い込み作用による  $\theta_{11}$  の減少がみられる。しかもプロペラ影響の及ぶ範囲が大体プロペラ直径の2倍程度であり、これは Huang et al. の言う量<sup>8)</sup>に一致している。 $C_f$  は図-13に示す様にプロペラ吸い込みがあると若干  $C_f$  の増加が認められる。しかし全般的に Model-A のような肥大船(プロペラ直径が相対的に小さい)では、プロペラ作用による境界層の変形はそれほど強くないようである。

次に Model-B の結果を示す。図-14には形状係数を示す。Model-A と異って Model-B の方は船尾部においてプロペラの吸い込み作用のために  $H$  の増加が抑えられているのがはっきりわかる。 $\theta_{11}$  の比較は図-15に示したが、これも肥大船に比べるとプロペラ作用による厚さの減少は顕著である。図-16に示した摩擦応力に対しても明らかにプロペラ吸い込み作用によって  $C_f$  が増加している。また、これらプロペラ影響が及ぶ範囲はやはり大略プロペラ直径の2倍となっている。Model-B は Model-A に比べてプロペラ直径が相対的に大きく、より顕著にその影響が現われたものと思われる。Model-A, Model-B に対してそれぞれ流線 D に沿う S.S.  $\frac{1}{4}$  での主流方向速度分布をかいたのが図-17, 図-18である。図にはプロペラありなしの状態の速度分布を示している。この図をもとに、図-10で示した

方法でプロペラ吸い込み作用による有効流速の変化量を積分し伴流値の変化量を求めた。肥大船の場合は強い縦渦が存在し、このため速度分布は Coles の flow model では十分実際を表現し得ない。このために今回のような境界層計算では有効伴流の変化率の説明するには限界があると考えられる<sup>10)</sup>。またプロペラ影響を考慮してもいわゆる Total velocity (= effective velocity + propeller induced velocity) の変化はそれほど顕著でない。やせ型船ではプロペラが相対的に大きいことと流線がプロペラのほぼ中央に流入していることなどから、プロペラの境界層に与える影響は大きく有効流速の増加も著しい。有効伴流のプロペラ荷重量に対する変化率は次式を用いて求めた。

$$\bar{C}_0^p = \frac{d(1-w)}{-\bar{U}_{ao} + \sqrt{\bar{U}_{ao}^2 + C_T}} \quad (17)$$

ここに  $U_{ao}$  は速度分布(A)を積分して得られる平均速度、 $d(1-w)$  は図-10においてハッチングを施した部分に相当する積分値である。こうして得られた係数値を荷重量変更法によって得られた実験値と比較して示したのが表-1である。

Table 1 Values of Coefficient  $\bar{C}_0$

	$\bar{C}_0$	
	Cal.	Exp.
Model-A	0.0478	0.125
Model-B	0.119	0.116

肥大船の場合、プロペラ吸い込み作用のための境界層変形に基く有効伴流の増加は実験結果の4割程度である。一方、やせ型船の場合は有効伴流の増加はほぼ境界層の変形によって説明されることがわかる。Coles の flow model では縦渦の影響による速度分布の歪が考慮されていない。このためやせ型船のように比較的縦渦が強くない船型に対しては、係数  $\bar{C}_0$  の推定は今回の方法で十分と考えられる。しかしながら肥大船のように強い縦渦を含む流場に対してプロペラとの相互干渉を考えると、流場を船長方向に軸をもつ渦度成分(縦渦)と girth line に沿う方向に軸をもつ渦度成分(境界層)に分け、それぞれのプロペラ相互干渉を考える必要がある。この問題に対しては、Adachi & Hinatsu がこれらが線型的に可分であるとして縦渦とプロペラとの相互干渉を考察し、これによる有効伴流の増分を考えるとほぼ実験結果を説明し得ることを示している。



