電磁力による二次元翼型周りの流場制御に関する研究

日夏　宗彦*

Study on Control of Flow past a Wing Section Using Electromagnetic Force

By
Munehiko HINATSU

Summary

This paper presents a study to control a 2-D flow past a wing section by use of an electromagnetic force. In order to evaluate the appropriate strengths of applied electric and magnetic fields for the purpose of a flow control, CFD (computational fluid dynamics) technique is used in the present study. IAF (implicit approximate factorization) scheme is adopted here to solve MHD equations.

NACA0012 is used as a typical wing section. The Reynolds number is set to be 10000 and the angle of attack is 5 degree. A laminar separation of flow occurs at the leeside of the wing in the non-MHD condition. This separation vanishes when an appropriate electromagnetic field is applied around the wing. As a result, the increase of lift is obtained.

目　次

1．緒　言 ……15
2．支配方程式 ……16
　2．1　電磁流体方程式 ……16
　2．2　磁気レイノルズ数と誘導磁場について …16
　2．3　無次元化 ……17
3．近似因数分解法による定式化 ……17
4．翼形状周りの計算法 ……19
5．数値計算 ……21
　5．1　メッシュサイズと数値粘性項の評価 ……21
　5．2　翼形状周りの流場制御の計算 ……23
6．結論 ……28
　謝辞 ……28
　参考文献 ……28

* 推進性能部

原稿受付：昭和62年３月２日

1．緒言

ある物体が流体中を運動するとき，物体周りの流場を制御することによって，その流体力学的性能を向上させようとする研究は，古くから多くの研究者によって行われてきた。航空機翼にみられる多段フラップやボルテックスジェネレーターなどに関する研究がその代表的な例であろう。これらは主として付加物による流場制御法であった。

一方，電磁力を用いて流場制御を行う方法が新しい技術として考えられる。電磁力を船舶流体力学の分野に応用しようとする研究は，いわゆる電磁推進の研

究[1),2),3)]として行われてきた。しかしその結果は推進効率が非常に悪いことや，それに要求される磁場の強さが非常に大きいことなどから，実用化にはなお多くの困難があるものであった。

しかしながら，近年の低温工学や超伝導工学の著しい発展により，従来では非常に困難とされてきた強磁場の発生やその工学への利用が可能になりつつある。そこで，今一度電磁力の利用について見直すことにした。しかし電磁推進の推進効率は悪いので，ここではローカルな流場制御法としての電磁力の利用について考えた。

このような背景から，本報告では，現在各方面で盛んに用いられているCFD (Computational Fluid Dynamics)の技術を用いて，二次元翼型周りの流場における電磁場を利用した流場制御法を示し，その評価を行った。一般に電磁流体力学上の実験は非常にコストがかかり，またその実験も，例えば流場計測用のプローブによって電磁場が歪みを受けないようにせねばならないなど非常に難しい。CFDでは計算機によって支配方程式を直接数値的に解くため，どの程度の電磁場を印加すればよいのかを見積ったり，実現象の様子を推測することなどは，パラメタを変えてシミュレートするだけでよく非常に効率的でかつ有効な手段である。

ここで対象とした翼型は，数値計算上よく用いられるNACA0012をとりあげた。また流場のレイノルズ数は10^4の層流とした。

2．支配方程式

2．1 電磁流体方程式[4),5)]

今後，伝導性流体としては海水に限って考える。電磁場を利用して海水の流れを制御しようとするときの基礎方程式をここで考えることにする。電気伝導性の粘性流体が電磁場中を運動するとき，流体の運動は，ナビエーストークスの方程式とマックスウェルの方程式を同時に満足する。このとき，ナビエーストークスの方程式には電磁力による外力項が付加された形になっている。このようにして得られる厳密な形の方程式系は複雑であって，普通，電磁流体力学的近似[4)]とよばれる近似を行って扱い易くしている。それらは，

1） 物体の運動速度は光速に比べて非常に小さく，マックスウェルの方程式に現れる変位電流の項は伝導電流に比べて無視できる。(準定常電流の仮定)

2） 流体は電気的に中性で電離していない。このため，電荷移動による対流電流は伝導電流に比べて無視できる。

これらの仮定は，海水が電磁場中を運動するような状況では非常に良い近似になっている。このとき，支配方程式は電磁流体方程式 (MHD方程式) と呼ばれ，次のように書かれる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+(u\cdot\nabla)u=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta u+\frac{1}{\rho}(j\times B) \quad (1)$$

流体は非圧縮と考えられるので，連続の式として

$$\nabla\cdot u=0 \quad (2)$$

ここにuは速度，pは圧力，νは動粘性係数，ρは流体密度，jは電流密度，Bは磁束密度である。jとBは，電場をEとすると，以下の関係を満たす。

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t} \quad (3)$$

$$\nabla\times B=\mu j \quad (4)$$

$$\nabla\cdot B=0 \quad (5)$$

$$\nabla\cdot j=0 \quad (6)$$

(3)式から(6)式はそれぞれファラデーの法則，アンペールの法則，磁場のソレノイダル条件，それに電荷保存則を示している。jは，多くの場合オームの法則を満たす。

$$j=\sigma(E+u\times B) \quad (7)$$

ここで，μは透磁率，σは電気伝導度である。一般には，以上の式を連立させるとu，p，E，Bが解かれる。しかし，海水の電気伝導度が非常に小さいことを考慮すると，もう少し取扱いが簡単になるのでこれを次節で述べる。

2．2 磁気レイノルズ数と誘導磁場について[6)]

ここでは誘導磁場の大きさについて考える。誘導磁場は，外部から印加される電流によって誘導されるものと，印加磁場中を伝導流体が運動することにより生じる誘導電流が誘起するものの２つに分けられる。

印加磁場中を伝導流体が運動すると，流場には$\sigma(u\times B)$なる誘導電流が流れる。この電流は，

$$\nabla\times B=\mu\sigma u\times B \quad (8)$$

を満たすように誘導磁場を誘起する。いま誘導される磁場の大きさをB_i，印加磁場の大きさをB_0，代表速度をU，代表長さをLとすると(8)式から

$$\frac{B_i}{B_o}=\mu\sigma UL=R_m \quad (9)$$

のように表される。

一方，（4）式と（7）式を（3）式に代入すると，

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{B}=(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\frac{1}{\mu\sigma}\Delta\mathbf{B} \tag{10}$$

が得られる。(10)式は誘導方程式と呼ばれ，粘性流体力学における渦度方程式と同様の形をしている。この類推から，$1/(\mu\sigma)$ は磁気粘性率と呼ばれ，このことから（9）式で定義したR_mは磁気レイノルズ数と呼ばれている。磁気レイノルズ数は（9）式から明らかなように誘導磁場と印加磁場の比を表している。海水における$1/(\mu\sigma)$ は 2×10^5程度[5]であって，その磁気レイノルズ数のオーダーは$O(10^{-5})$ 程度となる。これは海水の電気抵抗が非常に大きいことに基づくもので，これより海水が磁場中を運動するときに生じる誘導磁場は，印加磁場に比べて無視できる。

つぎに印加電場による電流が作る誘導磁場の大きさについて考える。（4）式により誘導磁場の大きさは，

$$\nabla\times\mathbf{B}\simeq\mu\sigma\mathbf{E}\simeq E_o\times10^{-5} \tag{11}$$

となり，数千$volt/m$程度の印加電場をかけても誘導磁場は10^{-2} $tesla$（$1\ tesla=10^4 Gauss$）程度と見積られる。従って，印加電場による誘導磁場も無視できると考えてよいであろう。以上の考察から本研究では，誘導磁場の影響は全て無視することにする。このとき定常問題では磁場は静磁場として扱うことができるので，磁場は既知数となり，数値計算上非常に有利になる。

印加磁場を作る電流（コイルに流す電流など）は，流体中には存在しないものと考えているので，磁場分布は（4），（5）式から明らかなようにラプラスの式を満たす。すなわち，磁場分布を求めることは，ポテンシャル問題を解くことと同じになる。ここでは磁荷を適当に分布させて磁場分布の計算を行った。さらに物体と流体の境界で磁場の屈折を考えると磁場分布の計算が非常に面倒になるので，本論では簡単のために，流れの中に置かれている物体の透磁率は流体のそれと等しいと仮定した。この仮定は例えば，磁石をおおう翼表面部分をFRPなどの非磁性体で作成すれば，十分成立つもので実用的にも問題ないと思われる。

