

蒸気-水一次元非均質二相流基礎方程式系の 物理的安定性および非物理的不安定について

奥村幸輝*

On the Physical Stability and Unphysical Instability
of a One-dimensional Basic Field Equation System
for Nonhomogeneous Steam-Water Two-Phase
Flow

By

Kôki OKUMURA

Abstract

This report presents an investigation on the local linear stability of a one-dimensional basic field equation system formulated using an unequal velocity two-fluid model.

The stability analysis was applied to the equation system for a steam-water two-phase flow (in which the liquid phase may be in thermal nonequilibrium), and dispersion relations for long wavelengths as to density waves, for low frequencies as to acoustic waves and for very short wavelengths as to these kinds of waves were derived. They were applied both to a stratified flow in a rectangular duct and a bubbly flow.

The equation system may be unstable for the stratified flow at long wavelengths (the physical Helmholtz instability), where the wall friction in the liquid phase has a stabilizing effect but the wall friction in the steam phase and the interphase friction have destabilizing effects.

The equation system is stable for the horizontal bubbly flow ($\alpha_g < 0.5$) at atmospheric condition at long wavelengths in the case of the wall frictional drag in either phase being negligibly small compared with the interphase frictional drag.

The equation system may induce unphysical instabilities for both the flows at very short wavelengths. Namely, the system may constitute an ill-posed initial-value problem.

An attenuation coefficient and a propagation velocity of a sound in a horizontal bubbly flow at very low frequencies were estimated.

Relation between characteristic roots of the equation system and the stability at very short wavelengths was examined.

目 次

- | | |
|---|---|
| <p>1. まえがき</p> <p>2. ボイド体積率が液相の体積率より小さい場合の一次元非均質、非平衡二相流基礎方程式系の線形安定性解析</p> | <p>2.1 非均質、非平衡二相流基礎方程式系</p> <p>2.2 ボイド体積率が液相の体積率より小さい場合の線形安定性解析</p> <p>2.2.1 長波長および低周波数の摂動に関する安定性について</p> <p>2.2.2 長波長および低周波数の摂動の伝播速度について</p> |
|---|---|

* 原子力船舶部

原稿受付：昭和59年6月21日

- 2.2.3 非常に短い波長の摂動に関する安定性と摂動の伝播速度について
3. 実際の加熱二相流系における密度波および圧縮性波について
4. 結論

附録A 非均質二相流差分方程式系の適切性について

附録B 矩形ダクト内層状流および水平気泡流における (31), (32) および (33) の各式の値

附録C 2.2.1 項および 2.2.2 項の例題に用いた常数

附録D 層状流における密度波に及ぼす重力および表面張力の安定化効果について

附録E 特性根と安定性の関係について

附録F 非均質二相流方程式系の特性根について

記号表

- A 断面積 [m²] または (113) 式
- A_{gl} 単位体積当りの二相境界表面積 [m⁻¹]
- a 音速 [$\frac{m}{s}$]
- a_c 定常状態における各流動様式の音速 [$\frac{m}{s}$], (97 式)
- a_m 定常状態における均質混合流の音速 [$\frac{m}{s}$], (98 式)
- B_{gl} 二相間の抗力係数 [$\frac{kg}{sm^2}$]
- B_x 単位質量当りの体積力 [$\frac{kgf}{kg}$]
- C 仮想質量係数 [無次元数]
- C_l 液相の比熱 [$\frac{kcal}{kg^{\circ}K}$]
- C_v 二相平均定積比熱 [$C_v = (\alpha_g \rho_g C_{vg} + \alpha_l \rho_l C_l) / \rho$] [$\frac{kcal}{kg^{\circ}K}$]
- C_{vg} 蒸気相の定積比熱 [$\frac{kcal}{kg^{\circ}K}$]
- D_e 水力直径 [m]
- E (11) 式, [$\frac{kcal}{sm^3}$]
- $E_{\alpha_g}, E_p, E_{s_l}$ (32) 式
- FWF 液相の壁面摩擦抵抗係数 ($FWF = \frac{\lambda_l v_l P_l}{8\alpha_l A}$) [s^{-1}]
- FWG 蒸気相の壁面摩擦抵抗係数 ($FWG = \frac{\lambda_g v_g P_g}{8\alpha_g A}$) [s^{-1}]
- F^{gl} 液相から蒸気相への運動量移動の逆時定数 [s^{-1}], (B-37) 式
- F_g (19) 式, [$\frac{kgf}{m^3}$]
- F_l (20) 式, [$\frac{kgf}{m^3}$]
- f_{gl} 二相境界摩擦係数 [無次元数]
- $f_{\nu \alpha_g}, f_{\nu \alpha_g} = (\rho_l - \rho_g) g H = -f_{\nu \alpha_l}$ [$\frac{kg}{ms^2}$]
- g 重力加速度 [$\frac{m}{s^2}$]

- H エンタルピー $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \right]$ または矩形ダクト高さ〔m〕
- H_{gl} 蒸発の潜熱 $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \right]$
- k 波数 $[\text{m}^{-1}]$
- P 圧力〔MPa〕
- P_g 蒸気相の濡れ縁長さ〔m〕
- P_l 液相の濡れ縁長さ〔m〕
- Q 単位体積当りの外部加熱量 $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{sm}^3} \right]$ または (72) 式
- R ガス常数 $\left[\frac{\text{mkg}_f}{\text{kmol}^\circ\text{K}} \right]$ または (74) 式
- S エントロピー $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}} \right]$ または (75) 式
- S_g^* $S_g^* = \frac{dS_g^s}{dP} \left[\frac{\text{m}^2 \text{kcal}}{\text{kgkg}_f^\circ\text{K}} \right]$
- T 絶対温度〔°K〕
- t 時間〔s〕
- U 内部エネルギー $\left[\frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \right]$
- U_{gl} 蒸発に伴う内部エネルギーの増加, $(U_{gl} = H_{gl} - PV_{gl}) \left[\frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \right]$
- \hat{u} 摂動量
- V_{gl} 蒸発に伴う比体積増加, $(V_{gl} = \frac{1}{\rho_g^s} - \frac{1}{\rho_l^s}) \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right]$
- v 二相混合流の速度 (42) 式または添字つきで各相速度 $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
- v_{gl} 二相の相対速度, $(v_{gl} = v_g - v_l) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$
- \tilde{v}_{gl} (100) 式, 〔無次元数〕
- X 乾き度〔無次元数〕
- x 距離座標〔m〕
- z 垂直座標 (摂動前の二相境界面基準, 上方が正方向)〔m〕
- $(\alpha_a F_a)_{\alpha_g}, (\alpha_a F_a)_p, (\alpha_a F_a)_{v_g}, (\alpha_a F_a)_{v_l}$ (33) 式
- α_g ボイド率〔無次元数〕
- α_l $\alpha_l = (1 - \alpha_g)$ 〔無次元数〕
- Γ_g 単位体積当りの蒸発率 $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}} \right]$, (B-4) 式
- $\Gamma_g \alpha_g, \Gamma_g p, \Gamma_g s_l$ (31) 式
- Γ_0 $\Gamma_0 = 3\epsilon \alpha_g P / r_p \sqrt{2\pi RT^s} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}} \right]$
- r_c 単位体積当りの凝縮率 $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}} \right]$, (B-2) 式
- r_e 単位体積当りの蒸発率 $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3 \text{s}} \right]$, (B-1) 式

Δx	距離座標のメッシュ巾〔m〕
ϵ	物質移動係数〔無次元数〕
η	音波の減衰係数〔 m^{-1} 〕
λ	特性根〔 $\frac{m}{s}$ 〕または添字つきで各相の壁面摩擦係数〔無次元数〕
μ	粘性係数〔 $\frac{kg}{ms}$ 〕
ρ	二相混合流の密度または添字つきで各相密度〔 $\frac{kg}{m^3}$ 〕
ρ_g^*	$\rho_g^* = \frac{d\rho_g^s}{dP} \left[\frac{s^2}{m^2} \right]$
ρ_i'	$\rho_i' = \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial P} \right)_{s_i} \left[\frac{s^2}{m^2} \right]$
ρ_i''	$\rho_i'' = \rho_i^A \left(\frac{\partial S_i}{\partial P} \right)_{T_i} \left[\frac{s^2}{m^2} \right]$
ρ_i^A	$\rho_i^A = \left(-\frac{\partial \rho_i}{\partial S_i} \right)_p \left[\frac{kg^2 \circ K}{m^3 kcal} \right]$
σ	表面張力〔 $\frac{kgf}{m}$ 〕
φ	$\varphi = \omega - kv$ 〔 s^{-1} 〕
$\tilde{\varphi}$	$\tilde{\varphi} = \varphi / ka_c$ 〔無次元数〕
ω	角周波数〔 s^{-1} 〕

添 字

a	g (気相) または l (液相)
g	蒸気相
I	虚数部
$j-1, j, j+1$	ジャンクション番号
K, L	ボリューム番号
l	液相
R	実数部
TR	二相流

肩 記 号

s	飽和状態量
-----	-------

1. ま え が き

軽水原子炉の熱水力過渡特性解析用の計算コードの中でよく知られる RELAP4 シリーズ¹⁾ では二相流モデルとして均質平衡流が用いられたが、1970年代になってから非均質、非平衡流モデルを用いたコードが開発されている。その中には TRAC²⁾、RELAP 5³⁾ などのコードがある。

均質平衡流モデルでは二相流基礎方程式系は一次常微分方程式系で表される。そして、もしその系が安定であれば、その差分方程式系の解は陰解法を用いれば数学的には時間刻み幅を大きくとっても安定である⁴⁾。一方、非均質流モデルでは基礎方程式系は一次準線形偏微分方程式系で表され、均質平衡流モデルの数値解法は適用できない。そして、蒸気と水の間の相対速度の存在がその系の物理的並びに非物理的不安定を引き起こす場合がある。この非物理的不安定は系が初期値問題として不適切 (ill-posed) であることを意味するが、計算コード

に用いる非均質流モデルの差分方程式系は適切でなければならない。

非均質流モデルが用いられるようになった当初、二相流基礎方程式系の安定性と特性根の両概念の間に混同があった⁵⁾が Ramshaw と Trapp⁶⁾ によって解決されたと考えられる。

本報告では、第2章において軽水原子炉の一次元熱水力過渡特性解析に用いられる非均質、非平衡二相流基礎方程式系を取上げて、その線形安定性解析を行い、得られる散逸関係式から物理的安定性並びに非物理的不安定について調べる。さらにこの系に存在する各種の波の伝播速度を求める。第3章においては実際の加熱二相流系においてしばしば観察される動的不安定とこれらの波の関わりを述べる。

本研究では蒸気-水の二相流の中で特に層状流および気泡流について具体的に調べる。

2. ボイド体積率が液相の体積率よりも小さい場合の一次元非均質、非平衡二相流基礎方程式系の線形安定性解析

2.1 非均質、非平衡二相流基礎方程式系

基礎方程式系としては下記の(1)~(5)各式から成る系を取上げる。これは基本的には RELAP5/MOD1³⁾ において用いられているものと同じである。このコードでは二相のうちで体積の小さい方の相は常に飽和状態を保ち、他相は熱的非平衡になりうるものと仮定される。この仮定によって各相に対する2個のエネルギー方程式の代りに二相混合流に対する1個の式に減らすことができる。その結果、この系は各相に対する連続および運動の各2個の方程式と1個のエネルギー式から成る。従属変数はボイド体積率 α_g 、圧力 P 、各相速度 v_g および v_l 、そして体積比の大きい方の相の内部エネルギー U_g または U_l の計5個である。本研究では流路断面積 A は一定と仮定する。この仮定によって問題の本質は損なわれない。以下に基礎方程式系を示す。

$$\frac{\partial(\alpha_g \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g v_g)}{\partial x} = \Gamma_g \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\alpha_l \rho_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_l \rho_l v_l)}{\partial x} = \Gamma_l \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \alpha_g \rho_g (\partial v_g / \partial t) + \frac{1}{2} \alpha_g \rho_g (\partial v_g^2 / \partial x) = & -\alpha_g (\partial P / \partial x) + \alpha_g \rho_g B_x - \alpha_g \rho_g \text{FWG}(v_g) + (r_e v_l - r_c v_g) \\ & - A_{gl} B_{gl} v_{gl} - C \alpha_g \alpha_l \rho_l \{ \partial v_{gl} / \partial t + v_l (\partial v_g / \partial x) - v_g (\partial v_l / \partial x) \} - \alpha_g \rho_g g H \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_l \rho_l (\partial v_l / \partial t) + \frac{1}{2} \alpha_l \rho_l (\partial v_l^2 / \partial x) = & -\alpha_l (\partial P / \partial x) + \alpha_l \rho_l B_x - \alpha_l \rho_l \text{FWF}(v_l) + (r_c v_g - r_e v_l) \\ & + A_{gl} B_{gl} v_{gl} + C \alpha_l \alpha_g \rho_g \{ \partial v_{gl} / \partial t - v_g (\partial v_l / \partial x) + v_l (\partial v_g / \partial x) \} + \alpha_l (f_{\nu} \alpha_g - \rho_g g H) \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_g \rho_g v_g U_g + \alpha_l \rho_l v_l U_l)}{\partial x} \\ = -P \frac{\partial(\alpha_g v_g + \alpha_l v_l)}{\partial x} + Q + \alpha_g \rho_g \text{FWG}(v_g^2) + \alpha_l \rho_l \text{FWF}(v_l^2) + A_{gl} B_{gl} v_{gl}^2 + (|\Gamma_l|/2) v_{gl}^2 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $v_{gl} = v_g - v_l$

(1)式および(2)式はそれぞれ蒸気と水に対する連続の方程式で、 Γ_g と Γ_l はそれぞれ二相混合流の単位体積、単位時間当りの蒸発量および凝縮量であり、 $\Gamma_l = -\Gamma_g$ である。(3)式および(4)式はそれぞれ蒸気と水に対する運動方程式である。両式の右辺は第1項から順に、圧力勾配、体積力、壁面摩擦、二相間の運動量移動、二相間の摩擦抗力および仮想質量力を表す。(3)式および(4)式の各末項は $\partial \alpha_g / \partial x$ によって生じる蒸気相および液相のそれぞれに働く力を表す。これらの項は本報では矩形ダクト内層状流に対してのみ考慮される。

r_e および r_c はそれぞれ附録Bで説明するように R.C.Mecredy⁷⁾らの提案による単位体積当りの蒸発率および凝縮率であり次の関係がある。

$$\Gamma_g = r_e - r_c \quad (6)$$

である。また

A_{gl} = 単位体積当りの二相境界表面積

B_{gl} = 二相間の抗力係数

であり、 B_{gl} は f_{gl} の定義により次式で与えられる³⁾。

$$B_{gl} = \frac{1}{8} f_{gl} \rho_g v_{gl} \quad (\text{層状流および気泡流に対して}) \quad (7)$$

ここで

f_{gl} = 二相境界摩擦係数

Cは仮想質量係数である。これは気泡と液相の各加速度が異なるために気泡が受ける加速抗力に含まれる係数である。これは流動様式に依存し、気泡流や噴霧流に対しては $C > 0.5$ が適当で、分離流或いは層状流に対しては $C = 0$ が適当である³⁾。(5)式は二相混合流の熱エネルギー方程式である。この式では仮想質量力に基づくエネルギー散逸は無視している。この式の左辺第一項に含まれる ρU はボイド率 α_g と乾き度 X の関係 $X = \alpha_g \rho_g / \rho$ を用いれば次式になる。

$$\rho U = \alpha_g \rho_g U_g + \alpha_l \rho_l U_l \quad (8)$$

ここで

$$\rho = \alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l \quad (9)$$

2.2 ボイド体積率が液相の体積率よりも小さい場合の線形安定性解析

本解析では蒸気相は常に飽和状態を保つものと仮定する。この仮定は RELAP5/MOD1 コードでは蒸気相の体積が液相のそれよりも小さいときに対応する。即ち $\alpha_g < \alpha_l$ とする。(1)式~(5)式の基礎方程式系の線形安定性解析を行うに当り、熱エネルギー式(5)はそれよりも馴染み易いエントロピーを用いて表したエネルギー式に書換える。その手順は連続の方程式(1)、(2)および熱力学関係式 $dU_a = T_a dS_a + (P/\rho_a^2) d\rho_a$ を(5)式に代入すれば得られる。その結果は

$$T_g^s \alpha_g \rho_g S_g^* \frac{DP}{Dt_g} + T_l \alpha_l \rho_l \frac{DS_l}{Dt_l} = E \quad (10)$$

ここで

$$E = -\Gamma_g (H_g - H_l) + (\Gamma_g / 2) v_{gl}^2 + \alpha_g \rho_g \text{FWG}(v_g^2) + \alpha_l \rho_l \text{FWF}(v_l^2) + A_{gl} B_{gl} v_{gl}^2 + Q \quad (11)$$

$$S_g^* = \frac{dS_g^s}{dP} \quad (12)$$

$$\frac{D}{Dt_a} = \frac{\partial}{\partial t} + v_a \frac{\partial}{\partial x}$$

肩記号 s は飽和状態を示す。(11)式の第1項と第2項は二相間のエネルギー移動を表し、末項は外部加熱量を表し、残りの項は摩擦による散逸エネルギーを表す。

$\rho_g = \rho_g(P)$ と $\rho_l = \rho_l(P, S_l)$ の関係式を用いて(1)式~(5)式を次のよう書換える。

$$\rho_g \frac{D\alpha_g}{Dt_g} + \alpha_g \rho_g^* \frac{DP}{Dt_g} + \alpha_g \rho_g \frac{\partial v_g}{\partial x} = \Gamma_g \quad (13)$$

$$\rho_l \frac{D\alpha_l}{Dt_l} + \alpha_l \rho_l' \frac{DP}{Dt_l} + \alpha_l \rho_l^A \frac{DS_l}{Dt_l} + \alpha_l \rho_l \frac{\partial v_l}{\partial x} = \Gamma_l \quad (14)$$

$$\alpha_g \rho_g g H \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \alpha_g \frac{\partial P}{\partial x} + \alpha_g \rho_g \frac{Dv_g}{Dt_g} + C \alpha_g \alpha_l \rho \left(\frac{Dv_g}{Dt_l} - \frac{Dv_l}{Dt_g} \right) = \alpha_g F_g \quad (15)$$

$$-\alpha_l (f_{r\alpha_g} - \rho_g g H) \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} + \alpha_l \frac{\partial P}{\partial x} + \alpha_l \rho_l \frac{Dv_l}{Dt_l} + C \alpha_g \alpha_l \rho \left(\frac{Dv_l}{Dt_g} - \frac{Dv_g}{Dt_l} \right) = \alpha_l F_l \quad (16)$$

$$T_g^s \alpha_g \rho_g S_g^* \frac{DP}{Dt_g} + T_l \alpha_l \rho_l \frac{DS_l}{Dt_l} = E \quad (17)$$

