

揚力体理論に基づいたプロペラ周りの ポテンシャル流の数値解析法 (その1)

小山 鴻一*

A Numerical Method for Analyzing Potential Flow Around a Screw Propeller Based on the Lifting Body Theory (first report)

By
Koichi Koyama

Abstract

A numerical method is developed for analyzing the potential flow around a screw propeller based on the lifting body theory. The method is exact in the sense that the boundary conditions are satisfied on the surface of the lifting body and the time-dependent wake is predicted. Doublet and source distributed on the surface of the lifting body are determined by the internal Dirichlet boundary condition and the external Neumann boundary condition respectively. The problem is governed by the boundary integral equation in which the unknown is the velocity potential on the surface of the lifting body. The solution of the integral equation is obtained by employing a surface panel method. The general method is presented for calculating the surface integral over each of the panels. Accurate numerical solution can reach the exact solution for the potential flow around a propeller. The solution allows the calculation of the velocity and the pressure around the propeller as well as on the blade of the propeller.

目次

1. 序言	2	3.2 パネル面積分法	5
2. 揚力体のポテンシャル流の基礎理論	2	3.3 関数 H_{mnk} の計算法	8
2.1 ポテンシャル流	2	3.4 関数 $H(M, N, K)$ 計算の漸化式	8
2.2 ポテンシャル計算の定式化	3	3.5 低次パネル法	9
2.3 翼後縁条件	3	4. プロペラ解析への応用	9
2.4 境界積分方程式	4	4.1 境界条件	9
3. 数値計算法	4	4.2 圧力と流体力	10
3.1 パネル法	4	4.3 後流渦の変形	11
		5. 結言	12
		附録 A パネル座標	12
		附録 B 関数 $H(0, 0, 1)$	15
		附録 C 関数 $H(0, 0, 3)$	16

* 氷海技術部
原稿受付：昭和63年5月11日

附録 D	関数 $H(1, 0, 3)$, $H(0, 1, 3)$	………18
附録 E	関数 $H(0, 0, 5)$	………18
附録 F	関数 $H(1, 0, 5)$, $H(0, 1, 5)$	………20

1. 序 言

最近の数値流体力学の研究の進歩にはめざましいものがあり、ナビア・ストークス方程式を扱ったその手法が、多くの流体機械の流力現象を手軽にシミュレートする日も遠くない様に思われる。しかしながら、粘性影響を物体後流渦層で近似したポテンシャル流の解析法は既に広く応用段階に達している。この方法は、ポテンシャル流場の境界における境界条件から導かれる境界積分方程式を解くもので、パネル法と広く呼ばれ、使い方さえ適切であるなら応用価値の高いものである。剥離位置が翼後縁となるプロペラ翼の場合は格好の応用例と考えられ、この方法によって、プロペラ周りの流場のシミュレーションを行うことは、実用上極めて有益と考えられる。

一方今日のプロペラ理論の中心は薄翼理論を前提とした揚力面理論である¹⁾。その数値解析法は、電子計算機の大型化により Mode Function 法から Discrete Function 法に移ってきた様である。前者は、理論の前提を大胆に仮定し、数値計算は極力厳密に進める。後者は、理論は汎用性の高いものにして置き、それを数値計算で補なってゆく。従って後者の場合、前者に比べて方程式のマトリックスはかなり大きくなる。しかし、汎用性が高いとは言え、揚力面理論である以上薄翼理論の域を出ない。Discrete Function 法の様な大マトリックスを用いるなら、それよりマトリックスを2倍にすることにより翼上下面のパネルに未知数をとったパネル法により完全に非線形な厚翼理論を展開する方が、理論の汎用性は格段に高くなり有利である。これは揚力面理論に対して揚力体理論と呼ばれる。この方法では、数値計算の精度を上げてゆくことによって、任意揚力体周りのポテンシャル流の厳密解に限りなく近づくことができる点が重要である。また、パネル法の応用は、古典的なプロペラ理論と同様にプロペラ翼特性を把握するという姿勢に変わりはないが、プロペラ翼周りの局所的な流場を厳密に解析する点にかなりの比重がかけられているところに一つの特徴がある。