2．3　無次元化

2．2で述べた様に磁場については既知数として扱える。また特に二次元問題について考えると，電場もあらかじめ与えることが出来る。このとき，解くべき支配方程式は

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\mathbf{u}+\frac{\sigma}{\rho}(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} \tag{12}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{13}$$

であり，未知数は$\mathbf{u}$，pである。(12)式からわかるように，電磁力$(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}$の項は流速と磁場が直交するとき最大になり，しかもその方向は流速の方向と逆になっている。すなわち，流場は磁場の存在によって抑制されるようになる。

これらを次ぎに示す無次元変数で無次元化する。

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}^*U,\ p=p^*\rho U^2,\ \mathbf{r}=\mathbf{r}^*L,$$
$$\mathbf{B}=\mathbf{B}^*B_o,\ t=t^*L/U,\ \mathbf{E}=\mathbf{E}^*UB_o \tag{14}$$

＊は無次元値を表す。このとき，(12)，(13)式はそれぞれ

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}=-\nabla p+\frac{1}{R_e}\Delta\mathbf{u}+\frac{H_a{}^2}{R_e}(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} \tag{15}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u}=0 \tag{16}$$

となる。但し簡単のため，＊は省略した。R_e，H_aはそれぞれ，

$$R_e=UL/\nu \tag{17}$$

$$H_a=\sqrt{\sigma/\rho\nu}\,LB_o \tag{18}$$

で定義されるレイノルズ数とハルトマン数である。ハルトマン数は無次元磁場強さを示すもので，電磁力と粘性力の比の平方根に等しい。

(15)，(16)式を適当な境界条件のもとで解けば流場に関する情報が得られる。

3．近似因数分解法による定式化[7]

本研究では，数値解析スキームとして，主として航空の分野で開発され，よく用いられているIAF法（*Implicit Approximate Factorization*；近似因数分解法）[7),8)]を用いた。このスキームでは，各未知数に対してそれぞれ時間微分項が必要なため，連続の式(13)式はこのままでは扱えない。そこで(13)式を次のように表して解くことにする。

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}=-\nabla p+\frac{1}{R_e}\Delta\mathbf{u}+\frac{H_a{}^2}{R_e}(\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B})\times B \tag{19}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\beta(\nabla\cdot\mathbf{u})=0 \tag{20}$$

解が定常になれば，(20)式の$\partial p/\partial t$は0となって，連続の式は満たされる。(19)，(20)式をベクトル表示する

と，

$$q_t+\mathsf{L}q_x+\mathsf{M}q_y=\mathsf{H}(q_{xx}+q_{yy})+\mathsf{S}q+\mathsf{C} \qquad (21)$$

ここに$q=[u,\ v,\ p]^{\mathrm{T}}$で，$u$，$v$はそれぞれ$x$方向，$y$方向の速度成分を表す。また係数マトリックスはそれぞれ，

$$\mathsf{L}=\begin{pmatrix} u & 0 & 1 \\ 0 & u & 0 \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathsf{M}=\begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & 1 \\ 0 & \beta & 0 \end{pmatrix},\ \mathsf{H}=\begin{pmatrix} 1/R_e & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{S}=\frac{H_a{}^2}{R_e}\begin{pmatrix} -B_y{}^2 & B_xB_y & 0 \\ B_xB_y & -B_x{}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathsf{C}=\frac{H_a{}^2}{R_e}\begin{pmatrix} -E_zB_y \\ E_zB_x \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (22)$$

となる。

次に，物体適合座標系を導入して(21)式を変形する。物体適合座標を

$$\xi=\xi(x,\ y),\quad \eta=\eta(x,\ y) \qquad (23)$$

とすると，x，yに関する微分演算は

$$\begin{aligned}
&\partial_x=a\partial_\xi+b\partial_\eta \\
&\partial_y=c\partial_\xi+d\partial_\eta \qquad (24) \\
&\partial_{xx}=a^2\partial_{\xi\xi}+2ab\partial_{\xi\eta}+b^2\partial_{\eta\eta}+(aa_\xi+ba_\eta)\partial_\xi \\
&\qquad +(ab_\xi+bb_\eta)\partial_\eta \\
&\partial_{yy}=c^2\partial_{\xi\xi}+2cd\partial_{\xi\eta}+d^2\partial_{\eta\eta}+(cc_\xi+dc_\eta)\partial_\xi \\
&\qquad +(cd_\xi+dd_\eta)\partial_\eta \\
&a=Jy_\eta,\ b=-Jy_\xi,\ c=-Jx_\eta,\ d=Jx_\xi, \\
&J=1/(x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi)
\end{aligned}$$

のように変形される。(24)式を(21)式に適用すると，(21)式は

$$\begin{aligned}
&q_t+\mathsf{A}q_\xi+\mathsf{B}q_\eta=\mathsf{H}(\hat{a}q_{\xi\xi}+\hat{b}q_{\xi\eta}+\hat{c}q_{\eta\eta}+\hat{d}q_\xi+\hat{e}q_\eta) \\
&-\omega_\xi q_{\xi\xi\xi\xi}-\omega_\eta q_{\eta\eta\eta\eta}+\mathsf{S}q+\mathsf{C}. \qquad (25)
\end{aligned}$$

ただし，数値安定性を確保するために，4階の数値粘性項を(25)式右辺に人工的に陰的に付加している[9]。また各係数は，

$$\begin{aligned}
&\mathsf{A}=a\mathsf{L}+c\mathsf{M},\quad \mathsf{B}=b\mathsf{L}+d\mathsf{M} \\
&\hat{a}=a^2+c^2,\quad \hat{b}=2(ab+cd),\quad \hat{c}=b^2+d^2 \qquad (26) \\
&\hat{d}=aa_\xi+ba_\eta+cc_\xi+dc_\eta,\quad \hat{e}=ab_\xi+bb_\eta+cd_\xi+dd_\eta
\end{aligned}$$

である。

時間微分はパデの差分表示式を用いて，

$$q_t=\frac{1}{\Delta t}\ \frac{\Delta}{1+\Delta}q^n,\quad q^{t=n+1}=q^{t=n}+\Delta q^{t=n} \qquad (27)$$

とオイラーの陰解法で差分する。このとき，時間微分の打ち切り誤差は$O(\Delta t^2)$ である。(27)式を(25)式に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\Delta q^n+\Delta t\{\Delta(\mathsf{A}q_\xi)^n+\Delta(\mathsf{B}q_\eta)^n-\hat{a}\Delta(\mathsf{H}q_{\xi\xi})^n \\
&-\hat{b}\Delta(\mathsf{H}q_{\xi\eta})^n-\hat{c}\Delta(\mathsf{H}q_{\eta\eta})^n-\hat{d}\Delta(\mathsf{H}q_\xi)^n \\
&-\hat{e}\Delta(\mathsf{H}q_\eta)^n-\Delta(\mathsf{S}q)^n+\omega_\xi\Delta(q_{\xi\xi\xi\xi})^n \\
&+\omega_\eta\Delta(q_{\eta\eta\eta\eta})^n\}=-\Delta t\{\mathsf{A}q_\xi{}^n+\mathsf{B}q_\eta{}^n \\
&-\mathsf{H}(\hat{a}q^n{}_{\xi\xi}+\hat{b}q^n{}_{\xi\eta}+\hat{c}q^n{}_{\eta\eta}+\hat{d}q^n{}_\xi+\hat{e}q^n{}_\eta)-\mathsf{S}q^n \\
&+\omega_\xi q^n{}_{\xi\xi\xi\xi}+\omega_\eta q^n{}_{\eta\eta\eta\eta}-\mathsf{C}\}. \qquad (28)
\end{aligned}$$

(28)式には非線形項があるので，これを次のように局所的に線形化する。

$$\begin{aligned}
&\Delta(\mathsf{A}q_\xi)^n\fallingdotseq\Delta\mathsf{A}\cdot q_\xi{}^n+\mathsf{A}\cdot\Delta q_\xi{}^n=\hat{\mathsf{A}}\cdot\Delta q^n \\
&+\mathsf{A}\cdot\Delta q_\xi{}^n \\
&\Delta(\mathsf{B}q_\eta)^n\fallingdotseq\Delta\mathsf{B}\cdot q_\eta{}^n+\mathsf{B}\cdot\Delta q_\eta{}^n=\hat{\mathsf{B}}\cdot\Delta q^n \\
&+\mathsf{B}\cdot\Delta q_\eta{}^n \qquad (29)
\end{aligned}$$

ただし，

$$\hat{\mathsf{A}}=\begin{pmatrix} au_\xi & cu_\xi & 0 \\ av_\xi & cv_\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{\mathsf{B}}=\begin{pmatrix} bu_\eta & du_\eta & 0 \\ bv_\eta & dv_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (30)$$