ここで

$$\rho_g^* = \frac{d\rho_g^s}{dP}, \quad \rho_l' = \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial P} \right)_{S_l}, \quad \rho_l^A = \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial S_l} \right)_P \quad (18)$$

$$\alpha_g F_g = \alpha_g \rho_g B_x - \alpha_g \rho_g \text{FWG}(v_g) + (\gamma_e v_l - \gamma_c v_g) - A_{gl} B_{gl} v_{gl} \quad (19)$$

$$\alpha_l F_l = \alpha_l \rho_l B_x - \alpha_l \rho_l \text{FWF}(v_l) + (\gamma_c v_g - \gamma_e v_l) + A_{gl} B_{gl} v_{gl} \quad (20)$$

(19)、(20)の各式は矩形ダクト内層状流および水平気泡流に対してはそれぞれ附録Bの(B-15)、(B-16)および(B-26)、(B-27)の各式で表される。尚、(13)~(17)の各式の右辺は非同次項であり、独立変数

x および t に関する微分項を含まない。

さて、(13)式～(17)式の系に線形安定性解析法を適用する。本解析で用いる手法は厳密には局所線形安定性解析と呼ばれ、系が摂動される前の各従属変数の空間および時間に関する微分値は零とする。この状態を一様定常状態と扱う。安定性解析を行うために各従属変数 u は次式によって置換える。

$$u = u_0 + \hat{u} e^{i(kx - \omega t)} \quad (21)$$

ここで u_0 は一様定常状態における値で、 \hat{u} は摂動量である。 k および ω はそれぞれ波数および角周波数である。置換えによって得られる各式を \hat{u} に関して線形化する。その際、(13)式～(17)式の右辺は次の関数で表されるものとする。

$$\Gamma_g = \Gamma_g(\alpha_g, P, S_l) \quad (22)$$

$$\alpha_g F_g = (\alpha_g F_g)(\alpha_g, P, v_g, v_l) \quad (23)$$

$$\alpha_l F_l = (\alpha_l F_l)(\alpha_g, P, v_g, v_l) \quad (24)$$

$$E = E(\alpha_g, P, S_l) \quad (25)$$

(25)式に含まれる外部加熱量 Q は一定値とする。

結果は

$$-[\hat{v}(\omega - kv_g)\rho_g]\hat{\alpha}_g - \{i(\omega - kv_g)\alpha_g\rho_g^* + \Gamma_{gp}\}\hat{P} + ik\alpha_g\rho_g\hat{v}_g - \Gamma_{gs_l}\hat{S}_l = 0 \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & \{i(\omega - kv_l)\rho_l\}\hat{\alpha}_g - \left\{i(\omega - kv_g)\alpha_l\rho_l'' + i(\omega - kv_l)\alpha_l\rho_l' - \Gamma_{gp} - \frac{\rho_l^A E_p}{\rho_l T^s}\right\}\hat{P} + ik\alpha_l\rho_l\hat{v}_l \\ & + \left(\Gamma_{gs_l} + \frac{\rho_l^A E_{s_l}}{\rho_l T^s}\right)\hat{S}_l = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ik\rho_g g H - \frac{(\alpha_g F_g)\alpha_g}{\alpha_g}\right\}\hat{\alpha}_g + (ik - F_{gp})\hat{P} - \{i(\omega - kv_g)\rho_g + i(\omega - kv_l)C\alpha_l\rho + F_{gv_g}\}\hat{v}_g \\ & + \{i(\omega - kv_g)C\alpha_l\rho - F_{gv_l}\}\hat{v}_l = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & - \left\{ik(f_{v\alpha_g} - \rho_g g H) + \frac{(\alpha_l F_l)\alpha_g}{\alpha_l}\right\}\hat{\alpha}_g + (ik - F_{lp})\hat{P} + \{i(\omega - kv_l)C\alpha_g\rho - F_{lv_g}\}\hat{v}_g \\ & - \{i(\omega - kv_l)\rho_l + i(\omega - kv_g)C\alpha_g\rho + F_{lv_l}\}\hat{v}_l = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$- \{i(\omega - kv_g)\alpha_g\rho_g S_g^* T^s + E_p\}\hat{P} - \{i(\omega - kv_l)\alpha_l\rho_l T^s + E_{s_l}\}\hat{S}_l = 0 \quad (30)$$

ここで

$$\Gamma_{g\alpha_g} = \frac{\partial \Gamma_g}{\partial \alpha_g}, \quad \Gamma_{gp} = \frac{\partial \Gamma_g}{\partial P}, \quad \Gamma_{gs_l} = \frac{\partial \Gamma_g}{\partial S_l} \quad (31)$$

$$E_{\alpha_g} = \frac{\partial E}{\partial \alpha_g}, \quad E_p = \frac{\partial E}{\partial P}, \quad E_{s_l} = \frac{\partial E}{\partial S_l} \quad (32)$$

$$(\alpha_a F_a)_{\alpha_g} = \frac{\partial(\alpha_a F_a)}{\partial \alpha_g}, \quad F_{ap} = \frac{\partial F_a}{\partial P}, \quad F_{av_g} = \frac{\partial F_a}{\partial v_g}, \quad F_{av_l} = \frac{\partial F_a}{\partial v_l} \quad (33)$$

$$\rho_l'' = -\rho_l^A \left(\frac{\alpha_g \rho_g}{\alpha_l \rho_l}\right) S_g^* = \rho_l^A \left(\frac{\partial S_l}{\partial P}\right)_{T_l} \quad (34)$$

(26)～(30)の各式の係数に含まれる各変数記号はここで改めて一様定常状態における値であると定義する。

(33)式の添字 a は g または l を示す。矩形ダクト内層状流および水平気泡流のそれぞれに対する (31), (32)

および (33)の各式の値は附録Bに示す。(34)式は熱力学関係式 $\frac{d\rho_l(P, S_l)}{dP} = \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial P}\right)_{s_l} + \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial S_l}\right)_{p} \left(\frac{\partial S_l}{\partial P}\right)_{T_l}$

の右辺第二項を表す。この項に含まれる $\left(\frac{\partial S_l}{\partial P}\right)_{T_l}$ は(17)式から求まる。即ち、(17)式において $v_g = v_l = 0$

とし、蒸発率 Γ_g は一様定常状態においては零であり、加熱量 Q は $\left(\frac{\partial S_l}{\partial P}\right)_{T_l}$ とは独立であるので除けば求まる。

(13)式～(17)式の系が摂動される前の一様定常状態においては $\Gamma_{g\alpha_g} = 0$, $E_{\alpha_g} = 0$ および $T_g = T_l = T^s$ であり、これらは(26)式～(30)式に考慮されている。

(26)式～(30)式の系は変数 $\hat{\alpha}_g$, \hat{P} , \hat{v}_g , \hat{v}_l および \hat{S}_l に関して線形同次系である。従って、 $\hat{\alpha}_g = \hat{P} = \hat{v}_g =$

$\hat{v}_l = \hat{S}_l = 0$ 以外の解をもつためには係数行列式が零でなければならない。即ち、

$$\begin{vmatrix} -i\rho_g\varphi_g & -(i\alpha_g\rho_g^*\varphi_g + \Gamma_{gp}) & ik\alpha_g\rho_g & 0 & -\Gamma_{gs_l} \\ i\rho_l\varphi_l & -i\alpha_l(\rho_l^*\varphi_l + \rho_l\varphi_l) & 0 & ik\alpha_l\rho_l & \Gamma_{gs_l} + \rho_l^4 E_{s_l} / \rho_l T^s \\ ik\rho_g\varphi_g H - \frac{(\alpha_g F_g) a_g}{\alpha_g} & ik - F_{gp} & -i(\rho_g\varphi_g + C\alpha_l\rho_l) - F_{vg} & iC\alpha_l\rho_g - F_{gs_l} & 0 \\ -ik(f_{rg} - \rho_g\varphi_g H) & ik - F_{lp} & iC\alpha_g\rho_l - F_{vg} & -i(\rho_l\varphi_l + C\alpha_g\rho_g) - F_{vl} & 0 \\ -(\alpha_l F_l) a_g / \alpha_l & 0 & -(i\alpha_g\rho_g S_g^* T^s \varphi_g + E_p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(i\alpha_l\rho_l T^s \varphi_l + E_{s_l}) \end{vmatrix} = 0 \quad (35)$$

ただし

$$\varphi_g = \omega - k v_g \quad (36)$$

$$\varphi_l = \omega - k v_l \quad (37)$$

(35) 式を整理すれば

$$\begin{vmatrix} \rho_g\varphi_g & \alpha_g\rho_g^*\varphi_g - i\Gamma_{gp} & -k\alpha_g\rho_g & 0 & -i\Gamma_{gs_l} \\ \rho_l\varphi_l - \rho_g\varphi_g & -((\alpha_l\rho_l^* + \alpha_l\rho_l^i)\varphi_l + \alpha_l\rho_l^i\varphi_l) & k\alpha_l\rho_l & k\alpha_l\rho_l & -i\rho_l^4 E_{s_l} / \rho_l T^s \\ i\left\{\frac{(\alpha_g F_g) a_g}{\alpha_g} - \frac{(\alpha_l F_l) a_g}{\alpha_l}\right\} & i(F_{gp} - F_{lp}) & -(\rho_g\varphi_g + C\rho_l\varphi_l - i(F_{vg} - F_{vg})) & (\rho_l\varphi_l + C\rho_g\varphi_g + i(F_{gs_l} - F_{vl})) & 0 \\ +k f_{rg} & k + i(\alpha_g F_{gp} + \alpha_l F_{lp}) & -(\alpha_g\rho_g\varphi_g - i(\alpha_g F_{vg} + \alpha_l F_{vg})) & -(\alpha_l\rho_l\varphi_l - i(\alpha_g F_{gs_l} + \alpha_l F_{vl})) & 0 \\ i((\alpha_g F_g) a_g + (\alpha_l F_l) a_g) & \alpha_g\rho_g S_g^* T^s \varphi_g - iE_p & 0 & 0 & \alpha_l\rho_l T^s \varphi_l - iE_{s_l} \\ -k(\alpha_l f_{rg} - \rho_g\varphi_g H) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (38)$$

(38) 式に含まれる φ_g と φ_l は、便宜上混合流平均速度 v と相対速度 v_{gl} を用いて次式に書換える。

$$\varphi_g = \varphi - k \alpha_l \rho_l v_{gl} / \rho \quad (39)$$

$$\varphi_l = \varphi + k \alpha_g \rho_g v_{gl} / \rho \quad (40)$$

ここで

$$\varphi = \omega - k v \quad (41)$$

$$v = (\alpha_g \rho_g v_g + \alpha_l \rho_l v_l) / \rho \quad (42)$$

(39), (40) の各式は v_g および v_l がそれぞれ次式で表されることから導かれる。

$$v_g = v + \alpha_l \rho_l v_{gl} / \rho \quad (43)$$

$$v_l = v - \alpha_g \rho_g v_{gl} / \rho \quad (44)$$

結果として (38) 式は次式になる。

$$\begin{vmatrix} \rho_g(\varphi - k\alpha_l\rho_l v_{gl}/\rho) & \alpha_g\rho_g^*(\varphi - k\alpha_l\rho_l v_{gl}/\rho) - i\Gamma_{gp} & -k\alpha_g\rho_g & 0 & -i\Gamma_{gs_l} \\ (\rho_l - \rho_g)\varphi + k\rho_g\rho_l v_{gl}/\rho & -(\alpha_l\rho_l^i + \alpha_g\rho_g^* + \alpha_l\rho_l^i)\varphi & k\alpha_l\rho_l & k\alpha_l\rho_l & -i\rho_l^4 E_{s_l} / \rho_l T^s \\ i\left\{\frac{(\alpha_g F_g) a_g}{\alpha_g} - \frac{(\alpha_l F_l) a_g}{\alpha_l}\right\} & i(F_{gp} - F_{lp}) & -(\rho_g + C\rho_l)\varphi & (\rho_l + C\rho_g)\varphi & 0 \\ +k f_{rg} & +k(\alpha_l\rho_l(\alpha_g\rho_g^* + \alpha_l\rho_l^i)) & +k(\alpha_l\rho_g\rho_l - C\alpha_g\rho_g\rho_l)\frac{v_{gl}}{\rho} & +k(\alpha_g\rho_g\rho_l - C\alpha_l\rho_l\rho_g)\frac{v_{gl}}{\rho} & 0 \\ i((\alpha_g F_g) a_g + (\alpha_l F_l) a_g) & k + i(\alpha_g F_{gp} + \alpha_l F_{lp}) & +i(F_{vg} - F_{vg}) & +i(F_{gs_l} - F_{vl}) & 0 \\ -k(\alpha_l f_{rg} - \rho_g\varphi_g H) & -\alpha_g\alpha_l\rho_g\rho_l^i\frac{v_{gl}}{\rho} - \frac{i\rho_l^4 E_p}{\rho_l T^s} & +i(\alpha_g\rho_g(\varphi - k\alpha_l\rho_l v_{gl}/\rho)) & -\alpha_l\rho_l(\varphi + k\alpha_g\rho_g v_{gl}/\rho) & 0 \\ 0 & \alpha_g\rho_g S_g^* T^s(\varphi - k\frac{\alpha_l\rho_l}{\rho} v_{gl}) & +i(\alpha_g F_{vg} + \alpha_l F_{vg}) & +i(\alpha_g F_{gs_l} + \alpha_l F_{vl}) & 0 \\ 0 & -iE_p & 0 & 0 & \alpha_l\rho_l T^s(\varphi + k\frac{\alpha_g\rho_g}{\rho} v_{gl}) \\ & & & & -iE_{s_l} \end{vmatrix} = 0 \quad (45)$$

(45) 式から散逸関係式、即ち k と ω の関係式が決る。

層状流におけるポイド率 α_g の振動の伝播のように定常的に振動しているような波に対しては波数 k は $0 < k < \infty$ の正数と見做し、角周波数 ω は複素数と見做して ω の解を求め、その虚数部 ω_I の値によってそれらの波に関する基礎方程式 (13) 式～(17) 式の安定性が決る。即ち、 $\omega_I < 0$ ならば安定、 $\omega_I = 0$ ならば中立安

定, そして $\omega_1 > 0$ ならば不安定である。一方, 音波のように (21) 式の $x=0$ における単振動の摂動 $ue^{-i\omega t}$ の各周波数成分がそれぞれ個々の位相角と減衰特性をもって伝播する波に対しては角周波数 ω および波数 k はそれぞれ正数および複素数と見做す。従って $k = \frac{\omega}{a} + i\eta$ で表される。ここで a は音速であり, η は減衰係数である。従って音波に関して基礎方程式系が安定であるためには $\eta \geq 0$ でなければならない。

さて, (45) 式のような複雑な方程式から全波長 ($0 \leq k < \infty$) および全角周波数 ($0 < \omega < \infty$) の摂動に関する散逸関係式を解くためには計算機を用いた数値解法によるのが適当である。しかし, 長波長および低周波数並びに非常に短い波長および非常に高い周波数のそれぞれの摂動に限れば散逸関係式の代数解を求めることができる。

長波長の摂動に関する系の不安定はヘルムホルツ不安定を表し, 短波長の摂動に関する不安定は非物理的な不安定, 即ち系が初期値問題として不適切 (ill posed) であることを示す⁶⁾。この非物理的な不安定の原因は二相流基礎方程式系において二相流体のすべての相互作用の微分特性を正確に記述することの困難さ, および流路断面平均の変数を用いることによって生じる共分散項の正確な記述が困難なことにあると考えられている (8), p 418)。中間波長域は長波長の物理的振舞いから短波長の非物理的な不安定が生じるかもしれない振舞いに移行する特性を含む帯域と考えられる。以上のことから系の安定性に関する重要な問題の多くは長波長と短波長の両域にあると考えられる。

本解析では (13) 式～(17) 式二相流基礎方程式系について長波長および低周波数の各摂動並びに非常に短い波長および非常に高い周波数の各摂動のそれぞれに関する安定性を代数的に求める。ここで長波長および非常に短い波長の摂動とはボイド率の摂動 (或いは密度波) を指す。そして長波長とは (13) 式～(17) 式の右辺の非同次項の各項の各種の摩擦や運動量交換および体積力等の従属変数に関する微分値の定常状態における値 $(\alpha_a F_a)_{\alpha_g}$, F_{av_g} および F_{av_l} らの影響が無視できない程度に小さい波数の長波長を指し, 非常に短い波長とは $(\alpha_a F_a)_{\alpha_g}$, F_{av_g} および F_{av_l} らの影響を無視できる程度に短い波長を指す ((48) 式および (109) 式参照)。一方, 低周波数および非常に高い周波数の摂動とは音波を指す。そして, ここで低周波数とは $(\alpha_a F_a)_{\alpha_g}$, F_{av_g} および F_{av_l} らの影響が無視できない外に熱的平衡が仮定できる程度に低い周波数を指し, 非常に高い周波数とはこれらの微分値の影響が無視できる程度に高い周波数を指す ((70) 式および (118) 式参照)。尚, 音波に関しては非常に高い周波数においては波数は正の実数になる ((121) 式参照)。

本解析では $v_g \geq v_l > 0$ とし蒸気-水の対向流は考えない。

2.2.1 長波長および低周波数の摂動に関する安定性について

二相間の物質移動 Γ_g に関する効果は無視できる場合には (45) 式の行列式の第 5 列は (5, 5) の要素以外はすべて零になる (E_{s_j} も附録 B の (B-13) 式から零になる) ことから次の 1 根を得る。

$$\varphi_1 = -k \alpha_g \rho_g v_{gl} / \rho \quad (46)$$

この式の添字の数字は索引番号を示す。この式に (41), (44) の両式を代入すれば

$$\omega_1 = k v_l \quad (47)$$

この式は二相間の物質移動を無視できる場合の液相エントロピーの摂動に関する散逸関係式を表す。この式において液相速度 v_l は実数であるから液相エントロピーの摂動に関して基礎方程式系は安定である。この場合には位相速度 $\omega_1 / k = v_l$ はこの摂動の伝播速度を表す。

