

回転するはりの過渡振動

天田 重庚*

Transient Vibrations of a Rotating Beam

By

Shigeyasu AMADA

Abstract

This paper presents the transient vibrations of a beam subjected to the variable rotations. Taking account of rotary inertia, the fundamental equations of motion for the rotating Timoshenko-beam are derived from the Hamilton's principle. They are simplified by assuming that the shear deformation and rotary inertia can be negligible.

The simplified equations become the same the ones for the Euler-Bernoulli's beam.

The natural frequencies ω can be represented by

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \phi \Omega^2$$

where ω_0 is the natural frequency for the non-rotating beam, Ω is the angular speed of the rotating beam and ϕ is called the Southwell coefficient depending on the geometries of the beam and the mode shape. The Southwell coefficient is calculated by the several methods which have been proposed so far.

Finally, the time-responses of the rotating Euler-Bernoulli beam are analyzed numerically when the beam is subjected to the impulsive-like rotations, which is given by

$$\Omega(t) = \Omega_0 [1 - \exp(-ct)]$$

The fundamental equation is transformed into the finite-difference equation. The dynamic responses of the beam are obtained for the various values of c in the above equation. The variations of the deflection at the beam-tip with respect to time are discussed. The amplitude and period of the cyclic deflection at the beam-tip are obtained for c .

1. ま え が き

蒸気、あるいはガスタービン等のブレードの設計には、ブレードの固有振動数を求める必要がある。ブレードは図-1の如く三次元的に複雑な形状をしているうえに、タービンの運転時には遠心力によって見かけの曲げ剛性が変化する。この様な状態でのブレードの固有振動数を厳密に求めることは困難である。一般に、解析を容易にするため図-2の様な数学モデルが使用されている¹⁾。i) ブレードが比較的長く、厚さが薄いとした片持はりによる一次元モデル、ii) 有限要素法の使用を前提とした板やシェルによる二次元モデル、iii)

アイソパラメトリック要素を使用した有限要素法による三次元モデル。現在までの研究は、これらのモデルを用いて固有振動数やモード形状を求める問題に限られている²⁾³⁾⁴⁾。しかし、タービンの起動や停止時、ブレードの折損事故時に生ずるような回転が急変する場合、ブレードの振動挙動は定常振動とは著しく異なることが予想される。これまで用いられた運動方程式は、いずれもこの回転変動の効果、すなわち角加速度の項が考慮されていない。⁵⁾⁶⁾⁷⁾⁸⁾⁹⁾

本報告は回転するブレードの過渡状態の挙動を明らかにするために一次元モデル、すなわちブレードを均質、等方性の一様断面の片持はりとし、これが変動回転を行う場合の曲げ振動の基礎式を導き、初期に静止状態にあったはりが時間と共にある一定回転まで指数関数的に増加する回転過程について数値解析を行い、

*機関開発部

原稿受付：昭和60年12月23日

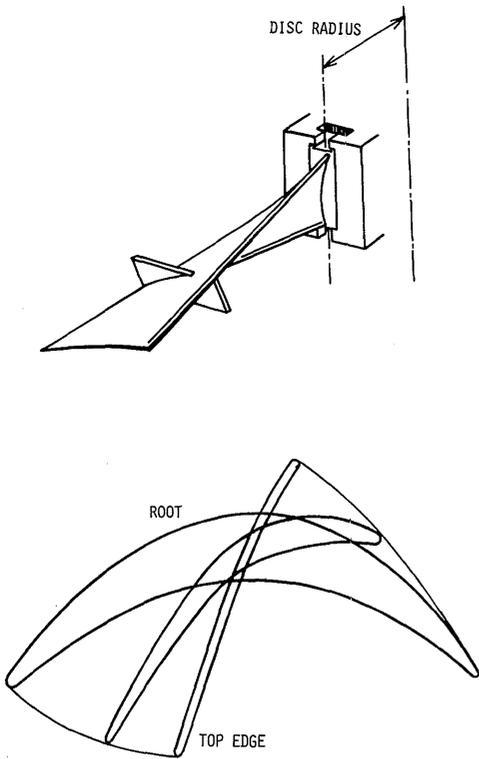


図-1 代表的なブレードの形状

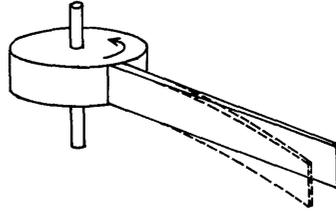
はりの時間応答を求める。最初に、Timoshenko 型のはりを対象にし、はりのせん断変形を考慮し、さらに回転慣性を含んだ Lagrangian を組立、Hamilton の原理を用いて運動方程式を導く。得られた式を Euler-Bernoulli 型のはりに適合するように簡略化すると共に、はりの軸方向とたわみ方向に働く加速度成分のうちで Coriolis の加速度を含む若干の項を無視して、たわみの基礎運動方程式を求める。次に、二・三の方法を用いて固有振動数を解析し、Southwell 係数を求める。最後に、基礎式を差分化し、はりが一定回転まで指数関数的に増加回転を行う場合を数値計算し、回転の増加割合をパラメータに採用して、はりのたわみの時間応答がどのように変化するかを求め、過渡挙動を解明する。

2. 基礎式の導入

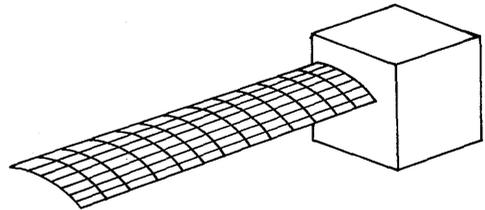
図-3に示すように、空間に固定された慣性標系 (X, Y) に対して角速度 $\Omega(t)$ にて回転している座標系 (x, y) を考える。変形前の一般点を P_0 、変形後のそれを P

(2)