これより，(28)式は

$$\begin{aligned}
&\{1+\Delta t(-\mathsf{S}+\hat{\mathsf{A}}+\mathsf{A}\frac{\partial}{\partial\xi}-\mathsf{H}\hat{d}\frac{\partial}{\partial\xi}-\mathsf{H}\hat{a}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \\
&+\omega_\xi\frac{\partial^4}{\partial\xi^4})+\Delta t(\hat{\mathsf{B}}+\mathsf{B}\frac{\partial}{\partial\eta}-\mathsf{H}\hat{e}\frac{\partial}{\partial\eta}-\mathsf{H}\hat{c}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \\
&+\omega_\eta\frac{\partial^4}{\partial\eta^4})\}\cdot\Delta q^n=-\Delta t\{\mathsf{A}q_\xi{}^n+\mathsf{B}q_\eta{}^n \\
&-\mathsf{H}(\hat{a}q^n{}_{\xi\xi}+\hat{b}q^n{}_{\xi\eta}+\hat{c}q^n{}_{\eta\eta}+\hat{d}q^n{}_\xi+\hat{e}q^n{}_\eta) \\
&-\mathsf{S}q^n+\omega_\xi q^n{}_{\xi\xi\xi\xi}+\omega_\eta q^n{}_{\eta\eta\eta\eta}-\mathsf{C}\} \\
&+\Delta t\mathsf{H}\hat{b}(\Delta q)^{n-1}{}_{\xi\eta} \qquad (31)
\end{aligned}$$

のようになる。ただし，(31)式右辺最終項は陽的に扱った。次に左辺を近似的に因数分解する。すなわち，

$$\begin{aligned}
&\{1+\Delta t(-\mathsf{S}+\hat{\mathsf{A}}+\mathsf{A}\frac{\partial}{\partial\xi}-\mathsf{H}\hat{d}\frac{\partial}{\partial\xi}-\mathsf{H}\hat{a}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \\
&+\omega_\xi\frac{\partial^4}{\partial\xi^4})\}\{1+\Delta t(\hat{\mathsf{B}}+\mathsf{B}\frac{\partial}{\partial\eta}-\mathsf{H}\hat{e}\frac{\partial}{\partial\eta}-\mathsf{H}\hat{c}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \\
&+\omega_\eta\frac{\partial^4}{\partial\eta^4})\}\cdot\Delta q^n=-\Delta t\{\mathsf{A}q_\xi{}^n+\mathsf{B}q_\eta{}^n \\
&-\mathsf{H}(\hat{a}q^n{}_{\xi\xi}+\hat{b}q^n{}_{\xi\eta}+cq^n{}_{\eta\eta}+\hat{d}q^n{}_\xi+\hat{e}q^n{}_\eta) \\
&-\mathsf{S}q^n+\omega_\xi q^n{}_{\xi\xi\xi\xi}+\omega_\eta q^n{}_{\eta\eta\eta\eta}-\mathsf{C}\} \\
&+\Delta t\mathsf{H}\hat{b}(\Delta q)^{n-1}{}_{\xi\eta} \qquad (32)
\end{aligned}$$

のように書く。ここで，近似因数分解することによる誤差項は$O(\Delta t^2)$であって，時間に関してオイラー差分したときの誤差のオーダーと等しい。(32)式の左辺は，ξのみの微分演算子とηのみの微分演算子の積であるので次のように書くことができる。

$$[X]\cdot[Y](\Delta q)=RHS \tag{33}$$

ここに，演算子$[X]$，$[Y]$および右辺のRHSは，それぞれ

$$\begin{aligned}[X]=&\{1+\Delta t(-\mathbf{S}+\hat{\mathbf{A}}+\mathbf{A}\frac{\partial}{\partial\xi}-\mathbf{H}\hat{d}\frac{\partial}{\partial\xi}\\&-\mathbf{H}\hat{a}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\omega_\xi\frac{\partial^4}{\partial\xi^4})\}\\[Y]=&\{1+\Delta t(\hat{\mathbf{B}}+\mathbf{B}\frac{\partial}{\partial\eta}-\mathbf{H}\hat{e}\frac{\partial}{\partial\eta}-\mathbf{H}\hat{c}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\\&+\omega_\eta\frac{\partial^4}{\partial\eta^4})\}\\RHS=&-\Delta t\{\mathbf{A}q_\xi{}^n+\mathbf{B}q_\eta{}^n-\mathbf{H}(\hat{a}q^n{}_{\xi\xi}+\hat{b}q^n{}_{\xi\eta}\\&+\hat{d}q^n{}_\xi+\hat{e}q^n{}_\eta)-\mathbf{S}q^n+\omega_\xi q^n{}_{\xi\xi\xi\xi}+\omega_\eta q^n{}_{\eta\eta\eta\eta}\\&-C\}+\Delta t\mathbf{H}\hat{b}(\Delta q)^{n-1}{}_{\xi\eta}\end{aligned}\tag{34}$$

のように表される。(33)は*ADI* (*Alternating Direction Implicit*) 法のようにして

$$\begin{aligned}&[X]\Delta q^*=RHS\\&[Y]\Delta q=\Delta q^*\end{aligned}\tag{35}$$

と分けて解くことができる。

つぎに，(35)式を数値的に解くために，空間微分を次の5点の中心差分に置き換える[9]。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\xi}=\frac{1}{12}(E^{-2}{}_\xi-8E^{-1}{}_\xi+8E^{+1}{}_\xi-E^{+2}{}_\xi)\\&\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}=\frac{1}{12}(-E^{-2}{}_\xi+16E^{-1}{}_\xi-30E^0{}_\xi+16E^{+1}{}_\xi\\&\quad-E^{+2}{}_\xi)\\&\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}=(E^{-2}{}_\xi-4E^{-1}{}_\xi+6E^0{}_\xi-4E^{+1}{}_\xi+E^{+2}{}_\xi).\end{aligned}\tag{36}$$

これを(34)式に適用するとξ*-sweep*，η*-sweep*として，それぞれ

$\underline{\xi\text{-}sweep}$

$$\begin{aligned}&\mathbf{J}_{ij}\Delta q^*{}_{i-2,j}+\mathbf{K}_{ij}\Delta q^*{}_{i-1,j}+\mathbf{L}_{ij}\Delta q^*{}_{ij}\\&+\mathbf{M}_{ij}\Delta q^*{}_{i+1,j}+\mathbf{N}_{ij}\Delta q^*{}_{i+2,j}=f_{ij}\\&\mathbf{J}_{ij}=\frac{1}{12}[\mathbf{A}+\mathbf{H}(\hat{a}-\hat{d})+12\omega_\xi I]\cdot\Delta t\\&\mathbf{K}_{ij}=-\frac{2}{3}[\mathbf{A}+\mathbf{H}(2\hat{a}-\hat{d})+6\omega_\xi I]\cdot\Delta t\\&\mathbf{L}_{ij}=I+[-\mathbf{S}+\hat{\mathbf{A}}+\frac{5}{2}\mathbf{H}\hat{a}+6\omega_\xi I]\cdot\Delta t\\&\mathbf{M}_{ij}=\frac{2}{3}[\mathbf{A}-\mathbf{H}(2\hat{a}+\hat{d})-6\omega_\xi I]\cdot\Delta t\\&\mathbf{N}_{ij}=-\frac{1}{12}[\mathbf{A}-\mathbf{H}(\hat{a}+\hat{d})-12\omega_\xi I]\cdot\Delta t\end{aligned}\tag{37}$$

(I : *the identity matrix*)

$$\begin{aligned}f_{ij}=&-\Delta t\{\mathbf{A}q_\xi{}^n+\mathbf{B}q_\eta{}^n-\mathbf{H}(\hat{a}q^n{}_{\xi\xi}\\&+\hat{b}q^n{}_{\xi\eta}+\hat{c}q^n{}_{\eta\eta}+\hat{d}q^n{}_\xi+\hat{e}q^n{}_\eta)-\mathbf{S}q^n\\&+\omega_\xi q^n{}_{\eta\eta\eta\eta}-\mathbf{C}\}+\Delta t\mathbf{H}\hat{b}(\Delta q)^{n-1}{}_{\xi\eta}\end{aligned}$$