(45) 式から得られる散逸関係式は上記の液相エントロピーの摂動の伝播特性の他に 4 個の波の伝播特性を含む。それらの波はボイド率 α_g の摂動あるいは密度波および音波である (これら 2 個の波は二相流体の流れに対して正負両方向に伝播する)。密度波は加熱二相流系において生じる密度波振動などにおける擾乱を二相流部において運ぶ波の一種である。密度波振動は周期が大体 1Hz 以下の低周波振動である。そしてこの振動においては蒸気-水各相の圧縮性は重要な因子ではない¹⁰⁾。従ってボイド率の摂動 $\delta \alpha_g$ と密度の摂動 $\delta \rho$ の間には $\delta \rho = -(\rho_l - \rho_g) \delta \alpha_g$ の関係が成り立つので両者の伝播特性は位相が 180 度異なる以外は同じである。以上の理由から以下の解析においては「ボイド率の摂動の伝搬波」の代りに「密度波」の表現を使う。

さて密度波の長波長成分に関する散逸関係式を導出する。上に述べた理由から蒸気-水各相の圧縮性を無視する。更に密度波の伝播特性に対しては二相間の物質移動の影響は強くないことが二相流の流動様式に関する

Baker 線図¹¹⁾などから知られているので蒸発率 Γ_g に関する効果は無視する。即ち, $\Gamma_{gp} = \Gamma_{gs_i} = 0$, $E_p = E_{s_i} = 0$ (附録Bの(B-12), (B-13)の各式参照)とする。以上の仮定を(45)式に適用すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} & (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \varphi^2 + \{i(\alpha_g(F_{gv_l} - F_{lv_l}) - \alpha_l(F_{gv_g} - F_{lv_g})) \\ & + k[2(\alpha_g - \alpha_l)\rho_g \rho_l / \rho + C(\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l)] v_{gl}\} \varphi \\ & + ik[\alpha_g^2 \rho_g (F_{gv_l} - F_{lv_l}) + \alpha_l^2 \rho_l (F_{gv_g} - F_{lv_g})] \frac{v_{gl}}{\rho} + [\alpha_g(\alpha_l F_l)_{\alpha_g} - \alpha_l(\alpha_g F_g)_{\alpha_g}] \\ & - k^2[\alpha_g \alpha_l f_{\alpha_g} - \frac{\rho_g \rho_l}{\rho^2}(\alpha_g^3 \rho_g + \alpha_l^3 \rho_l - C\alpha_g \alpha_l \rho) v_{gl}^2] = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

この式と(41)式から角周波数 ω の虚数部と実数部はそれぞれ次式になる。

$$\begin{aligned} \omega_I = \frac{1}{2K} \left\{ -L \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(LL_1 - 2KM_1)}{|LL_1 - 2KM_1|} \left[\sqrt{[-L^2 + k^2(L_1^2 - 4KM_2)]^2 + 4k^2(LL_1 - 2KM_1)^2} \right. \right. \\ \left. \left. + L^2 - k^2(L_1^2 - 4KM_2) \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \omega_R = kv + \frac{1}{2K} \left\{ -kL_1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{[-L^2 + k^2(L_1^2 - 4KM_2)]^2 + 4k^2(LL_1 - 2KM_1)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - L^2 + k^2(L_1^2 - 4KM_2) \right]^{1/2} \right\} \end{aligned} \quad (50)$$

ここで

$$K = \alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho \quad (51)$$

$$L = \alpha_g(F_{gv_l} - F_{lv_l}) - \alpha_l(F_{gv_g} - F_{lv_g}) \quad (52)$$

$$L_1 = [2(\alpha_g - \alpha_l)\rho_g \rho_l / \rho + C(\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l)] v_{gl} \quad (53)$$

$$M_1 = [\alpha_g^2 \rho_g (F_{gv_l} - F_{lv_l}) + \alpha_l^2 \rho_l (F_{gv_g} - F_{lv_g})] \frac{v_{gl}}{\rho} + [\alpha_g(\alpha_l F_l)_{\alpha_g} - \alpha_l(\alpha_g F_g)_{\alpha_g}] \quad (54)$$

$$M_2 = -\alpha_g \alpha_l f_{\alpha_g} + \frac{\rho_g \rho_l}{\rho^2} (\alpha_g^3 \rho_g + \alpha_l^3 \rho_l - C\alpha_g \alpha_l \rho) v_{gl}^2 \quad (55)$$

密度波に関する安定条件は $\omega_I \leq 0$ である。Lは矩形ダクト内層状流および気泡流に対しては附録Bの(B-18), (B-19), (B-21), (B-22) および(B-29), (B-30), (B-32), (B-33)の各式を用いれば

$$L = \frac{1}{4\alpha_g \alpha_l H} (\alpha_g^2 \lambda_l \rho_l v_l + \alpha_l^2 \lambda_g \rho_g v_g + f_{gl} \rho_g v_{gl}) : \text{矩形ダクト内層状流に対して} \quad (56)$$

$$L = \frac{1}{\alpha_g \alpha_l} [\alpha_g^2 \lambda_l \alpha_l \rho_l v_l / D_e + \alpha_l^2 \lambda_g \alpha_g \rho_g v_g / D_e + 3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl} / (4\gamma_p)] : \text{気泡流に対して} \quad (57)$$

となり, 矩形ダクト内層状流および気泡流においては $L > 0$ である。KとLは共に正の値であることを考慮すると安定条件は

$$\frac{1}{L} |LL_1 - 2KM_1| \leq \sqrt{L_1^2 - 4KM_2} \quad (58)$$

この式は特徴として波数 k を含まない。この式に(51)~(55)の各式を代入すれば

$$\begin{aligned} & |(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) [\alpha_l(\alpha_g F_g)_{\alpha_g} - \alpha_g(\alpha_l F_l)_{\alpha_g}] - [\alpha_g(\alpha_l \rho_g + \frac{C\rho}{2})(F_{gv_l} - F_{lv_l}) \\ & + \alpha_l(\alpha_g \rho_l + \frac{C\rho}{2})(F_{gv_g} - F_{lv_g})] v_{gl} | [(\alpha_g(F_{gv_l} - F_{lv_l}) - \alpha_l(F_{gv_g} - F_{lv_g}))]^{-1} \\ & \leq \sqrt{\alpha_g \alpha_l (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) f_{\alpha_g} + [(\frac{C\rho}{2})^2 - \alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l] v_{gl}^2} \end{aligned} \quad (59)$$

この安定条件を矩形ダクト内層状流および水平気泡流のそれぞれに対して適用してみる。

まず, 矩形ダクト内層状流に対しては(59)式は附録Bの(B-17)~(B-23)の各式を用いれば

$$\begin{aligned} & \bar{\alpha}_g \alpha_l |\rho_g \rho_l (\alpha_l \lambda_g v_g - \alpha_g \lambda_l v_l) + f_{gl} \rho_g (\rho_l - \rho_g) v_{gl}| v_{gl} / (\alpha_g^2 \lambda_l \rho_l v_l + \alpha_l^2 \lambda_g \rho_g v_g + f_{gl} \rho_g v_{gl}) \\ & \leq \sqrt{\alpha_g \alpha_l [(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g)(\rho_l - \rho_g) gH - \rho_g \rho_l v_{gl}^2]} \end{aligned} \quad (60)$$

この安定条件から密度波の長波長成分に関する安定のための必要条件は

$$(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g)(\rho_l - \rho_g) gH / (\rho_g \rho_l) > v_{gl}^2 \quad (61)$$

によって表され、重力が安定のための重要な因子であることが解る。相対速度 v_{gl} が大きい場合には (60) 式の条件が満たされず系は不安定になる。これはよく知られるヘルムホルツ不安定である。(60)式から液相の壁面摩擦は安定化効果をもつが蒸気相の壁面摩擦は二相境界摩擦と共に不安定効果をもつ。

(59) 式の右辺の根号内の第一項に含まれる $f_{v\alpha_g}$ ($= -f_{v\alpha_l}$) の値は正であれば安定化に寄与する。そしてこのことは密度波の非常に短い波長成分に関する安定性についても当て嵌まる((110) 式参照)。これは G. B. Wallis¹²⁾ の (6.82) 式の説明と基本的に一致する。

参考までに平行平板間層状流において各種の摩擦や運動量交換を無視できる場合の密度波の長波長成分に関する安定性を附録Dにおいて、S. Chandrasekar¹⁶⁾ が二次元の層状流に対して導いた散逸関係式を一次元の場合に適用して説明する。

次に水平気泡流における密度波の長波長成分に関する安定性を考察する。(59) 式に含まれる各係数に対して附録Bの(B-28) ~ (B-34)の各式の値(密度波に対しては $\Gamma_0 = 0$ としている)を代入すれば

$$\left| \alpha_g \alpha_l (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \zeta_{\alpha_g} + \left[\alpha_g \left(\alpha_l \rho_g + \frac{C\rho}{2} \right) \zeta_{v_l} - \alpha_l \left(\alpha_g \rho_l + \frac{C\rho}{2} \right) \zeta_{v_g} \right] v_{gl} \right| \leq v_{gl} \sqrt{\left(\frac{C\rho}{2} \right)^2 - \alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l} \quad (62)$$

ここで

$$\zeta_{\alpha_g} = \left[(\lambda_g \alpha_l \rho_g v_g^2 + \lambda_l \alpha_g \rho_l v_l^2) / (2D_e) + 3f_{gl} \rho_g v_{gl}^2 / (8r_p) \right] / \left[\alpha_g^2 (\lambda_l \alpha_l \rho_l v_l / D_e) + \alpha_l^2 (\lambda_g \alpha_g \rho_g v_g / D_e) + 3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl} / (4r_p) \right] \quad (63)$$

$$\zeta_{v_l} = \left[\lambda_l \alpha_g \alpha_l \rho_l v_l / D_e + 3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl} / (4r_p) \right] / \left[\alpha_g^2 (\lambda_l \alpha_l \rho_l v_l / D_e) + \alpha_l^2 (\lambda_g \alpha_g \rho_g v_g / D_e) + 3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl} / (4r_p) \right] \quad (64)$$

$$\zeta_{v_g} = \left[\lambda_g \alpha_g \alpha_l \rho_g v_g / D_e + 3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl} / (4r_p) \right] / \left[\alpha_g^2 (\lambda_l \alpha_l \rho_l v_l / D_e) + \alpha_l^2 (\lambda_g \alpha_g \rho_g v_g / D_e) + 3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl} / (4r_p) \right] \quad (65)$$

(62) 式の適用例として大気圧飽和状態の蒸気-水水平気泡流に対して適用してみる。ボイド率 $\alpha_g = 0.1$ および 0.4 の 2 つの場合を例にとる。Mandhane ら¹³⁾ の二相流流動様式線図を参考にして各相速度として $v_l = 5\text{m/s}$, $v_g = 10\text{m/s}$ を選ぶ。気泡流に対する二相境界摩擦係数としては次式³⁾を用いる。

$$f_{gl} = \frac{24}{\text{Re}_p} (1 + 0.15 \text{Re}_p^{0.687}) + \frac{0.42}{1 + 4.25 \times 10^4 \text{Re}_p^{-1.16}} \quad (66)$$

ここで

$$\text{Re}_p = \frac{2\rho_l r_p v_{gl}}{\mu_l} \quad (67)$$

$$r_p = \frac{\sigma W_{crit}}{2\rho_l v_{gl}^2} \quad (68)$$

(68) 式に含まれる σ は表面張力で、 W_{crit} は臨界 Weber 数で気泡流に対しては 1.24 が用いられる。壁面摩擦係数 λ_g および λ_l の各値は Moody 線図からそれぞれ 0.021 および 0.011 とする。等価直径 D_e は 0.1m, 仮想質量係数 C は 0.5 とする。以上において与えた各式, 各数値および蒸気表を用いて (62) 式の左辺を計算する。まず, (63), (64) および (65) の各式の値は, 二相境界摩擦損失に比べて壁面摩擦損失を無視できるので, それぞれ $\zeta_{\alpha_g} \doteq \frac{v_{gl}}{2\alpha_g}$, $\zeta_{v_l} \doteq 1$, $\zeta_{v_g} \doteq 1$ となる。これらの値を (62) 式に代入すれば

$$\frac{1}{2} \left| \alpha_l \rho_g + \alpha_g \alpha_l (\rho_g - \rho_l) + C\alpha_g \rho \right| \leq \sqrt{\left(\frac{C\rho}{2} \right)^2 - \alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l} \quad (69)$$

となり, ボイド率 α_g が 0.1, 0.4 の何れの場合もこの式を満足し安定である。この式は相対速度 v_{gl} を陽には含まないが壁面摩擦損失に比べて二相境界摩擦損失が十分大きいという条件のもとで成り立つ。

尚, 均質流に対しては $C=\infty$ が用いられる。この値および $v_{gl}=0$ を(48)式に代入すれば $\varphi=0$, 或いは(41)式を用いて散逸関係式 $\omega=k v$ が得られる。 $\omega_1=0$ であるので均質流は密度波の長波長成分に関しては中立安定である。

次に二相流基礎方程式系(13)式~(17)式に含まれる音波の低周波成分の減衰特性を調べる。減衰係数が正または零であるならばこの方程式系はこの低周波成分に関して安定であると表現できるだろう。音波の伝播特性を求めるために(45)式から複素波数 k に対する散逸関係式を導く。その際, 一様定常状態における各相速度は共に零とする(7), (19)のP4。各相速度に関してはそれらの摂動分のみを考慮する。この手続きによって矩形ダクト内層状流および水平気泡流に対しては(45)式に含まれる F_{ab} , $\alpha_g F_{gv_g} + \alpha_l F_{lv_g}$ および $\alpha_g F_{gv_l} + \alpha_l F_{lv_l}$ はすべて零になる。また, 水平二相流においては $(\alpha_a F_a)_{\alpha_g} = 0$ である。

(41)式によって φ は ω に置換える。液相は非圧縮性と仮定する。更に低周波数においては蒸気-水二相流系は熱的平衡状態にあると見做すことができる。これらの手続きおよび仮定を用いて(45)式を展開すれば

$$\begin{aligned} & \alpha_g \alpha_l^2 \rho_g \rho_l^2 T^s f_{ra_g} k^4 - \{ \rho_g \rho_l (E_{s_l} + i \alpha_l \rho_l T^s \omega) [\alpha_g (F_{gv_l} - F_{lv_l}) - \alpha_l (F_{gv_g} - F_{lv_g}) - i (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C \rho) \omega] \\ & + \alpha_g \alpha_l^2 \rho_l^2 \rho_g^* T^s [\rho_g (f_{r_{i_g}} - \rho_g g H) \omega - i (\alpha_l f_{ra_g} - \rho_g g H) (F_{gv_g} - F_{lv_g} + i C \rho \omega)] \omega \} k^2 \\ & - [\alpha_l \rho_l (F_{gv_g} - F_{lv_g}) - \alpha_g \rho_g (F_{gv_l} - F_{lv_l})] [(\rho_l - \rho_g) (\alpha_l \rho_l \Gamma_{gp} - \alpha_g \rho_g S_g^* \Gamma_{gs_l}) T^s + \alpha_g \rho_l \rho_g^* E_{s_l}] \omega^2 \\ & - i \{ \alpha_l \rho_l T^s \cdot \alpha_g \rho_l \rho_g^* [\alpha_l \rho_l (F_{gv_g} - F_{lv_g}) - \alpha_g \rho_g (F_{gv_l} - F_{lv_l})] + \alpha_l \rho_l T^s (\rho_l - \rho_g) (\rho_g \rho_l + C \rho^2) \Gamma_{gp} \\ & - (\rho_g \rho_l + C \rho^2) [\alpha_g \rho_l \rho_g^* H_{gl} + \alpha_g (\rho_l - \rho_g) \rho_g S_g^* T^s] \Gamma_{gs_l} \} \omega^3 + \alpha_g \rho_l \rho_g^* \cdot \alpha_l \rho_l T^s (\rho_g \rho_l + C \rho^2) \omega^4 = 0 \quad (70) \end{aligned}$$

この式においては層状流に対する蒸発率 Γ_g に関する効果は無視している。

この式から得られる k の解の虚数部は矩形ダクト内層状流および水平気泡流における音波の低周波成分の減衰係数係数 η を与える。

具体例として水平気泡流において角周波数 $\omega \rightarrow 0$ における η を求める。この場合には附録Bの(B-34)式から $f_{ra_g} = 0$ であるので(70)式は k に関する2次方程式になり, その解の虚数部が低周波数における η を与える。その虚数部において $\omega \rightarrow 0$ とすれば次式になる。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \eta = \mp \frac{\omega^2 |QS - qR|}{2Q \sqrt{|QR|}} \quad (71)$$

ここで

$$Q = \rho_g \rho_l [\alpha_g (F_{gv_l} - F_{lv_l}) - \alpha_l (F_{gv_g} - F_{lv_g})] E_{s_l} \quad (72)$$

$$q = \rho_g \rho_l \{ \alpha_l \rho_l T^s [\alpha_g (F_{gv_l} - F_{lv_l}) - \alpha_l (F_{gv_g} - F_{lv_g})] - (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C \rho) E_{s_l} \} \quad (73)$$

$$R = [\alpha_l \rho_l (F_{gv_g} - F_{lv_g}) - \alpha_g \rho_g (F_{gv_l} - F_{lv_l})] [(\rho_l - \rho_g) (\alpha_l \rho_l \Gamma_{gp} - \alpha_g \rho_g S_g^* \Gamma_{gs_l}) T^s + \alpha_g \rho_l \rho_g^* E_{s_l}] \quad (74)$$

$$S = \alpha_l \rho_l T^s \{ \alpha_g \rho_l \rho_g^* [\alpha_l \rho_l (F_{gv_g} - F_{lv_g}) - \alpha_g \rho_g (F_{gv_l} - F_{lv_l})] + (\rho_l - \rho_g) (\rho_g \rho_l + C \rho^2) \Gamma_{gp} \} \quad (75)$$

$$- (\rho_g \rho_l + C \rho^2) [\alpha_g \rho_l \rho_g^* H_{gl} + \alpha_g \rho_g (\rho_l - \rho_g) S_g^* T^s] \Gamma_{gs_l} \quad (76)$$