1. One-Dimensional Model (Beam Model)



2. Two-Dimensional Model (Shell Model)



3. Three-Dimensional Model

3-dim. Finite Element Method

図-2 ブレードのモデル化

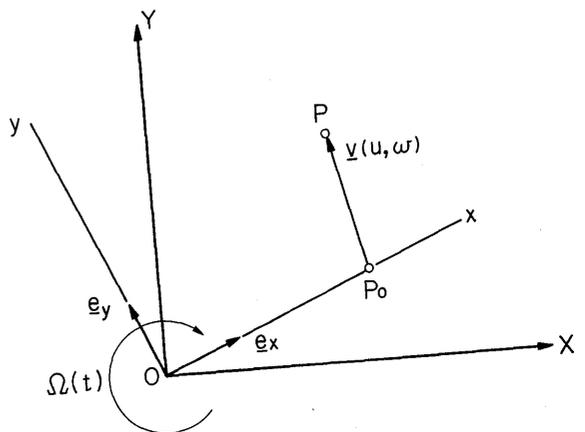


図-3 座標軸と位置の変化

とする。\$x, y\$ 方向の単位ベクトルを \$\underline{e}_x, \underline{e}_y\$ とすると、\$P\$ 点の位置ベクトル \$\underline{P}\$ は

$$\underline{P} = x\underline{e}_x + \underline{V} \quad (1)$$

ただし、\$\underline{V}\$ は変位ベクトルで次式にて与えられる。

$$\underline{V} = u\underline{e}_x + w\underline{e}_y \quad (2)$$

\$u\$ と \$w\$ は \$x\$ と \$y\$ 方向の変位を表わす。式(1)を時間にて微分すると、速度ベクトル \$\dot{\underline{P}}\$ が得られる¹⁰⁾。

$$\dot{\underline{P}} = \dot{\underline{V}} + \underline{\Omega} \times \underline{P} \quad (3)$$

ただし、\$\times\$ はベクトル積を表わし、\$x-y\$ 平面に直角方向の単位ベクトルを \$\underline{e}_z\$ とすれば \$\underline{\Omega}\$ と \$\dot{\underline{V}}\$ は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \underline{\Omega} &= \Omega \underline{e}_z \\ \dot{\underline{V}} &= \dot{u}\underline{e}_x + \dot{w}\underline{e}_y \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(3)を各軸方向の成分にて表わすと¹¹⁾¹²⁾

$$\dot{\underline{P}} = [\dot{u} - w\Omega] \underline{e}_x + [\dot{w} + (x+u)\Omega] \underline{e}_y$$

となる。

一様な片持りはりが、図-4の如く角速度 \$\Omega(t)\$ に回転している場合を考える。\$L\$ をはりの長さ、\$A\$ を断面積、\$I\$ を断面二次モーメント、\$I_p\$ をはりの単位長さあたりの中立軸に対する慣性質量モーメントとする。また、はりの材料のヤング率を \$E\$、密度を \$\rho\$ とする。基礎式を導くにあたって、次の仮定を置く。

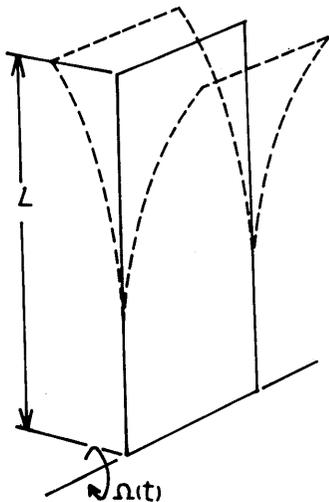


図-4 回転する片持りはり

i) 線形弾性論が成立。

ii) Timoshenko のはり理論が適用可能。

iii) 回転慣性の影響を考慮。

せん断力を無視した時のたわみ曲線の傾斜を \$\psi\$、同じ断面でのせん断角を \$\beta\$ (図-5参照) とすると、たわみ曲線の全傾斜は¹³⁾

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \psi + \beta \quad (6)$$

遠心力等によって生ずる軸力 \$P(x)\$ を考慮すると、曲げによるひずみエネルギー \$U_b\$ は

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L P(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (7)$$

せん断によるひずみエネルギーは仮定 ii) を考慮すれば次式にて与えられる。

$$U_s = \frac{1}{2} \int_0^L k\beta^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right)^2 dx \quad (8)$$

\$k\$ は、はりの断面内でのせん断応力分布に依存する係数で、矩形断面の場合にはせん断係数 \$G\$ と次の関係がある。

$$k = (2/3) AG \quad (9)$$

軸方向変形によるひずみエネルギーは

$$U_e = \frac{1}{2} \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \quad (10)$$

運動エネルギーは回転と移動より成る。移動による運動エネルギー \$K_T\$ と回転による運動エネルギー \$K_R\$ は次式にて与えられる。

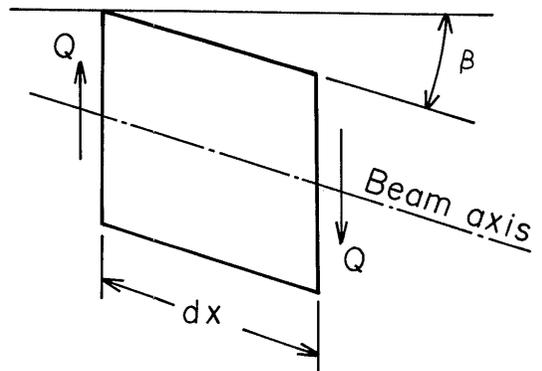


図-5 せん断力によるはりの変形

$$K_T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial t} - w \Omega \right]^2 + \left[\frac{\partial w}{\partial t} + (x+u) \Omega \right]^2 \right\} dx \quad (11)$$

中立軸と振動面に垂直な軸のまわりの単位長さあたりの回転による運動エネルギーは

$$K_R = \frac{1}{2} \int_0^L I_p \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 dx \quad (12)$$

保存力を仮定すると、外力によるポテンシャルエネルギーは

$$A_p = -M\psi \Big|_{x=L} + M\psi \Big|_{x=0} - Qw \Big|_{x=L} + Qw \Big|_{x=0} - Pu \Big|_{x=L} + Pu \Big|_{x=0} \quad (13)$$

