

3次元物体の附加質量に及ぼす浅水影響

— $K=0$ と $K=\infty$ の場合—

菅 信*・原口 富博*

Shallow Water Effects on Added Mass of a Three Dimensional Body —In Case of $K=0$ and $K=\infty$ —

By

Makoto KAN and Tomihiro HARAGUCHI

Abstract

A method of calculation of the shallow water effects on an added mass or moment of inertia of a floating three dimensional body is presented for the cases of the frequency parameter $K=0$ and $K=\infty$. Numerical examples for a spheroid, prolate spheroids and ellipsoids are also presented. Agreement with Havelock's result for a prolate spheroid in case of $K=\infty$ is satisfactory. The results of the systematic calculations for the ellipsoids with various axis ratio will be useful for the rough estimation of shallow water effects of a ship form, though exact result will be obtained by means of the present method by giving the hull form data. It is pointed out that in solving the problem concerned by the usual integral equation method, the Green function represented by the finite integral can not be applied, though there exist some precedents using this type of the Green function, and that only ones represented by the infinite integral and the infinite series are the correct expressions of the Green function. It is also shown that when the incorrect type of the Green function is used to solve the problem, the results for $K=0$ show the tendency that the added mass decreases as the water depth becomes shallow in contrast with the fact that the results for $K=\infty$ shows the correct results by cancelling the incorrect part of the representation.

1. はしがき

3次元物体が浅水域の水面上で角周波数 ω の調和振動をしているときの流場を求める造波ポテンシャル問題において、その2つの極限である $K(=\omega^2/g)=0$ と $K=\infty$ の場合を特に限定して取上げるのは、これが船の衝突、振動、操縦運動の問題と深くかかわっており浅水域でのこれらの問題を扱うためには、その浅水影響を調べておく必要があるからである。船の衝突の問題では、衝突の瞬間の附加質量は $K=\infty$ の場合の値をとり、これが衝突の際のエネルギーや衝突後の船の

運動に大きな影響を与えることになるし、また波浪中の船体動揺の周波数よりずっと高い周波数をもつ船体振動の問題では $K=\infty$ での附加質量を用いるのが普通である。更に船の操縦運動の問題では $K=0$ での附加質量を用いることが一般的になっている。

ところが、造波ポテンシャル問題を解く一般的な数値解法ではこの両極限の場合を扱うことができないため、これを独自に解いておくことが必要であり、これはまた、船の座礁問題を扱う場合のように浅水域での波浪中の動揺を解く際に用いる流体力の計算精度を極限値へのなめらかな接続によって確認する際にも有用なものである。

このような認識のもとに著者ら¹⁾は先に、この問題を取扱い $K=\infty$ については Havelock²⁾の近似計算と

* 運動性能部

原稿受付：昭和59年1月9日

定性的に合うが、 $K=0$ については水深が浅くなると附加質量が小さくなるという結果を報告した。 $K=0$ の場合、水深が浅くなると附加質量が小さくなるという結果は、直感にも反し、また FEM による計算^{3),4)}や実験⁵⁾とも逆の傾向になっており、若干の不安は残っていたが、計算法ならびに計算プログラムを度々点検しても誤りを発見するに至らなかったことから、この計算結果を正しいものと判断して公表し、更にこれを物理的に説明しようとする若干の考察を行なったりもした。

しかるに、その後この計算法を再度詳細に検討しなおす作業を進めたところ、このとき使用していた有限積分表示型のグリーン関数の数値計算値と、このときは使用していなかった級数表示型のグリーン関数の数値計算値が、 z 方向 (Fig.1 参照) の微分値を除いては一致しないということを見出した。このことから、これまで使用していた有限積分表示型のグリーン関数が、使えないものであるらしいことや、またもし積分表示型のものを使うときには、無限積分表示型のものを使えばよいことなどが判明した。

正しいと考えられる級数表示型のグリーン関数または無限積分表示型のグリーン関数を使って計算をやり直したところ、 $K=\infty$ の場合は前報¹⁾と同一の結果であるが、 $K=0$ の場合は浅水で附加質量が大きくなるという従来の知見とも一致する結果が得られた。前報の $K=0$ の結果は誤りであり、今回の結果が正しいものと判断されるので、訂正版として改めて報告したい。

前報の誤りは、級数表示型のグリーン関数から、積分表示型に変換する際に積分公式或いは級数の総和公式を制限条件を超えて使用したこと由来するものようであるが、有限積分表示型のグリーン関数が一見、数値計算に便利に見えることから今後も誤って使用されるということも考えられるため、この点についてもやや詳しく述べておきたい。

2. 計算法

2.1 定式化

平面的には無限に広がった一定水深 h の水域で、円周波数 ω の調和振動をする浮体がある場合、その流場を表わす単位速度あたりの速度ポテンシャルを $Re(\phi e^{i\omega t})$ とすると、 $K=0$ と $K=\infty$ の両極限で ϕ の満たすべき基礎方程式ならびに境界条件は、Fig.1 のような座標をとると次の通りである。

$$\text{流体領域で} \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{水底}(z=h)\text{で} \quad \phi_z = 0 \quad (2.2)$$

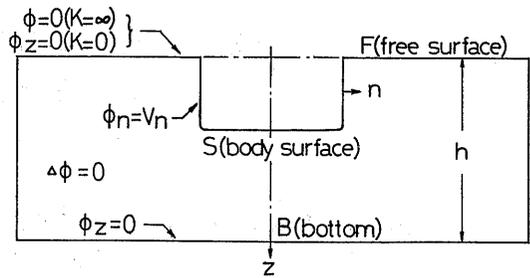


Fig. 1 Boundary conditions

$$\text{自由表面}(z=0)\text{で} \quad \phi_z = 0 \quad (K=0\text{の場合}) \quad (2.3)$$

$$\phi = 0 \quad (K=\infty\text{の場合}) \quad (2.4)$$

$$\text{浮体表面}S\text{上で} \quad \phi_n = V_n \quad (2.5)$$

但し V_n は浮体の運動の法線速度成分

$$\text{無限遠方}(R \rightarrow \infty)\text{で} \quad \phi_n \rightarrow -Q/2\pi Rh \quad (K=0\text{の場合}) \quad (2.6)$$

$$\phi \rightarrow 0 \quad (K=\infty\text{の場合}) \quad (2.7)$$

$$\text{但し} \quad Q = \int_S \phi_n dS \quad (2.8)$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \quad (2.9)$$