$\underline{\eta\text{-}sweep}$

$$\begin{aligned}&\mathbf{J}_{ij}\Delta q_{i,j-2}+\mathbf{K}_{ij}\Delta q_{i,j-1}+\mathbf{L}_{ij}\Delta q_{i,j}+\mathbf{M}_{ij}\Delta q_{i,j+1}\\&+\mathbf{N}_{ij}\Delta q_{i,j+2}=\Delta q^*{}_{ij}\\&\mathbf{J}_{ij}=\frac{1}{12}[\mathbf{B}+\mathbf{H}(\hat{c}-\hat{e})+12\omega_\eta I]\cdot\Delta t\\&\mathbf{K}_{ij}=-\frac{2}{3}[\mathbf{B}+\mathbf{H}(2\hat{c}-\hat{e})+6\omega_\eta I]\cdot\Delta t\\&\mathbf{L}_{ij}=I+[\hat{\mathbf{B}}+\frac{5}{2}\mathbf{H}\hat{c}+6\omega_\eta I]\cdot\Delta t\\&\mathbf{M}_{ij}=\frac{2}{3}[\mathbf{B}-\mathbf{H}(2\hat{c}+\hat{e})-6\omega_\eta I]\cdot\Delta t\\&\mathbf{N}_{ij}=-\frac{1}{12}[\mathbf{B}-\mathbf{H}(\hat{c}+\hat{e})-12\omega_\eta I]\cdot\Delta t\end{aligned}\tag{38}$$

が得られる。これらの式の左辺は適当な境界条件を用いると，5重ブロック対角列になるのでこれを反転させると$\Delta q^{t=n}$が解かれる。これを$q^{t=n}$に加えると，一タイムステップ進んだ$q^{t=n+1}$が得られる。この計算を任意の初期値から出発して解が収束するまで繰り返す。今回の収束判定条件は$\Delta q(max)/q(max)=10^{-5}$とした。

4．翼形状周りの計算法

ここでは，翼型周りの流れをMHD効果によって流場制御するときの数値計算法について述べる。翼型周りの流れを計算するためのグリッドトポロジーはC-gridが最適であり，ここでもC-gridを用いて計算を行った。C-gridを用いたときの計算法を以下に述べる。

グリッドと座標系はFig. 1に示すようになる。これを計算領域に変換すると，Fig. 2のようになる。翼表面は$\eta=1$，$i_s\leqq\xi\leqq i_e$に対応する。計算領域は，次のようになる。

$\eta=1$　のとき　$3\leqq\xi\leqq i_s-1$

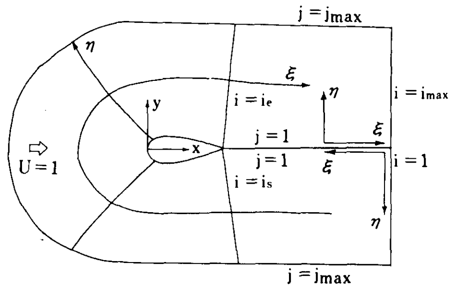


Fig. 1 Coordinate of grid system

$2 \leqq \eta \leqq j_{max}-2$ のとき $3 \leqq \xi \leqq i_{max}-2$

$3 \leqq \xi \leqq i_s-1$ のとき $1 \leqq \eta \leqq j_{max}-2$ …(a)

$i_s \leqq \xi \leqq i_e$ のとき $2 \leqq \eta \leqq j_{max}-2$

$i_e+1 \leqq \xi \leqq i_{max}-2$ のとき $2 \leqq \eta \leqq j_{max}-2$,

ただし(a)と接続して考える。

今回の計算では，$i_s=21$，$i_e=101$，$i_{max}=121$，$j_{max}=35$ とした。

境界条件は，支配方程式に4階の数値粘性項を陰的に加えているために，次のようにする。

$\xi=1$，$\xi=i_{max}$ で $\partial/\partial\xi=\partial^2/\partial\xi^2=0$，

$\eta=j_{max}$ で $u=1$，$v=0$，$p=0$，$\partial/\partial\eta=0$

$\eta=1$，$i_s \leqq \xi \leqq i_e$ で $u=0$，$\partial p/\partial\eta=0$，$\partial^2/\partial\eta^2=0$

である。すなわち$\xi=1$，$\xi=i_{max}$で示される後流部分では物理量が直線的に変化するという条件，$\eta=j_{max}$で示される外側境界では一様流の条件と勾配0の条件，さらに$\eta=1$，$i_s \leqq \xi \leqq i_e$で示される翼表面では，流速に関しては，粘着条件及び，翼表面法線方向の変化が直線的であること，圧力に関しては，法線方向の圧力勾配が0でかつ直線的に変化することである。

ただし，物体表面上では物体より内側に仮想のメッシュ点を設けて（Fig.2参照），直線的に外挿した。

計算の手順は，

（1） $\eta=1$のとき$3 \leqq \xi \leqq i_s-1$までξ-*sweep*を行い，

（2） $2 \leqq \eta \leqq j_{max}-2$ では $3 \leqq \xi \leqq i_{max}-2$ まで ξ-*sweep* を行う。なお，$\eta=1$，$i_e+1 \leqq \xi \leqq i_{max}-2$の計算点は$\eta=1=3 \leqq \xi \leqq i_s-1$のそれと同一であるから*sweep*する必要はない。

つぎにη-*sweep*であるが，

（3） $3 \leqq \xi \leqq i_s-2$のときは，点（ξ_i, $\eta(j_{max}-2)$）から点（ξ_d, η_1）までと点（$\xi(i_{max}+1-i)$, η_2）から点（$\xi(i_{max}+1-i)$, $\eta(j_{max}-2)$）までとを連結して一回の*sweep*にまとめる。

（4） $i_s \leqq \xi \leqq i_e$のときは，$2 \leqq \eta \leqq j_{max}-2$まで*sweep*する。

ここで注意することは，η-*sweep*における手順(3)のときでる。このときの係数行列は次に示すように

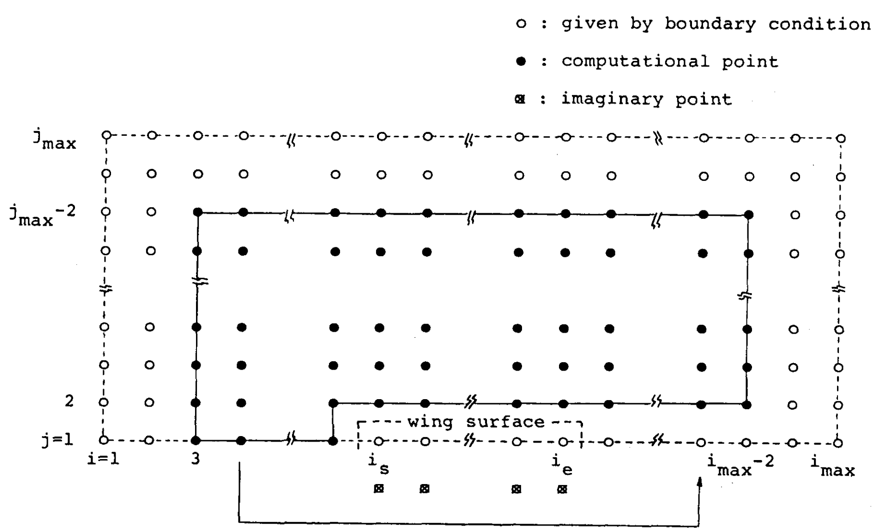


Fig. 2 Numerical domain

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & & \\ N_{i,j} & M_{i,j} & L_{i,j} & K_{i,j} & J_{i,j} & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \\ & & J_{i',j} & K_{i',j} & L_{i',j} & M_{i',j} & N_{i',j} & & \\ & & & & & & \ddots & & \end{bmatrix} \tag{39}$$

ここで $i'=i_{max}+1-i$

となり，$(\xi_1,\ \eta(j_{max}-2))$ から $(\xi_i,\ \eta_1)$ までの係数行列の要素の順序を入れ換えることである。

磁場分布は翼後半部（$i_s+2\leqq\xi\leqq i_s+22$，かつ$i_e-22\leqq\xi\leqq i_e-2$）に，翼表面から法線方向内側に最小メッシュ間隔だけ折り返したところに，背面にN極，正面にS極の磁荷を分布させて求めた。こうして得られた磁場分布をFig. 3に示す。図からわかるように，磁場の強さは翼から離れると急速に減少するため，磁場のみによる電磁力$(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}$を利用することは考えず，電場と磁場の積で得られる電磁力を専ら利用することで流場制御を行うように考えた。このため計算では，磁場の強さは一状態のみとした。また電場は，電磁力が流れを下流に引き込む方向に作用するように，負の電場を$72\leqq\xi\leqq107$，$1\leqq\eta\leqq20$で囲まれる翼後部背面上方にのみ一様に印加した。