ただし、Mは曲げモーメント、Qはせん断力、Pは軸力を表す。Lagrangian関数Lは次式にて与えられる。

$$L = (U - K + A_p) = (U_b + U_s + U_e) - (K_T + K_R) + A_p \quad (14)$$

任意に選んだ時間間隔を $t_0 \sim t_1$ とすれば Hamilton の原理により次式が成立する。

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} (U - K + A_p) dt \quad (15)$$

式(7), (8), (10), (11), (12), (13)を式(15)に代入すると、

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left\{ EI \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + P(x) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right)^2 + EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right. \\ & - \left. \left\{ \rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} - w \Omega \right)^2 + \rho A \left[\frac{\partial w}{\partial t} + (x+u) \Omega \right]^2 + I_p \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 \right\} \right\} dx dt \\ & + \delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ -M_L \psi_L + M_0 \psi_0 - Q_L w_L + Q_0 w_0 - P_L u_L + P_0 u_0 \right\} dt = 0 \quad (16) \end{aligned}$$

ただし、第2番目の積分において suffix L は $x=L$, O は $x=0$ における値を意味する。

式(16)の変分演算を実行すると、

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} \int_0^L \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho A \left(\frac{\partial w}{\partial t} - w \Omega \right) - \rho A \left[\frac{\partial w}{\partial t} + (x+u) \Omega \right] \right] \delta u \right. \\ & \left. + \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] - k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right\} \right\} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial}{\partial t} \left(I_p \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \delta \psi + \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right] + \rho A \left[\frac{\partial u}{\partial t} - w \Omega \right] \Omega \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho A \left[\frac{\partial w}{\partial t} + (x+u) \Omega \right] \right] \right\} \delta w > dx dt \\ & + \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} - M \right]_L \delta \psi_L - \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} - M \right]_O \delta \psi_O \right. \\ & + \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} + k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) - Q \right]_L \delta w_L \\ & - \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} + k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) - Q \right]_O \delta w_O \\ & + \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} - P(x) \right]_L \delta u_L - \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} - P(x) \right]_O \delta u_O \left. \right\} dt = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

最終的に運動方程式と境界条件は次のように求まる¹⁴⁾。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho A \left(\frac{\partial u}{\partial t} - w \Omega \right) \right] \\ & - \rho A \left[\frac{\partial w}{\partial t} + (x+u) \Omega \right] \Omega \quad (18) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(I_p \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \right] \\ & = \rho A \left[\frac{\partial u}{\partial t} - w \Omega \right] \Omega \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho A \left[\frac{\partial w}{\partial t} + (x+u) \Omega \right] \right\} \quad (20) \end{aligned}$$

$$P(x) = EA \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ あるいは } \delta u = 0 \text{ (} u \text{ を指定)} \quad \text{at } x=0, L \quad (21)$$

$$M = EI \frac{\partial \psi}{\partial x}, \text{ あるいは } \delta \psi = 0 \text{ (} \psi \text{ を指定)} \quad \text{at } x=0, L \quad (22)$$

$$Q = P(x) \frac{\partial w}{\partial x} + k \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right), \text{ あるいは } \delta w = 0 \text{ (} w \text{ を指定)} \quad \text{at } x=0, L \quad (23)$$

3. 基礎運動方程式の簡略化

式(18)は、はりの軸方向の運動方程式であり、式(19)と(20)はたわみ運動に関するものである。これらの式はお

互いに連結しており、このままでは取扱いが非常に困難であるので簡略化を行う。式(19), (20)より ψ を消去し、たわみ w によって運動方程式を表わすと次式のようになる。

$$\begin{aligned}
& EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (x+u) \frac{d\Omega}{dt} \right. \\
& + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - w\Omega^2 \left. \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\
& - \frac{EI}{k} \left\{ \rho A \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{d\Omega}{dt} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (x+u) \right. \right. \\
& + 2\Omega \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w\Omega^2) \left. \right] - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \left. \right\} \\
& = \frac{I\rho}{k} \left\{ k \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial x} \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \right. \\
& - \rho A \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[(x+u) \frac{d\Omega}{dt} \right] \\
& \left. + 2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (w\Omega^2) \right\} \quad (24)
\end{aligned}$$

式(18)にて微分演算を実行すると、

$$\begin{aligned}
EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \rho A \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - w \frac{d\Omega}{dt} - 2\Omega \frac{\partial w}{\partial t} \right. \\
& \left. - (x+u)\Omega^2 \right] \quad (25)
\end{aligned}$$

一方、式(24)において回転慣性とせん断変形の効果を見捨ると、次式のように簡単になる。

$$\begin{aligned}
& EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + (x+u) \frac{d\Omega}{dt} \right. \\
& \left. + 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} - w\Omega^2 \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[P(x) \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0 \quad (26)
\end{aligned}$$

式(25), (26)にて与えられる微分方程式系は、Euler-Bernoulli 仮定に基づいて導いた変動回転するはりの運動方程式に一致する。¹⁵⁾¹⁶⁾

一般に、軸方向の最小振動数は回転速度（ローターの角速度）の10倍以上も大きい⁹⁾ため、式(25)において遠心力の項以外は無視できる。変位と軸力との関係、

$$P(x) = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (27)$$

を用いると、式(25)は次のように簡略化される。

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho A \Omega^2 x \quad (28)$$

$P(x)$ に対する境界条件

$$P = 0 \quad \text{at } x = L \quad (29)$$

を用いて式(28)の解を求めると、

$$P = \frac{1}{2} \rho A \Omega^2 (L^2 - x^2) \quad (30)$$

一方、たわみの運動方程式(26)において、軸方向変位 u は微小であると仮定すれば、次のような加速度分に対する不等式が成立する。

$$\left| \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right|, \left| x \frac{d\Omega}{dt} \right| \gg \left| u \frac{d\Omega}{dt} \right|, \left| 2\Omega \frac{\partial u}{\partial t} \right| \quad (31)$$