(71)式の右辺の複号は上からそれぞれ正, 負各方向に伝播する音波に対応する。(71)式の導出に際して $Q=0$ および $R=0$ と仮定している。(72)~(76)の各式に附録Bの(B-39), (B-40), (B-42), (B-43)の各式および熱的平衡を仮定して得られる附録Bの(B-7), (B-9), (B-13)の各式, さらに蒸気相を理想気体と仮定して得られる

関係式 $\rho_g^* = \rho_g \left(\frac{1}{P} - \frac{V_{gl}}{H_{gl}} \right)$, $S_g^* = \frac{C_{vg} V_{gl}}{H_{gl}} + \left(\frac{P V_{gl}}{H_{gl}} - 1 \right) / (\rho_g T^s)$ を代入すれば

$$Q = - \frac{H_{gl}^2 (\alpha_g \rho_g F^{gl} + \Gamma_0) \Gamma_0}{\alpha_g \alpha_l V_{gl} C_P} \quad (77)$$

$$q = \rho_g \rho_l \left[\frac{\rho_l}{\alpha_g} (\alpha_g \rho_g F^{gl} + \Gamma_0) T^s + (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C \rho) \frac{H_{gl}^2 \Gamma_0}{V_{gl} C_P} \right] \quad (78)$$

$$R = \frac{\rho H_{gl} \Gamma_0 (\alpha_g \rho_g F^{gl} + \Gamma_0)}{\alpha_g \alpha_l V_{gl} C_P^2} \left\{ \frac{(\rho_l - \rho_g) V_{gl} P}{H_{gl}} [\alpha_l \rho_l T^s C_l + \alpha_g (\rho_g T^s C_{vg} + P) - \frac{\alpha_g H_{gl}}{V_{gl}}] + \alpha_g \rho_g \rho_l U_{gl} \right\} \quad (79)$$

$$S = \frac{(\rho_g \rho_l + C \rho^2) H_g \Gamma_0}{V_{gl} C P} \left[\frac{\alpha_g \rho_g \rho_l}{P} U_{gl} + \alpha_g (\rho_l - \rho_g) \frac{V_{gl}}{H_{gl}} (\rho_g T^s C_{vg} + P - \frac{H_{gl}}{V_{gl}}) \right] - \left[\alpha_l \rho_l (\rho_l - \rho_g) (\rho_g \rho_l + C \rho^2) H_{gl} \Gamma_0 + \rho_g \rho_l^2 \rho (\alpha_g \rho_g F^{gl} + \Gamma_0) U_{gl} \right] \frac{T^s}{P} \quad (80)$$

ここで $U_{gl} = H_{gl} - P V_{gl}$ であり蒸発に伴う内部エネルギーの変化を表す。 H_{gl} , V_{gl} , Γ_0 および F^{gl} の記号説明は記号表にある。(77) ~ (80) の各式を (71) 式に代入して整理すれば

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \eta = \mp \frac{\alpha_l \rho_l V_{gl}^2 \left[\alpha_g^2 \alpha_l \rho_g^2 \rho \Gamma_0 H_{gl}^2 (\alpha_g U_{gl}^2 + \rho T^s C_v V_{gl}^2 P) - \rho T^s C_l (\alpha_g \rho_g F^{gl} + \Gamma_0) P^2 (\alpha_g U_{gl} - \rho T^s C_v V_{gl}) \right]}{2 \Gamma_0 (\alpha_g \rho_g F^{gl} + \Gamma_0) P H_{gl}^3 \sqrt{\rho (\alpha_g U_{gl}^2 + \rho T^s C_v V_{gl}^2 P)}} \omega^2 \quad (81)$$

ここで $C_v = (\alpha_g \rho_g C_{vg} + \alpha_l \rho_l C_l) / \rho$

(81) 式は正方向の音波に対しては正の値である。従って角周波数 $\omega \rightarrow 0$ における音波の成分に関して基礎方程式系は安定である。

(81) 式の数値例として圧力 0.69 MPa, ボイド率 $\alpha_g = 0.1$ の蒸気-水飽和の水平気泡流を取上げる。気泡半径 $r_p = 0.5$ mm と仮定する。その場合の右辺の各常数の値を附録 C に示す。結果は $\lim_{\omega \rightarrow 0} \eta = 1.5 \times 10^{-3} \omega^2 \text{m}^{-1}$ となる。

一方、蒸発率 Γ_g に関する効果を考慮しない場合 (その他は上記と殆んど同じ条件) における η の計算結果は B.N. Hanna¹⁴⁾ によって Fig. 1 に示される。両者を比較すると、 $\omega \rightarrow 0$ においては η は共に ω^2 に比例することからその η の値は蒸発率に関する効果を考慮した場合にはそうでない場合に比べて 4×10^5 倍程度大きいと予測される。尚、上記の計算例においては (77) 式および (79) 式の Q および R はそれぞれ負および正の値であり、先に示した (71) 式に含まれる仮定は妥当である。

2.2.2 長波長および低周波数の摂動の伝播速度について

本項においては層状流および水平気泡流における密度波の長波長成分および音波の低周波成分のそれぞれの伝播速度を求める。

まず、密度波の伝播速度 ω_R / k を求める。矩形ダクト内層状流に対しては (50) 式に含まれる係数 M_1 は附録 B の (B-17) ~ (B-22) の各式を用いて表せば

$$M_1 = \frac{v_{gl}}{4 \alpha_g \alpha_l \rho H} \left[\alpha_g^3 \rho_g (\lambda_l \rho_l v_l) - \alpha_l^3 \rho_l (\lambda_g \rho_g v_g) + (\alpha_g^2 \rho_g - \alpha_l^2 \rho_l) f_{gl} \rho_g v_{gl} \right] \quad (82)$$

この式および (51) ~ (53), (55), 附録 B の (B-23) の各式を (50) 式に代入すれば

$$\frac{\omega_R}{k} = \left[v - \frac{(\alpha_g - \alpha_l) \rho_g \rho_l v_{gl}}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) \rho} \right] \pm \frac{1}{\sqrt{2} k (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g)} \left\{ \left(\left\{ - \left(\frac{L}{2} \right)^2 + k^2 \alpha_g \alpha_l [(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) (\rho_l - \rho_g) g H - \rho_g \rho_l v_{gl}^2] \right\}^2 \right)^{1/2} + k^2 \left\{ \frac{v_{gl}}{4H} [\rho_g \rho_l (\alpha_l \lambda_g v_g - \alpha_g \lambda_l v_l) + f_{gl} \rho_g (\rho_l - \rho_g)]^2 - \left(\frac{L}{2} \right)^2 + k^2 \alpha_g \alpha_l [(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) (\rho_l - \rho_g) g H - \rho_g \rho_l v_{gl}^2] \right\}^{1/2} \right\} \quad (83)$$

ここで L は (56) 式に示される。 v は二相混合流の平均速度で (42) 式に示す。(83) 式においては仮想質量係数 $C=0$ としてある。(83) 式は矩形ダクト内層状流における密度波の長波長成分の伝播速度を表す。特に $v_{gl}=0$ の場合には (83) 式は次式になる。

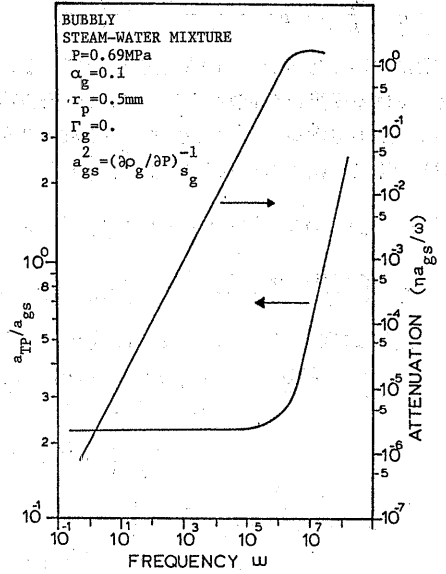


Figure 1 Dispersion and Attenuation vs. Frequency¹⁴⁾

$$\frac{\omega_R}{k} = \left[\begin{array}{l} v \\ v \pm \frac{1}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g)} \sqrt{\alpha_g \alpha_l (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) (\rho_l - \rho_g) g H - \left[\frac{(\alpha_g^2 \lambda_l \rho_l + \alpha_l^2 \lambda_g \rho_g) v^2}{8kH\alpha_g \alpha_l} \right]^2} \end{array} \right] \begin{array}{l} : (kH)^2 \leq \frac{[(\alpha_g^2 \lambda_l \rho_l + \alpha_l^2 \lambda_g \rho_g) v / 8]^2}{(\alpha_g \alpha_l)^3 (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) (\rho_l - \rho_g) g H} \text{ に対して} \\ : (kH)^2 > \frac{[(\alpha_g^2 \lambda_l \rho_l + \alpha_l^2 \lambda_g \rho_g) v / 8]^2}{(\alpha_g \alpha_l)^3 (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) (\rho_l - \rho_g) g H} \text{ に対して} \end{array} \quad (84)$$

この式に含まれる条件のうち、前者は壁面摩擦の効果が、重力が液相に及ぼす力の効果に打勝つほど kH の値が小さい場合を表し、後者はその反対の場合を表す。

また、波数 $k \rightarrow 0$ における伝搬速度は (83) 式から

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\omega_R}{k} \right) = v - \frac{(\alpha_g - \alpha_l) \rho_g \rho_l}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) \rho} v_{gl} \quad (85)$$

本節においては $\alpha_g < \alpha_l$ の仮定を用いているので (85) 式の右辺第二項は正の値である。(85) 式から矩形ダクト内層状流における密度波の波数 $k \rightarrow 0$ の成分の伝播速度は液相速度 v_l と速度 v_g との間にあることが解る。

次に水平気泡流における密度波の長波長成分の伝播速度を求める。(54) 式の M_1 の値は附録 B の (B-28) ~ (B-33) の各式 (密度波に対しては $\Gamma_0 = 0$ としている) を (54) 式に代入すれば

$$M_1 = \alpha_g \lambda_l \rho_l v_l^2 / (2D_e) + \alpha_l \lambda_g \rho_g v_g^2 / (2D_e) + \frac{v_{gl}}{\alpha_g \alpha_l \rho} \{ \alpha_g^3 \rho_g (\lambda_l \alpha_l \rho_l v_l / D_e) - \alpha_l^3 \rho_l (\lambda_g \alpha_g \rho_g v_g / D_e) \} \\ + 3 \left\{ \frac{2(\alpha_g^2 \rho_g - \alpha_l^2 \rho_l)}{\alpha_l \rho} + 1 \right\} f_{gl} \rho_g v_{gl}^2 / (8r_p) \quad (86)$$

この式および (51) ~ (53), (55), 附録 B の (B-34) の各式を (50) 式に代入すれば

$$\omega_R = kv - \frac{k[(\alpha_g - \alpha_l) \rho_g \rho_l + C(\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l) \rho / 2] v_{gl}}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho)}} \left\{ \left(\left\{ -\left(\frac{L}{2}\right)^2 + k^2 \left[\left(\frac{C\rho}{2}\right)^2 - \alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l \right] v_{gl}^2 \right\}^2 \right. \right. \\ \left. \left. + k^2 \left\{ \left[\alpha_l (\alpha_g \rho_l + \frac{C\rho}{2}) f_{vg} + \alpha_g (\alpha_l \rho_g + \frac{C\rho}{2}) f_{vl} \right] \frac{v_{gl}}{\alpha_g \alpha_l} - \alpha_g \alpha_l (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) f_{\alpha_g} \right\}^2 \right) \right\}^{1/2} \\ - \left(\frac{L}{2} \right)^2 + k^2 \left[\left(\frac{C\rho}{2} \right)^2 - \alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l \right] \quad (87)$$

ここで L は (57) 式で表される。そして

$$f_{v_g} = F_g v_g - F_{lv_g} = -[\lambda_g \rho_g v_g / D_e + 3f_{gl} \rho_g v_{gl} / (4\alpha_l r_p)] \quad (88)$$

$$f_{v_l} = F_g v_l - F_{lv_l} = \lambda_l \rho_l v_l / D_e + 3f_{gl} \rho_g v_{gl} / (4\alpha_l r_p) \quad (89)$$

$$f_{\alpha_g} = \frac{1}{\alpha_g \alpha_l} [\alpha_l (\alpha_g F_g)_{\alpha_g} - \alpha_g (\alpha_l F_l)_{\alpha_g}] \\ = \frac{-1}{\alpha_g \alpha_g} \{ (\alpha_l \lambda_g \rho_g v_g^2 + \alpha_g \lambda_l \rho_l v_l^2) / (2D_e) + 3f_{gl} \rho_g v_{gl}^2 / (8r_p) \} \quad (90)$$

気泡流においては 2.2.1 項においてすでに述べたように、通常二相境界摩擦力に比べて壁面摩擦力は無視できる。(57) および (88) ~ (90) の各式において壁面摩擦項を無視した結果を (87) 式に代入すれば次式を得る。

$$\frac{\omega_R}{k} = v - \frac{[(\alpha_g - \alpha_l) \rho_g \rho_l + C(\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l) \rho / 2] v_{gl}}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho} \\ \pm \frac{3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl}}{4\sqrt{2}k\alpha_g \alpha_l (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) r_p} \left\{ \left\{ -\frac{1}{4} + k^2 \left(\frac{4\alpha_l r_p}{3f_{gl} \rho_g} \right)^2 \left[\left(\frac{C\rho}{2} \right)^2 - \alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l \right] \right\}^2 \right. \\ \left. + k^2 \left(\frac{4\alpha_l r_p}{3f_{gl} \rho_g} \right)^2 \left[\alpha_g \alpha_l (\rho_l - \rho_g) + \frac{C}{2} (\alpha_l - \alpha_g) \rho - \frac{\alpha_l}{2} (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \right]^2 \right\} \quad (402)$$

$$-\frac{1}{4} + k^2 \left(\frac{4\alpha_l \rho_l}{3f_g \rho_g} \right)^2 \left\{ \left(\frac{C\rho}{2} - \alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l \right) \right\}^{1/2} \quad (91)$$

この式は水平気泡流における密度波の長波長成分の伝播速度を表す。特に波数 $k \rightarrow 0$ においては

$$\lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{\omega_R}{k} \right) = v - \frac{\{ (\alpha_g - \alpha_l) \rho_g \rho_l + C (\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l) \rho / 2 \} v_{gl}}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho} \quad (92)$$

この式の右辺の値は各相速度 v_l と v_g の間にある。仮想質量係数 C は気泡流に対しては 0.5 以上が用いられる。この式において $C=0$ (分離流に適用) とすれば (85) 式になる。

次に水平気泡流における音波の低周波成分の伝播速度を求める。(70) 式は既に述べたように水平気泡流に対しては k に関する 2 次方程式になる。その式から k の解を求めるとその実数部 k_R は次式になる。

$$k_R = \frac{\omega}{a} = \mp \frac{(QS - qR)}{|QS - qR|} \frac{\omega}{|Q| \sqrt{|QR|}} \sqrt{(QR)^2 + \frac{1}{4} (QS - qR)^2 \omega^2} \quad (93)$$

ここで Q , q , R および S はそれぞれ (77) ~ (80) の各式で表される。(93) 式を導くに当たって (71) 式の場合と同じように $Q < 0$ および $R > 0$ と仮定してある。2.2.1 項において述べたようにこの仮定は妥当である。

(93) 式から角周波数 $\omega \rightarrow 0$ における音速を求めてみる。(93) 式の Q および R に熱的平衡を仮定して求めた (77) 式および (79) 式を代入して $\omega \rightarrow 0$ とすれば次式を得る。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} a = \pm \left\{ \alpha_g \rho \left[\frac{1}{P} \left(\frac{U_{gl}}{H_{gl}} \right)^2 + \frac{\rho C_v T^s}{\alpha_g} \left(\frac{V_{gl}}{H_{gl}} \right)^2 \right] \right\}^{-1/2} \quad (94)$$

この式は R. C. Meccredy ら⁷⁾ の (20) 式と一致する。(94) 式を用いて 2.2.1 項において用いた例題、即ち圧力 0.69 MPa、ボイド率 $\alpha_g = 0.1$ の蒸気-水飽和水平気泡流について附録 C に示す各常数を用いて $\omega \rightarrow 0$ における音速を求めると 6.7 m/s である。一方、蒸発率 Γ_g に関する効果を考慮しない場合 (その他は上記と殆んど同じ条件) における計算結果は B. N. Hanna ら¹⁴⁾ によって Fig. 1 に示され、大体 100 m/s である (Fig. 1 において a_{gs} は気相の断熱的音速であり、その値は 486 m/s である)。両者を比較すれば蒸発率 Γ_g に関する効果を考慮した場合には、そうでない場合に比べて 0.07 倍程度になることが予測される。

2.2.3 非常に短い波長の摂動に関する定定性と摂動の伝播速度について

非均質二相流基礎方程式系はそれに含まれる密度波の非常に短い波長成分に関して非物理的不安定になりうることはよく知られている^{5) 6) 15)}。本項ではこの密度波の非常に短い波長成分に関する安定性並びに音波の非常に高い周波数成分に関する安定性を線形安定性解析によって求める。更にこれらの波の成分の伝播速度を求める。

非常に短い波長の摂動に関しては (49) 式は次式に簡単化される。

$$\begin{vmatrix} \rho_g(\varphi - k \frac{\alpha_l \rho_l}{\rho} v_{gl}) & \alpha_g \rho_g^* (\varphi - k \alpha_l \rho_l v_{gl} / \rho) & -k \alpha_g \rho_g & 0 & 0 \\ (\rho_l - \rho_g)\varphi + k \frac{\rho_g \rho_l}{\rho} v_{gl} & -(\alpha_l(\rho_l' + \rho_l'') + \alpha_g \rho_g^*)\varphi & k \alpha_g \rho_g & k \alpha_l \rho_l & 0 \\ k f_{ra_g} & 0 & -(\rho_g + C\rho)\varphi & (\rho_l + C\rho)\varphi & 0 \\ -k(\alpha_l f_{ra_g} - \rho_g g H) & k & +k(\alpha_l \rho_l - C \alpha_g \rho) \frac{\rho_g}{\rho} v_{gl} & +k(\alpha_g \rho_g - C \alpha_l \rho) \frac{\rho_l}{\rho} v_{gl} & 0 \\ 0 & \alpha_g \rho_g S_g^* T^s (\varphi - k \alpha_l \rho_l \frac{v_{gl}}{\rho}) & 0 & 0 & \alpha_l \rho_l T^s (\varphi + k \frac{\alpha_g \rho_g}{\rho} v_{gl}) \end{vmatrix} = 0 \quad (95)$$