2.2 グリーン関数

次にこの境界値問題を積分方程式法で解くために必要なグリーン関数を求めてみる。

Fig.2 に示すように、 $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ とし無限個の単位強さの source 列を $(x', y', z'+4nh)$ と $(x', y', -z'+2h+4nh)$ に、sink 列を $(x', y', -z'+4nh)$ と $(x', y', z'-2h+4nh)$ においたときの速度ポテンシャルをそれぞれ G^+ 、 G^- とすると

$$G^+ = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\{R^2 + (z-z'-4nh)^2\}^{1/2}} + \frac{1}{\{R^2 + (z+z'-2h-4nh)^2\}^{1/2}} \right] \quad (2.10)$$

$$G^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\{R^2 + (z+z'-4nh)^2\}^{1/2}} + \frac{1}{\{R^2 + (z-z'+2h-4nh)^2\}^{1/2}} \right] \quad (2.11)$$

と書ける。水底と自由表面の条件を満たすグリーン関数を $K=0, \infty$ に対してそれぞれ G_0, G_∞ とすると

$$G_0 = G^+ - G^- \quad (2.12)$$

$$G_\infty = G^+ + G^- \quad (2.13)$$

で表わせることは、Fig. 2 の鏡像列の水底に関する対称性 ($K=0$ 及び $K=\infty$) および自由表面に対する反対

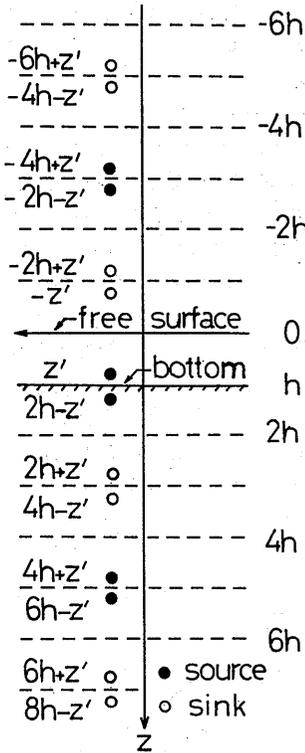


Fig. 2 Image series of source and sink

称性 ($K=\infty$) または対称性 ($K=0$) から明らかである。

しかし(2.10), (2.11)で表わされる G^+ , G^- はそれぞれ発散級数であり (2.13)で表わされる G_∞ の場合には発散部分は相殺されて消えるが (2.12) の G_0 の方は消えないし, 今の場合, プログラム上は G^+ と G^- を別々に計算しておいてから (2.12), (2.13)により G_0 と G_∞ を同時に求める方式をとるため, これらの発散部分ははじめから取除いておく必要がある。従ってこの発散部分を取除いたものを改めて G^+ , G^- とすると,

$$G^+ = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\{R^2 + (z-z' - 4nh)^2\}^{1/2}} + \frac{1}{\{R^2 + (z+z' - 2h - 4nh)^2\}^{1/2}} \right] + 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|4nh|} \quad (2.14)$$

$$G^- = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\{R^2 + (z+z' - 4nh)^2\}^{1/2}} + \frac{1}{\{R^2 + (z-z' + 2h - 4nh)^2\}^{1/2}} \right] - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|4nh|}$$

$$\left. \frac{1}{\{R^2 + (z-z' + 2h - 4nh)^2\}^{1/2}} \right] - 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|4nh|} \quad (2.15)$$

となる。但し Σ' は $n=0$ を除く総和を表わす記号である。

今

$$f(R, Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\{R^2 + (Z - 4nh)^2\}^{1/2}} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|4nh|} \quad (2.16)$$

を検討する。

(2.16)の右辺を積分表示することを考え, その無限積分表示式を $f_1(R, Z)$ とすると,

Lipschitzの公式

$$\int_0^{\infty} e^{-|Z-4nh|t} J_0(Rt) dt = \frac{1}{\{R^2 + (Z-4nh)^2\}^{1/2}} \quad (2.17)$$

と無限等比級数の公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-|Z-4nh|t} = \frac{\cosh(2h - |Z|)t}{\sinh 2ht} \quad (2.18)$$

及び

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|4nh|} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2ht}}{\sinh 2ht} dt \quad (2.19)$$

の関係を使うことにより,

$$f_1(R, Z) = \int_0^{\infty} \frac{\cosh(2h - |Z|)t J_0(Rt) - e^{-2ht}}{\sinh 2ht} dt \quad (2.20)$$

であることが証明できる⁷⁾。(2.20)を導く過程においては, Lipschitzの公式(2.17)の適用において, $n=0$ でかつ $R=Z=0$ でない限り全く問題はなくまた, その場合でも(2.20)から $f_1(R, Z) \sim 1 / (R^2 + Z^2)^{1/2}$ が導き出せるので, (2.16)の級数型の表示式 $f(R, Z)$ と(2.20)の無限積分型の表示式 $f_1(R, Z)$ は等置してよいものである。

一方, 前報で行ったように(2.16)の右辺を有限積分型の表示式に変換したものを $f_2(R, Z)$ とすると積分公式

$$\frac{2R}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{R^2 + (Z - 4nh)^2 \cos^2 \theta} d\theta = \frac{1}{\{R^2 + (Z - 4nh)^2\}^{1/2}} \quad R > 0 \quad (2.21)$$

と無限級数の公式

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\left(\frac{\pi R}{2h} \sec \theta\right)^2 + \left(\frac{\pi Z}{2h} - 2n\pi\right)^2}$$

$$= \frac{\sinh\left(\frac{\pi R}{2h} \sec \theta\right)}{2 \cdot \frac{\pi R \sec \theta}{2h} \left\{ \cosh\left(\frac{\pi R}{2h} \sec \theta\right) - \cos\frac{\pi Z}{2h} \right\}} \quad (2.22)$$

及び

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|4n\pi|} = \frac{1}{2h} \int_0^{\pi/2} \sec \theta d\theta - \frac{\ln 2}{2h} \quad (2.23)$$

の関係を使って

$$f_2(R, Z) = -\frac{1}{2h} \int_0^{\pi/2} \sec \theta \frac{\exp(-\pi R \sec \theta / 2h) - \cos(\pi Z / 2h)}{\cosh(\pi R \sec \theta / 2h) - \cos(\pi Z / 2h)} d\theta + \frac{\ln 2}{2h} \quad (2.24)$$

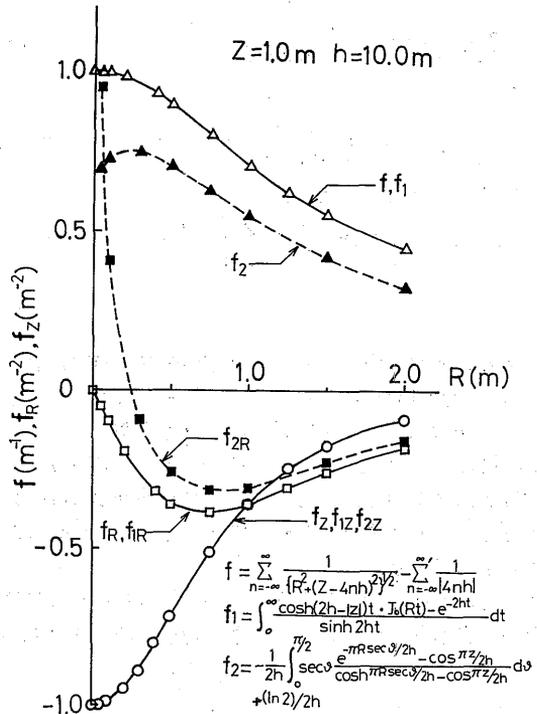


Fig. 3 Differences of values of Green function and its derivatives due to expressions (Z = 1m, h = 10m)