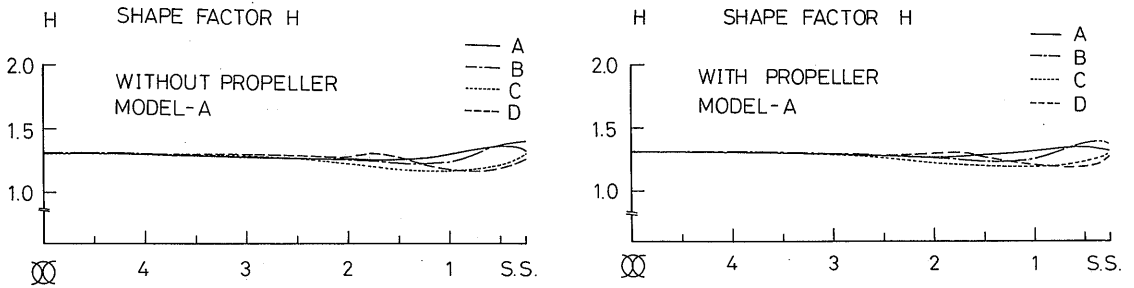


Fig.11 Shape factor H, with and without propeller

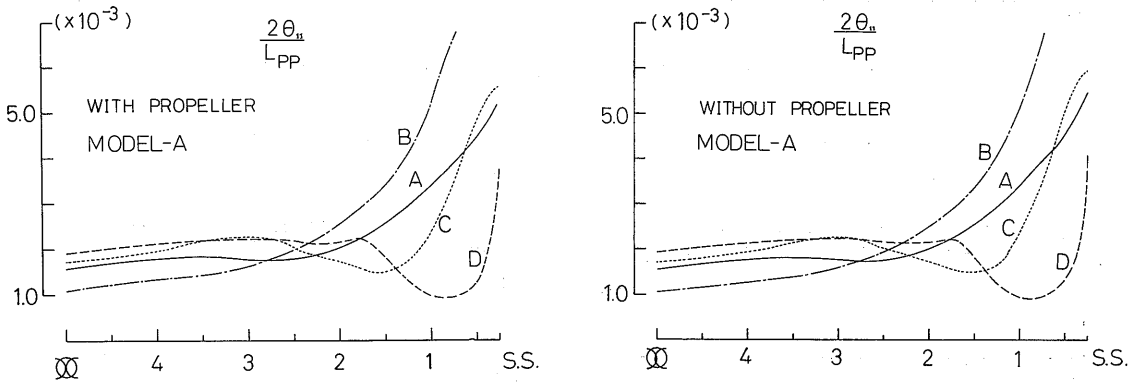


Fig.12 Momentum thickness  $\theta_{11}$ , with and without propeller

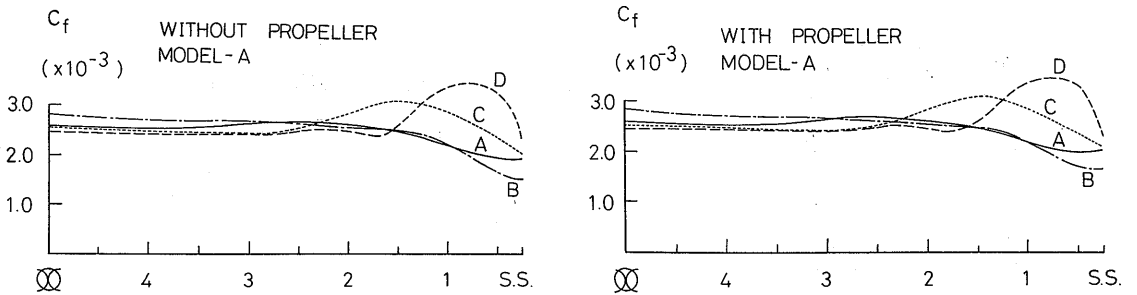


Fig.13. Skin friction coefficient  $C_f$ , with and without propeller

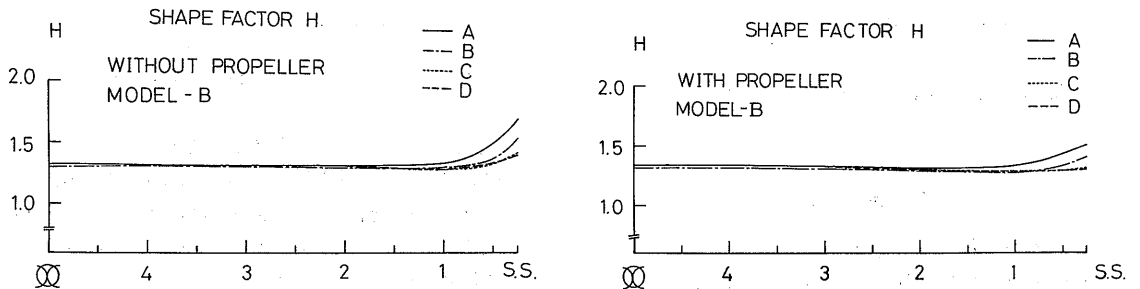


Fig.14 Shape factor H, with and without propeller

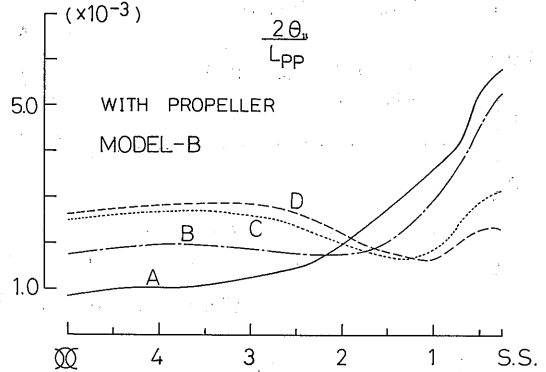
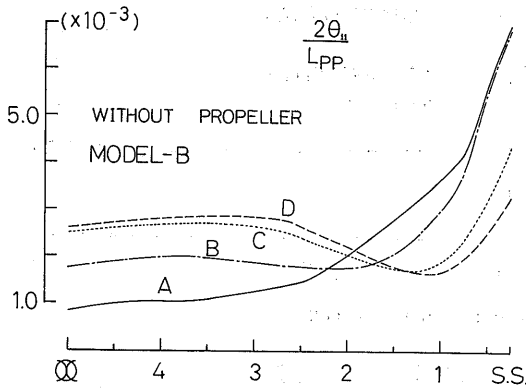


Fig. 15 Momentum thickness  $\theta_{11}$ , with and without propeller