この式を展開すれば

$$\begin{aligned} & (\varphi + k \alpha_g \rho_g v_{gl} / \rho) \left\{ \varphi^4 + k \left[\frac{\rho_g \rho_l (\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l)}{\rho_g \rho_l + C\rho^2} - \alpha_l \rho_l + \frac{\alpha_g \rho_g (\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g \rho_l') - \alpha_l^2 \rho_g \rho_l \rho_l''}{\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g (\rho_l' + \rho_l'')} \right] \frac{v_{gl}}{\rho} \varphi^3 \right. \\ & \left. - k^2 \alpha_g^2 \varphi^2 - \frac{k^3 \alpha_g^2 \{ 2(\alpha_g - \alpha_l) \rho_g \rho_l + C(\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l) \rho - 2\alpha_g \alpha_l^2 \rho_l \rho_g^* (f_{ra_g} - \rho_g g H) \}}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho} v_{gl} \varphi \right\} \end{aligned} \quad (403)$$

$$+ \frac{k^4 a_c^2 \alpha_g \alpha_l f_{v\alpha_g}}{\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho} - \frac{k^4 a_c^2 \{ \alpha_g^3 \rho_g + \alpha_l^3 \rho_l + \alpha_g \alpha_l^3 \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g gH) / \rho_g - C \alpha_g \alpha_l \rho \} \rho_g \rho_l}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho^2} v_{gl}^2 \} = 0 \quad (96)$$

ここで

$$a_c^2 = \frac{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho}{\rho_g \rho_l + C\rho^2} a_m^2 \quad (97)$$

$$a_m^2 = \frac{\rho_g \rho_l}{[\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g (\rho_l' + \rho_l'')] \rho} \quad (98)$$

a_c は定常状態における各流動様式の音速である。C = 0 とすれば層状流における音速になる。

(96) 式に

$$\tilde{\varphi} = \varphi / (ka_c) \quad (99)$$

$$\tilde{v}_{gl} = v_{gl} / a_c \quad (100)$$

を代入すれば

$$\begin{aligned} & (\tilde{\varphi} + \alpha_g \rho_g \tilde{v}_{gl} / \rho) \left\{ \tilde{\varphi}^4 + \left[\frac{(\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l) \rho_g \rho_l}{\rho_g \rho_l + C\rho^2} - \alpha_l \rho_l + \frac{\alpha_g \rho_g (\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g \rho_l') - \alpha_l^2 \rho_g \rho_l \rho_l''}{\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g (\rho_l' + \rho_l'')} \right] \frac{\tilde{v}_{gl}}{\rho} \tilde{\varphi}^3 \right. \\ & - \tilde{\varphi}^2 - \frac{[2(\alpha_g - \alpha_l) \rho_g \rho_l + C(\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l) \rho - 2\alpha_g \alpha_l^2 \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g gH)]}{(\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho} \tilde{v}_{gl} \tilde{\varphi} \\ & \left. + \frac{\alpha_g \alpha_l f_{v\alpha_g}}{a_c^2 (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho)} - \frac{[\alpha_g^3 \rho_g + \alpha_l^3 \rho_l + \alpha_g \alpha_l^3 \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g gH) / \rho_g - C \alpha_g \alpha_l \rho] \rho_g \rho_l}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho^2} \tilde{v}_{gl}^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (101)$$

この式の $\tilde{\varphi}$ の近似解は $\tilde{v}_{gl} = 0$ として得られる。その結果として

$$\tilde{\varphi}_{1,2,3} \doteq 0 \quad (102)$$

$$\tilde{\varphi}_{4,5} \doteq \pm 1 \quad (103)$$

或いは(41), (99)の両式を用いて

$$\omega_{1,2,3} \doteq kv \quad (104)$$

$$\omega_{4,5} \doteq k(v \pm a_c) \quad (105)$$

さて、上で求めた近似解を参考にして(101)式の解を求める。この式の1次因数から直ちに

$$\tilde{\varphi}_1 = -\frac{\alpha_g \rho_g}{\rho} \tilde{v}_{gl} \quad (106)$$

或いは(41), (99)の両式を用いて

$$\begin{aligned} \omega_1 &= k \left(v - \frac{\alpha_g \rho_g}{\rho} v_{gl} \right) \\ &= kv \end{aligned} \quad (107)$$

この散逸関係式は低周波数における(47)式に対応し、液相エントロピーの摂動の非常に高い周波数成分の伝播特性を表す。

さて、基礎方程式系(13)式~(17)式の非常に短い波長成分に関する安定性は附録Eの(E-4)式に示すように、この方程式系の特性根 λ と次の関係がある。⁶⁾

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda^{-1} - k/\omega| = 0 \quad (E-4)$$

そして特性根 λ の実数部および虚数部はそれぞれ波の非常に短い波長成分の伝播速度および時間的な成長を表すことはよく知られている。液相エントロピーの摂動の伝播特性に関しては、(107)式から $k/\omega_1 = \lambda_1^{-1} = v \tilde{\tau}^{-1}$ は実数であるから液相エントロピーの摂動の非常に高い周波数成分(非常に短い波長成分)に関して基礎方程式系は安定である。そして液相速度 v_l はこの成分の伝播速度である。

(102)式の近似解から(107)式の解の他にまだ2個の大きさが1に比べて遥かに小さい解 $\tilde{\varphi}_{2,3}$ があることが推察される。そこで、(101)式の4次因数において $\tilde{\varphi}$ の3乗以上の項を無視すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
& (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho^2 \tilde{\varphi}^2 + 2 \left\{ (\alpha_g - \alpha_l) \rho_g \rho_l + \frac{C}{2} (\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l) \rho - \alpha_g \alpha_l^2 \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g gH) \right\} \rho \tilde{v}_g \tilde{\varphi} \\
& - \frac{1}{\alpha_g^2} \alpha_g \alpha_l \rho^2 f_{v\alpha_g} + \left[\alpha_g^3 \rho_g + \alpha_l^3 \rho_l + \alpha_g \alpha_l^3 \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g gH) / \rho_g - C \alpha_g \alpha_l \rho \right] \rho_g \rho \tilde{v}_g^2 = 0 \quad (108)
\end{aligned}$$

この式に (99), (100) の両式を代入すれば

$$\begin{aligned}
& (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \varphi^2 + \frac{2k}{\rho} \left\{ (\alpha_g - \alpha_l) \rho_g \rho_l - \alpha_g \alpha_l^2 \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g gH) + \frac{C}{2} (\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l) \rho \right\} v_g \varphi \\
& - \frac{k^2}{\rho^2} \left\{ \alpha_g \alpha_l \rho^2 f_{v\alpha_g} - \left[\alpha_g^3 \rho_g + \alpha_l^3 \rho_l + \alpha_g \alpha_l^3 \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g gH) / \rho_g - C \alpha_g \alpha_l \rho \right] \rho_g \rho_l v_g^2 \right\} = 0 \quad (109)
\end{aligned}$$

この式は密度波の長波長成分に関する散逸関係式 (48) 式において各種の摩擦, 運動量交換および体積力等に関する効果をすべて無視した式に一致する。但し, (48) 式では蒸気, 水各相の非圧縮性を仮定しているが (109) 式では圧縮性の効果を含む。しかし, この効果は (111) 式に関して説明するように殆んど無視できる。そして非常に短い波長においては上記の摩擦, 運動量交換および体積力等に関する効果は無視できるので (109) 式は結果的に密度波の非常に短い波長に関する散逸関係式であることがわかる。(109) 式の解を (41) 式を用いて表せば

$$\begin{aligned}
\omega_{2,3} &= kv + \frac{k}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho)} \left\{ \left[(\alpha_l - \alpha_g) \rho_g \rho_l + \frac{C}{2} (\alpha_l \rho_l - \alpha_g \rho_g) \rho + \alpha_g \alpha_l^2 \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g gH) \right] \frac{v_g}{\rho} \right. \\
&\quad \left. \pm \sqrt{\alpha_g \alpha_l (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) f_{v\alpha_g} + \left(\frac{C\rho}{2} \right)^2 v_g^2 - \alpha_g \alpha_l \rho_l \left\{ \rho_g + \alpha_l \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g gH) \left[\alpha_l (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) - 2(\alpha_l - \alpha_g) \rho_g \right] \rho^{-2} \right\} v_g^2} \right\} \quad (110)
\end{aligned}$$

この式を (43), (44) の両式を用いて書換えれば

$$\omega_{2,3} = k(V \pm A) \quad (111)$$

ここで

$$V = \frac{\{\alpha_l (\rho_g + \alpha_g \alpha_l \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g gH) / \rho) + C\rho / 2\} v_g + \{\alpha_g (\rho_l - \alpha_l^2 \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g gH) / \rho) + C\rho / 2\} v_l}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho)} \quad (112)$$

$$A^2 = \frac{\alpha_g \alpha_l (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) f_{v\alpha_g} + \left[\left(\frac{C\rho}{2} \right)^2 - \alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l \right] v_g^2}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho)} \quad (113)$$

(110) 式の根号内の圧縮性効果を含む項はそれを含まない項に比べて十分小さいので (111) 式においては無視している。

(111) 式を用いて矩形ダクト内層状流および気泡流のそれぞれについて密度波の非常に短い波長成分に関する安定性を調べる。まず, 矩形ダクト内層状流においては $f_{v\alpha_g}$ の値として附録 B の (B-23) 式, 仮想質量係数 C としては零をそれぞれ (111) 式に代入する。その結果

$$(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) (\rho_l - \rho_g) gH < \rho_g \rho_l v_g^2 \quad (114)$$

の場合には (111) 式から得られる $-\frac{\omega_{2,3}}{k}$ ($=\lambda_{2,3}$) は複号の虚数部を含み基礎方程式系は不安定である。また,

気泡流においては $f_{v\alpha_g} = 0$ であるので

$$\left(\frac{C\rho}{2} \right)^2 < \alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l \quad (115)$$

の場合には (111) 式は複号の虚数部を含みやはり不安定である。尤も, (115) 式は $C \geq 1$ の場合には α_g, α_l (何れも零ではないと仮定している), ρ_g および ρ_l の各値に関係なく成立しない。

このような密度波の短波長成分に基づく基礎方程式系 (13) 式~(17) 式の不安定は非物理的不安定である。そ

の理由はこの基礎方程式系に二次の微分項、例えば粘性項 $\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_a \frac{\partial v_a}{\partial x} \right)$ 或いは二相境界に働く表面張力項などを補足することによってこれらの短波長における不安定を取除くことができるからである。これらの項は短波長において大きな値になるが長波長においては無視できる。(114)式に含まれる $(\rho_l - \rho_g) gH (= f_{\nu} \alpha_g)$ および(115)式に含まれる仮想質量係数Cはそれぞれ矩形ダクト内層状流および気泡流における密度波の短波長における基礎方程式系の非物理的不安定を抑制する効果をもつことが解る。このことに関連して、既に述べたように(60)式の右辺の根号内の $(\rho_l - \rho_g) gH (= f_{\nu} \alpha_g)$ は矩形ダクト内層状流に起りうる長波長の物理的不安定(ヘルムホルツ不安定)を抑制する効果をもつ。実際に基礎方程式系を数値解法によって解く場合においては上に述べた非物理的不安定(初期値問題として不適切)はその差分方程式系に表面張力項或いは陰または陽に人工粘性項を補足するなどの数値技法を用いて解決される。附録Aにおいては RELAP5/MOD1コード³⁾に含まれる差分方程式系に用いられる人工粘性について説明してある。

矩形ダクト内層状流および気泡流における密度波の非常に短い波長成分の伝播速度は(111)式から求めることができる。即ち、

$$\frac{(\omega_R)_{2,3}}{k} (= \lambda_R)_{2,3} = V; (114) \text{式または}(115) \text{式が成立する場合} \quad (116)$$

$$\frac{\omega_{2,3}}{k} (= \lambda_{2,3}) = V \pm A; (114) \text{式または}(115) \text{式が成立しない場合} \quad (117)$$

ここで、仮想質量係数Cおよび係数 $f_{\nu} \alpha_g$ の各値には矩形ダクト内層状流に対してはそれぞれ零および $(\rho_l - \rho_g) gH$ (附録Bの(B-23)式)、気泡流に対してはそれぞれ0.5以上および零を用いる。

最後に(103)式の近似解から大きさが1に近い $\tilde{\varphi}$ の2個の解があることが推察される。(101)式の4次因数において $|\tilde{\varphi}| \approx 1$ と見做すと常数項は無視できて次式になる。

$$\tilde{\varphi}^3 + \left\{ \frac{(\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l) \rho_g \rho_l}{\rho_g \rho_l + C \rho^2} - \alpha_l \rho_l + \frac{\alpha_g \rho_g (\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g \rho_l') - \alpha_l^2 \rho_g \rho_l \rho_l''}{\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g (\rho_l' + \rho_l'')} \right\} \frac{\tilde{v}_{gl}}{\rho} \tilde{\varphi}^2 - \tilde{\varphi} - \frac{[2(\alpha_g - \alpha_l) \rho_g \rho_l + C(\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l) \rho - 2\alpha_g \alpha_l^2 \rho_l \rho_g^* (f_{\nu} \alpha_g - \rho_g gH)]}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C \rho) \rho} \tilde{v}_{gl} = 0 \quad (118)$$

この式の大きさが凡よそ1の2個の解は

$$\tilde{\varphi}_{4,5} = Y \tilde{v}_{gl} \pm 1 \quad (119)$$

ここで

$$Y = \frac{\alpha_g \rho_g (\rho_l + C \rho / 2) - \alpha_l \rho_l (\rho_g + C \rho / 2) - \alpha_g \alpha_l^2 \rho_l \rho_g^* (f_{\nu} \alpha_g - \rho_g gH)}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C \rho) \rho} + \frac{a_m^2}{2(\rho_g \rho_l + C \rho^2)} \left\{ (\alpha_l \rho_l - \alpha_g \rho_g) (2\rho_g \rho_l + C \rho^2) (\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g \rho_l') / (\rho_g \rho_l) + \alpha_l [(3\alpha_l \rho_l - \alpha_g \rho_g) \rho_g + 2C \alpha_l \rho^2] \rho_l'' \right\} \quad (120)$$

(119)式においては \tilde{v}_{gl} の2乗以上の項は無視してある。

(119)式に(41)、(99)および(100)の各式を代入すれば

$$\omega_{4,5} = k(v \pm a_c + Y v_{gl}) \quad (121)$$

この式は矩形ダクト内層状流および気泡流における圧縮性波(compressibility wave)¹²⁾の非常に高い周波数成分に関する散逸関係式を表す。この式については(107)式に続く説明から解るように $\frac{\omega_{4,5}}{k} (= \lambda_{4,5})$ は実

数であるから矩形ダクト内層状流および気泡流における圧縮性波の非常に高い周波数成分に関して基礎方程式系は安定である。そしてその周波数成分の伝播速度は(121)式から

$$\frac{\omega_{4.5}}{k} = \lambda_{4.5} = v + Y v_{gl} \pm a_c \tag{122}$$

本項で求めた非常に短い波長の摂動に関する散逸関係式((107), (111)および(121)の各式)はすべて基礎方程式系(13)式~(17)式における時間および空間に関する微分を含まない項, 即ち右辺の非同次項の影響を受けない。従ってこれらの項は基礎方程式系の初期値問題としての適切性には関係ない。

3. 実際の加熱二相流系における密度波および圧縮性波について

実際の二相流系において起りうる二相流の不安定にはよく知られているように静的および動的な不安定がある^{9), 10), 17), 18), 20)}。前者は定常状態における法則によって説明できるもので, 流れ逸走(Ledinegg不安定), フローパターン遷移不安定, バンピング, チャギング, ガイセリングなどがある。一方, 動的不安定には密度波振動, 音波振動, 圧力降下振動などがある。動的不安定の特徴はその機構が二相流体の慣性と, 擾乱のフィードバック効果に基づくことである。系に加わる外乱の影響は大雑把に云って二種の波, 即ち密度波および圧縮性波によって系の他の点に運ばれる。これらの波の伝播速度は有限であるからこの輸送にはある時間を要する。従って外乱の影響はある時間を経て最初に外乱が加わった点にフィードバックされる。そして新たな擾乱を誘起する。そしてその擾乱がある条件(振巾および位相ずれ)を満たす場合には自励振動に発達する。

密度波振動は Fig. 2 に示すような加熱器と出口絞り(絞りを有する配管)および給水タンクからなる系などにおいて観察される。

Fig. 2において入口圧力 P_1 と出口圧力 P_e は一定とする。加熱器の蒸気発生率も一定とする。さて, 定常状態において流量の統計的な変動などが原因で出口絞りの圧力降下が急に僅か減少したとする。出口圧力降下($P_0 - P_e$)におけるこの減少は圧縮性波の伝播速度(気泡流部分の伝播速度は, (122)式で表される。但し, この式は一様

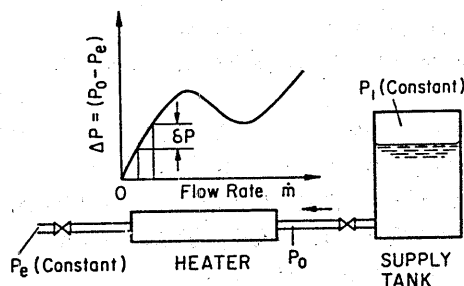


Fig. 2 Simplified system for density-wave type oscillations.¹⁷⁾

定常状態(2.2節参照)において与える摂動から導かれるので加熱部気泡流に対しては近似値を与える)で殆んど瞬間的に入口へ伝播されて P_0 は減少する。その結果, 入口流量は僅かに増加して前よりも密度の大きい密度波が沸騰境界から出口絞りに伝播する。その結果, 出口圧力降下は僅かに増加し($P_1 - P_0$)は減少する。それ故, 入口流量は僅かに減少して前よりも密度の小さい密度波が沸騰境界から出口絞りへ伝播する。出口絞りの圧力降下の僅かの減少は圧縮性波の伝播速度で殆んど瞬間的に入口に伝わり入口流量は僅かに増加する。このようにして振動の1周期は大きい密度と小さい密度の各密度波を1つつ含む。Fig. 3に密度波振動のブロック線図を示す。