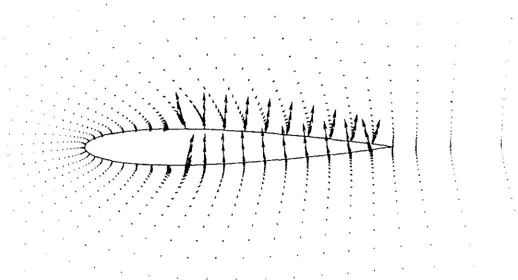


Fig. 3 Distribution of magnetic flux density around wing section (NACA0012)

5．数値計算

5．1 メッシュサイズと数値粘性項の評価

高いレイノルズ数の流れを精度良く計算するためには物体近傍でメッシュを細かくする必要がある。また，この章で用いるスキームには4階の数値粘性項がインプリシットに入っている。このために，解のメッシュの大きさに対する依存性や，数値粘性項の大きさが解に与える影響等を予め調べておく必要がある。低いレイノルズ数流れでは，厳密解が存在する流れを計算することでスキームの精度チェックが行えるが，レイノルズ数が高い流れでは解析的に厳密解を得ることは難しく，精度チェックには数値実験的手法に頼らざるを得ないと思われる。

まず数値解のメッシュサイズの依存性を調べるために，Fig. 4，Fig. 5に示す最小メッシュ間隔が0.005（メッシュAと呼ぶ）と0.002（メッシュBと呼ぶ）の2つのタイプのメッシュを取り上げて，計算結果の比較を行った。これらのメッシュはC-gridで，ξ方向に121分割，η方向に35分割してある。また，迎角は0度であ

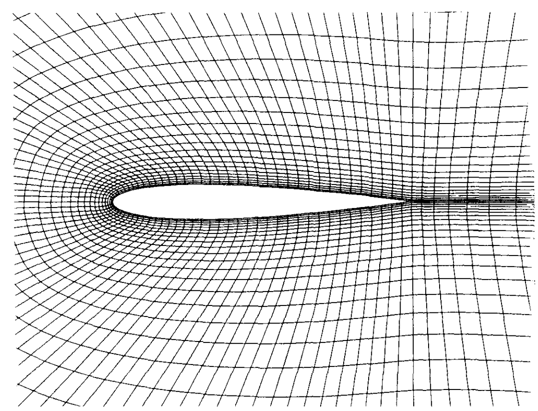


Fig. 4 Mesh division around wing section (NACA0012), attack angle = 0 deg., minimum space = 0.005, (Mesh A)

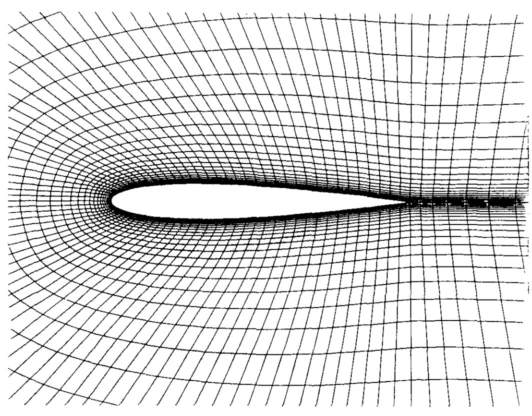
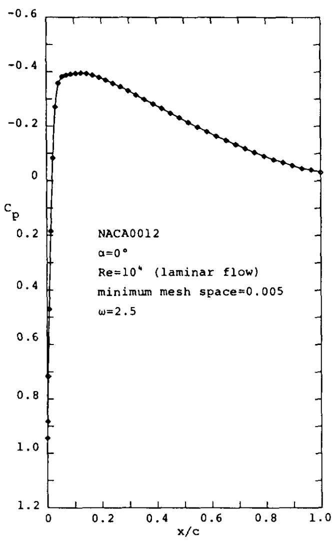


Fig. 5 Mesh division around wing section (NACA0012), attack angle = 0 deg., minimum space = 0.002, (Mesh B)

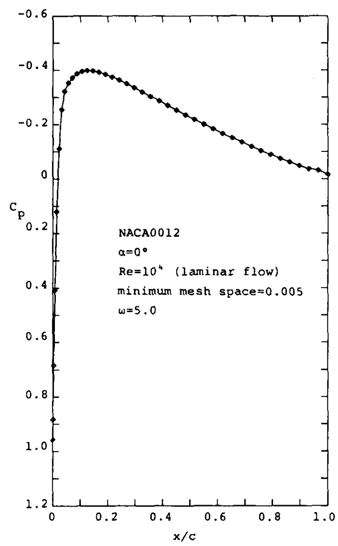
る。η座標は物体近傍で等比数列的に密集させてある。次に数値粘性項の解に対する影響を調べるために，それぞれのメッシュに対して，数値粘性項の係数$\omega \equiv \omega_x = \omega_y$を2.5と5の2通りを与えて，その時の解の様子も調べた。計算では$R_e = 10^4$とした。

Fig. 6(a)，(b)にメッシュAを用いたときの，$\omega = 2.5$と$\omega = 5$のときの翼表面の圧力分布を示す。ωの変化によって圧力のピークの部分に少し変化が見られる。$\omega = 5$の方がピークがなだらかになっており解が拡散的になっている。Fig. 7(a)，(b)は，Fig. 6(a)，(b)と同じ状態における渦度分布である。図で，実線は渦度が正(反時計周り方向)，破線は負を示す。翼後半部の渦度の符号を詳しく見ると剝離が捉えられていないのがわかる。

一方，メッシュBを用いたときの，$\omega = 2.5$と5のときの翼表面圧力分布をFig. 8(a)，(b)に示す。このメッシュでは，ωが異なっていても圧力分布は変化していない。Fig. 9(a)，(b)にこのときの渦度分布を示すが，これを見ると翼後半部で流れが剝がれているのが認められる。剝離点の位置は，$\omega = 2.5$のとき前縁より87%弦長後方，$\omega = 5.0$で89%弦長後方でωの変化に対して2%の差があった。NACA0012翼の迎角0度，$R_e = 10^4$の場合は，Mehta[10]，児玉[11]によって行われている。両者の結果は共に前縁から84%弦長後方の位置に剝離点が計算されている。Fig. 10には，メッシュBを用いたときの翼表面圧力結果とMehtaおよび児玉の計算結果

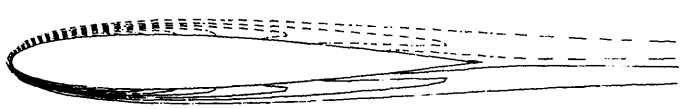


(a) case in $\omega = 2.5$

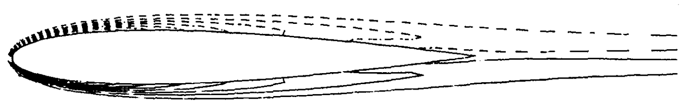


(b) case in $\omega = 5.0$

Fig. 6 Pressure distribution along wing surface (NACA0012), $Re = 10^4$, Mesh A

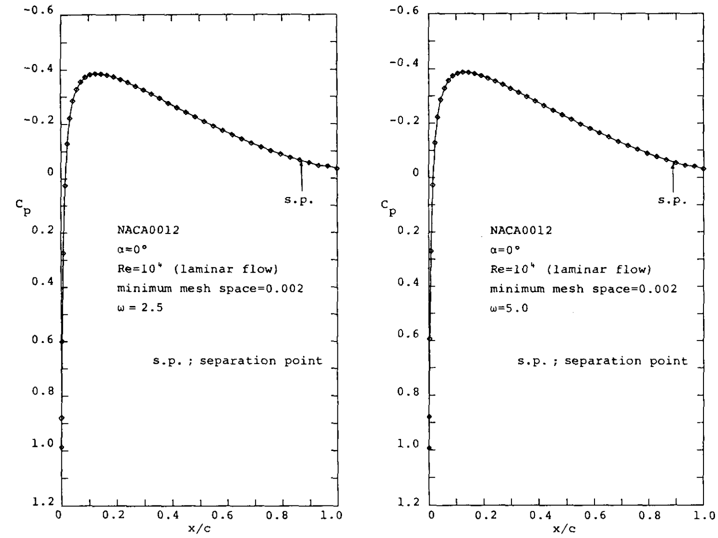


(a) case in $\omega = 2.5$



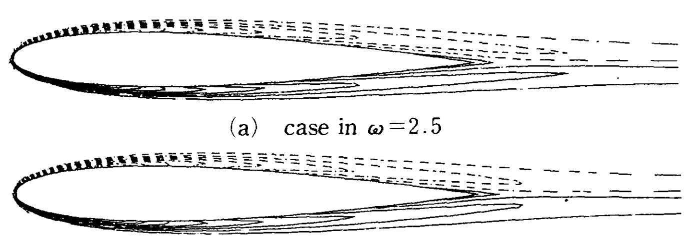
(b) case in $\omega = 5.0$

Fig. 7 Vorticity distribution around wing section (NACA0012), $Re = 10^4$, Mesh A