と表わせるとし、この表示式を使って数値計算を行ったところ、 $K = \infty$ では良い結果が得られたが、 $K = 0$ では、浅水で附加質量が小さくなるという結果が得られたものである¹⁾。

しかし、結論を先に述べると (2.24) の有限積分型の表示式 $f_2(R, Z)$ は (2.16) の級数型の表示式 $f(R, Z)$ 或いは (2.20) の無限積分型の表示式 $f_1(R, Z)$ と等しいものではない。このことを先ず、Fig. 3, Fig. 4 に数値計算例で示しておく。Fig. 3 から判るように $f(R, Z)$ と $f_1(R, Z)$ は等しいが、 $f_2(R, Z)$ は $f(R, Z)$ と等しくなく R が小さくなる程その差が大きくなり、 R 方向の微分 f_{2R} はその差が一層拡大されている、 Z 方向の微分値 f_z は 3 つの表示式のどれも一致している。

Fig. 4 からは、 f と f_2 の違い及び R 方向の微分値 f_R と f_{2R} の違いは、 R が一定なら Z 方向には変わらない、従って f_z と f_{2z} は一致することが判る。

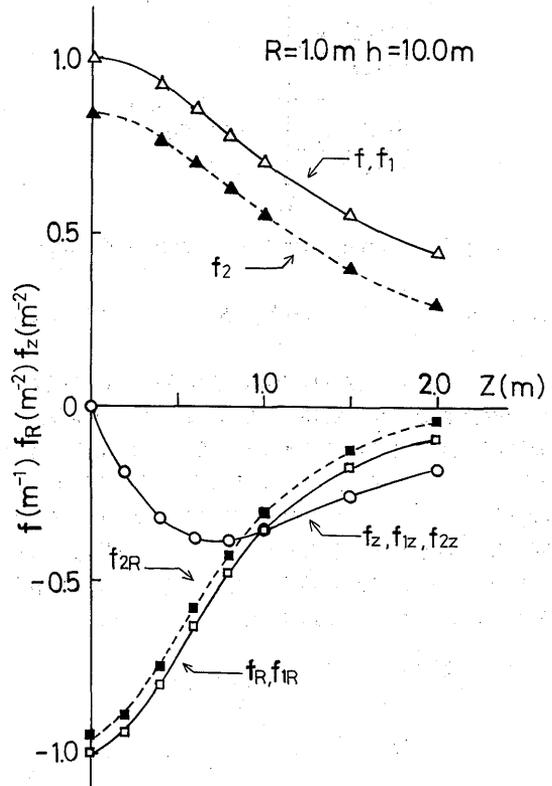


Fig. 4 Differences of values of Green function and its derivatives due to expressions (R = 1m, h = 10m)

(2.24) で計算した $f_2(R, Z)$ と正しい値 $f(R, Z)$ の差は Z には無関係で R にのみ依存するため $K = \infty$ の場合にはグリーン関数を (2.13) で計算することにより間違った表示式であるにも拘らず、エラーが相殺されて正しい結果と一致する結果を与えたが、 $K = 0$ の場合には (2.12) で計算するためエラーが2倍になって誤った結果を与えたものである。

このようにグリーン関数の表示式として (2.24) のような有限積分型の表示式は使えないことが、数値的に明らかになったのであるが、この表示式を導き出す過程でどこに誤りがあったのかということについては、数学的に厳密な説明はいまのところできていない。恐らく積分公式 (2.21) において $n \rightarrow \infty$ の場合にまでこの公式が使えるかどうかということ、無限級数の総和公式 (2.22) において $\theta = \pi/2$ の場合にまでこの公式を使ってよいかどうかを厳密に検討しないとイケないように思われる。(2.24) の表示式は有限積分の形をしていて (2.20) の無限積分型の表示式より一見して数値計算に使うには使い易いようにみえるし、(2.16) の無限級数型の表示式をそのまま使うのは、収束判定が必要であることと収束が悪そうにみえることから、今後も (2.24) の表示式が誤って使われる可能性もありそうなので、特に注意をする必要があると考えている。実際、その後過去の文献を調査したところ、著者らの前報の誤りと同じ誤りをおかしている例⁹⁾がみつかったが、そちらの方は数値計算に応用した例がないためか、誤りは訂正されていないように思われる。

2.3 積分方程式

$P(x, y, z)$ を流体領域内の点とし、 $Q(x', y', z')$ を流体領域を囲む境界上の点とし、グリーン関数 $G(P, Q)$ ($G_0(P, Q)$ または $G_\infty(P, Q)$) と $\phi(P)$ にこの流体領域内でグリーンの定理を適用し、更に P を境界上にもってくることにより ϕ に関する積分方程式が得られる。自由表面と水底での積分が消えるのは明らかであるが、無限遠方の境界上でも、後述する $K = 0$ の場合の上下動問題 ($Q \neq 0$) を除いては積分が消えることから、積分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi(P) + \frac{1}{2\pi} \int_s \phi(Q) \cdot G_n(P, Q) dS \\ = \frac{1}{2\pi} \int_s \phi_n(Q) G(P, Q) dS \end{aligned} \quad (2.25)$$

附加質量 (附加慣性モーメント等を含む) m_{ij} は

$$m_{ij} = -\rho \int_s \phi_i \phi_j dS \quad (2.26)$$

である。但し、添字 i, j は運動のモードを表わし、 $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ でそれぞれ surge, sway, heave roll, pitch, yaw を示す。回転運動は座標軸まわりの運動を基準に考える。附加質量係数 μ_{ij} は m_0 を物体の質量、 l を単位寸法 ($= 1$) として次の様に定義する。

$$\mu_{ij} = m_{ij} / m_0 l^k \quad (2.27)$$

但し k は必要に応じて $k = 0, 1, 2$ のどれかをとる。

また $h = \infty$ のときの μ_{ij} を $\mu_{ij}(\infty)$ 、 h が有限のときの μ_{ij} を $\mu_{ij}(h)$ としたとき、浅水影響係数 k_{ij} は

$$k_{ij} = \mu_{ij}(h) / \mu_{ij}(\infty) \quad (2.28)$$

で表わすものとする。

3. 数値計算例

3.1 球, 回転楕円体, 楕円体

数値計算としては、物体表面形状が解析的に表わされ入力データの作成が容易で、かつ精度の検定にも便利な楕円体について行う。

楕円体の方程式は

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1 \quad (3.1)$$

で表わされるが、またパラメータ α, β を使って

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \alpha \cos \beta \\ y &= b \sin \alpha \sin \beta \\ z &= c \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