式(31)を考慮すると、式(26)は

$$\begin{aligned}
& EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& = \rho A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + x \frac{d\Omega}{dt} - w\Omega^2 \right] \quad (32)
\end{aligned}$$

と書くことができる。回転数が非常に大きい場合を除いて、式(32)の右辺の $w\Omega^2$ の項は無視できる。式(30)を用いると、たわみ運動方程式は

$$\begin{aligned}
& EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{L^2 - x^2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\
& = -\rho A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + x \frac{d\Omega}{dt} \right] \quad (33)
\end{aligned}$$

境界条件は中心にて固定、他端は自由であるので、次式にて与えられる。

$$w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{at } x = L \quad (35)$$

はりは初期に停止状態にあるので、初期条件は次式のようになる。

$$w = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{at } t = 0 \quad (36)$$

4. 固有振動数解析

過渡振動を解析するにあたって固有振動数を求めておくことと便利である。たわみの基礎運動方程式(33)の右辺の第二項は強制外力項に相当するので、固有振動数を求める基礎式は次式のようになる。

$$\begin{aligned}
& EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{L^2 - x^2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\
& = -\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (37)
\end{aligned}$$

一般に、はりが回転している場合に固有振動数が増加することは良く知られた事実である。角速度 Ω で回転しているはりの固有円振動数 ω は次式のように表わされる。

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \phi \Omega^2 \quad (38)$$

ただし、 ω_0 は非回転時のはりの固有円振動数であり、 ϕ はSouthwell係数と呼ばれる。次(37)の左辺第2項のため、通常の解析の手順にて式(38)を求めることは困難であり、種々の方法が提案されている。

4.1 Schilhanslの方法¹⁸⁾

調和振動を仮定して、たわみ $w(x, t)$ を次式のように置く。

$$w(x, t) = X(x) \sin \omega t \quad (39)$$

式(39)を式(37)に代入して、次式のように変形する。

$$EI \frac{\partial^4 X}{\partial x^4} = \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{L^2 - x^2}{2} \frac{\partial X}{\partial x} \right] + \rho A \omega^2 X \quad (40)$$

反復スキームを採用するため、 n 回目の反復計算でのたわみを X_n 、 $(n+1)$ 回目のそれを X_{n+1} とすれば、

$$\frac{\partial^4 X_{n+1}}{\partial x^4} = \frac{\rho A}{EI} \left\{ \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{L^2 - x^2}{2} \frac{\partial X_n}{\partial x} \right] + \omega^2 X_n \right\} \quad (41)$$

第1次の固有振動のモード形状を境界条件(34)、(35)を考慮して、次式のように仮定する。

$$X_0 = x^2 - (2/3L)x^3 + (1/6L^2)x^4 \quad (42)$$

式(41)において $n=0$ と置き、式(42)を代入して積分を実行し、任意定数を条件(34)、(35)にて決定すると、次のような第1近似が求まる。

$$\begin{aligned} X_1 = & \frac{\rho A}{EI} \left\{ \Omega^2 \left[-\frac{13}{180} L^4 x^2 + \frac{1}{24} L^2 x^4 - \frac{1}{60} L x^5 \right. \right. \\ & - \frac{1}{180} x^6 + \frac{1}{210} \frac{x^7}{L} - \frac{1}{1,008} \frac{x^8}{L^2} \left. \right] + \omega^2 \left[-\frac{13}{180} L^4 x^2 \right. \\ & - \frac{1}{30} L^3 x^3 + \frac{1}{360} x^6 - \frac{1}{1,260} \frac{x^7}{L} \\ & \left. \left. + \frac{1}{10,080} \frac{x^8}{L^2} \right] \right\} \quad (43) \end{aligned}$$

たわみ X_0 と X_1 の最良の一致条件は

$$\int_0^L X_0 dx = \int_0^L X_1 dx \quad (44)$$

で与えられ、式(44)にたわみ(42)、(43)を代入して積分を実行すると、次式が得られる。

$$\omega^2 = \frac{1134}{91} \frac{EI}{\rho A L^4} + 1.173 \Omega^2 \quad (45)$$

したがって、曲げによる1次のたわみモードに対するSouthwell係数は

$$\phi = 1.173 \quad (46)$$

となる。

(6)

4.2 Ritzの方法¹⁸⁾

エネルギー法に基づいて固有振動数を求める。全運動エネルギーは次式にて与えられる。

$$T = \frac{\rho A}{2} \left\{ \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - x \Omega^2 \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right\} dx \quad (47)$$

一方、ポテンシャル・エネルギーは

$$V = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (48)$$

一次モードの形状関数を A_m して、たわみを次式のように仮定する。

$$w = A_m \sin \omega t \quad (49)$$

ただし、形状関数 A_m は境界条件(34)、(35)を考慮すると、次のようなポリノミアル関数を置くことができる。

$$A_m = A_1 [6(x/L)^2 - 4(x/L)^3 + (x/L)^4] \quad (50)$$

Lagrangian 関数 L は運動とポテンシャル・エネルギーの時間平均を用いると

$$\begin{aligned} L = & \frac{\rho A \omega}{2} \pi L \frac{104}{45} A_1^2 - \frac{\rho A \Omega^2}{2} \frac{\pi}{\omega} \frac{84}{315} L \\ & - \frac{EI}{2} \frac{\pi}{\omega L^3} \frac{144}{5} A_1^2 \quad (51) \end{aligned}$$

Ritzの方法により

$$\frac{\partial L}{\partial A_1} = 0 \quad (52)$$

を式(51)に適用すると次式が得られる。

$$\omega^2 = \frac{324}{26} \frac{EI}{\rho A L^4} + \frac{122}{104} \Omega^2 \quad (53)$$