(a) case in $\omega=2.5$　　(b) case in $\omega=5.0$

Fig. 8 Pressure distribution along wing surface (NACA0012), $Re=10^4$, Mesh B



(a) case in $\omega=2.5$

(b) case in $\omega=5.0$

Fig. 9 Vorticity distribution around wing section (NACA0012), $Re=10^4$, Mesh B

とを比較した。なお，児玉の計算は今回の計算よりさらに細かいメッシュを用いて計算している。今回得られた結果は彼らの結果に比べて，前縁淀み点の圧力が小さいこと，剥離点の位置が3－5％後縁寄りであることが認められる。Mehtaと児玉の計算では剥離点の位置が一致しており，十分正しい解を与えていると考えてよいであろう。今回の計算結果とMehtaらの結果の差は，やはりメッシュサイズの大きさによるものと思われる。しかしながら，全体的に見ると，今回の結果と他の結果は非常によく一致している。

メッシュAとメッシュBでの渦度分布を比較すると，メッシュBの方が渦度流出領域が大きい。つまり粗いメッシュを用いて流場を計算すると，見かけ上レイノルズ数が小さくなることが理解される。メッシュサイズを変化させることで生じる渦度流出域の差と同じメッシュを用いてωを変化させたときに生ずる渦度流出域の差を比較すると，メッシュサイズを変化させたときの方がその差は大きい。即ちメッシュを粗くする方がωを大きく取るよりもより流場が拡散的になることがわかる。

以上から，$R_e=10^4$の場合では，メッシュAは不適切であると言える。そこでこれ以降の計算では，メッシュBと同じ最小メッシュ間隔を有するメッシュを用いて計算することにする。ωは計算の効率化を考えると大きい方が望ましいので，$\omega=5$とした。

5．2　翼形状周りの流場制御の計算

翼型周りの流場を電磁力によって制御する例として，ここでは，磁場強さは$H_a=12.64$で一定とし，(14)式で表される無次元電場の強さを$E=0$から$E=-200$まで変化させて数値計算を行った。計算に用いたグリッ

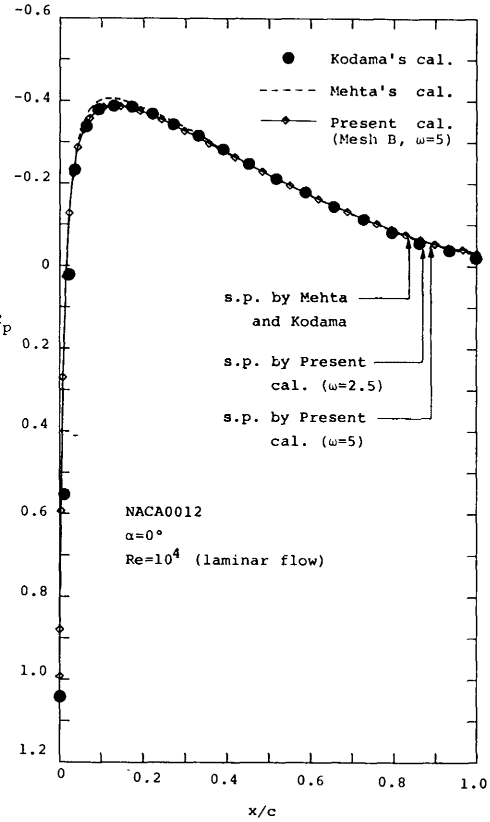


Fig. 10 Comparison of pressure distribution along wing surface among the present result (Mesh B, $\omega=5.0$) and another researcher's results

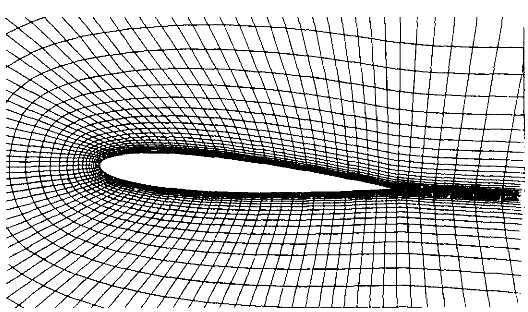


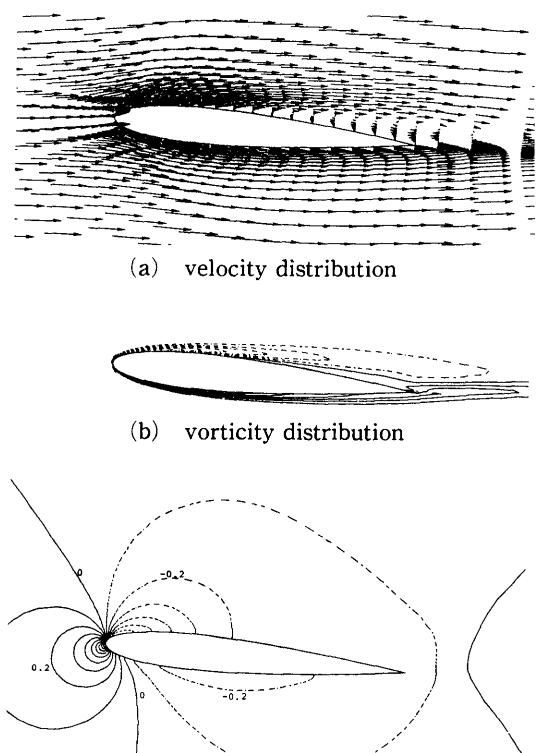
Fig. 11 Mesh division around wing section (NACA0012),attack angle=5 deg., minimum space=0.002

ドをFig. 11に示す。迎角は5度である。

Fig. 12(a), (b), (c)には，電磁場のないときの翼型周りの流速分布，渦度分布，圧力分布を示す。翼背面で大きな層流剥離を起こしているのがわかる。翼前縁付近の淀み点で圧力係数は1.0で，下流に行くに従って急速に圧力が下がり翼両面で負圧域になっている。

次に電磁場を印加したときの結果について述べる。まず，磁場のみ印加したときの結果であるが，このときは電磁場を印加しない通常の粘性流れと解が一致した。これは4章で述べたように，翼表面から離れると磁場の強さが急激に減少するため，電磁力項$(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}\times H_a^2/R_e$が流場にほとんど影響を与えていないからである。

電場を印加したときの結果を以下に示す。Fig. 13(a), (b), (c)からFig. 16(a), (b), (c)には，それぞれ$H_a=12.64$で，Eが$-50, -100, -150, -200$のと

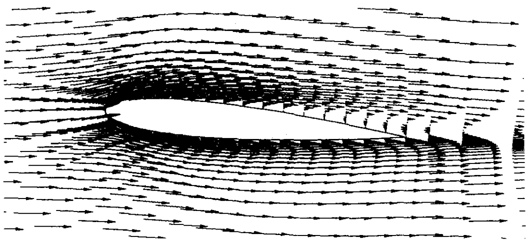


(a) velocity distribution

(b) vorticity distribution

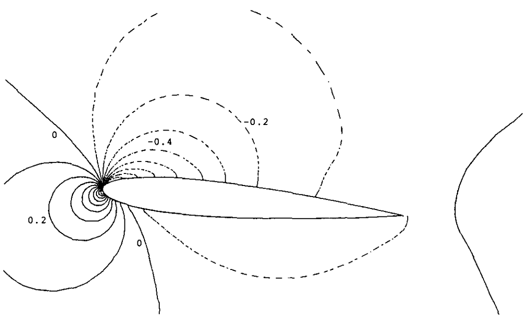
(c) pressure distribution

Fig. 12 Computational result of flow field around wing section(NACA0012) $Re=10^4$ (Non-MHD condition)