とも表わせる。但し今の場合 $z > 0$ (水面下) のみを扱うことになる。

楕円体表面から外向きの法線の方向余弦 (l, m, n) とすると

$$\left. \begin{aligned} l &= bc \sin^2 \alpha \cos \beta / \Delta \\ m &= ca \sin^2 \alpha \sin \beta / \Delta \\ n &= ab \cos \alpha \sin \alpha / \Delta \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

但し

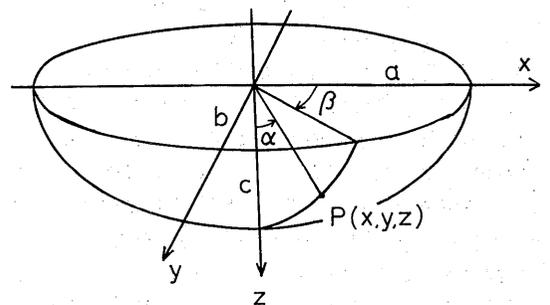


Fig. 5 Ellipsoid

$$\Delta = \sin \alpha \times \quad (3.4)$$

$$\sqrt{a^2 b^2 \cos^2 \alpha + c^2 \sin^2 \alpha (a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta)}$$

要素 dS は

$$dS = \Delta da d\beta \quad (3.5)$$

従って Δ は、 $\alpha = 0$ のときの n の計算だけ気をつければ特に考えなくてもよいことになる。

このとき積分方程式 (2.25) は

$$\begin{aligned} \phi(\alpha, \beta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\alpha' \int_0^{2\pi} \phi_n(\alpha', \beta') \cdot G_n(\alpha, \beta; \alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} d\alpha' \int_0^{2\pi} \phi_n(\alpha', \beta') \cdot G(\alpha, \beta; \alpha', \beta') d\alpha' d\beta' \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる。

実際のプログラムでは、楕円体の左右対称性 ($x-z$ 面に関する) のみを考慮して β に関する積分は 0 から π までとしており、一般の船型への拡張を考慮して、前後対称性 ($y-z$ 面に関する) については無視してある。

また、 (α, β) と (α', β') が一致するときの特異性に関する考慮を省くため、(3.6) を代数方程式に直したときに微少面積 $d\alpha \times d\beta$ (α と β に関しては矩形となるが、実際の平面では矩形とならず三角形になる場合もある) の中で $\phi(\alpha', \beta')$ は一定とし、また $\phi_n(\alpha', \beta')$, $G_n(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$ 及び $G(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$ の3つの値については、微少面積を囲む α, β に関する4つの端点における値の平均値をとるものとする⁹⁾。

また

$$\phi_n = \begin{cases} l & \text{for surge} \\ m & \text{for sway} \\ n & \text{for heave} \\ yn-zm & \text{for roll (} x \text{軸まわり)} \\ zl-xn & \text{for pitch (} y \text{軸まわり)} \\ xm-yl & \text{for yaw (} z \text{軸まわり)} \end{cases} \quad (3.7)$$

である。2節以上の多節振動の問題も節の位置を与えれば、(3.7) にそれらの条件を入れて解くことができるが、本報告では多節振動は扱わないことにする。

特異性の処理を避けるため上のような取扱いをしたので、数値積分公式としては、精度はあまり良くないが、ポンスレー法則⁹⁾ (外接台形法則) を用いた。

分割数は、 α については 0 から $\pi/2$ (水面) までを M 等分、 β については 0 から π までを N 等分する。

計算精度のチェックのため、 $h = \infty$, $K = \infty$ の球の上下動の場合の ϕ を解析解 $\phi = -a/2 \cos \alpha$ と比較し

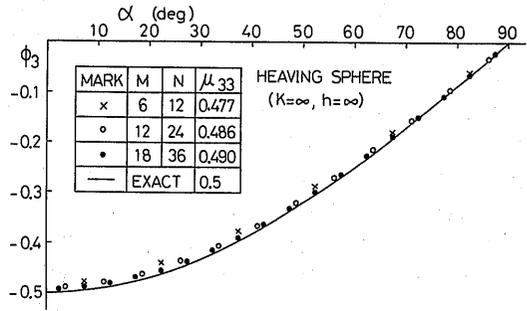


Fig. 6 Velocity potential on surface of a sphere (Heave, $K = \infty$, $h = \infty$)

て Fig.6 に示す。なお、球の場合これは左右動または前後動の $K = 0$ の場合と軸の方向を変えれば等価であることは言うまでもない。 $M = 12$, $N = 24$ の場合、附加質量係数 $\mu_{33}(\infty) = m_{33}(\infty) / \frac{2}{3} \pi \rho a^3$ の値は 0.486 で解析解 0.5 との誤差が 2.8% ほどもあるが、 $K = 0$ での $\mu_{33}(\infty)$ の値は 0.825 で Barakat¹⁰⁾ の値 0.831 との誤差は 0.7% であり、以下の計算はすべてこの分割数で行なった。

Fig.7 に球の附加質量の浅水影響を示す。 $K = \infty$ の場合は前報¹⁾ と全く同じであるが、 $K = 0$ の場合は浅水で附加質量が大きくなり、その程度は $K = \infty$ の場合より強い。前報で示した結果とは定性的に全く違っており、今回の結果が正しいものであることは先に述べた通りである。なお $K = 0$ の上下動の μ_{33} は $h = \infty$ の場合以外は物理的意味がよく判らないものであり、これについては後で述べる。

ここで示した計算法に問題がないことを示すため、Havelock の扁長回転楕円体 ($a = 10$, $b = c = 1$) の計算²⁾ と比較したものを Fig.8 に示してある。Havelock の計算は物体表面の条件は正確に満足させてあるが、水底と自由表面の条件は正確には満足させていない第 2 近似までのものであることもあって、その影響がより強く現われると思われる縦運動 ($i = 3$, Heave; $i = 5$, Pitch) の場合には、浅い方で一致があまり良くないが定性的な傾向は合っており、また横運動 ($i = 2$, Sway) の場合の一致は良い。

次に $a = 10$ と 5, $b = 1.25$, $c = 1$ の楕円体についていくつかの計算例を Fig.9 に示す。同じ運動のモードについてみると、 $K = 0$ の場合の方が $K = \infty$ の場合より浅水影響を強く受けている。また a/c の影響は $K = 0$ の方に強く現われ、 $K = \infty$ ではほとんど現われないこ