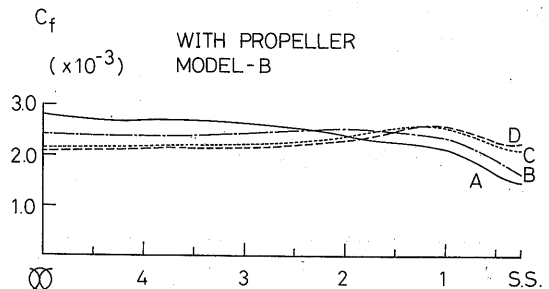
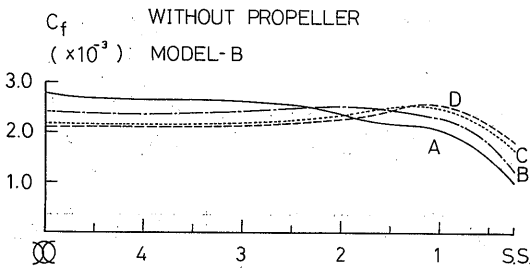


Fig. 16 Skin friction coefficient  $C_f$ , with and without propeller

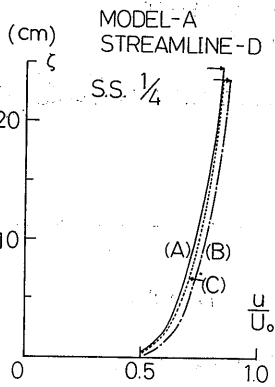


Fig. 17 Calculated velocity profile

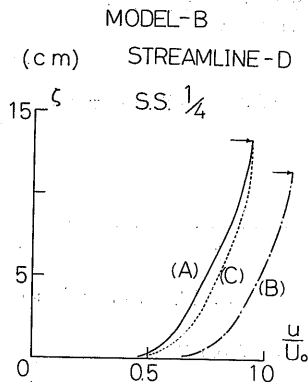


Fig. 18 Calculated velocity profile

5. 結 言

本報告で得られた結果を示す。

- 1) 船体まわりの粘性流場の計算のために厚い境界層理論に基く境界層計算プログラムを作成し肥大船

とやせ型船に対してその計算を行った。

- 2) 厚い境界層近似を行うときに入る girth line の曲率や流線の船体に沿う曲率の影響は、全般に運動量厚さを抑え、2次流れ角に対してはその変化を抑制する方向に作用する。
- 3) 計算で求めた解は girth 方向に振動し、 $\frac{\partial}{\partial \eta}$  の