本論においては、プロペラ周りの3次元流に対して、流体を非粘性非圧縮性非回転と仮定し、翼後流渦の厚さを無限小とし、それ以外の流体には速度ポテンシャルが存在するものとして、3次元ポテンシャル流の非

線形問題を数値的に解析する方法を展開する。このように、揚力体に対するパネル法をプロペラ解析に応用した例は既に幾つかある^{2)~4)}。凌ら²⁾は、境界要素法の直接法によってプロペラ解析を行った。また、J. L. Hess et. al.³⁾は、揚力体表面に source 分布と渦層分布を置く方法によってプロペラ解析を行った。パネル法の計算法には、特異点をどこに分布させるか、特異点としてどの様なものを用い、何を未知数に選ぶか、また、境界条件をどの様な形で導入するか、等により、多数のものがあるので^{5)~10)}、揚力面理論の場合と同様に、今後幾種類もの計算法がプロペラ解析に応用されるものと思われる⁴⁾。本論においては、揚力体表面上の速度ポテンシャルを未知数とする境界積分方程式を扱った極力単純な計算法を採用する。揚力体表面に doublet と source を分布させ、doublet 分布は揚力体内側の Dirichlet 境界条件により、source 分布は流体側の Neumann 境界条件により決定する。まず、高精度計算のための一般論を展開し、その第1近似としての低次パネル法の具体的な数値計算式を示す。この方法は、B. Maskew⁷⁾の定式化を踏襲したものであり、均一流中のプロペラの場合は、L. Morino⁹⁾の方法を踏襲した凌ら²⁾の計算法と基礎式が同一となるが、パネルの作成法や計算法はかなり異なっている。

2. 揚力体のポテンシャル流の基礎理論

2.1 ポテンシャル流

無限に広がる流体中を揚力体が任意運動する場合を考える。流体は非粘性の完全流体とし、揚力体後部の自由渦を除く部分で渦無しと仮定すると、速度ポテンシャル Φ が存在し、速度ベクトル \mathbf{v} は

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi \quad (2.1.1)$$

と表される。更に流体は非圧縮と仮定すると、連続の方程式は

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.1.2)$$

の様に Laplace の方程式となる。

この方程式を所定の境界条件のもとに解いて Φ が定まると(2.1.1)式により速度が定まり、圧力方程式

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = C(t) \quad (2.1.3)$$

又は

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}qr^2 + \Omega + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}V^2 = C(t) \quad (2.1.4)$$

から圧力 p を求めることができる。

ここに、 Ω は外力のポテンシャル、 $C(t)$ は時間 t の任

意関数であり、

$$\left. \begin{aligned} q &= |\mathbf{v}| \\ q_r &= |\mathbf{v} - \mathbf{V}| \\ V &= |\mathbf{V}| \\ \mathbf{V} &= \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \end{aligned} \right\} (2.1.5)$$

である。 \mathbf{V} は揚力体の運動速度ベクトルであり、(2.1.4)式は揚力体から観測した表示式で、その $\partial\Phi/\partial t$ は揚力体固定座標系での時間偏微分である。

2.2 ポテンシャル計算の定式化

境界 S で囲まれた流場のポテンシャル場の解析を考える。(Fig. 1)速度ポテンシャル Φ はLaplace方

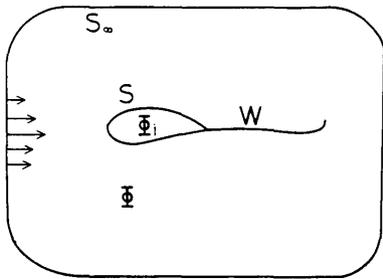


Fig.1 Fluid domain and boundary

程式(2.1.2)を満足するので、Green's identity formulaにより

$$\Phi = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_\infty} \frac{\partial\Phi}{\partial n'} \frac{1}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \iint_S \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.2.1)$$