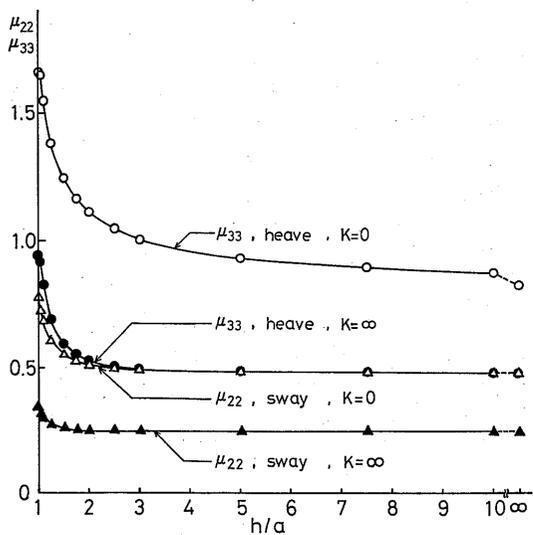


Fig. 7 Shallow water effects of added masses of a sphere

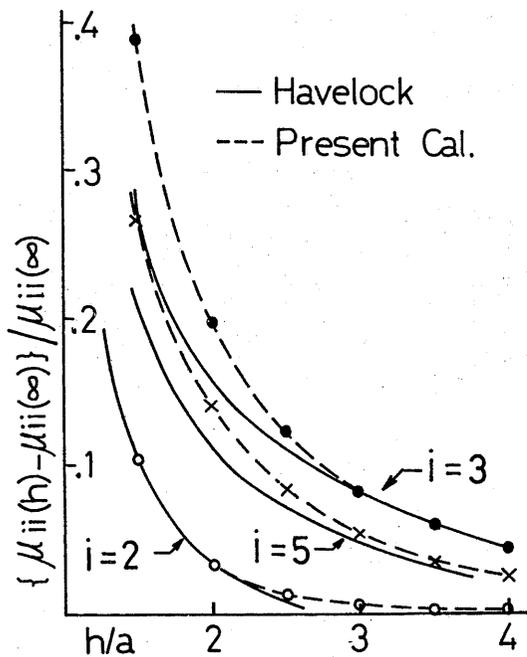


Fig. 8 Comparison with Havelock's second approximation for a spheroid ($a=10, b=c=1$)

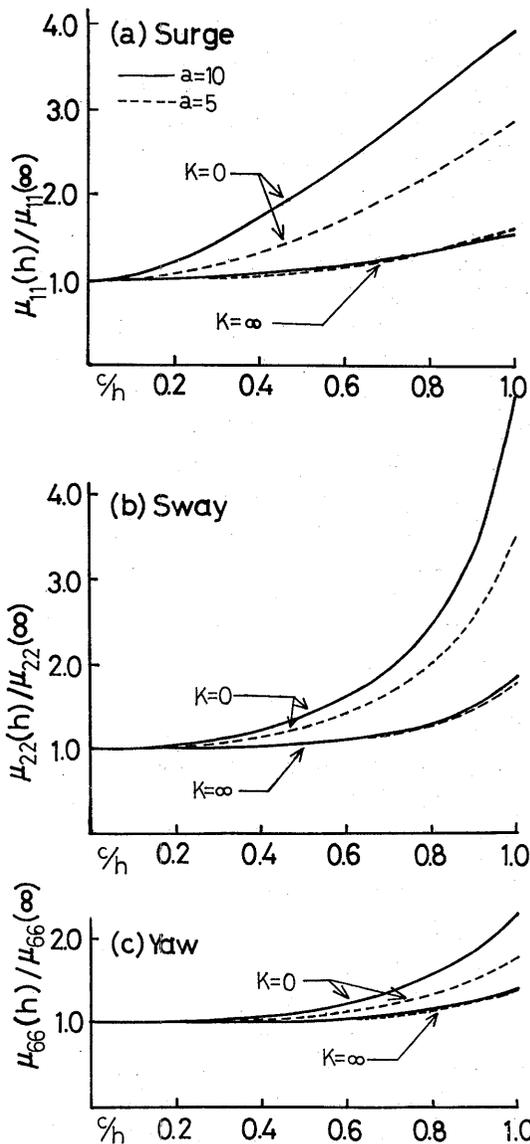


Fig.9 Shallow water effects of added masses of ellipsoids ($a=5, 10; b=1.25, c=1$)

とが判る。

3.2 一般船型の簡易推定法と

一般の船型の場合にも附加質量の浅水影響の計算は、本報告のような方法で船体表面形状を表わす入力データを与えることによって可能にすることができる、がもっと簡単に概略の値を欲しいときに利用できるように、

楕円体の軸長比を変えた系統計算の結果を Fig.10 (a) ~ (e) に数表とともに示す。これから船型の L/B , B/d を与えれば、求める h/d に対して浅水影響係数 k_{11} の概略の値を内挿することができる。但し、この値は楕円体の値そのものであるから、一般船型に対しては次のような方法で更に修正を加えておく必要がある。すなわち通常の船型は、ほぼ全長にわたって吃水 d は一定であるが、楕円体の場合は船首尾に近づくにつれて船底と水底との間隙はひろがってくるのであるから、同じ h/d に対しては楕円体の方が浅水影響の受け方は小さくなり、Fig.10 からの内挿値だけでは過小評価になるおそれがある。そこで船体を囲む幅 B 、長さ L の長方形の2倍の部分が攪乱影響を強く受ける範囲と考えて、この面積で水面から水底に達する直方体を考えこの中に含まれる流体の体積が一般船型と楕円体とで等しくなるように、相当水深 h_e という量を楕円体の方に考えると

$$\begin{aligned} 2L \times B \times h - L \times B \times d \times C_b &= \\ 2L \times B \times h_e - L \times B \times d \times \pi/6 & \quad (3.8) \end{aligned}$$

という関係になるのでこれから

$$\frac{h_e}{d} = \frac{h}{d} - \frac{1}{2} (C_b - \frac{\pi}{6}) \quad (3.9)$$

が得られる。すなわち、推定しようとする h/d よりも $(C_b - \pi/6)/2$ だけ浅い水深に対応する楕円体の値を Fig.10 から内挿して使えばよいということになる。実験データのあるタンカー船型³⁾とマリナー船型⁵⁾についてこのような簡易推定法で推定した結果を Fig.11 と Fig.12 に示してあるが、比較的よい推定になっていることがわかる。

Fig.10 によると浅水影響は $K=\infty$ では船型の影響をあまり大きく受けないが、 $K=0$ の場合はある程度船型の影響を受け、 L/B が大きいほど、また B/d が大きいほど surge, sway, yaw とも浅水影響係数が大きくなっている。また sway に比べて yaw の方が浅水影響係数が小さいことなども、従来の結果³⁾と同じ傾向である。 $h/d < 1.1$ の極く浅水の場合を除いては、surge の方が sway よりも浅水影響係数は大きく出ているが、surge の無限水深での附加質量係数 $\mu_{11}(\infty)$ の値そのものは小さな値であるから、それほど重要なことではない。