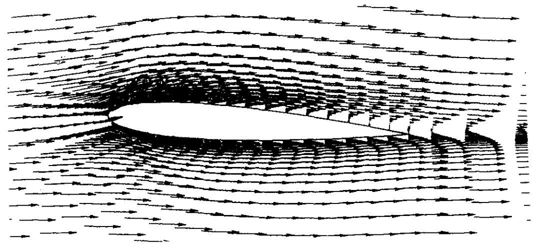
(a) velocity distribution

(b) vorticity distribution

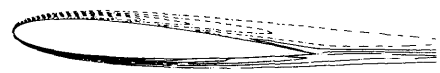


(c) pressure distribution

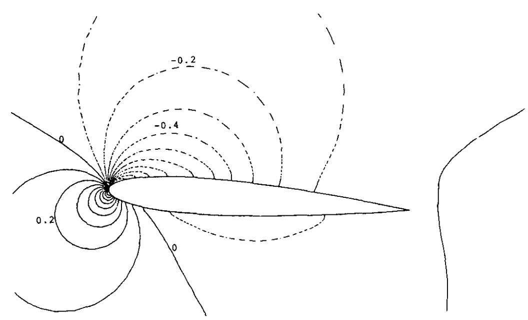
Fig. 13 Computational result of flow field around wing section (NACA0012) $Re = 10^4$ ($Ha = 12.64, E = -50$)



(a) velocity distribution



(b) vorticity distribution

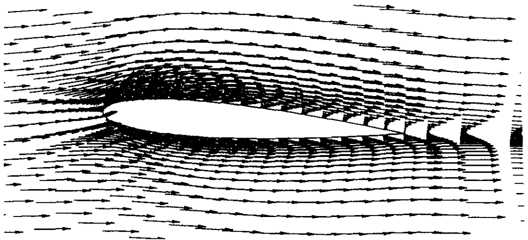


(c) pressure distribution

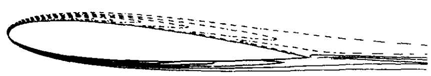
Fig. 14 Computational result of flow field around wing section (NACA0012) $Re = 10^4$ ($Ha = 12.64, E = -100$)

きの流速分布，渦度分布それに圧力分布を示した。電場を印加していくと，剥離域は少しずつ小さくなって行き，$E = -150$以下では流れの剥離は消滅し，翼に沿って流れている。圧力分布をみると電場を印加するに従って翼背面の圧力が低くなっている。また翼正面側でも負圧の大きさが小さくなっているのがわかる。これらを分かり易くするため翼面圧力分布として示したのがFig. 17(a)，(b)，(c)，(d)，(e)で，順に$E = 0, -50, -100, -150, -200$で書いてある。電場を印加するにつれて翼背面負圧のピークが大きくなっているのがわかる。また翼後端の圧力が電場の印加とともに負から正へと変化し，それに伴って翼正面の圧力が正の方向に大きくなっている様子がよくわかる。ただ負圧のピークが大きくなるため，キャビテーションとの問題が関わって来ることが予想される。なお，翼背面圧力分布で屈曲がみられるが，これは電磁力の分布がこの付近から急激に大きくなっている為である。これを知るため電磁力分布を*Fig.* 18に示した。電磁力が翼背面後部で流体を下流に流そうと作用しているのがよくわかる。この図は$E = -100$の場合であるが，$\mathbf{E} \times \mathbf{B}$の項が$(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$に比べて圧倒的に大きいために$E$が他の値の場合も分布の様子はほとんど変わらない。

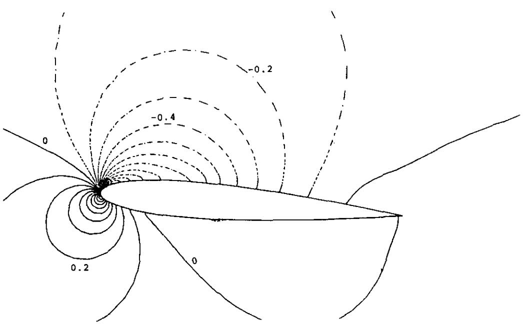
翼表面の圧力と摩擦応力を積分して揚力と抗力を求めた。また電磁力を空間積分して電磁力の反作用による揚力と抗力も計算した。揚抗力はすべて$\rho U^2 L$（L=翼弦長）で無次元化した。まず始めに揚力と電場の関係を述べる。*Fig.* 19に電場の強さと揚力及びその成分の関係を示した。図からわかるように，揚力はほとんどが表面圧力積分による成分で決まっている。電磁力の反作用による揚力成分は電場強さと比例関係にある。電磁力の流場への影響は$(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$項が支配的で，$(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$の項はほとんど影響を及ぼしていないことが



(a) velocity distribution

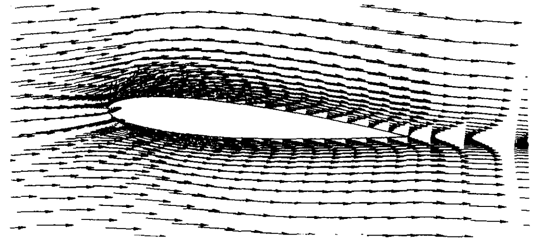


(b) vorticity distribution



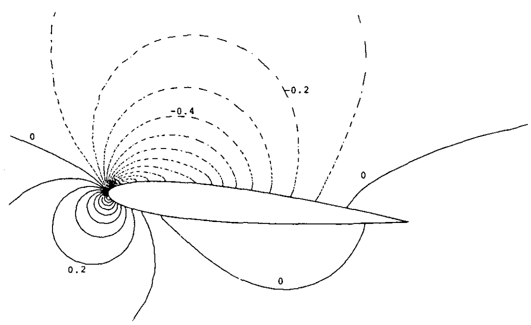
(c) pressure distribution

Fig. 15 Computational result of flow field around wing section (NACA0012) $Re=10^4$ ($Ha=12.64, E=-150$)



(a) velocity distribution

(b) vorticity distribution

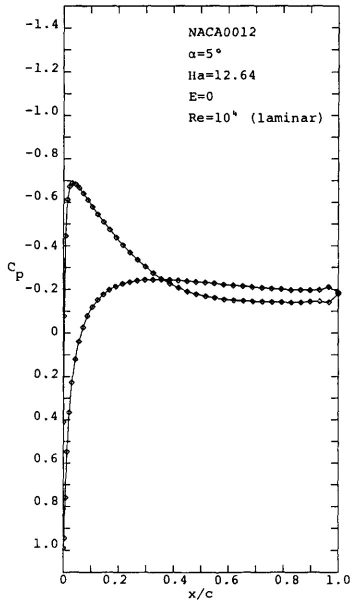


(c) pressure distribution

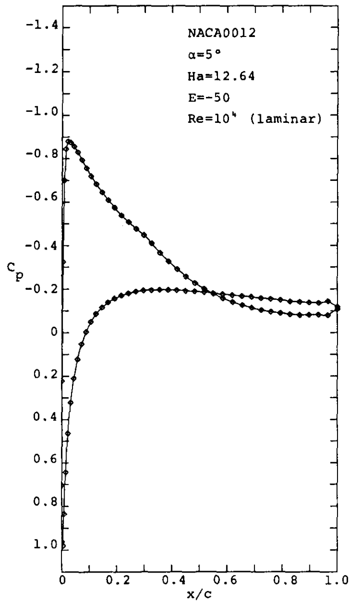
Fig. 16 Computational result of flow field around wing section (NACA0012), $Re=10^4$ ($Ha=12.64, E=-200$)

ここでも理解される。電場の強さが0から−100付近までは，電場の強さと揚力の関係は線型的である。しかし電場の強さをさらにあげて行くと，この線型関係は崩れ非線型的関係に変化している。一方，このときの流場をみると，速度場では流れの剥離が消えている。このことから，以上の結果は次のように解釈することができると思われる。即ち，電場の強さが小さいときは，印加された電磁力の影響が主として*MHD*方程式の圧力勾配項に影響を及ぼし，対流項には余り影響を与えない。このとき流場では剥離域は小さくなってはきているものの完全に消滅していない。ここでは電場強さと揚力は線型的な関係にある。それがさらに大きな電場を印加することで，電磁力項が方程式の非線型項である対流項に大きく影響を及ぼし始め，流場にも流れの剥離が消えるような大きな変化がみられるようになる。この結果，電場強さと揚力が非線型的になるものと思われる。