と表すことができる。ここに、積分範囲は流体を囲む総べての境界面、即ち、揚力体表面 S 、後流渦表面 W 、及び無限遠境界面 S_∞ であり、 r は観測点と積分点の距離であり、 $\partial/\partial n'$ は積分面の法線微分で流体側に向く。

ここで揚力体内にも流場を仮想しその速度ポテンシャルを Φ_i と書き、積分面の揚力体内側向の法線微分を $\partial/\partial n_i$ と書くと、Green's identity formulaにより、流場内で

$$0 = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\partial\Phi_i}{\partial n_i} \frac{1}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \iint_S \Phi_i \frac{\partial}{\partial n_i} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.2.2)$$

となるから、(2.2.1)、(2.2.2)式から

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{1}{4\pi} \iint_S \sigma \frac{1}{r} dS + \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_{W+S_\infty} \frac{\partial\Phi}{\partial n'} \frac{1}{r} dS \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_{W+S_\infty} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.2.3)$$

となる。ここに

$$\mu = \Phi - \Phi_i \quad (2.2.4)$$

$$\sigma = \frac{\partial\Phi}{\partial n'} + \frac{\partial\Phi_i}{\partial n_i} \quad (2.2.5)$$

と書いた。(2.2.3)式を整理すると

$$\Phi = \Phi_D + \Phi_S + \Phi_W + \Phi_\infty \quad (2.2.6)$$

$$\Phi_D = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.2.7)$$

$$\Phi_S = \frac{-1}{4\pi} \iint_S \sigma \cdot \frac{1}{r} dS \quad (2.2.8)$$

$$\Phi_W = \frac{1}{4\pi} \iint_W \Delta\Phi_W \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.2.9)$$

$$\begin{aligned} \Phi_\infty &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{S_\infty} \frac{\partial\Phi}{\partial n'} \frac{1}{r} dS \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_\infty} \Phi \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

と書ける。ここに、 Φ_D は物体表面 S 上の強さ μ のdoubletによるポテンシャル、 Φ_S は S 上の強さ σ のsourceによるポテンシャル、 Φ_W は後流渦の寄与によるポテンシャル、 Φ_∞ は物体が存在しない場合の速度場のポテンシャルである。後流渦層は厚みが無いものと仮定し、従ってsource項は無く、(2.2.9)式の $\Delta\Phi_W$ は後流渦面の上下面におけるポテンシャル飛躍であり、積分面 W は上面側片側のみとする。

2.3 翼後縁条件

揚力体の後方には一般に自由渦が流される。本論においては、それを厚さの無い曲面 W で表わし、揚力体表面 S と W との接点位置即ち剥離位置は既知と仮定する。

S から剥れた流れは W 上に乗る。この過程で翼後縁のKuttaの流出条件が満たされる様にする。それには、翼後縁 S 上の上面側のポテンシャルを Φ_{TU} 、下面側を Φ_{TL} とし、それから続く W の最前部のポテンシャル飛躍を $\Delta\Phi_W$ とし、

$$\Delta\Phi_W = \Phi_{TU} - \Phi_{TL} \quad (2.3.1)$$

とする。(Fig.2)

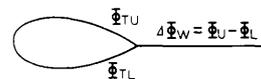


Fig.2 Condition at trailing edge

W の後部においては、 $\Delta\Phi_W$ の強さを保ったま、流

れに沿って流されるものとする。

2.4 境界積分方程式

ポテンシャル表示式(2.2.6)において、観測点が面 S 上の場合、 Φ_D の積分は特異性を示し、流体側 S 上の値 Φ_{D+} と揚力体内 S 上の値 Φ_{D-} とはそれぞれ

$$\Phi_{D\pm} = \pm \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.4.1)$$

となる。ここに記号 \iint は、特異点近傍を除いた積分を表す。

上式(2.4.1)及び(2.2.4)、(2.2.6)式を用いて、 S 面上の流体側のポテンシャル表示式を求めると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\Phi - \Phi_i) + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\Phi - \Phi_i) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ = \Phi_i - \Phi_s - \Phi_w - \Phi_\infty \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