なお、Fig.10 で $h/d = 1.0$ については、surge, sway, yaw の平面運動の場合には、船底と水底を接触しながら運動する場合であるから物理的な意味が明らかであるが、heave の場合には、船体を固体と考えると

物理的に実現できない状態である。しかし船体の弾性変形を許すような場合を考えれば、特に楕円体のように船底と水底とが一点で接触するだけの場合には物理的な意味が解釈できるので、同じプログラムで計算した結果を示してある。また数表中 $\mu_{11}(\infty)$ 等の欄には、無限水深での附加質量係数を (2.27) の定義によ

SURGE ($K=0$) k_{11}

MARKS	B/d	2.0			2.5			3.0		
	h/d \ L/B	4	6	8	4	6	8	4	6	8
○	1.00	2.45	2.91	3.34	2.85	3.41	3.93	3.24	3.90	4.52
●	1.10	2.21	2.64	3.04	2.57	3.10	3.58	2.93	3.55	4.13
△	1.25	1.93	2.32	2.67	2.24	2.71	3.15	2.54	3.11	3.63
▲	1.50	1.65	1.96	2.25	1.88	2.27	2.64	2.12	2.59	3.03
□	2.50	1.22	1.37	1.53	1.32	1.53	1.73	1.43	1.69	1.94
■	5.00	1.04	1.08	1.13	1.06	1.13	1.20	1.09	1.18	1.28
	$\mu_{11}(\infty)$	0.082	0.045	0.029	0.069	0.038	0.025	0.060	0.033	0.021

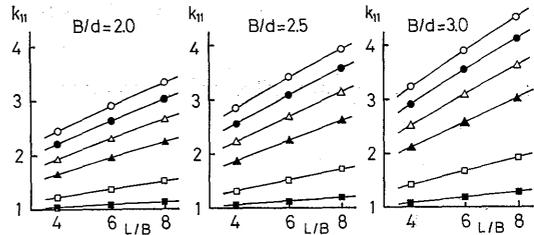


Fig. 10 (a) Chart for estimation of k_{11} ($K=0$)

SWAY ($K=0$) k_{22}

MARKS	B/d	2.0			2.5			3.0		
	h/d \ L/B	4	6	8	4	6	8	4	6	8
○	1.00	2.93	3.66	4.31	3.49	4.40	5.22	4.04	5.12	6.11
●	1.10	2.19	2.56	2.86	2.59	3.06	3.45	3.00	3.59	4.06
△	1.25	1.73	1.93	2.09	1.99	2.25	2.45	2.26	2.58	2.83
▲	1.50	1.40	1.51	1.60	1.56	1.70	1.81	1.73	1.90	2.03
□	2.50	1.09	1.12	1.15	1.14	1.18	1.21	1.19	1.24	1.27
■	5.00	1.01	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.04	1.05
	$\mu_{22}(\infty)$	0.860	0.917	0.945	0.704	0.744	0.763	0.596	0.626	0.640

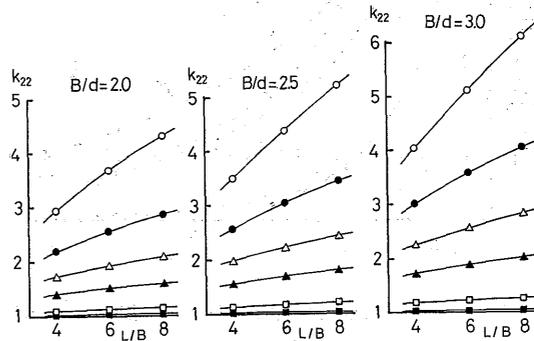


Fig. 10 (b) Chart for estimation of k_{22} ($K=0$)

YAW ($K=0$) k_{66}

MARKS	B/d			2.0			2.5			3.0		
	h/d	L/B		4	6	8	4	6	8	4	6	8
○	1.00	1.54	1.77	1.96	1.75	2.05	2.30	1.98	2.34	2.65		
●	1.10	1.36	1.52	1.65	1.52	1.73	1.90	1.70	1.95	2.16		
△	1.25	1.22	1.33	1.42	1.34	1.48	1.59	1.46	1.63	1.77		
▲	1.50	1.12	1.18	1.23	1.19	1.27	1.34	1.26	1.37	1.45		
□	2.50	1.02	1.03	1.05	1.03	1.05	1.08	1.05	1.08	1.11		
■	5.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.01	1.00	1.01	1.01		
			$\mu_{66}(\infty)^*$	2.067	5.641	10.91	2.700	7.256	13.92	3.334	8.869	16.92

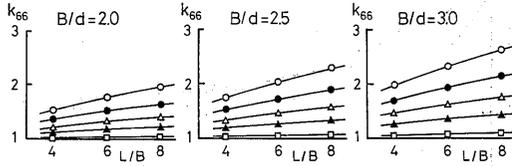


Fig.10 (c) Chart for estimation of k_{66} ($K=0$)

YAW ($K=\infty$) k_{66}

MARKS	B/d			2.0			2.5			3.0		
	h/d	L/B		4	6	8	4	6	8	4	6	8
○	1.00	1.28	1.31	1.32	1.36	1.39	1.41	1.44	1.47	1.49		
●	1.10	1.17	1.19	1.20	1.23	1.25	1.26	1.29	1.32	1.33		
△	1.25	1.09	1.11	1.11	1.13	1.15	1.15	1.18	1.19	1.20		
▲	1.50	1.04	1.05	1.05	1.06	1.07	1.08	1.09	1.10	1.10		
□	2.50	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.01	1.02		
■	5.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00		
			$\mu_{66}(\infty)^*$	0.824	2.029	3.688	1.024	2.502	4.541	1.214	2.954	5.364

* NUMERICAL M=12, N=24

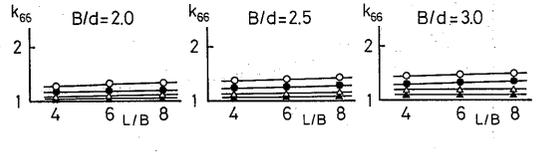


Fig. 10 (f) Chart for estimation of k_{66} ($K=\infty$)

SURGE ($K=\infty$) k_{11}

MARKS	B/d			2.0			2.5			3.0		
	h/d	L/B		4	6	8	4	6	8	4	6	8
○	1.00	1.50	1.48	1.47	1.58	1.56	1.54	1.67	1.63	1.61		
●	1.10	1.38	1.39	1.39	1.47	1.47	1.46	1.56	1.54	1.53		
△	1.25	1.26	1.28	1.28	1.33	1.35	1.35	1.41	1.42	1.42		
▲	1.50	1.16	1.18	1.18	1.21	1.23	1.24	1.26	1.27	1.29		
□	2.50	1.03	1.05	1.05	1.05	1.07	1.08	1.07	1.09	1.11		
■	5.00	1.00	1.01	1.01	1.00	1.01	1.01	1.01	1.01	1.03		
			$\mu_{11}(\infty)^*$	0.034	0.017	0.010	0.028	0.014	0.008	0.023	0.011	0.007