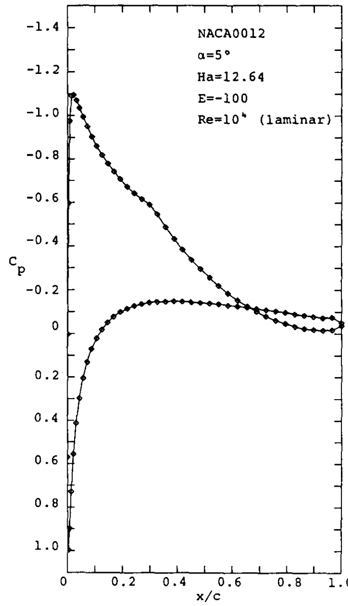
次に抗力と電場強さについて考察する。*Fig.* 20に抗力及びその成分と電場強さの関係を示した。摩擦応力に起因する抗力成分と表面圧力による抗力成分はほぼ同じ大きさであるが，電場強さが大きくなるにつれて，摩擦応力による成分が圧力による成分よりも勝ってくる。これは速度分布図を見れば明らかなように，翼背面での剥離の消滅や，剥離消滅後も流体が電磁力によって下流側に流されていることによる。しかし，これら両者の和はほとんど変わらずほぼ一定である。一方，電磁力の反作用による抵抗は負となっており推力として作用しているのがわかる。この電磁力成分による推力も，揚力と同様電場強さと比例関係にある。この推力の大きさは$E=-200$では摩擦応力による抗力成分を上回っており，全抗力を結果的に減少させる重要な働きをしている。



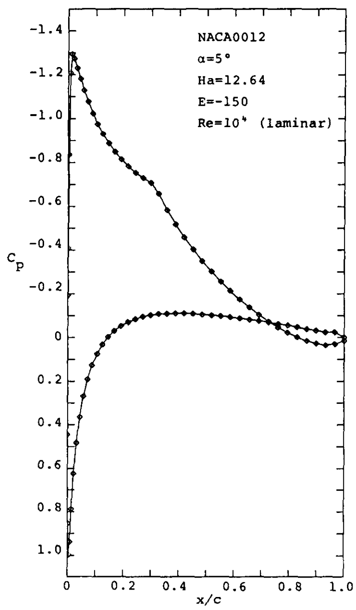
(a) case in $E=0$



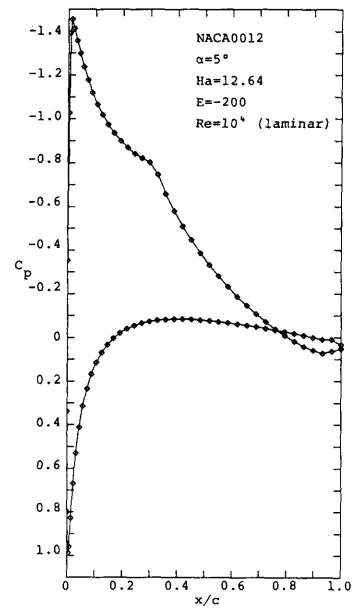
(b) case in $E=-50$



(c) case in $E=-100$



(d) case in $E=-150$



(e) case in $E=-200$

Fig. 17 Pressure distribution along wing surface (NACA0012), $Re=10^4$, $Ha=12.64$

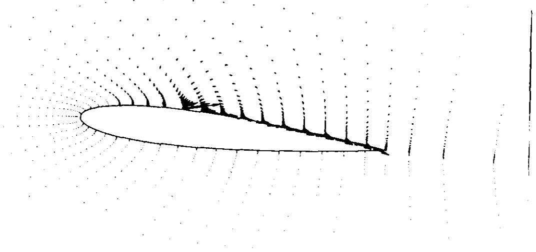


Fig. 18 Distribution of electromagnetic force around wing section

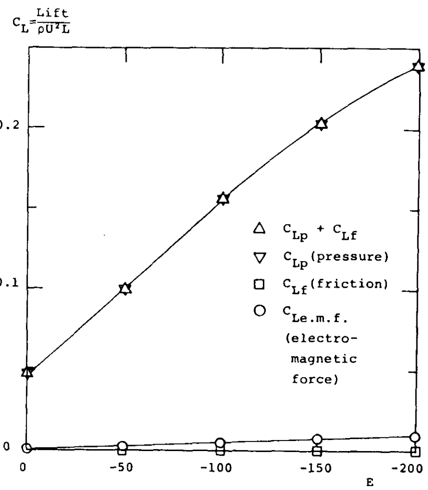


Fig. 19 Relation between the strength of applied electric field and lift coefficient

理解し易いように電磁場の大きさを有次元化してみる。いま，翼弦長を10cmとすると$R_e=10^4$から，一様流速は10cm/sとなる。このとき磁場強さ$H_a=12.64$は2 tesla程度となる。電場強さは，E＝－200が40V/m程度に対応する。

6．結論

レイノルズ数が10^4のときの翼型周りの流場を数値シミュレーションし，電磁力が流場に及ぼす影響を調べた。この結果，印加された電磁場中を翼が進むとき，電場強さを増して行くと，揚力は最初電場強さに比例して増加し，さらに電場強さが大きくなると非線型的に変化するようになることがわかった。全抗力は電磁場の反作用による推力の効果のために，減少することが示された。これらの結果を考慮すると，例えば，翼

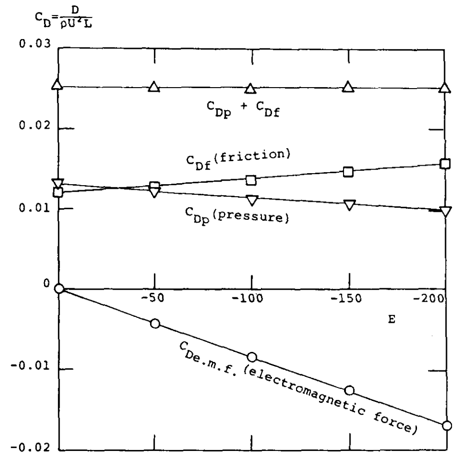


Fig. 20 Relation between the strength of applied electric field and drag coefficient

の前進速度が十分に取れない様なときでも揚力の増加を計ることが可能と思われる。ただし，今回の様な方法で揚力の増加に電磁力を利用した場合，翼背面の負圧のピークが大きくなるので，新たにキャビテーションの問題が生じてくると思われる。

謝辞

本研究は運輸省海上技術安全局の船舶流場制御調査研究会（座長横浜国立大学丸尾孟教授）の指導のもとに行ったものである。有益な御討論を戴いた委員の諸先生に謝意を表します。当部児玉良明主任研究官には，理論的，あるいは数値計算上に生じた幾多の問題の解決（(39)式など）に適切かつ丁寧な御指導を多く受けた。ここに記して感謝いたします。船研CFDグループのメンバーからは，多くの有益なディスカッションを受けた。メンバー諸氏に感謝いたします。当部田中拓部長からは，常に暖かい励ましを頂戴した。記して謝意を表します。本研究の数値計算は，FACOM M180 IIADを利用した。

参考文献

1） Phillips, O.M., "The Prospects for Magneto-hydrodynamic Ship Propulsion", Journal of Ship Research, (1962), March, pp. 43-51

2） 北野稔，岩田章，佐治吉郎，〝超伝導マグネットによる電磁推進の基礎理論 I，II〟神戸商船大学紀要 第2類 第26号，(1978)，vol. 26, pp. 219–262

3) 山口一，加藤洋治，〝電磁推進に関する文献調査及び一考察〃，第9回推進性能委員会公開資料，1986，3月

4) 今井功，桜井明，〝電磁流体力学〃，岩波講座現代物理学，岩波書店，1959

5) Huges, W.f., Young, F.J., "The Electromagnetodynamic of Fluids", Jhon Wiley & Sons Inc., 1966

6) Hinatsu, M., Kodama, Y., "Numerical Simulation of Flow Controlled by MHD Effect (2-D Laminar Flow)", Journal of the Kansai Society of Naval Architects, Japan, No. 201, (1986), June

7) Beam, R.M., Warming, R.F., "An Implicit Factored Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations", AIAA Journal (1978), Vol. 16. No. 4, April

8) Kodama, Y., "Computation of the Two-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations for Flow Past a Circular Cylinder Using Implicit Factored Method", Papers of Ship Research Institute, Vol. 22, No. 4, (1985), July

9) Kodama, Y., "Computation of 3-D Incompressible Navier-Stokes Equations for Flow Around a Ship Hull Using an Implicit Factored Method" Proceedings of Osaka Colloquim on Ship Viscous Flow, 1985

10) Steger, J.L., "Implicit Finite Difference Simulation of Flow about Arbitrary Two-Dimensional Geometries", AIAA Journal, Vol. 16, No. 7. (1978), July

11) 児玉良明，〝渦粘性モデルを用いた二次元翼型まわり高レイノルズ数流れに関するナビエストークス方程式の数値解法〃，昭和60年度（第46回）船舶技術研究所研究発表会講演集，1985，11月