が得られる。

これは、パネル法における一般的な境界積分方程式と考えられるが、境界面 S 上の揚力体内側のポテンシャル Φ_i と、流体側の法線速度 $\partial\Phi/\partial n'$ の値、揚力体内側の Dirichlet 境界条件と流体側の Neumann 境界条件とから与えると、 $\Phi - \Phi_i$ に関する第2種の Fredholm 型の積分方程式となり、これにより解は一意に決定する。

我々は、ここで

$$\Phi_i = \Phi_\infty \quad (2.4.3)$$

と置く。このとき(2.4.2)式は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\Phi - \Phi_\infty) + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\Phi - \Phi_\infty) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ = -\Phi_s - \Phi_w \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

$$\Phi_s = \frac{-1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \frac{\partial\Phi_\infty}{\partial n'} \right\} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.4.5)$$

$$\Phi_w = \frac{1}{4\pi} \iint_W \Delta\Phi_w \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.4.6)$$

となる。

揚力体の運動条件から $\frac{\partial\Phi}{\partial n}$ が与えられ、無限遠の流場条件から $\frac{\partial\Phi_\infty}{\partial n}$ が与えられると Φ_s は既知となる。また、 $\Delta\Phi_w$ も前の時間ステップの値から既知であり、 Φ_w もほぼ既知である。即ち、基本的には(2.4.4)式は、右辺を既知とした $\Phi - \Phi_\infty$ に関する積分方程式となる。ただし、翼後縁の流出条件から、翼後縁に接する伴流パネルの $\Delta\Phi_w$ は翼面のポテンシャル Φ_{TV} 、 Φ_{TL} を用いて表されるので、その部分は未知項となる。その具体的な式を示しておく。後流渦面 W を翼後縁近傍部

分の W_T と残りの $W - W_T$ に分けて

$$\begin{aligned} \Phi_w = \frac{1}{4\pi} \int_{W_T} (\Phi_{TV} - \Phi_{TL}) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_{W-W_T} \Delta\Phi_w \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

と書くと、右辺第1項には未知数 ($\Phi_{TV} - \Phi_{TL}$) が含まれ、右辺第2項は既知である。従って積分方程式は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\Phi - \Phi_\infty) + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\Phi - \Phi_\infty) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{W_T} (\Phi_{TV} - \Phi_{TL}) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ = -\Phi_s - \Phi_{w-W_T} \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

$$\Phi_s = \frac{-1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial\Phi}{\partial n'} - \frac{\partial\Phi_\infty}{\partial n'} \right\} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.4.9)$$

$$\Phi_{w-W_T} = \frac{1}{4\pi} \iint_{W-W_T} \Delta\Phi_w \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.4.10)$$

となる。但し、特別に定常翼の場合は、 Φ_{w-W_T} においても $\Delta\Phi_w = \Phi_{TV} - \Phi_{TL}$ と置いて、 Φ_{w-W_T} も左辺の未知関数として扱えば、 W の形状を既知と仮定する場合、時間ステップの逐次計算が不要となる。

積分方程式を解いて $\Phi - \Phi_\infty$ が求まると、速度場等は

$$v = \nabla\Phi = \nabla(\Phi - \Phi_\infty) + \nabla\Phi_\infty \quad (2.4.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = \frac{\partial}{\partial t}(\Phi - \Phi_\infty) + \frac{\partial}{\partial t}\Phi_\infty \quad (2.4.12)$$

から計算できる。

$\nabla\Phi$ の計算は、ポテンシャル場の微分で求められるが、次式の積分式で直接計算することもできる。

$$\nabla\Phi = \nabla\Phi_D + \nabla\Phi_s + \nabla\Phi_w + \nabla\Phi_\infty \quad (2.4.13)$$

$$\nabla\Phi_D = \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \nabla \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.4.14)$$

$$\nabla\Phi_s = \frac{-1}{4\pi} \iint_S \sigma \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.4.15)$$

$$\nabla\Phi_w = \frac{1}{4\pi} \iint_W \Delta\Phi_w \nabla \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (2.4.16)$$