項を全て含めると解の発散が生じた。本報告ではこれを避けるために便宜的に  $\frac{\partial}{h_2 \partial \eta}$  の項を部分的に省略したが、この点に関する詳細な考察が必要である。

- 4) 上記の計算法を用いてプロペラが作動するときの流場の計算を行った。この結果やせ型船に対して肥大船より顕著に境界層の変化がみられた。またプロペラ影響が及ぶ範囲も大略プロペラ直径の2倍であることが確かめられた。
- 5) 4)の結果より有効伴流のプロペラ荷重度に対する変化率を計算した。その結果やせ型船に対しては境界層の変形に基く量でほぼ実験値を説明できることがわかった。しかし肥大船の場合は境界層の寄与のみでは不十分で他に縦渦等の干渉を考慮する必要がある。

最後に本研究を行うにあたり、終始御指導と貴重な討論を載いた海洋開発工学部足達宏之室長に謝意を表します。また本研究は推進性能部船尾研究グループの共同研究の中で実施されたものであり、上田隆康室長、菅井信夫氏、塚田吉昭氏、それに故森山文雄氏には実験と討論に多大な御助力を頂戴した。ここに記して感謝します。なお数値計算は船研中央計算機センターFACOM M180 IIADを使用した。

#### 参考文献

- 1) 足達宏之、菅井信夫、森山文雄、上田隆康：荷重度変更法による船型試験システム、船舶技術研究所報告、第19巻第3号、(1982)、P.49
- 2) 基礎力学演習 流体力学 実教出版
- 3) T. Nagamatsu: Calculation of Viscous Pressure Resistance of Ships Based on a Higher Order Boundary Layer Theory, J.S.N.A., Japan, Vol. 147, 1980
- 4) 姫野洋司、田中一朗：船体まわりの3次元乱流境界層の計算、関西造船協会誌、第147号(1973)
- 5) 姫野洋司、奥野武俊：船体まわりの境界層内圧力分布および排除影響について、関西造船協会誌、第174号(1979)
- 6) 田中一朗、姫野洋司：3次元乱流境界層の第1近似理論とその応用、日本造船学会論文集、第138号(1975)
- 7) T. Nagamatsu: Comparison Between Calculated and Measured Results of Turbulent Boundary Layers around Ship Models, Mitsubishi Technical Bulletin, No. 133, (1979)
- 8) T.T. Huang, N.C. Groves: Effective Wake: Theory and Experiment, Proc. 13th O.N.R. Symposium, Tokyo, (1980)
- 9) T. Nagamatsu, K. Tokunaga: Prediction of Effective Wake Distribution for a Body of Revolution, J.S.N.A., Japan, Vol. 143, (1978)
- 10) 戸田保幸、田中一朗、岩崎義彦：プロペラの作動による軸対称境界層の変形、関西造船協会誌、第105号、(1982)
- 11) H. Adachi, M. Hinatsu: On Effective Wake-Consideration Based on the Propeller Load Varying Test Concept, Journal of the Kansai Society of Naval Architects, Japan, No. 191, (1983)
- 12) Korvin-Kroukovsky: Stern Propeller Interaction with a Stream Line Body of Revolution I.S.P., Vol. 3, No.17, (1956)