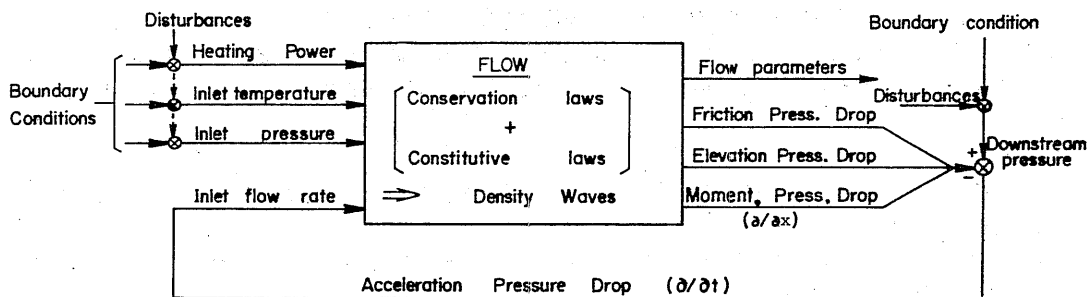


FIG. 3 Pure density wave oscillations mechanism.²⁰⁾

上で述べた密度波の伝播速度は(91)式または(117)式によって表される。二相流系における各種の摩擦、運動量交換および体積力等に関する効果は無視できる場合には(117)式で表され、そうでない場合には(91)式で表される。但し、(91)式および(117)式は一様定常状態において与える摂動から導かれるので加熱部気泡流に対しては近似値を与える。

4. 結 論

軽水原子炉系の熱水力過渡特性や配管破断の想定事故などの解析に広く用いられている RELAP5/MOD1 コードに用いられている一次元非均質非平衡二相流基礎方程式系を基本的に用いた二相流基礎方程式系(13)式～(17)式の線形安定性解析を行い、その結果を矩形ダクト内層状流および気泡流に適用した結果、次の事柄が明らかになった。

1) 矩形ダクト内層状流における密度波の長波長成分に関する二相流基礎方程式系の安定のための必要条件は次式で表される。

$$(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g)(\rho_l - \rho_g) g H / (\rho_g \rho_l) > v_{gl}^2 \quad (61)$$

この関係式は蒸気-水の相対速度 v_{gl} が大きい場合には満たされない。つまり系は不安定になる。これはよく知られるヘルムホルツ不安定である。その場合において液相の壁面摩擦は安定化効果をもつが、気相の壁面摩擦は二相境界摩擦と共に不安定効果をもつ((60)式参照)。(61)式は非常に短い波長成分に関する系の安定性に関しても適用できる。その場合にはこの式は安定のための十分条件である。そしてこの条件式が満たされない場合の不安定は非物理的不安定である((114)式参照)。

2) 水平気泡流における音波の非常に低い周波数成分に関しては二相流基礎方程式系は安定である((71)式参照)。

3) 矩形ダクト内層状流および気泡流のそれぞれにおける音波の非常に高い周波数成分に関しては二相流基礎方程式系は安定である((121)式参照)。

4) 蒸気-水水平気泡流における密度波の長波長成分に関しては各相の壁面摩擦損失が二相境界摩擦損失に比べて無視できる場合には二相流基礎方程式系は安定である(但し、大気圧飽和状態において $\alpha_g < 0.5$ の場合)。一方、非常に短い波長成分に関しては

$$\left(\frac{C\rho}{2}\right)^2 < \alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l \quad (115)$$

の場合には系は不安定になる。これは非物理的不安定である。尤も(115)式は C (仮想質量係数) ≥ 1 の場合には α_g, α_l (何れも零ではないと仮定している)、 ρ_g および ρ_l の各値に関係なく成立しない(気泡流に対しては $C > 0.5$ が適用される)。

5) 蒸気-水水平気泡流において角周波数 $\omega \rightarrow 0$ における音波の減衰係数は圧力 0.69 MPa 、ボイド率 $\alpha_g = 0.1$ の飽和状態において蒸発率 Γ_g に関する効果を考慮した場合には、そうでない場合に比べて 4×10^5 倍程度大きいと予測される。

6) 矩形ダクト内層状流における密度波の長波長成分の伝播速度((83)式)を求めた。

7) 水平気泡流における密度波の長波長成分の伝播速度((91)式)を求めた。

8) 矩形ダクト内層状流および気泡流における密度波の非常に短い波長成分の伝播速度((117)式)を求めた。

9) 矩形ダクト内層状流および気泡流における圧縮性波の非常に高い周波数成分の伝播速度((122)式)を求めた。

本研究において検証したこと

1) 二相流基礎方程式系の特性根はその系の非常に短い波長の摂動に関する系の安定性と等価であることを検証した(附録F参照)。

以上の研究結果は一次元非均質二相流基礎方程式系に生じる物理的安定性および非物理的不安定の問題についてのいくつかの知見を与える。

一次元非均質二相流モデルを用いた熱水力過渡特性解析コードを作成したり改造したりする場合にはこれらの知見を前以て把握する必要がある。それによって適切な差分方程式系を作ることができ、数値実験において生じ

るかもしれない不安定に対する適切な判断ができる。

本研究を遂行するにあたり有益なご助言を頂いた原子力船舶(現大阪支所)綾威雄主任研究官に謝意を表します。

附録A 非均質二相流差分方程式系の適切性について

非均質二相流基礎方程式系の非常に短い波長の摂動に関する非物理的不安定(不適切)は既に述べたように粘性項項または表面張力項などの二次微分効果を加えることによって取除き初期値問題として適切にすることができる。

さて、非均質二相流基礎方程式系の初期値問題を解くために用いられるその差分方程式系は適切でなければならない。そのために人工粘性などを陽に加えたり、数値解析上の工夫によって陰に人工粘性が加えられるようにする場合がある。本研究において参考にした RELAP5/MOD1 コードで用いられる差分方程式系は後者に該当する。加えられる人工粘性項などは物理的に意味のある比較的長い波長の振る舞いを抑制しないように選ばなければならない。

RELAP5/MOD1コードにおいては二相流差分方程式系を適切にするために次のような工夫がしてある³⁾。即ち、特定の空間微分項に対しては新しい時刻における陰解法を用い、質量流束とエネルギー流束の両項については、それらに含まれるスカラー量には以下の(A-1)式で示される上流側の値を用いる。運動量流束については、運動方程式におけるその保存形はそれに含まれる v_a^2 に対して(A-3)式および(A-4)式に示す上流側の値を用いると以下に導くように結果的に v_a^2 の勾配に対する中心差分近似項と陰の人工粘性項の和で表される。

RELAP5/MOD1 コードの二相流差分方程式系においては、まず連続およびエネルギーの両方程式については Fig.A.1 において x 座標に関して x_j から x_{j+1} まで積分して得られる。一方、運動方程式については x_K から x_L まで積分して得られる。ここで、 x_j, x_{j+1} などをジャンクションと呼び、 K, L などをボリュームまたはセルと呼ぶ。 x_K, x_L などはボリューム K, L などの中心を指す。

各ジャンクションにおける質量流束項およびエネルギー流束項のそれぞれに含まれるスカラー量は次式に示す上流側の値 $\dot{\phi}$ を用いる。

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2}(\phi_K + \phi_L) + \frac{1}{2} \frac{|v|}{v} (\phi_K - \phi_L),$$

$$v \neq 0 \quad (A-1)$$

ここで、 ϕ はボリュームの平均スカラー量であり、 v は適当な速度(蒸気相又は液相)である。

運動方程式(3)式および(4)式の左辺第2項の対流加速項はこのコードでは次式で近似される。

$$\frac{1}{2} \alpha_a \rho_a \frac{\partial v_a^2}{\partial x} \approx \frac{(\alpha_a \rho_a)_j}{2 \Delta x_j} \{ (\dot{v}_a^2)_L - (\dot{v}_a^2)_K \} \quad (A-2)$$

ここで、 $(\dot{v}_a^2)_K$ と $(\dot{v}_a^2)_L$ は Fig. A.1 に示す運動方程式を適用するボリュームの境界 x_K と x_L のそれぞれにおける量である。ジャンクションにおけるスカラー量に対して(A-1)式で表す上流側の値を用いるのに倣って、 $(\dot{v}_a^2)_K$ と $(\dot{v}_a^2)_L$ に対しても次式で表す上流側の値を用いる。

$$(\dot{v}_a^2)_K = \frac{1}{2} \{ (v_a^2)_{j-1} + (v_a^2)_j \} + \frac{1}{2} \frac{|(v_a)_K|}{(v_a)_K} \{ (v_a^2)_{j-1} - (v_a^2)_j \} \quad (A-3)$$

$$(\dot{v}_a^2)_L = \frac{1}{2} \{ (v_a^2)_j + (v_a^2)_{j+1} \} + \frac{1}{2} \frac{|(v_a)_L|}{(v_a)_L} \{ (v_a^2)_j - (v_a^2)_{j+1} \} \quad (A-4)$$

(A-2)式に(A-3)、(A-4)の両式を代入すれば

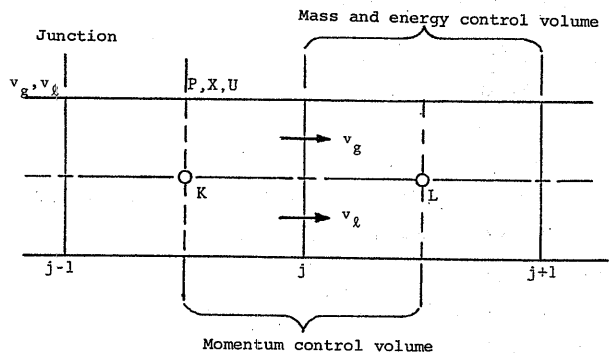


Fig.A.1 Difference equation nodalization schematic

$$\frac{1}{2} \alpha_a \rho_a \frac{\partial v_a^2}{\partial x} = \frac{(\alpha_a \rho_a)_j}{4\Delta x_j} \left\{ (v_a^2)_{j+1} - (v_a^2)_{j-1} + \frac{|(v_a)_L|}{(v_a)_L} [(v_a^2)_j - (v_a^2)_{j+1}] \right. \\ \left. - \frac{|(v_a)_K|}{(v_a)_K} [(v_a^2)_{j-1} - (v_a^2)_j] \right\} \quad (\text{A-5})$$

ボリュームKおよびLの平均速度およびその2乗はそれぞれ次式で求められる。

$$(v_a)_K = [(v_a)_{j-1} + (v_a)_j] / 2, \quad (v_a)_L = [(v_a)_j + (v_a)_{j+1}] / 2 \quad (\text{A-6})$$

$$(v_a^2)_K = [(v_a^2)_{j-1} + (v_a^2)_j] / 2, \quad (v_a^2)_L = [(v_a^2)_j + (v_a^2)_{j+1}] / 2 \quad (\text{A-7})$$

(A-5)式に(A-6), (A-7)の両式を代入すれば

$$\frac{1}{2} \alpha_a \rho_a \frac{\partial v_a^2}{\partial x} = \frac{(\alpha_a \rho_a)_j}{2\Delta x_j} [(v_a^2)_L - (v_a^2)_K] - \frac{(\alpha_a \rho_a)_j}{2\Delta x_j} (\text{VISA})_j \quad (\text{A-8})$$

ここで

$$(\text{VISA})_j = |v_a|_L [(v_a)_{j+1} - (v_a)_j] - |v_a|_K [(v_a)_j - (v_a)_{j-1}] \quad (\text{A-9})$$

(A-9)式は文献3)の(233)式および(234)式に対応する。(A-8)式から解るように、この式の左辺の運動量流束は差分式ではその中心差分近似項と人工粘性項(第二項)の和で表される。

RELAP5/MOD1 コードの二相流差分方程式系の適切性と精度は数値実験によって確かめられた。

附録B 矩形ダクト内層状流および水平気泡流における(31), (32)および(33)の各式の値

二相混合流単位体積当りの蒸発率 Γ_g の構成方程式としては R. C. Mecredy と L. J. Hamilton⁷⁾ が運動学的理論から求めた式を用いる。彼等は、液相は速度 v_l 、温度 T_l で蒸発し、凝縮は v_g および T_g で起るとして、蒸発と凝縮が共存している式をたてた。彼等によれば、二相混合流の単位体積当りの蒸発率 r_e および凝縮率 r_c は気泡流に対してそれぞれ次式で表される。

$$r_e = \frac{3\epsilon_e \alpha_g}{r_p \sqrt{2\pi R}} \frac{P_l^s}{\sqrt{T_l}} \quad (\text{B-1})$$

$$r_c = \frac{3\epsilon_c \alpha_g}{r_p \sqrt{2\pi R}} \frac{P}{\sqrt{T_g}} \quad (\text{B-2})$$

ここで、 P_l^s は T_l に対応する飽和圧力、 P は圧力、そして R はガス常数をそれぞれ表す。本報では、彼等に倣って、蒸発係数 ϵ_e と凝縮係数 ϵ_c は等しいと仮定する。即ち、

$$\epsilon_e = \epsilon_c = \epsilon \quad (\text{B-3})$$

Γ_g を r_e および r_c を用いて表せば

$$\Gamma_g = r_e - r_c \quad (\text{B-4})$$

この式は熱的平衡状態においては

$$\Gamma_g = \frac{3\epsilon \alpha_g}{r_p \sqrt{2\pi R T^s}} (P_l^s - P) \quad (\text{B-5})$$

となり値は零である。

(31)式の各係数は(B-5)式を α_g 、 P および S_l のそれぞれに関して微分すれば得られる。即ち、

$$\Gamma_{g\alpha_g} = 0 \quad (\text{B-6})$$

$$\Gamma_{gp} = \frac{3\epsilon \alpha_g}{r_p \sqrt{2\pi R T^s}} \left\{ \left[\left(\frac{\partial T_l}{\partial P} \right)_{s_l} \frac{dP^s}{dT} - 1 \right] - \frac{P_l^s - P}{2T^s} \frac{dT^s}{dP} \right\} \\ = \frac{-\Gamma_0}{P} \quad (\text{B-7})$$

$$\text{ここで } \Gamma_0 = \frac{3\epsilon \alpha_g P}{r_p \sqrt{2\pi R T^s}} \quad (\text{B-8})$$

(B-7)式においては液相は非圧縮性と見做す。

$$\Gamma_{gs_l} = \frac{\Gamma_0}{P} \left(\frac{\partial T_l}{\partial S_l} \right)_p \frac{dP^s}{dT}$$

$$= \frac{\Gamma_0 H_{gl}}{PV_g C_l} \quad (\text{B-9})$$

ここで H_{gl} および V_{gl} はそれぞれ熱的平衡状態における蒸発熱および蒸発による比体積増加を表す。

次に (32) 式の各係数を求める。(11)式において運動エネルギー項および摩擦熱の項を無視すれば

$$E = -H_g \Gamma_g + Q \quad (\text{B-10})$$

この式を、 Q は一定値として、 α_g 、 P および S_l のそれぞれに関して微分すれば

$$E_{\alpha_g} = 0 \quad (\text{B-11})$$

$$E_p = -H_{gl} \Gamma_{gp} = H_{gl} \Gamma_0 / P \quad (\text{B-12})$$

$$E_{S_l} = -H_{gl} \Gamma_{gs_l} = \frac{-H_{gl}^2 \Gamma_0}{V_{gl} C_l P} \quad (\text{B-13})$$

最後に (33) 式の各係数を矩形ダクト内層状流および水平気泡流のそれぞれに対して求める。

まず矩形ダクト内層状流に対して求める。(19),(20)の各式に含まれる各係数の値はそれぞれ次式で表される。

$$\text{FWG} = \frac{\lambda_g v_g}{8\alpha_g H}, \quad \text{FWF} = \frac{\lambda_l v_l}{8\alpha_l H}, \quad A_{gl} = \frac{1}{H}, \quad B_{gl} = \frac{1}{8} f_{gl} \rho_g v_{gl} \quad (\text{B-14})$$

(B-14) 式の各値を (19), (20) の各式に代入すれば

$$\alpha_g F_g = -\lambda_g \rho_g v_g^2 / (8H) - f_{gl} \rho_g v_{gl}^2 / (8H) \quad (\text{B-15})$$

$$\alpha_l F_l = -\lambda_l \rho_l v_l^2 / (8H) + f_{gl} \rho_g v_{gl}^2 / (8H) \quad (\text{B-16})$$

(B-15), (B-16) の各式においては物質移動の効果は無視する。(33) 式の各値は (B-15), (B-16)

の各式を α_g 、 v_g および v_l のそれぞれに関して微分すれば

$$(\alpha_g F_g)_{\alpha_g} = 0 \quad (\text{B-17})$$

$$(\alpha_g F_g)_{v_g} = -\lambda_g \rho_g v_g / (4H) - f_{gl} \rho_g v_{gl} / (4H) \quad (\text{B-18})$$

$$(\alpha_g F_g)_{v_l} = f_{gl} \rho_g v_{gl} / (4H) \quad (\text{B-19})$$

$$(\alpha_l F_l)_{\alpha_g} = 0 \quad (\text{B-20})$$

$$(\alpha_l F_l)_{v_g} = f_{gl} \rho_g v_{gl} / (4H) \quad (\text{B-21})$$

$$(\alpha_l F_l)_{v_l} = -\lambda_l \rho_l v_l / \quad (\text{B-22})$$

(3)式および(4)式に含まれるポイド率の勾配 $\partial \alpha_g / \partial x$ に起因する各相単位体積当りの力は Fig. B.1 を参照すればそれぞれ

$-\rho_g g H \frac{\partial \alpha_g}{\partial x}$ (蒸気相) および

$(f_v \alpha_g - \rho_g g H) \frac{\partial \alpha_g}{\partial x}$ である。

ただし

$$f_v \alpha_g = (\rho_l - \rho_g) g H \quad (\text{B-23})$$

次に水平気泡流に対する (33) 式の各値を求める。単位体積当りの二相境界面積 A_{gl} としては次式を用いる³⁾。

$$A_{gl} = 3\alpha_g / r_p \quad (\text{B-24})$$

(19), (20) の各式に含まれる係数 FWG および FWF はそれぞれ次式で表される。

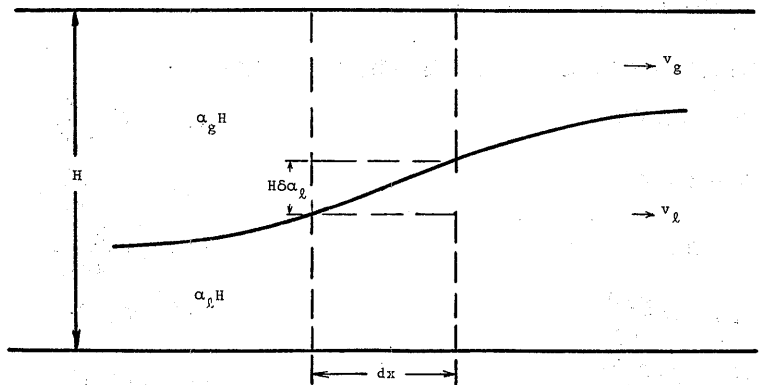


Fig. B.1 Gradient $\partial \alpha_g / \partial x$ in a stratified flow in a rectangular duct

$$FWG = \frac{\lambda_g v_g}{2D_e}, \quad FWF = \frac{\lambda_l v_l}{2D_e} \quad (\text{B-25})$$