それ故、 $\phi = 1.173$ となって、式(46)に一致する。

4.3 有限要素法の適用

長さ L 、巾 b の回転する板を三角形要素を用いて分割し、要素内でのたわみ関数を

$$\begin{aligned} w = & \alpha_1 + \alpha_2 x' + \alpha_3 y' + \alpha_4 x'^2 + \alpha_5 x' y' + \alpha_6 y'^2 \\ & + \alpha_7 x'^3 + \alpha_8 x'^2 y' + \alpha_9 y'^3, \quad (x', y' : \text{局所座標}, \\ & \alpha_1 \sim \alpha_9 : \text{定数}) \quad (54) \end{aligned}$$

と仮定してDokanishら¹⁹⁾は解析し、Southwell係数として

$$\phi = \begin{cases} 1.190 & , L/b = 1 \\ 1.187 & , L/b = 2 \\ 1.186 & , L/b = 3 \end{cases} \quad (55)$$

を得た。これらは式(46)で与えられたはりの場合の値と非常に近い。

Brownら²⁰⁾は $L \times b = 15 \times 5$ cm、厚さ0.25cmの平板

が回転する場合の Southwell 係数を NASTRAN による計算と NASA のスピン・リグを用いた実験により比較した。

$$\phi = \begin{cases} 2.21 & , \text{はり要素} \\ 2.18 & , \text{板要素} \\ 2.16 & , \text{実験} \end{cases} \quad (56)$$

Timoshenko はりの場合²¹⁾には Southwell 係数は大きな値となること有限要素法によって初めて明らかにされた。

$$\phi = 3.6118 \quad (57)$$

5. Euler-Bernoulli はりの過渡振動の数値解析¹⁵⁾¹⁶⁾²²⁾

はりの変形は Euler-Bernoulli 仮定に従うとし、回転慣性の影響を無視すると、図6の如く回転するはりのたわみの運動方程式は

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho A \Omega^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{L^2 - x^2}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ = -\rho A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + x \frac{d\Omega}{dt} \right] \end{aligned} \quad (58)$$

となる。変動回転過程として、ある一定回転まで指数関数的に上昇する場合を考える。

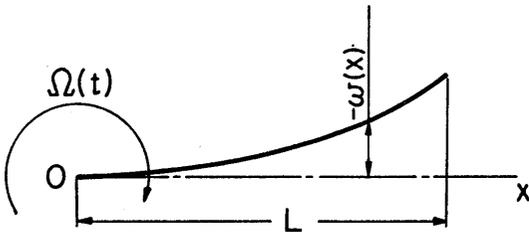


図-6 回転するはりのたわみ

$$\Omega(t) = \Omega_0 [1 - \exp(-ct)] \quad t > 0 \quad (59)$$

ただし、 Ω_0 (rad/s), c (s⁻¹) は定数である。境界条件は、はりの中心で固定されていて、他端は自由とすれば

$$\left. \begin{aligned} w = \partial w / \partial x = 0 & \quad \text{at } x = 0 \\ \partial^2 w / \partial x^2 = \partial^3 w / \partial x^3 = 0 & \quad \text{at } x = L \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

はりは初期に停止状態にあるので、初期条件は次のようになる。

$$w = \partial w / \partial t = 0 \quad \text{at } t = 0 \quad (61)$$

一般に、運動方程式(58)を条件(60), (61)の下で解析的に解くことは、軸力による見かけ上の剛性変化の影響項(式(58)の左辺第二項)により困難である。ここでは、座標軸と時間軸を離散化し、差分法により数値解析を行う。

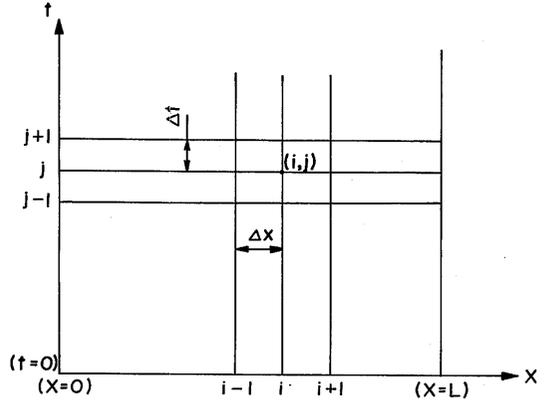


図-7 はりの長さや時間の分割

図-7に示すように横軸にはりの長さを、縦軸に回転開始直後からの時間を採り、長さについては微小長さ Δx にて全長 L を分割し、時間については微小間隔 Δt にて分割する。これに基づいて運動方程式(58)を時間については前進差分、長さについては中心差分を用いて差分方程式に変換する。 i を長さ方向に離散化した一般点、 j を時間軸の離散化した一般点とし、 (i, j) 点までのたわみ $w(i, j)$ が既知であるとすれば、 $(i, j+1)$ 点でのたわみ $w(i, j+1)$ は次式にて計算される。

$$\begin{aligned} w(i, j+1) = & -w(i, j-1) - C_5 [C_1 w(i+2, j) \\ & - C_2 w(i+1, j) + C_3 w(i, j) - C_4 w(i-1, j) \\ & + C_1 w(i-2, j)] \end{aligned} \quad (62)$$

ただし、係数 $C_1 \sim C_5$ は次のような形を有する。

$$\begin{aligned} C_1 = & \frac{EI}{\rho A} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^4} \\ C_2 = & 4 \frac{EI}{\rho A} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^4} + \frac{1}{2} [\Omega(j)]^2 \\ & \{L^2 - [x(i)]^2\} \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \\ & - \frac{1}{2} [\Omega(j)]^2 x(i) \frac{(\Delta t)^2}{\Delta x} \\ C_3 = & 6 \frac{EI}{\rho A} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^4} + [\Omega(j)]^2 L^2 \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned}
 & -[x(i)]^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 - 2 \\
 C_4 = & 4 \frac{EI}{\rho A} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^4} + \frac{1}{2} [\Omega(j)]^2 \{L^2 \\
 & - [x(i)]^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \\
 & + \frac{1}{2} [\Omega(j)]^2 x(i) \frac{(\Delta t)^2}{\Delta x} \\
 C_5 = & x(i) \dot{\Omega}(j) (\Delta t)^2
 \end{aligned}$$