#### 付 録

軸対称物体まわりの流れに対して、粘性項を無視したときの有効流速分布の推算式を、直交曲線座標系で表わした渦度方程式から導くことにする。直交曲線座標系 $(\xi, \eta, \zeta)$ 、その軸まわりの渦度を $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ とすると渦度方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial \omega_1}{h_1 \partial \xi} + v \frac{\partial \omega_1}{h_2 \partial \eta} + w \frac{\partial \omega_1}{h_3 \partial \zeta} + (\omega_2 K_{12} + \omega_3 K_{13}) u \\
 = \omega_1 \frac{\partial u}{h_1 \partial \xi} + \omega_2 \frac{\partial u}{h_2 \partial \eta} + \omega_3 \frac{\partial u}{h_3 \partial \zeta} + (v K_{12} \\
 + w K_{13}) \omega_1 + \nu \cdot \left\{ \nabla^2 \omega_1 + 2K_{12} \frac{\partial \omega_2}{h_1 \partial \xi} \right. \\
 \left. + 2K_{13} \frac{\partial \omega_3}{h_1 \partial \xi} - 2K_{21} \frac{\partial \omega_2}{h_2 \partial \eta} - 2K_{31} \frac{\partial \omega_3}{h_3 \partial \zeta} \right. \\
 \left. + a_{11} \omega_1 + a_{12} \omega_2 + a_{13} \omega_3 \right\} \quad (A-1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial \omega_2}{h_1 \partial \xi} + v \frac{\partial \omega_2}{h_2 \partial \eta} + w \frac{\partial \omega_2}{h_3 \partial \zeta} + (\omega_1 K_{21} + \omega_3 K_{23}) v \\
 = \omega_1 \frac{\partial v}{h_1 \partial \xi} + \omega_2 \frac{\partial v}{h_2 \partial \eta} + \omega_3 \frac{\partial v}{h_3 \partial \zeta} + (u K_{21} \\
 + w K_{23}) \omega_2 + \nu \cdot \left\{ \nabla^2 \omega_2 + 2K_{23} \frac{\partial \omega_3}{h_2 \partial \eta} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2K_{21}\frac{\partial\omega_1}{h_2\partial\eta}-2K_{12}\frac{\partial\omega_1}{h_1\partial\xi}-2K_{32}\frac{\partial\omega_3}{h_3\partial\xi} \\
& \left. +\alpha_{21}\omega_1+\alpha_{22}\omega_2+\alpha_{23}\omega_3 \right\} \quad (A-2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u\frac{\partial\omega_3}{h_1\partial\xi}+v\frac{\partial\omega_3}{h_2\partial\eta}+w\frac{\partial\omega_3}{h_3\partial\xi} \\
& +(\omega_1K_{31}+\omega_2K_{32})w \\
& =\omega_1\frac{\partial w}{h_1\partial\xi}+\omega_2\frac{\partial w}{h_2\partial\eta}+\omega_3\frac{\partial w}{h_3\partial\xi} \\
& +(uK_{31}+vK_{32})\omega_3+\nu_e\left\{\nabla^2\omega_3\right. \\
& \left.+2K_{32}\frac{\partial\omega_2}{h_3\partial\xi}+2K_{31}\frac{\partial\omega_2}{h_3\partial\xi}-2K_{13}\frac{\partial\omega_1}{h_1\partial\xi}\right. \\
& \left.-2K_{23}\frac{\partial\omega_2}{h_2\partial\eta}+\alpha_{31}\omega_1+\alpha_{32}\omega_2+\alpha_{33}\omega_3\right\} \quad (A-3)
\end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned}
\nabla^2 & =\frac{\partial^2}{h_1^2\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{h_2^2\partial\eta^2}+\frac{\partial^2}{h_3^2\partial\xi^2}+(-K_{11}+K_{21}+K_{31})\frac{\partial}{h_1\partial\xi} \\
& + (K_{12}-K_{22}+K_{32})\frac{\partial}{h_2\partial\eta}+(K_{13}+K_{23}-K_{33})\frac{\partial}{h_3\partial\xi} \\
\alpha_{11} & =-(K_{21}^2+K_{12}^2+K_{13}^2+K_{31}^2), \\
\alpha_{12} & =\frac{\partial K_{12}}{h_1\partial\xi}-\frac{\partial K_{21}}{h_2\partial\eta}-K_{32}(K_{31}+K_{21})+K_{31}K_{12} \\
\alpha_{22} & =-(K_{32}^2+K_{23}^2+K_{21}^2+K_{12}^2), \\
\alpha_{33} & =-(K_{13}^2+K_{31}^2+K_{23}^2+K_{32}^2), \\
\alpha_{13} & =\frac{\partial K_{13}}{h_1\partial\xi}-\frac{\partial K_{31}}{h_3\partial\xi}-K_{23}(K_{31}+K_{21})+K_{21}K_{13} \\
\alpha_{21} & =\frac{\partial K_{21}}{h_2\partial\eta}-\frac{\partial K_{12}}{h_1\partial\xi}-K_{31}(K_{12}+K_{32})+K_{32}K_{21} \\
\alpha_{23} & =\frac{\partial K_{23}}{h_1\partial\xi}-\frac{\partial K_{32}}{h_3\partial\xi}-K_{13}(K_{12}+K_{32})+K_{12}K_{23} \\
\alpha_{31} & =\frac{\partial K_{31}}{h_3\partial\xi}-\frac{\partial K_{13}}{h_1\partial\xi}-K_{21}(K_{23}+K_{13})+K_{23}K_{31} \\
\alpha_{32} & =\frac{\partial K_{32}}{h_3\partial\xi}-\frac{\partial K_{23}}{h_2\partial\eta}-K_{12}(K_{23}+K_{13})+K_{13}K_{32}
\end{aligned} \quad (A-4)$$