(7), (B-24) および (B-25) の各式を (19), (20) の各式に代入すれば

$$\alpha_g F_g = -\lambda_g \alpha_g \rho_g v_g^2 / (2D_e) + r_e v_l - r_c v_g - 3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl}^2 / 8r_p \quad (\text{B-26})$$

$$\alpha_l F_l = -\lambda_l \alpha_l \rho_l v_l^2 / (2D_e) + r_c v_g - r_e v_l + 3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl}^2 / 8r_p \quad (\text{B-27})$$

これらの式を α_g , v_g および v_l のそれぞれに関して微分すれば

$$(\alpha_g F_g)_{\alpha_g} = -\lambda_g \alpha_g v_g^2 / (2D_e) - \Gamma_0 v_{gl} / \alpha_g - 3f_{gl} \rho_g v_{gl}^2 / (8r_p) \quad (\text{B-28})$$

$$(\alpha_g F_g)_{v_g} = -\lambda_g \alpha_g \rho_g v_g / D_e - \Gamma_0 - 3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl} / (4r_p) \quad (\text{B-29})$$

$$(\alpha_g F_g)_{v_l} = \Gamma_0 + 3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl} / (4r_p) \quad (\text{B-30})$$

$$(\alpha_l F_l)_{\alpha_g} = \lambda_l \rho_l v_l^2 / (2D_e) + \Gamma_0 v_{gl} / \alpha_g + 3f_{gl} \rho_g v_{gl}^2 / (8r_p) \quad (\text{B-31})$$

$$(\alpha_l F_l)_{v_g} = \Gamma_0 + 3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl} / (4r_p) \quad (\text{B-32})$$

$$(\alpha_l F_l)_{v_l} = -\lambda_l \alpha_l \rho_l v_l / D_e - \Gamma_0 - 3f_{gl} \alpha_g \rho_g v_{gl} / (4r_p) \quad (\text{B-33})$$

$$f_{gl} \alpha_g = 0 \quad (\text{B-34})$$

上記の (B-28) ~ (B-33) の各式は水平気泡流における密度波に関する (13) 式 ~ (17) 式の基礎方程式系の安定性解析に用いる。一方、この系における音波の伝播特性を求める場合には定常状態における各相速度 v_g および v_l を共に零とする (G.B. Whitham F.R.S. 19) p. 4)。そして各相速度としてはそれらの摂動分のみを考える。その場合の二相境界摩擦力は気泡 (球と見做す) と流体の相対速度が非常に小さい場合に成り立つストークスの法則から求めることができる⁷⁾。その結果、(B-26) ~ (B-33) の各式は以下のように書換えられる。

$$\alpha_g F_g = r_e v_l - r_c v_g - \alpha_g \rho_g F^{gl} v_{gl} \quad (\text{B-35})$$

$$\alpha_l F_l = r_c v_g - r_e v_l + \alpha_g \rho_g F^{gl} v_{gl} \quad (\text{B-36})$$

$$\text{ここで } F^{gl} = \frac{9}{2} \frac{\mu_l}{\rho_g r_p^2} \quad (\text{B-37})$$

(B-35), (B-36) の両式は R. C. Meccredy⁷⁾ が音波の伝播特性を求めるために用いた式と同じである。

(B-35), (B-36) の両式を微分して次式を得る。

$$(\alpha_g F_g)_{\alpha_g} = 0 \quad (\text{B-38})$$

$$(\alpha_g F_g)_{v_g} = -\Gamma_0 - \alpha_g \rho_g F^{gl} \quad (\text{B-39})$$

$$(\alpha_g F_g)_{v_l} = \Gamma_0 + \alpha_g \rho_g F^{gl} \quad (\text{B-40})$$

$$(\alpha_l F_l)_{\alpha_g} = 0 \quad (\text{B-41})$$

$$(\alpha_l F_l)_{v_g} = \Gamma_0 + \alpha_g \rho_g F^{gl} \quad (\text{B-42})$$

$$(\alpha_l F_l)_{v_l} = -\Gamma_0 - \alpha_g \rho_g F^{gl} \quad (\text{B-43})$$

附録C 2.2.1 項および 2.2.2 項の例題に用いた常数

$$P = 0.69 \text{MPa} \quad \Gamma_0 = 3660 \frac{\text{kg}}{\text{sm}^2}$$

$$T^s = 437^\circ\text{K} \quad C_{vg} = 0.441 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$$

$$\alpha_g = 0.1 \quad C_l = 1.02 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}^\circ\text{K}}$$

$$H_{gl} = 494 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \quad F^{gl} = 906 \text{s}^{-1}$$

$$U_{gl} = 448 \frac{\text{kcal}}{\text{kg}} \quad r_p = 0.5 \times 10^{-3} \text{m}$$

$$V_{gl} = 0.277 \frac{\text{m}^2}{\text{kg}}$$

附録D 層状流における密度波に及ぼす重力および表面張力の安定化効果について

(412)

矩形ダクト内層状流における密度波の長波長成分に対する散逸関係式は(48)式で表される。そしてこの成分は(60)式の条件を満たさない場合には不安定になる。これはヘルムホルツ不安定であることは(48)式において各種の摩擦、運動量交換および体積力等に関わる項を無視した結果を、以下に紹介するChandrasekhar¹⁶⁾が求めた二次元層状流におけるヘルムホルツ不安定の式から導くことができることから了解される。

いま、三次元座標 (z は高さ方向) において定常状態にある非圧縮性および非粘性の層状非均質流が水平方向 (x 方向) に速度 v_x で流れているとする。非粘性の仮定により v_x は高さ方向には任意の関数と考えることが許される。また、ある高さ $z=z_s$ を境にしてその上下で密度の不連続が許されるものとする。この系が摂動されて任意の点の各状態量が定常値 $\rho, P, v_x, v_y=v_z=0$ から $\delta\rho, \delta P, \delta v_x, \delta v_y$ および δv_z だけそれぞれ変動したとする。その場合、摂動に対して

$$e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)} \quad (\text{D-1})$$

に依存する解を求めることができる。ここで k_x と k_y はそれぞれ x 方向および y 方向の波数である。

Chandrasekhar (16), p483) によれば、この系に対して次の力学的関係を導くことができる。

$$A_s \left[\rho (\omega - k_x v_x) \frac{dv_z}{dz} + \rho k_x \frac{dv_x}{dz} \right] = g k^2 \left[A_s (\rho) - \frac{k^2}{g} \sigma_s \right] \left[\frac{\delta v_z}{\omega - k_x v_x} \right]_s \quad (\text{D-2})$$

ここで

$$A_s(f) = f_{z=z_s+0} - f_{z=z_s-0} \quad (\text{D-3})$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (\text{D-4})$$

g = 重力加速度

σ = 表面張力

添字 s は二相境界面を示す。

いま、密度 ρ_1 と ρ_2 の一様な二流体が $z=0$ の水平面で分けられているとする。上側の流体の ρ_2 は下側の ρ_1 より小さいとする。そして一定速度 v_{x1} および v_{x2} でそれぞれ流れているとする。この系が摂動されると高さ方向の速度の変動は次式で表すことができる (16), p484)

$$\delta v_{z1} = A(\omega - k_x v_{x1}) e^{kz} \quad (z < 0) \quad (\text{D-5})$$

$$\delta v_{z2} = A(\omega - k_x v_{x2}) e^{-kz} \quad (z > 0) \quad (\text{D-6})$$

ここで、 A は任意常数である。高さ方向に直交する平行平板間隔 H が有限で、その中間に二相境界面がある場合に対して (D-2) 式を適用するために (D-5), (D-6) の両式をそれぞれ次式で置換える。

$$\delta v_{z1} = A(\omega - k_x v_{x1}) \frac{\sinh k(z + \alpha_1 H)}{\sinh k \alpha_1 H} \quad (z < 0) \quad (\text{D-7})$$

$$\delta v_{z2} = -A(\omega - k_x v_{x2}) \frac{\sinh k(z - \alpha_2 H)}{\sinh k \alpha_2 H} \quad (z > 0) \quad (\text{D-8})$$

ここで α_1 と α_2 はそれぞれ x 方向単位長さ当りの各相の体積比である。(D-7), (D-8) の両式を (D-2) 式に代入し、二相境界で $\delta v_{z1} = \delta v_{z2}$ であることを考慮すれば次式を得る。

$$\rho_2 (\omega - k_x v_{x2})^2 \frac{\cosh k \alpha_2 H}{\sinh k \alpha_2 H} + \rho_1 (\omega - k_x v_{x1})^2 \frac{\cosh k \alpha_1 H}{\sinh k \alpha_1 H} = g k \left[(\rho_1 - \rho_2) + \frac{k^2}{g} \sigma \right] \quad (\text{D-9})$$

(D-9)式は $kH \ll 1$ の場合には次式になる。

$$\alpha_1 \rho_2 (\omega - k_x v_{x2})^2 + \alpha_2 \rho_1 (\omega - k_x v_{x1})^2 = k^2 \alpha_1 \alpha_2 \left[(\rho_1 - \rho_2) g + k^2 \sigma \right] H \quad (\text{D-10})$$

この式において x 方向の摂動だけを考えると $k=k_x$ とおけば平行板間の一次元非圧縮性層状流に対する散逸関係式になる。この式の添字 $x1$ および $x2$ をそれぞれ l および g で置換えて (41), (43) および (44) の各式を用いて整理すれば

$$\begin{aligned} & (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) \varphi^2 + 2k(\alpha_g - \alpha_l) \frac{\rho_g \rho_l}{\rho} v_{gl} \varphi \\ & - k^2 \left\{ \alpha_g \alpha_l \left[(\rho_l - \rho_g) g + k^2 \sigma \right] H - \frac{\rho_g \rho_l}{\rho^2} (\alpha_g^3 \rho_g + \alpha_l^3 \rho_l) v_{gl}^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D-11})$$

この式は(48)式において各種の摩擦、運動量交換および体積力等に関わる項を無視し、 C (仮想質量係数) = 0

とし、矩形ダクト内層状流の液相に対する力としてボイド率の勾配 $\partial\alpha_g/\partial x$ に起因する力の係数として (B-23) 式を用いた式に一致する。但し、(48) 式においては表面張力 σ は無視している。(D-11) 式は、結果的には密度波の非常に短い波長成分に関する散逸関係式(109)において係数 f_{rag} に矩形ダクト内層状流に対する値 (B-23) 式を代入し、 $C=0$ とした式と一致する。但し、(109) 式においては表面張力 σ を無視している。

(D-11) 式から安定条件として次式が得られる。

$$v_{gl} \leq \sqrt{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g) [(\rho_l - \rho_g) g + k^2 \sigma]} H / \rho_g \rho_l \quad (\text{D-12})$$

長波長においてこの式が満たされない場合はヘルムホルツ安定である。

附録E 特性根と安定性の関係について

非均質二相流基礎方程式系(13)式~(17)式の特性根と安定性の関係はこの系の物理的理解の上で有益な情報を含んでいるので、ここでは Ramshaw と Trapp⁶⁾ が導いた両者の関係についての議論の要約を紹介する。そして彼等が示した特性根と安定性の関係を本報の2.2.3項で求めた非常に短い波長の摂動に関する安定性と附録Fで求めた特性根との間の関係に適用してみる。

二相流基礎方程式系は一般的には附録Fの(F-1)式で表される。この n 個の式から成る1次準線形偏微分方程式系に Von Neuman と Richtmyer によって初めて用いられたとされる局所線形安定性解析法を適用すると、 $\omega(k) \neq 0$ と仮定すれば次式を得る。

$$\det(\mathbf{A} - \frac{k}{\omega} \mathbf{B} + \frac{i}{\omega} \mathbf{D}) = 0 \quad (\text{E-1})$$

ここで

$$\mathbf{D} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{U}_0} \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial t} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{U}_0} \frac{\partial \mathbf{U}_0}{\partial x} \right)^T + \left(\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{U}_0} \right)^T \quad (\text{E-2})$$

\mathbf{U}_0 は摂動されない場合の解である。肩記号Tは転置行列を表す。

一方、(F-1)式の特性根 λ は次式で定義される。

$$\det(\mathbf{A} - \lambda^{-1} \mathbf{B}) = 0 \quad (\text{E-3})$$

(E-1)式と(E-3)式を比較すると、もし $\mathbf{D} = 0$ ならば $k/\omega = \lambda^{-1}$ となり散逸関係式は特性根から直ちに得られる。しかし、 $\mathbf{D} = 0$ となるのは \mathbf{A} 、 \mathbf{B} および \mathbf{C} がすべて常数の場合のみである。この場合には系の特性根が実数ならば全波長(或いは全周波数)の摂動に関して ω (或いは k) は実数となり系は安定である。即ち摂動に関して系は発散も減衰もしない。しかし、 $\mathbf{D} \neq 0$ の場合には特性根が実数であっても安定のための十分条件ではない。このことは実数の特性根を有する系でも物理的不安定を示すことがありうることから了解される(例えば、文献6)の(4)式~(9)式の二相流系)。このような物理的不安定を記述するために複素特性根は不要である。

(E-1)と(E-3)式を比較すると直観的に解るように安定性と特性根は非常に高い周波数の極限においては、特性根の逆数 λ^{-1} の解に1個でも零が含まれる場合を除いて等価になる。これは厳密には Ostrowski の定理⁶⁾による。即ち、 $k \rightarrow \infty$ のとき $k/|\omega(k)|$ が常に有限値に近付くならば、この定理は

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda^{-1} - k/\omega| = 0 \quad (\text{E-4})$$

この定理によって $k \rightarrow \infty$ における散逸関係式(107),(111)および(121)の各式から得られる k/ω はそれぞれ附録Fにおいて求めた特性根(F-9),(F-12)および(F-31)の各式の逆数に等しいことが検証される。

附録F 非均質二相流基礎方程式系の特性根について

二相流基礎方程式系(13)式~(17)式の系の特性根を求める。一次元二相流基礎方程式系は次の n 個(普通は $3 \leq n \leq 6$)の式から成る一次準線形偏微分方程式系で表される。

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{B}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{C}(\mathbf{U}) = 0 \quad (\text{F-1})$$

ここで、係数行列 \mathbf{A} および \mathbf{B} は $n \times n$ の正方行列であり、 \mathbf{U} は従属変数の n 次列ベクトルである。ここで扱う系では係数行列は従属変数 u_1, u_2, \dots, u_n の導関数を含まない。つまり準線形系である。非同次項 $\mathbf{C}(\mathbf{U})$ は n 次列ベクトルであり、従属変数の導関数を含まない。

基礎方程式系(13)式～(17)式を(F-1)式で表せばU, A および B は次式になる。

$$\mathbf{U} = (\alpha_g, P, v_g, v_l, S_l)^T \quad (\text{F-2})$$

ここで肩記号Tは転置行列を表す。AとBはそれぞれ

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \rho_g & \alpha_g \rho_g^* & 0 & 0 & 0 \\ -\rho_l & \alpha_l (\rho_l' + \frac{T_g^s}{T_l} \rho_l'') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_g \rho_g + C \alpha_g \alpha_l \rho & -C \alpha_g \alpha_l \rho & 0 \\ 0 & 0 & -C \alpha_g \alpha_l \rho & \alpha_l \rho_l + C \alpha_g \alpha_l \rho & 0 \\ 0 & \alpha_g \rho_g S_g^* T_g^s & 0 & 0 & \alpha_l \rho_l T_l \end{pmatrix} \quad (\text{F-3})$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \rho_g v_g & \alpha_g \rho_g^* v_g & \alpha_g \rho_g & 0 & 0 \\ -\rho_l v_l & \alpha_l (\rho_l' v_l + \frac{T_g^s}{T_l} \rho_l'' v_g) & 0 & \alpha_l \rho_l & 0 \\ \alpha_g \rho_g g H & \alpha_g & \alpha_g (\rho_g v_g + C \alpha_l \rho v_l) & -C \alpha_g \alpha_l \rho v_g & 0 \\ -\alpha_l (f_{v_{\alpha_g}} - \rho_g g H) & \alpha_l & -C \alpha_g \alpha_l \rho v_l & \alpha_l (\rho_l v_l + C \alpha_g \rho v_g) & 0 \\ 0 & \alpha_g \rho_g S_g^* T_g^s v_g & 0 & 0 & \alpha_l \rho_l T_l v_l \end{pmatrix} \quad (\text{F-4})$$

ただし、(F-3), (F-4)の両式を求める際に(14)式の DS_l/Dt_l を含む項は(17)式を用いて消去してある。

(F-1)式の特徴根は次式の λ で与えられる。

$$\det(\mathbf{A} - \lambda^{-1} \mathbf{B}) = 0 \quad (\text{F-5})$$

非同次項Cは特性根の定義によりこの式に含まれない。(F-5)式に(F-3), (F-4)の両式を代入して得られる行列式を展開すれば

$$\begin{aligned} & \lambda_l \left\{ \rho_g \lambda_g \left[\alpha_l \rho_g \lambda_g (\rho_l \lambda_l + C \alpha_g \rho \lambda_g) (\rho_l \lambda_l + \frac{T_g^s}{T_l} \rho_l'' \lambda_g) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + C \alpha_l^2 \rho_l \rho (\rho_l' \lambda_l + \frac{T_g^s}{T_l} \rho_l'' \lambda_g) \lambda_l^2 - \alpha_l \rho_l (\rho_g \lambda_g + C \rho \lambda_l) - \alpha_g \alpha_l \rho_g^* (f_{v_{\alpha_g}} - \rho_g g H) \lambda_g \right] \right. \\ & \quad \left. + \alpha_g \rho_l \lambda_l \left[\rho_g \rho_g^* (\rho_l \lambda_l + C \alpha_g \rho \lambda_g) \lambda_g^2 + C \alpha_l \rho_l \rho_g^* \lambda_g \lambda_l^2 - \rho_g (\rho_l \lambda_l + C \rho \lambda_g) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \alpha_l \rho_g^2 g H (\rho_l' \lambda_l + \rho_l'' \frac{T_g^s}{T_l} \lambda_g) \right] + \alpha_g \alpha_l \rho_g \rho_l f_{v_{\alpha_g}} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (\text{F-6})$$

$$\text{ここで } \lambda_g = \lambda - v_g, \lambda_l = \lambda - v_l \quad (\text{F-7})$$