はりの幾何学形状，機械的性質は次の値を用いる。

$$\begin{aligned}
 L &= 0.8m, \quad A = 0.15 \times 0.05m^2, \\
 I &= 1.5625 \times 10^{-6}m^4, \\
 E &= 196.1 GPa \quad (2.0 \times 10^6 kg/cm^2) \\
 \rho &= 7.8 \times 10^3 \quad kg/m^3
 \end{aligned}$$

変動回転過程(6)として，図-8に示すように一定回転は $\Omega_0 = 1047.2 rad/s (10^4 rpm)$ とし， $c(1/s)$ の値を種々に変えて数値計算を行った。刻み巾は双曲線型方程式に対する安定条件

$$\frac{EI}{\rho A} \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^4} \leq 1 \tag{64}$$

を満足するように選択した。

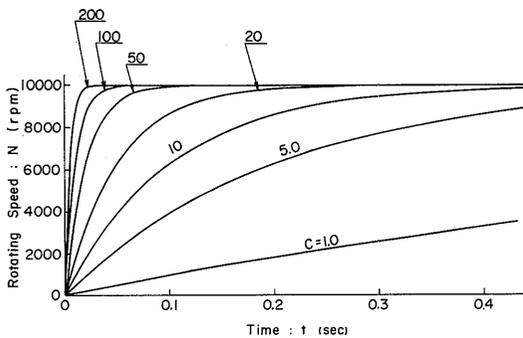


図-8 はりの変動回転過程

図-9は $c = 1.0 s^{-1}$ の場合，回転開始直後のはり先端のたわみ変動を示したものである。二点鎖線は回転数の増加を表す。点線間の距離はたわみ変動の振巾を表す。先端のたわみは回転開始と共に正弦状の変動を主に負の領域で行う。しかし，時間の経過と共に変動は徐々に正の側に移動する傾向が見られる。図-10は図-9に続いて生ずるはり先端のたわみ変動を示したもの

(8)

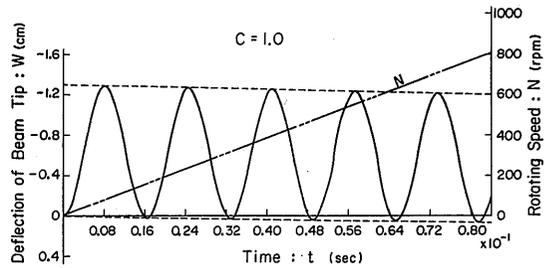


図-9 $C = 1.0 s^{-1}$ の場合のたわみ振動

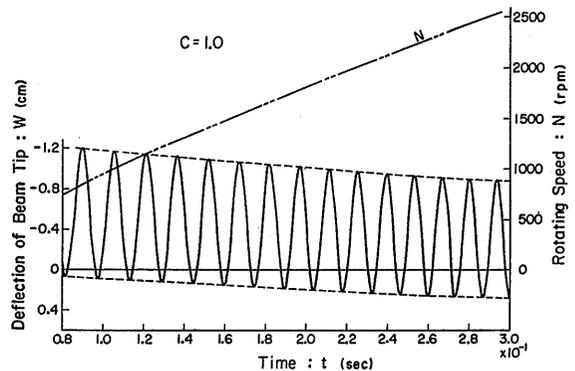


図-10 $C = 1.0 s^{-1}$ の場合のたわみ振動

である。周期変動の振巾と周期は，わずかながら時間経過と共に減少していることがわかる。これは，式(6)の減衰項に相当する第二項が，回転数の増加による軸力の増大を招く事によって増加する結果である。

図-11は $c = 1.0 s^{-1}$ の場合，三種類の異なる時刻近傍

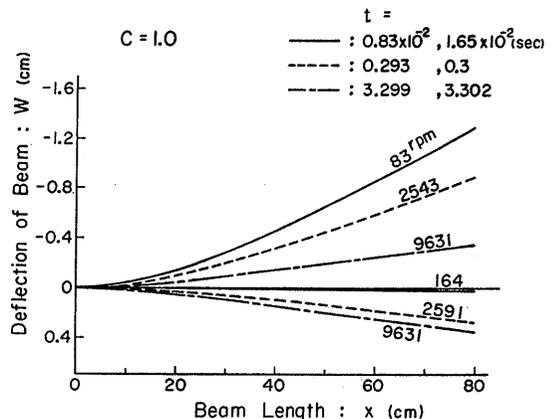


図-11 $C = 1.0 s^{-1}$ の場合のたわみ曲線の変化

におけるたわみ曲線を示す。実線は図-9に示すたわみ変動の第一周期目、点線は図9に示す変動の最後の周期において、先端のたわみが山と谷の位置に達する時のたわみ曲線である。一点鎖線は時間が十分に経過し、ほとんど一定回転に近い時刻でのたわみ曲線である。曲線上の数値はその時点でのはりの回転数である。一点鎖線の上側の曲線は $t=3.299s$ 、下側は $3.302s$ の時点のたわみ曲線であり、この経過時刻では回転数はほとんど変化せず、たわみは零軸を中心にして非回転はりの振動のように上下対称に変動している。