で、渦度は

$$\left. \begin{aligned}
\omega_1 & =\frac{\partial w}{h_2\partial\eta}-\frac{\partial v}{h_3\partial\xi}+K_{32}w-K_{23}v \\
\omega_2 & =\frac{\partial u}{h_3\partial\xi}-\frac{\partial w}{h_1\partial\xi}+K_{13}u-K_{31}w \\
\omega_3 & =\frac{\partial v}{h_1\partial\xi}-\frac{\partial u}{h_2\partial\eta}+K_{21}v-K_{12}u
\end{aligned} \right\} \quad (A-5)$$

である。

これらの式に対して厚い境界層近似を考える。ただし

渦度をとるとき  $\frac{\partial}{h_3\partial\xi}$  の微分項を含んでいるため、

$0\left(\frac{\delta}{R}\right)^{-1}$ ,  $0(1)$ まで考えることにする。(2)式で仮定した order を用いて整理すると厚い境界層近似を施した渦度方程式は、

$$\begin{aligned}
& u\frac{\partial\omega_1}{h_1\partial\xi}+v\frac{\partial\omega_1}{h_2\partial\eta}+w\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi} \\
& +(\omega_2K_{12}+\omega_3K_{13})u \\
& =\omega_1\frac{\partial u}{h_1\partial\xi}+\omega_2\frac{\partial u}{h_2\partial\eta}+\omega_3\frac{\partial u}{\partial\xi} \\
& +(vK_{12}+wK_{13})\omega_1 \\
& +\nu_e\left\{\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\xi^2}+(K_{13}+K_{23})\frac{\partial\omega_1}{\partial\xi}\right\} \\
& u\frac{\partial\omega_2}{h_1\partial\xi}+v\frac{\partial\omega_2}{h_2\partial\eta}+w\frac{\partial\omega_2}{\partial\xi} \quad (A-6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\omega_1K_{21}+\omega_3K_{23})v \\
& =\omega_1\frac{\partial v}{h_1\partial\xi}+\omega_2\frac{\partial v}{h_2\partial\eta}+\omega_3\frac{\partial v}{\partial\xi} \\
& +(uK_{21}+wK_{23})\omega_2+\nu_e\left\{\frac{\partial^2\omega_2}{\partial\xi^2}\right. \\
& \left.+(K_{13}+K_{23})\frac{\partial\omega_2}{\partial\xi}\right\} \quad (A-7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u\frac{\partial\omega_3}{h_1\partial\xi}+v\frac{\partial\omega_3}{h_2\partial\eta}+w\frac{\partial\omega_3}{\partial\xi} \\
& =\omega_1\frac{\partial w}{h_1\partial\xi}+\omega_2\frac{\partial w}{h_2\partial\eta}+\omega_3\frac{\partial w}{\partial\xi}+\nu_e\frac{\partial^2\omega_3}{\partial\xi^2} \quad (A-8)
\end{aligned}$$

$$\omega_1 = -\frac{\partial v}{\partial \xi} - K_{23}v, \quad \omega_2 = \frac{\partial u}{\partial \xi} + K_{13}u,$$

$$\omega_3 = \frac{\partial v}{h_1 \partial \xi} - \frac{\partial u}{h_2 \partial \eta} + K_{21}v - K_{12}u \quad (A-9)$$