(F-6)式は5個の特性根を有する。その中の1根は直ちに

$$\lambda_l = 0 \quad (\text{F-8})$$

或いは(F-7)式を用いて

$$\lambda_l = v_l \quad (\text{F-9})$$

特性根と安定性の関係(E-4)式から λ_1 は(107)式から求まる液相エントロピーの摂動の非常に高い周波数成分の位相速度 ω_1/k に等しい。

次に残りの4個の特性根の中には $v_g + \sqrt{\frac{\alpha_g \alpha_l (\rho_l - \rho_g) g H}{\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g}}$ と $v_l - \sqrt{\frac{\alpha_g \alpha_l (\rho_l - \rho_g) g H}{\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g}}$ (気泡流に

対しては $H=0$ とするので各値の第二項は零)の間の値を有するものがあると仮定すると(F-6)式の大括弧内において λ_g および λ_l のオーダーの4次項はそれらの2次項に比べて無視できる。3次項と1次項はない。その結果次式を得る。

$$\alpha_g \{ \rho_g + \alpha_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g g H) \} \lambda_g^2 + \alpha_g \rho_l \lambda_l^2 + C \rho \lambda_g \lambda_l - \alpha_g \alpha_l f_{v\alpha_g} = 0 \quad (F-10)$$

この式を(F-7), (43)および(44)の各式を用いて書換えると

$$\begin{aligned} & (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C \rho) (\lambda - v)^2 - \frac{2}{\rho} \{ (\alpha_l - \alpha_g) \rho_g \rho_l + \alpha_g \alpha_l^2 \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g g H) \\ & + \frac{C}{2} (\alpha_l \rho_l - \alpha_g \rho_g) \rho \} v_{gl} (\lambda - v) - \alpha_g \alpha_l f_{v\alpha_g} + \{ (\alpha_g^3 \rho_g + \alpha_l^3 \rho_l - C \alpha_g \alpha_l \rho) \rho_g \rho_l \\ & + \alpha_g \alpha_l^3 \rho_l^2 \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g g H) \} \frac{v_g^2}{\rho^2} = 0 \end{aligned} \quad (F-11)$$

この式の解は

$$\lambda_{2,3} = V \pm A \quad (F-12)$$

ここで V および A はそれぞれ(112), (113)の各式によって表される。非常に短い波長においては(E-4)式から(F-11)式に含まれる $(\lambda - v)$ を $(\frac{\omega}{k} - v)$ で置換えることができる。その結果から(111)式を導くことができる。(F-12)式は気泡流 ($f_{v\alpha_g} = 0$, $H=0$) に対しては文献3)の(146)式と一致する。(F-12)式から $\lambda_{2,3}$ の値は $v_g + \sqrt{\frac{\alpha_g \alpha_l (\rho_l - \rho_g) g H}{\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g}}$ と $v_l - \sqrt{\frac{\alpha_g \alpha_l (\rho_l - \rho_g) g H}{\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g}}$ (気泡流に対しては $H=0$ とする)の中間にあることがわかり、 λ_g および λ_l のそれぞれのオーダーの4次項を無視したことは妥当である。 $\lambda_{2,3}$ の値は実数または共役複素根になる。(F-12)式の根号内が負の場合には共役複素根となり(13)式~(17)式の基礎方程式系は楕円形になる。特性根の実数部は波の非常に短い波長成分の伝播速度を表し、虚数部はその符号によってその波の成分の時間的な減衰または成長を表す。楕円型の系に対してはある将来の時刻におけるすべての境界条件も与えなければならない。もし与えれば現在の現象に対して将来の状況が影響することになり初期値問題としては不適切である。適切であるためには特性根はすべて実数でなければならない。

以下においては密度波の非常に短い波長成分に関する基礎方程式系の安定性とその系の特性根の関係を単純化した基礎方程式系について説明する。

気液両相が非圧縮性で物質移動がなく、体積力も $\partial \alpha_g / \partial x$ に起因する力も働かない場合において基礎方程式系(13)式~(17)式は次の(F-13)式~(F-16)式の系で表される。

$$\frac{D \alpha_g}{D t_g} + \alpha_g \frac{\partial v_g}{\partial x} = 0 \quad (F-13)$$

$$\frac{D \alpha_l}{D t_l} + \alpha_l \frac{\partial v_l}{\partial x} = 0 \quad (F-14)$$

$$\rho_g \frac{D v_g}{D t_g} + C \alpha_l \rho \left(\frac{D v_g}{D t_l} - \frac{D v_l}{D t_g} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (F-15)$$

$$\rho_l \frac{D v_l}{D t_l} + C \alpha_g \rho \left(\frac{D v_l}{D t_g} - \frac{D v_g}{D t_l} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (F-16)$$

(F-15), (F-16)の両式から $\partial P / \partial x$ を消去する。そして(F-13)式~(F-16)式の系を線形化する。その際一様定常状態の各変数の値を改めて α_g , α_l , v_g および v_l とする。そしてそれらからの摂動分をそれぞれ $\Delta \alpha_g$, $\Delta \alpha_l$, Δv_g および Δv_l とすれば

$$\frac{\partial \Delta \alpha_g}{\partial t} + v_g \frac{\partial \Delta \alpha_g}{\partial x} + \alpha_g \frac{\partial \Delta v_g}{\partial x} = 0 \quad (F-17)$$

$$\frac{\partial \Delta \alpha_l}{\partial t} + v_l \frac{\partial \Delta \alpha_l}{\partial x} + \alpha_l \frac{\partial \Delta v_l}{\partial x} = 0 \quad (\text{F-18})$$

$$\begin{aligned} \rho_g \left(\frac{\partial \Delta v_g}{\partial t} + v_g \frac{\partial \Delta v_g}{\partial x} \right) + C \alpha_l \rho \left(\frac{\partial \Delta v_g}{\partial t} + v_l \frac{\partial \Delta v_g}{\partial x} - \frac{\partial \Delta v_l}{\partial t} - v_g \frac{\partial \Delta v_l}{\partial x} \right) \\ = \rho_l \left(\frac{\partial \Delta v_l}{\partial t} + v_l \frac{\partial \Delta v_l}{\partial x} \right) + C \alpha_g \rho \left(\frac{\partial \Delta v_l}{\partial t} + v_g \frac{\partial \Delta v_l}{\partial x} - \frac{\partial \Delta v_g}{\partial t} - v_l \frac{\partial \Delta v_g}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{F-19})$$

(F-19) 式を x に関して微分して得られた式に (F-17), (F-18) の両式を代入すれば次式を得る。

$$\frac{\partial^2 \Delta \alpha_g}{\partial t^2} + 2V' \frac{\partial^2 \Delta \alpha_g}{\partial x \partial t} + B \frac{\partial^2 \Delta \alpha_g}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{F-20})$$

$$\text{ただし, } B = \frac{\alpha_l \rho_g v_g^2 + \alpha_g \rho_l v_l^2 + C \rho v_g v_l}{\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C \rho} \quad (\text{F-21})$$

ここで V' は (112) 式において $f_{v\alpha_g} = 0$ ($H=0$) とした値である。(F-20) 式の特徴根は

$$\lambda = V' \pm \sqrt{(V')^2 - B} \quad (\text{F-22})$$

この式は検算すればわかるように (F-12) 式において $f_{v\alpha_g} = 0$ ($H=0$) とした式と同一である。このことから (F-12) 式と等価の (111) 式と, さらに (111) 式が導かれた (109) 式に対応する (48) 式の両式はそれぞれ非常に短い波長および長波長の密度波に関する散逸関係式であることがわかる。

さて, 2.2 節に示すように摂動 $\Delta \alpha_g$ は次式で表すことができる。

$$\Delta \alpha_g = \hat{\alpha}_g e^{i(kx - \omega t)} \quad (\text{F-23})$$

ところで (111) 式から導かれる $k / |\omega(k)|$ は $k \rightarrow \infty$ の場合に有限値であるので (E-4) 式を用いることができる。(E-4) 式を (F-23) 式に代入すれば

$$\Delta \alpha_g = \hat{\alpha}_g e^{i k(x - \lambda t)} \quad (k \rightarrow \infty \text{ の場合}) \quad (\text{F-24})$$

(F-12) 式の特徴根 $\lambda_{2,3}$ が共役複素根の場合には $\lambda_{2,3} = V' \pm i \bar{A}'$ (ただし, $\bar{A}' = -i A'$ 。 V' および A' はそれぞれ (112) 式および (113) 式において $f_{v\alpha_g} = 0$ ($H=0$) とした値であり気泡流の場合を表す) で表される。そしてその場合には (F-24) 式は (F-20) 式を満足することが検算でわかる。従ってポイド率の摂動 $\Delta \alpha_g$ は最終的に次式によって表される。

$$\Delta \alpha_g = \hat{\alpha}_g e^{\pm k \bar{A}' t + i k(x - V' t)} \quad (k \rightarrow \infty \text{ の場合}) \quad (\text{F-25})$$

この式から特徴根 $\lambda_{2,3}$ が複素根の場合には, その実数部はポイド率 α_g の摂動の非常に短い波長成分の伝播速度を表し, 虚数部はその符号によってその波長成分の時間的な減衰または成長を表すことがわかる。

最後に残りの 2 個の特徴根を求める。(F-7), (43) および (44) の各式を用いて (F-6) 式の大括弧内を $(\lambda - v)$ に関する式に書換えると

$$\begin{aligned} (\rho_g \rho_l + C \rho^2) \left\{ \alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g \left(\rho_l' + \frac{T_g^s}{T_l} \rho_l'' \right) \right\} (\lambda - v)^4 \\ + \left\{ (\alpha_g \rho_g - \alpha_l \rho_l) (2 \rho_g \rho_l + C \rho^2) (\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \rho_g \alpha_l \rho_l') + \alpha_l \rho_g \rho_l (\rho_g (\alpha_g \rho_g - 3 \alpha_l \rho_l) \right. \\ \left. - 2 C \alpha_l \rho^2) \frac{T_g^s}{T_l} \rho_l'' \right\} \frac{v_{gl}}{\rho} (\lambda - v)^3 - (\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C \rho) \rho_g \rho_l (\lambda - v)^2 \\ + 2 \left[(\alpha_l - \alpha_g) \rho_g \rho_l + \alpha_g \alpha_l^2 \rho_l \rho_g^* (f_{v\alpha_g} - \rho_g g H) + \frac{C}{2} (\alpha_l \rho_l - \alpha_g \rho_g) \rho \right] \frac{\rho_g \rho_l}{\rho} v_{gl} (\lambda - v) \\ + (\lambda - v) \text{に関する常数項} = 0 \end{aligned} \quad (\text{F-26})$$

この式の左辺を (F-11) 式で割り, 残余を無視すれば $(\lambda - v)$ に関する 2 次方程式を得る。この残余は $(\lambda - v)$ の -1 乗以下の次数の項から成り, $(\lambda - v)$ の大きさは (F-27) 式に導かれるように断熱的音速のオーダーであるので残余は無視できる。得られる二次方程式から次の 2 個の特徴根を得る。

$$\lambda_{4,5} = v + Y' v_{gl} \pm \alpha_{cne} \quad (\text{F-27})$$

ここで

$$Y' = \frac{\alpha_g \rho_g (\rho_l + C\rho/2) - \alpha_l \rho_l (\rho_g + C\rho/2) + \alpha_g \alpha_l^2 \rho_l \rho_g^* (f_{r\alpha_g} - \rho_g gH)}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho}$$

$$+ \frac{a_{mne}^2}{2(\rho_g \rho_l + C\rho^2)} \{ (\alpha_l \rho_l - \alpha_g \rho_g) (2\rho_g \rho_l + C\rho^2) (\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g \rho_l') / (\rho_g \rho_l) \}$$

$$+ \alpha_l \{ \rho_g (3\alpha_l \rho_l - \alpha_g \rho_g) + 2C\alpha_l \rho^2 \} \frac{T_g^s}{T_l} \rho_l'' \} \quad (F-28)$$

$$a_{cne}^2 = \frac{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho}{\rho_g \rho_l + C\rho^2} a_{mne}^2 \quad (F-29)$$

$$a_{mne}^2 = \frac{\rho_g \rho_l}{[\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g (\rho_l' + \frac{T_g^s}{T_l} \rho_l'')] } \rho \quad (F-30)$$

a_{cne} は蒸気相が熱的平衡にあり、液相が熱的非平衡にある二相流の各流動様式における音速である。例えば層状流に対してはC(仮想質量係数)=0として得られる。

(F-27)式の特性格根 $\lambda_{4,5}$ は初期状態が熱的平衡状態にあれば $T_l = T_g^s$ であるので次式になる。

$$\lambda_{4,5} = v + Yv_{gl} \pm a_c \quad (F-31)$$

ここで

$$a_c^2 = \frac{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho}{\rho_g \rho_l + C\rho^2} a_m^2 \quad (97)$$

$$a_m^2 = \frac{\rho_g \rho_l}{[\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g (\rho_l' + \rho_l'')] } \rho \quad (98)$$

$$Y = \frac{\alpha_g \rho_g (\rho_l + C\rho/2) - \alpha_l \rho_l (\rho_g + C\rho/2) + \alpha_g \alpha_l^2 \rho_l \rho_g^* (f_{r\alpha_g} - \rho_g gH)}{(\alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g + C\rho) \rho}$$

$$+ \frac{a_m^2}{2(\rho_g \rho_l + C\rho^2)} \{ (\alpha_l \rho_l - \alpha_g \rho_g) (2\rho_g \rho_l + C\rho^2) (\alpha_g \rho_l \rho_g^* + \alpha_l \rho_g \rho_l') / \rho_g \rho_l \}$$

$$+ \alpha_l \{ \rho_g (3\alpha_l \rho_l - \alpha_g \rho_g) + 2C\alpha_l \rho^2 \} \rho_l'' \} \quad (120)$$

(F-31)式の特性格根 $\lambda_{4,5}$ は(E-4)式の関係により(122)式、即ち圧縮性波の非常に高い周波数(非常に短い波長)成分の伝播速度に等しい。

参 考 文 献

- 1) 例えば K.R.Katsma, et al., : RELAP 4/MOD 5-A Computer Program for Transient Thermal-Hydraulic Analysis of Nuclear Reactors and Related Systems, ANCR-NUREG-1335, 1976.
- 2) 例えば TRAC-P1A-An Advanced Best-Estimate Computer Program for PWR LOCA Analysis, NUREG/CR-0665, 1979.
- 3) 例えば V.H.Ransom, et al., : RELAP 5/MOD 1 Code Manual VOL. 1: System Models and Numerical Methods, NUREG/CR-1826, EGG-2070 DRAFT, 1981.
- 4) T.A.Porsching, J.H.Murphy and J.A.Redfield: Stable Numerical Integration of Conservation Equations for Hydraulic Networks, Nuclear Science and Engineering, 43 (1971), pp. 218-225.
- 5) D.Gidaspow (Chairman): Modeling of Two-Phase Flow, Proceedings of Round Table Discussion RT-1-2 at the Fifth International Heat Transfer Conference, Tokyo, September 3-7, 1974.
- 6) J.D.Ramshaw and J.A.Trapp: Characteristics, Stability and Short-Wavelength Phenomena in Two-Phase Flow Equation Systems, ANCR-1272 (1976), Aerojet

Nuclear Company.

- 7) R. C. Mecredy and L. J. Hamilton : The Effects of Nonequilibrium Heat, Mass and Momentum Transfer on Two-Phase Sound Speed., *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 15 (1972), pp. 61-72.
- 8) Owen C. Jones, JR. (Editor) : *Nuclear Reactor Safety Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, 1981.
- 9) J. A. Boure, A. E. Bergles and L. S. Tong : Review of Two-Phase Flow Instability, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 25 (1973), pp. 165-192.
- 10) S. Kakac and T. N. Veziroglu : A Review of Two-Phase Flow Instabilities, *Advances in Two-Phase Flow and Heat Transfer*, Vol. II, Martinus Nijhoff Publishers, 1983.
- 11) Bakker, O : Simultaneous Flow of Oil and Gas, *Oil Gas J.*, Vol. 53 (1954).
- 12) G. B. Wallis : *One-dimensional Two-phase Flow*, McGraw-Hill Book Company, 1969.
- 13) Mandhane, J. M., Gregory, G. A. and Aziz, K. : A Flow Pattern Map for Gas-Liquid Flow in Horizontal Pipes, *Int. J. Multiphase Flow*, 1-4 (1974).
- 14) B. N. Hanna, G. D. Raithby and W. B. Nicoll : Sound Speed and Critical Discharge in Two-Phase Flow, *Two-Phase Momentum, Heat and Mass Transfer in Chemical Process and Energy Engineering Systems*, Vol. I, pp. 33-46, Hemisphere Publishing Corporation, 1979.
- 15) J. R. Travis, F. H. Harlow and A. A. Amsden : Numerical Calculation of Two-Phase Flows, LA-5942-MS (1975), Los Alamos Scientific Laboratory.
- 16) S. Chandrasekar : *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, London : Oxford University Press, 1968, pp. 481-484.
- 17) S. Kakac, and M. Ishii (Editors) : *Advances in Two-Phase Flow and Heat Transfer*, Vol. II, Martinus Nijhoff Publishers, 1983.
- 18) Lahey, R. T., Jr., and Moody, F. J. : *The Thermal-Hydraulics of Boiling Water Reactor*, Chap. 7, American Nuclear Society, 1977.
- 19) G. B. Whitham F. R. S. : *Linear and Nonlinear Waves*, A Wiley-Interscience Publication, 1974.
- 20) J. J. Ginoux (Editor) : *Two-Phase Flows and Heat Transfer with Application to Nuclear Reactor Design Problems*, Chapt. 11, Hemisphere Publishing Corporation, 1978.
- 21) Benjamin, T. B. : Shearing Flow over a Wavy Boundary, *J. Fluid Mech.* 6 (1959), p. 161.
- 22) Cohen, L. S. and T. J. Hanratty : Generation of Waves in the Concurrent Flow of Air and a Liquid, *A. I. Ch. E. Journal* 11 (1965), p.