3. 数値計算法

3.1 パネル法

前節の境界積分方程式において、未知関数を

$$\mu = \Phi - \Phi_\infty \quad (3.1.1)$$

と書くと、

$$-\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{4\pi} \iint_S \mu \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS = -\Phi_s - \Phi_w \quad (3.1.2)$$

である。パネル法においては境界積分面を面素パネルに分割しその集合で表す。揚力体表面 S をパネル曲面 S_i の集合 $\sum_i S_i$ で表すと

$$-\frac{1}{2}\mu + \sum_l \frac{1}{4\pi} \iint_{S_l} \mu \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS = -\Phi_s - \Phi_w \quad (3.1.3)$$

となる。この境界積分方程式は、各パネルの標点ごとに立てられ、従って、パネルの数だけ連立することになる。

パネルごとの積分

$$\Phi_{Dl} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_l} \mu \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.1.4)$$

には未知関数 μ が含まれるので、それを

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{m,n} \frac{1}{m!n!} m_{mn} X'^m Y'^n \\ &= m_{00} + m_{10} X' + m_{01} Y' + \frac{1}{2} m_{20} X'^2 \\ &\quad + m_{11} X' Y' + \frac{1}{2} m_{02} Y'^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

とパネル座標 X' , Y' の多項式で近似する。パネル座標とは、パネル曲面 S_l を最も良く近似する平面をパネル平面と呼び、その面内に X , Y 軸をとり、それに垂直に流体側向に Z 軸をとった座標系であり、その具体的な決め方は附録に示した。このとき係数 m_{mn} の値は、当該パネル及びその近傍パネルの標点における μ の値 μ_k を用いて

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{k=0}^M W_k \mu_k \left[C_{00}^k + C_{10}^k X' + C_{01}^k Y' + \frac{1}{2} C_{20}^k X'^2 \right. \\ &\quad \left. + C_{11}^k X' Y' + \frac{1}{2} C_{02}^k Y'^2 + \dots \right] \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

と表示することができる。ここに W_k は重み関数であり、係数 C_{mn}^k は最小自乗法等で決める。これを用いると境界積分方程式は

$$-\frac{1}{2}\mu + \sum_l \left[\sum_{k=0}^M W_k \mu_k \sum_{m,n} \frac{1}{m!n!} C_{mn}^k \cdot \frac{1}{4\pi} \iint_{S_l} X'^m Y'^n \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right] = -\Phi_s - \Phi_w \quad (3.1.7)$$

となる。特に低次パネルの場合 $M=0$ と置いて、

$$-\frac{1}{2}\mu + \sum_l \mu_l \frac{1}{4\pi} \iint_{S_l} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS = -\Phi_s - \Phi_w \quad (3.1.8)$$

となる。

さて、後流渦の寄与によるポテンシャル Φ_w も後流渦面 W をパネル分割して計算するが、前節にも示したとおり、翼後縁の Kutta の流出条件を満足するために、 W のうちの翼後縁に接するパネル W_T は特別の扱いをして (2.4.7) 式の様において、結局、積分方程式は

$$-\frac{1}{2}\mu + \sum_l \mu_l \frac{1}{4\pi} \iint_{S_l} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS + \sum (\mu_{TV} - \mu_{TL})$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{W_T} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS = -\Phi_s - \Phi_{w-wT} \quad (3.1.9)$$

$$\Phi_s = \sum_l \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial n'} \right\} \frac{1}{4\pi} \iint_{S_l} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.1.10)$$

$$\Phi_{w-wT} = \sum_l \Delta \Phi_w \frac{1}{4\pi} \iint_{W_l} \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.1.11)$$

となる。

3.2 パネル面積分法

パネル法においては、各パネルごとに面積分を行うが、ポテンシャル計算に対しては

$$\Phi_{Dl} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_l} \mu \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.2.1)$$

$$\Phi_{Sl} = \frac{-1}{4\pi} \iint_{S_l} \sigma \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.2.2)$$

$$\Phi_{Wl} = \frac{1}{4\pi} \iint_{W_l} \Delta \Phi_w \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.2.3)$$