となる。境界層近似をした渦度方程式を用いれば、渦度の分布さえ求めれば $\zeta$ 方向に積分するだけで境界層内の速度分布が求まることがわかる。ただし渦度方程式を用いて境界層計算をするためには壁面での渦度の値が未知となるため工夫が必要である。

今流れが非粘性、軸対称まわりとすると渦度方程式は(A-7)のみ残り

$$u \frac{\partial \omega_2}{h_1 \partial \xi} + w \frac{\partial \omega_2}{\partial \zeta} = (uK_{21} + wK_{23})\omega_2 \quad (A-10)$$

となる。この式を図-19に示す座標系に従って $(\xi, \zeta)$ 系から $(x, r)$ 系に変換する。 $(x, r)$ 系の流速分布を $(U, V)$ とすると、図より明らかに

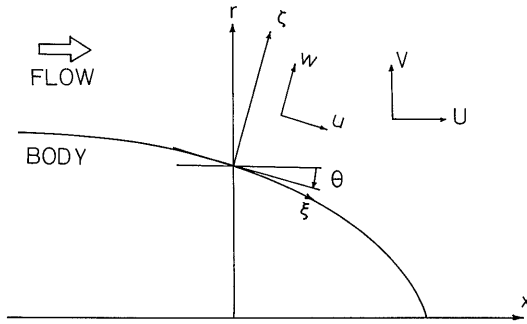


Fig. 19 Coordinated system for body of revolution

$$\begin{cases} \frac{\partial}{h_1 \partial \xi} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \end{cases} \quad (A-11)$$

$$\begin{cases} u = U \cos \theta - V \sin \theta \\ w = U \sin \theta + V \cos \theta \end{cases} \quad (A-12)$$

の関係が存在する。さらに $K_{21}, K_{23}$ に対しては

$$K_{21} = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{h_1 \partial \xi} = -\frac{\sin \theta}{r},$$

$$K_{23} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \zeta} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \zeta} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (A-13)$$

であるから、これらを(A-10)式に代入して整理すると

$$U \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + V \frac{\partial \omega_2}{\partial r} = \frac{V}{r} \omega_2 \quad (A-14)$$

が得られる。この式より

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial x} = -\frac{V}{U} \frac{\partial \omega_2}{\partial r} + \frac{V}{U} \frac{\omega_2}{r} \quad (A-15)$$

が得られ、これと

$$\frac{dr}{dx} = \frac{V}{U} = \frac{V_e + V_i}{U_e + U_i} \quad U_e, V_e: \text{有効流速} \\ U_i, V_i: \text{プロペラ誘導速度}$$

$$\omega_2 \doteq \frac{\partial u}{\partial r} \quad (\because \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial r}) \quad (A-16)$$

を用いてLagrange的に上流から解くと粘性項を無視したときの有効流速が得られる。(A-15), (A-16)から明らかな様にこれらの式は有効流速の変化が、渦の配置がプロペラなしの状態から変化することにより引き起こされることを示している。(A-14)式を導くとき、対流項と $(\omega \cdot \mathbf{r})u$ の項は境界層近似を行うにあたって全く省略されていない。従って(A-14)式は、Nagamatsu et. al. が用いた基礎式  $\frac{D}{Dt} \left( \frac{\omega_2}{r} \right) = 0$  と一致している。

戸田らは最近<sup>(3)</sup>、3次元境界層に対しても Wigley 船型のような単純船型のまわりの流れでは粘性項を省いても十分な精度で有効流速が推定されることを示している。これらのことから荷重変化に対する有効伴流の変化の割合を調べるには粘性項を含まない方程式系でも十分推定できると思われる。

(3) 戸田保幸, 田中一郎, 杉岡寛, 森英男: プロペラの作動による三次元境界層の変形, 関西造船協会誌, 第192号, (1984)