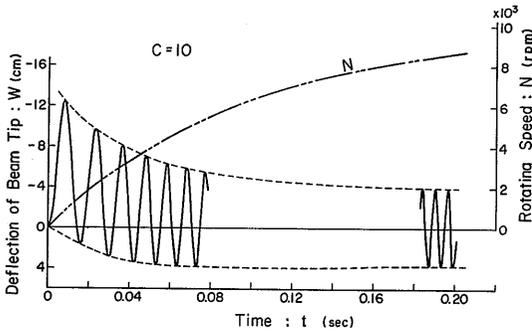


図-12 $C=10.0s^{-1}$ の場合のはり先端におけるたわみの時間応答

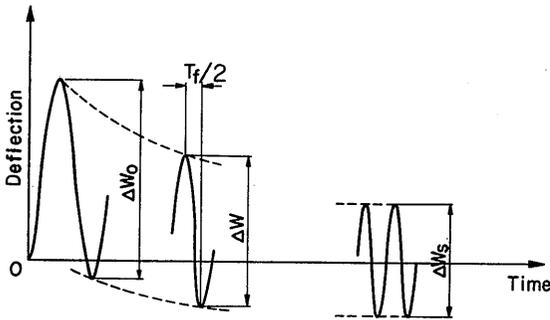


図-13 はり先端のたわみの代表的な時間応答

図-12は回転上昇の割合の係数 c を $10s^{-1}$ にした場合の、はり先端のたわみの時間変動を示す。 $c=1.0s^{-1}$ の場合に比較して急激に減少して零に近づく。振巾は初期に $13.8cm$ あったが、定常状態では $7.1cm$ に減少する。周期についても回転開始直後の場合と比較すると、見かけ上の剛性増加により短くなる。

はり先端のたわみの周期振動の振巾、周期に対する時間変動を調べるため、図-13に示すごとく、はり先端

の振動振巾を Δw 、特に回転開始直後の振巾を Δw_0 、ほぼ一定回転 ($10^4 rpm$) に達した時点にて定常振動と見なされる状態での振巾を Δw_s 、周期を T_f にて表す。角速度 Ω にて回転している様なはりの一次の固有円振動数は式(38)、(46)より

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 1.173\Omega^2 \tag{65}$$

で与えられ、非回転はりの固有円振動数 ω_0 は次式のよように表わせる²³⁾。

$$\omega_0 = \left(\frac{1.875}{L} \right)^2 \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \tag{66}$$

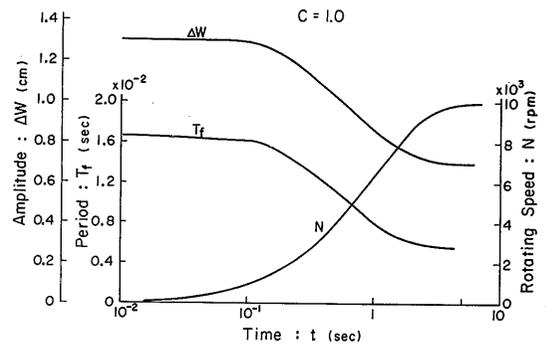


図-14 $C=1.0s^{-1}$ の場合の振巾と周期の時間変動

図14は図9、10にて示した $c=1.0s^{-1}$ の場合、はり先端のたわみ振動の振巾 Δw 、周期 T_f 、回転数 N の時間に対する変化を示したものである。横軸には回転開始直後からの経過時間の対数を採用している。振巾 Δw の値は初期に $1.304 cm$ であるが、ほぼ定常状態に達した時点では $0.707 cm$ と、初期の約 $1/1.8$ に減少する。一方、周期 T_f は回転開始直後に $1.65 \times 10^{-2} s$ 、定常状態では $0.56 \times 10^{-2} s$ となり、初期の約 $1/2.9$ に減少している。回転開始直後は回転数もそれほど高くないので、近似的に非回転はりで見なし得る。そこで、式(66)より周期 T_f を計算すると、 $T_f = 1.58 \times 10^{-2} s$ となり、図14の $1.65 \times 10^{-2} s$ と比較すると若干の短い値となる。一方、定常回転時の周期を式(66)より求めると、 $T_f = 0.523 \times 10^{-2} s$ となり、図14の値 $0.56 \times 10^{-2} s$ に比較してわずかに短い、計算誤差を考慮すれば近似的に一致している。

図-15は図12にて示した $c=10s^{-1}$ の場合のはり先端のたわみ振動における振巾 Δw 、周期 T_f 、回転数 N の時間に対する変化を示したものである。図14の $c=1.0s^{-1}$ の場合に比較して Δw 、 T_f は時間と共に急激に

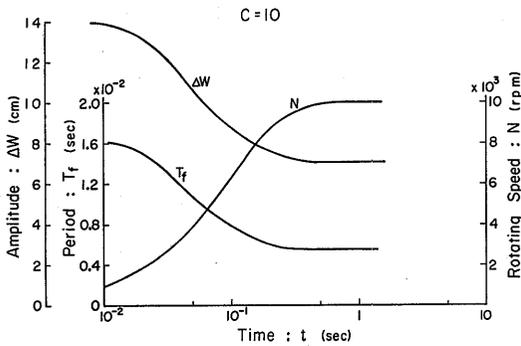


図-15 $C=10.0s^{-1}$ の場合の振巾と周期の時間変動

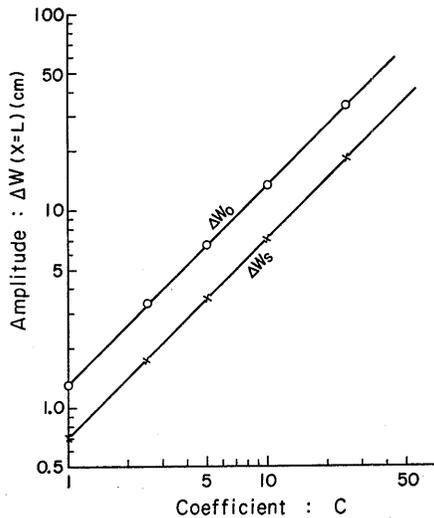


図-16 係数 C の振巾への影響

減少する。回転開始直後の振巾 Δw は $13.82cm$ と大きく、 $c=1.0s^{-1}$ の場合の10倍にも達する。 $t=0.5s$ でほぼ定常状態となり、 Δw は $7.06cm$ に減少する。周期 T_r は初期に、 $1.6 \times 10^{-2}s$ 、定常状態にて $0.56 \times 10^{-2}s$ となり、回転開始直後の T_r は式(60)から求めた値に近似的に一致する。