速度計算に対しては

$$\nabla \Phi_{Dl} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_l} \mu \nabla \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.2.4)$$

$$\nabla \Phi_{Sl} = \frac{-1}{4\pi} \iint_{S_l} \sigma \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.2.5)$$

$$\nabla \Phi_{Wl} = \frac{1}{4\pi} \iint_{W_l} \Delta \Phi_w \nabla \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (3.2.6)$$

を計算することになる。パネル内で被積分関数及びパネル形状の変化率が小さいことを前提に近似計算を展開する。

(3.2.3), (3.2.6) 式の計算は (3.2.1), (3.2.4) 式と全く同様にすればよいので、以下に (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4), (3.2.5) 式の計算法を考える。

附録に示したパネル座標 XYZ を用いると、パネル曲面 S_l は

$$B(X', Y', Z') = Z' - Z_b(X', Y') = 0 \quad (3.2.7)$$

と表わされ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n'} &= \vec{n}' \nabla' \\ &= \left\{ \frac{\partial B}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X'} + \frac{\partial B}{\partial Y'} \frac{\partial}{\partial Y'} + \frac{\partial B}{\partial Z'} \frac{\partial}{\partial Z'} \right\} / R_n \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

$$dS = R_n dX' dY' \quad (3.2.9)$$

$$R_n = \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial X'} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial Y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial Z'} \right)^2} \quad (3.2.10)$$

となる。

次に関数 μ , σ 等が

$$\mu = \sum_{m,n} \frac{m_{mn}}{m!n!} X'^m Y'^n \quad (3.2.11)$$

$$\sigma = \sum_{m,n} \frac{S_{mn}}{m!n!} X'^m Y'^n \quad (3.2.12)$$

と、 X' 、 Y' の多項式で表わされるものとする。このとき、(3.2.2)、(3.2.1)、(3.2.5)、(3.2.4)式を計算するには次の関数を計算すればよい。

$$H_0^{mn} = \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \left(\frac{1}{r}\right) R_n dX' dY' \quad (3.2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{0X}^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial B}{\partial X'} \frac{\partial}{\partial X'} \left(\frac{1}{r}\right) dX' dY' \\ G_{0Y}^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial B}{\partial Y'} \frac{\partial}{\partial Y'} \left(\frac{1}{r}\right) dX' dY' \\ G_{0Z}^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial B}{\partial Z'} \frac{\partial}{\partial Z'} \left(\frac{1}{r}\right) dX' dY' \end{aligned} \right\} \quad (3.2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} H_X^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial}{\partial X'} \left(\frac{1}{r}\right) R_n dX' dY' \\ H_Y^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial}{\partial Y'} \left(\frac{1}{r}\right) R_n dX' dY' \\ H_Z^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial}{\partial Z'} \left(\frac{1}{r}\right) R_n dX' dY' \end{aligned} \right\} \quad (3.2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{XX}^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial B}{\partial X'} \frac{\partial^2}{\partial X \partial X'} \left(\frac{1}{r}\right) dX' dY' \\ G_{YX}^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial B}{\partial X'} \frac{\partial^2}{\partial Y \partial X'} \left(\frac{1}{r}\right) dX' dY' \\ G_{ZX}^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial B}{\partial X'} \frac{\partial^2}{\partial Z \partial X'} \left(\frac{1}{r}\right) dX' dY' \\ G_{XY}^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial B}{\partial Y'} \frac{\partial^2}{\partial X \partial Y'} \left(\frac{1}{r}\right) dX' dY' \\ G_{YV}^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial B}{\partial Y'} \frac{\partial^2}{\partial Y \partial Y'} \left(\frac{1}{r}\right) dX' dY' \\ G_{ZY}^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial B}{\partial Y'} \frac{\partial^2}{\partial Z \partial Y'} \left(\frac{1}{r}\right) dX' dY' \\ G_{XZ}^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial B}{\partial Z'} \frac{\partial^2}{\partial X \partial Z'} \left(\frac{1}{r}\right) dX' dY' \\ G_{YZ}^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial B}{\partial Z'} \frac{\partial^2}{\partial Y \partial Z'} \left(\frac{1}{r}\right) dX' dY' \\ G_{ZZ}^{mn} &= \frac{-1}{4\pi} \iint X'^m Y'^n \frac{\partial B}{\partial Z'} \frac{\partial^2}{\partial Z \partial Z'} \left(\frac{1}{r}\right) dX' dY' \end{aligned} \right\} \quad (3.2.16)$$