* NUMERICAL M=12, N=24

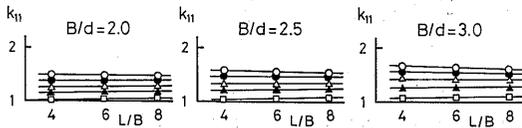


Fig. 10 (d) Chart for estimation of k_{11} ($K=\infty$)

HEAVE ($K=\infty$) k_{33}

MARKS	B/d			2.0			2.5			3.0		
	h/d	L/B		4	6	8	4	6	8	4	6	8
○	1.00	1.99	1.94	1.92	2.06	2.01	1.97	2.11	2.04	2.02		
●	1.10	1.96	1.94	1.92	2.15	2.11	2.08	2.32	2.26	2.22		
△	1.25	1.64	1.64	1.64	1.78	1.78	1.77	1.92	1.92	1.91		
▲	1.50	1.39	1.40	1.40	1.48	1.49	1.49	1.58	1.59	1.58		
□	2.50	1.11	1.12	1.13	1.14	1.15	1.16	1.18	1.19	1.19		
■	5.00	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03	1.03	1.04	1.04	1.05		
			$\mu_{33}(\infty)$	0.860	0.917	0.945	1.092	1.158	1.189	1.325	1.399	1.434

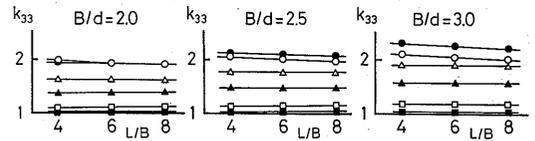


Fig. 10 (g) Chart for estimation of k_{33} ($K=\infty$)

SWAY ($K=\infty$) k_{22}

MARKS	B/d			2.0			2.5			3.0		
	h/d	L/B		4	6	8	4	6	8	4	6	8
○	1.00	1.63	1.69	1.73	1.75	1.82	1.86	1.86	1.93	1.98		
●	1.10	1.36	1.39	1.41	1.46	1.50	1.52	1.56	1.61	1.63		
△	1.25	1.19	1.21	1.22	1.26	1.28	1.30	1.33	1.36	1.37		
▲	1.50	1.09	1.10	1.10	1.13	1.14	1.14	1.17	1.18	1.19		
□	2.50	1.01	1.01	1.01	1.02	1.02	1.02	1.03	1.03	1.03		
■	5.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00		
			$\mu_{22}(\infty)^*$	0.317	0.306	0.294	0.249	0.238	0.228	0.203	0.193	0.184

* NUMERICAL M=12, N=24

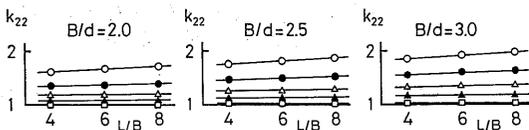


Fig. 10 (e) Chart for estimation of k_{22} ($K=\infty$)

て示してある。 $K=\infty$ での surge の $\mu_{11}(\infty)$, sway の $\mu_{22}(\infty)$ と yaw の $\mu_{66}(\infty)$ が解析解が判らないため数値解 ($M=12, N=24$) である以外は解析解による値である。

4. $K=0$ の上下動問題 ($Q \neq 0$)

$K=0$ のときで、浮体の上下動問題のように $Q \neq 0$ の場合は、グリーンの定理を流体領域に適用した場合水底及び自由表面で積分が消えることは明らかであるが無限遠方の境界 Σ 上での積分が残ることが次のように示される。

(2.6) より

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \phi_n = - \lim_{R \rightarrow \infty} \phi_R = -Q/2\pi R h \quad (4.1)$$

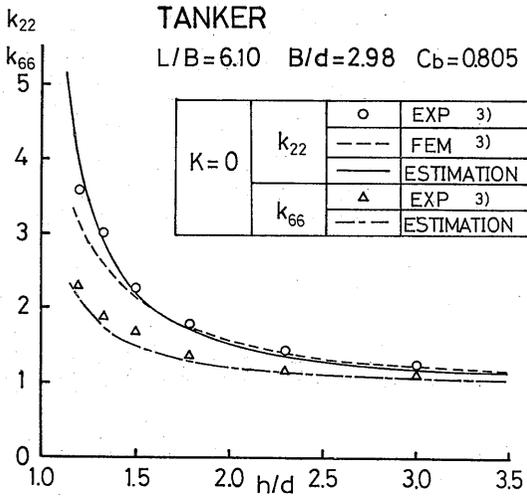


Fig. 11 Comparison between estimation and experiment(Tanker)

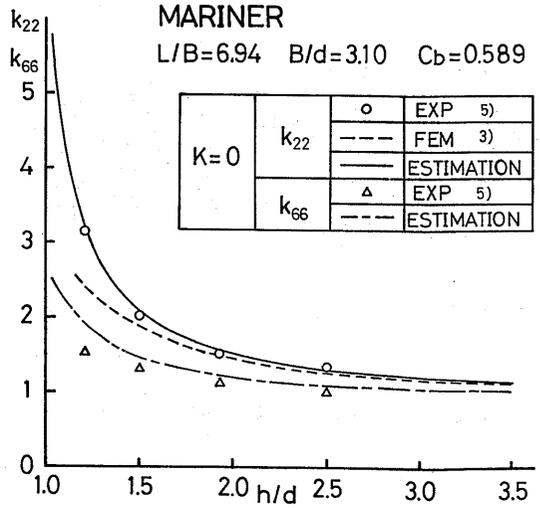


Fig. 12 Comparison between estimation and experiment(Mariner)

であるから

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \phi = +Q/2\pi h \cdot \ln R + C_2 \quad (4.2)$$

と表わせる。C₂は定数である。

一方グリーン関数として (2.16) の型のものを考えると

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G = O(-1/R) + C_1 \times 4 \quad (4.3)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} G_R = O(1/R^2) \quad (4.4)$$

となるから

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} (\phi G_n - \phi_n G) ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \left[\left(\frac{+Q}{2\pi h} \cdot \ln R + C_2 \right) \cdot O(1/R^2) \right. \\ & \quad \left. - \frac{-Q}{2\pi R h} \{ O(-1/R) + 4C_1 \} 2\pi R h = \frac{2QC_1}{\pi} \right] \quad (4.5) \end{aligned}$$

となり、解くべき積分方程式は

$$\begin{aligned} & \phi(P) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \phi(Q) G_n(P, Q) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \phi_n(Q) \cdot G(P, Q) ds - \frac{2QC_1}{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} \phi_n(Q) \cdot \{ G(P, Q) - 4C_1 \} ds \quad (4.6) \end{aligned}$$