図-14, 15の結果より、はりの振動振巾は式(59)にて与えられる c の値、すなわち $d\Omega/dt$ に著しく依存することがわかる。図-16は縦軸に回転開始直後と定常回転状態での振巾 Δw_0 、 Δw_s 、横軸に回転上昇率を表すパラメータ c を採用して、両者の関係を描いたものである。図より、はり先端のたわみ振動の振巾 Δw_0 、 Δw_s と c との間は線形関係となることがわかり、それは近

(10)

似的に次式にて与えられる

$$\Delta w_0 = 1.382c \quad , \quad \Delta w_s = 0.706c \quad (67)$$

6. 結 論

回転するブレードの過渡状態の挙動を解明するための基礎的研究として、ブレードを一次元モデルである一様断面を有する片持はりに置き換え、これが変動回転する場合について検討を加えた。最初に、はり断面に働くせん断力による変形を考慮した Timoshenko 型のはりについて、回転慣性を考慮し、Hamilton の原理を用いて基礎方程式を導いた。次に、幾つかの仮定を導入することによって、Euler-Bernoulli 型のはりの方程式に簡略化した。

最後に、短い時間間隔で $10^4 rpm$ まで衝撃的に回転上昇するはりについて、基礎運動方程式を差分化して数値計算を行い、次の結果を得た。

- (1) 周期変動するはり先端のたわみの平均値は、時間と共に漸近的に零に近づく。この傾向は c の増加と共に著しくなる。
- (2) たわみ振動の振巾と周期は時間と共に減少し、 c が大きくなるにつれて、この減少は早くなる。
- (3) Southwell 係数 $\phi = 1.173$ を用いた式(65)による周期の計算値と比較して、本研究の結果は若干高めに出現しているが、計算誤差を考えれば近似的に一致すると見なしうる。
- (4) 式(59)における c と振巾との関係は式(67)のような線形関係となる。

はりの曲げ剛性 (EI) と遠心力 ($L\rho A\Omega^2$) との比、式(32)中の $w\Omega^2$ の影響、たわみ変動に及ぼす軸方向の振動の影響についてはさらに検討を加えたい。

7. 文 献

- 1) Leissa, A., "Vibrational Aspects of Rotating Turbomachinery Blades", Applied Mechanics Review, Vol.34 (1981), 629-635
- 2) Rao, J.S., "Natural Frequencies of Turbine Blading-Survey", Shock and Vibration Digest, Vol.5 (1973), 3-16
- 3) Rao, J.S., "Turbine Blading Excitation and Vibration", Shock and Vibration Digest, Vol. 9 (1973), 15-22
- 4) Rao, J.S., "Turbomachine Blade Vibration", Shock and Vibration Digest, Vol.12 (1980), 19-26

- 5) Bogdanoff, J. L. , "Influence of Secondary Inertia Terms on Natural Frequencies of Rotating Beams" , J. Applied Mechanics, Vol. 22 (1955), 587-591
 - 6) Boyce, W.E. and Handelman, G. H. , "Vibrations of Rotating Beams with Tip Mass", ZAMP, Vol.12 (1961), 369-392
 - 7) Whitman, A. M. and Abel, J. M. , "Asymptotic Theory of a Slender Rotating Beam with End Masses" , J. Applied Mechanics, Vol. 39 (1972), 569-576
 - 8) Likins, P. W. , "Mathematical Modeling of Spinning Elastic Bodies for Modal Analysis" , AIAA J. , Vol. 11, No. 9 (1973), 1251-1258
 - 9) Stafford, R. O. and Giurgiutiu, V. , "Semi-analytic Methods for Rotating Timoshenko Beams" , Int. J. Mechanical Science, Vol. 17 (1975), 719-727
 - 10) Greenwood, D. T. , "Principles of Dynamics" , Prentice-Hall (1965), 49
 - 11) 天田, "実回転円板の動的応力解析", 日本機械学会論文集 (A 編), 第49巻, 第448号 (昭58-12), 1540-1547
 - 12) Amada, S. , "Dynamic Stress Analysis of a Solid Rotating Disc" , Bulletin of The JSME, Vol. 27, No. 230 (1984), 1579-1584
 - 13) Fung, Y. C. , "Foundations of Solid Mechanics" , McGraw-Hill (1965), 315
 - 14) 天田, "変分法による変動回転するはりの運動方程式の導入", 第33回応用力学連合講演会, 講演論文抄録集 (昭58-12), 95-96
 - 15) 天田, "衝撃的な回転を受けるはりの動的応答", 日本機械学会論文集 (C 編), 第51巻, 第470号, (昭60-10), 2655-2658
 - 16) Amada, S. , "Dynamic Response of a Beam Subjected to Impulsive-like Rotations" , Bulletin of The JSME, Vol. 29, No. 252 (1986), in printing
 - 17) Schilhansl, M. J. , "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam" , J. of Applied Mechanics, Vol. 25 (1958), 28-30
 - 18) Rao, J. S. and Carnegie, W. , "Non-linear Vibrations of Rotating Cantilever Beams" , The Aeronautical J. of the Royal Aeronautical Society, Vol. 74 (1970), 161-165
 - 19) Dokanish, M. A. and Rawtani, S. , "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates" , Int. J. for Numerical Methods in Engineering Vol. 3 (1971), 233-248
 - 20) Brown, G. V. et al. , "Lewis Research Center Spin Rig and Its Use in Vibration Analysis of Rotating Systems" , NASA, TP-2304 (1984)
 - 21) Putter, S. and Hanor, H. , "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams" , J. Sound and Vibrations, Vol. 56, No. 2 (1978), 178-185
 - 22) 天田, "回転するはりの過渡振動", 第26回構造強度に関する講演会講演集, (昭59-7), 60-63
 - 23) Timoshenko, S. , "Vibrations in Engineering" , 2nd Edt. ,(1938), Van-Nostrand
- 付記：本報告は著者の発表論文, 14), 15), 16), 22) を骨格にして, 標題に沿ってまとめたものである。