ただし、上式の積分範囲は、パネル平面 S'_i 即ちパネル曲面 S_i の XY 面上投影平面とする。

上記の関数を用いると(3.2.1)、(3.2.2)式に対し

$$\Phi_{Dt} = - \sum_{m,n} \frac{m_{mn}}{m!n!} [G_{0X}^{mn} + G_{0Y}^{mn} + G_{0Z}^{mn}] \quad (3.2.17)$$

$$\Phi_{St} = \sum_{m,n} \frac{S_{mn}}{m!n!} H_0^{mn} \quad (3.2.18)$$

また、(3.2.4)、(3.2.5)式に対し

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_{Dt} &= - \sum_{m,n} \frac{m_{mn}}{m!n!} [(G_{XX}^{mn} + G_{XY}^{mn} + G_{XZ}^{mn}) \mathbf{I} \\ &\quad + (G_{YX}^{mn} + G_{YY}^{mn} + G_{YZ}^{mn}) \mathbf{J} \\ &\quad + (G_{ZX}^{mn} + G_{ZY}^{mn} + G_{ZZ}^{mn}) \mathbf{K}] \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

$$\nabla \Phi_{St} = \sum_{m,n} \frac{S_{mn}}{m!n!} [H_X^{mn} \mathbf{I} + H_Y^{mn} \mathbf{J} + H_Z^{mn} \mathbf{K}] \quad (3.2.20)$$

となる。ここに \mathbf{I} 、 \mathbf{J} 、 \mathbf{K} は X 、 Y 、 Z 軸方向の単位ベクトルである。

一般にパネル S_i 内において $Z' = Z_B(X', Y')$ は微小と考えてよいから

$$\frac{1}{r} \approx \frac{1}{\rho} + \frac{Z}{\rho^3} Z' + \frac{1}{2} \left\{ \frac{-1}{\rho^3} + \frac{3Z^2}{\rho^5} \right\} Z'^2 + \dots \quad (3.2.21)$$

$$\frac{1}{r^3} \approx \frac{1}{\rho^3} + \frac{3Z}{\rho^5} Z' + \frac{1}{2} \left\{ \frac{-3}{\rho^5} + \frac{15Z^2}{\rho^7} \right\} Z'^2 + \dots \quad (3.2.22)$$

$$\frac{1}{r^5} \approx \frac{1}{\rho^5} + \frac{5Z}{\rho^7} Z' + \frac{1}{2} \left\{ \frac{-5}{\rho^7} + \frac{35Z^2}{\rho^9} \right\} Z'^2 + \dots \quad (3.2.23)$$

$$r = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + (Z - Z')^2} \quad (3.2.24)$$

$$\rho = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + Z^2} \quad (3.2.25)$$

$$R_n \approx 1 + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial B}{\partial X'} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial Y'} \right)^2 \right\} + \dots \quad (3.2.26)$$

ここで更に

$$\begin{aligned} Z' \equiv Z_B(X', Y') &\approx d_{10} X' + d_{01} Y' + \frac{1}{2} d_{20} X'^2 \\ &\quad + d_{11} X' Y' + \frac{1}{2} d_{02} Y'^2 + \dots \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

と仮定し、

$$H_{mnk} = \frac{-1}{4\pi} \iint_{S'_i} X'^m Y'^n \rho^k dX' dY' \quad (3.2.28)$$