となる。

これはグリーン関数から定数4C₁を差引いたものを新たにグリーン関数とみなして物体表面上での積分方程式を解くのと同じである。

しかるにこの定数C₁は先に示したように

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} 1/2nh = \int_0^{\infty} \frac{e^{-2ht}}{\sinh 2ht} dt \\ &= \frac{1}{2h} \int_0^{\pi/2} \tan \theta d\theta \quad (4.7) \end{aligned}$$

で表わされる発散級数または発散積分であるから、この積分方程式を解くことは出来ず、解は存在しないことになる。先に求めた球の数値解は、無限遠方の境界Σ上の積分から出てくるこの項を無視して、即ち(4.6)でいうとC₁=0として解いたものであってh=∞の場合以外は、物理的にどういう意味があるのかよく判らないものであると先に述べたのは、このような事情によるものである。

同様のことは、この問題を造波問題のグリーン関数の方からも導くことができる。即ち造波問題のグリーン関数Gは

$$\begin{aligned} G &= - \int_0^{\infty} \frac{2 \cosh k(h-z) \cdot (k \cosh kz' - K \sinh kz')}{k \sinh kh - K \cosh kh} \\ & \quad \times J_0(kR) dk \quad (4.8) \end{aligned}$$

と表わせるが¹¹⁾、この式でK→0とし

$$\int_0^{\infty} \frac{\cosh k \{h - (z+z')\}}{\sinh kh} J_0(kR) dk$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\{R^2 + (z+z' - 2nh)^2\}^{1/2}} \quad (4.9)$$

の関係⁷⁾を使うことにより

$$Re \lim_{K \rightarrow 0} G = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\{R^2 + (z+z' - 2nh)^2\}^{1/2}} + \frac{1}{\{R^2 + (z-z' - 2nh)^2\}^{1/2}} \right] \quad (4.10)$$

であることが示される。これは先に求めた $K=0$ の場合のグリーン関数から発散部分を取り除いていない表示式になっており、上述の結果 (4.6) と一致するものである。

また $K \rightarrow 0$ のときの造波問題のグリーン関数 G の形は次のようにも表わされる¹¹⁾。

$$\lim_{K \rightarrow 0} G = \frac{\ln Kh}{h} + \frac{2\gamma}{h} + \frac{2}{h} \ln \frac{R}{2h} - i \frac{\pi}{h}$$

$$- \frac{2\pi i}{h} \sum_{n=1}^{\infty} H_0^{(1)} \left(\frac{inR\pi}{h} \right) \cos \left(in\pi \left(1 - \frac{z}{h} \right) \right)$$

$$\times \cos \left(in\pi \left(1 - \frac{z'}{h} \right) \right) \quad (4.11)$$

但し γ はオイラーの定数。この式の右辺第 2 項以下には発散する性質のものはないが、第 1 項により $Q \neq 0$ の場合には有限水深では $K \rightarrow 0$ で μ_{33} は $\ln Kh/h$ で発散し、無限水深のときには、この発散性が消えることが判る。これは、2次元問題のときには、無限水深の場合に $K \rightarrow 0$ で $\ln Kl$ (l は代表寸法) で μ_{33} が発散するが、有限水深の場合にはこの発散性が消える¹²⁾ のとちょうど逆の関係になっており対照的である。

5. まとめ

3次元物体の附加質量に及ぼす浅水影響を $K=0$ と $K=\infty$ の場合について計算する方法と若干の計算例を示し、前報の $K=0$ については浅水で附加質量が小さくなるとした誤りを正したほか、次のようなことを本報告の結論として述べる事ができる。

- 1) 吹出しの無限個鏡像列による速度ポテンシャルを表わす表示式としては、(2.16)の形の無限級数型のもものと(2.20)の形の無限積分型のもものが正しい表示式であり(2.24)の形の有限積分型のもものは間違いである。
- 2) 正しくない(2.24)の形の表示式を使っても

$K=\infty$ の場合には、エラーが相殺されて正しい結果と一致する結果を与えるが $K=0$ の場合には、浅水で附加質量が小さくなるという誤った結果を導く。

- 3) (2.24)の表示式を導く過程でおかした管の誤りを数学的に厳密に説明することはまだできていない。
- 4) 3次元浮体の上下動問題のように $Q = \int \phi_n ds \neq 0$ の場合には $K \rightarrow 0$ のとき附加質量は $\ln Kh/h$ の形で発散し、無限水深の場合以外は解がない。これは2次元問題では、附加質量が無限水深のときだけ $\ln Kl$ で発散するが、水深が有限の場合は確定した解があるのと逆の性質である。
- 5) 一般の船型の操縦運動或いは衝突振動問題等の附加質量の浅水影響の概略値を簡易に推定するのに役立つように楕円体の附加質量の浅水影響を L/B , B/d をパラメータとして与え(Fig.10(a)~(g))、更に C_b の影響を修正する簡易推定法を示した。
- 6) 楕円体についての計算結果によると、附加質量に及ぼす浅水影響は $K=\infty$ では船型の影響をあまり大きく受けないが、 $K=0$ の場合は船型の影響を受け、 L/B が大きいほど、また B/d が大きいほど surge, sway, yawとも浅水影響係数が大きくなる。

参考文献

- 1) 菅信, 原口富博: 3次元物体の附加質量に及ぼす浅水影響, 第42回船研研究発表会講演集(1983, 12)
- 2) T. H. Havelock: Ship vibrations: The virtual inertia of a spheroid in shallow water, TINA, vol. 95(1953)
- 3) 藤野正隆, 高品純志, 山本茂: 操縦運動の附加質量および附加慣性モーメントの3次元修正について, 造船学会論文集第135号(1974)
- 4) 瀬戸秀幸: 有限要素法による定常波動問題の基礎的研究(第4報), 造船学会論文集第144号(1978)
- 5) M. Fujino: Experimental Studies on Ship Manoeuvrability in Restricted Waters, Part I, ISP, vol. 15, No. 168(1968)
- 6) A. B. Basset: A Treatise on Hydrodynamics, vol. 1, p. 57, Dover Publications(1961)
- 7) 菅信: 浅水域における船体まわりのポテンシャル流の計算, 造船学会論文集, 第129号(1971)

- 8) 小林正典：前進速度を有する任意形状の3次元物体に働く流体力について，造船学会論文集，第150号 (1981)
- 9) 造船協会編，改訂船舶工学便覧，第1分冊，p. 501 コロナ社
- 10) R. Barakat：Vertical motion of a floating sphere in a sine-wave sea, JFM. 13(1963)
- 11) F. John：On the motion of floating bodies, II. Simple harmonic motions, Comm. Pure Appl. Math. 3 (1950)
- 12) M. Kan：The added mass coefficient of a cylinder oscillating in shallow water in the limit $K \rightarrow 0$ and $K \rightarrow \infty$, Papers of SRI No. 52 (1977)