と定義すると、次の諸式を得る。但し、 S'_i はパネル平面、即ち、パネル曲面 S_i の XY 面上投影平面である。

$$\begin{aligned} H_0^{mn} &\approx H_{m,n,-1} + Z d_{10} H_{m+1,n,-3} + Z d_{01} H_{m,n+1,-3} \\ &\quad + \frac{1}{2} Z d_{20} H_{m+2,n,-3} + Z d_{11} H_{m+1,n+1,-3} \\ &\quad + \frac{1}{2} Z d_{02} H_{m,n+2,-3} + \dots \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{0X}^{mn} &\approx -d_{10}(X H_{m,n,-3} - H_{m+1,n,-3}) \\ &\quad - d_{20}(X H_{m+1,n,-3} - H_{m+2,n,-3}) \\ &\quad - d_{11}(X H_{m,n+1,-3} - H_{m+1,n+1,-3}) \\ &\quad + \dots \\ G_{0Y}^{mn} &\approx -d_{01}(Y H_{m,n,-3} - H_{m,n+1,-3}) \\ &\quad - d_{11}(Y H_{m+1,n,-3} - H_{m+1,n+1,-3}) \\ &\quad - d_{02}(Y H_{m,n+1,-3} - H_{m,n+2,-3}) \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots \\
G_{0Z}^{mn} & \simeq ZH_{m,n,-3} - d_{10}H_{m+1,n,-3} - d_{01}H_{m,n+1,-3} \\
& - \frac{1}{2}d_{20}H_{m+2,n,-3} - d_{11}H_{m+1,n+1,-3} \\
& - \frac{1}{2}d_{02}H_{m,n+2,-3} \\
& + 3Z^2d_{10}H_{m+1,n,-5} + 3Z^2d_{01}H_{m,n+1,-5} \\
& + \frac{3}{2}Z^2d_{20}H_{m+2,n,-5} \\
& + 3Z^2d_{11}H_{m+1,n+1,-5} + \frac{3}{2}Z^2d_{02}H_{m,n+2,-5} \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

$$\begin{aligned}
H_X^{mn} & \simeq -(XH_{m,n,-3} - H_{m+1,n,-3}) \\
& + [-3d_{10}Z\{XH_{m+1,n,-5} - H_{m+2,n,-5}\} \\
& - 3d_{01}Z\{XH_{m,n+1,-5} - H_{m+1,n+1,-5}\} \\
& - \frac{3}{2}d_{20}Z\{XH_{m+2,n,-5} - H_{m+3,n,-5}\} \\
& - 3d_{11}Z\{XH_{m+1,n+1,-5} - H_{m+2,n+1,-5}\} \\
& - \frac{3}{2}d_{02}Z\{XH_{m,n+2,-5} - H_{m+1,n+2,-5}\}] \\
& + \dots \\
H_Y^{mn} & \simeq -(YH_{m,n,-3} - H_{m,n+1,-3}) \\
& + [-3d_{10}Z\{YH_{m+1,n,-5} - H_{m+1,n+1,-5}\} \\
& - 3d_{01}Z\{YH_{m,n+1,-5} - H_{m,n+2,-5}\} \\
& - \frac{3}{2}d_{20}Z\{YH_{m+2,n,-5} - H_{m+2,n+1,-5}\} \\
& - 3d_{11}Z\{YH_{m+1,n+1,-5} - H_{m+1,n+2,-5}\} \\
& - \frac{3}{2}d_{02}Z\{YH_{m,n+2,-5} - H_{m,n+3,-5}\}] \\
& + \dots \\
H_Z^{mn} & \simeq -ZH_{m,n,-3} \\
& + [d_{10}\{H_{m+1,n,-3} - 3Z^2H_{m+1,n,-5}\} \\
& + d_{01}\{H_{m,n+1,-3} - 3Z^2H_{m,n+1,-5}\} \\
& + \frac{1}{2}d_{20}\{H_{m+2,n,-3} - 3Z^2H_{m+2,n,-5}\} \\
& + d_{11}\{H_{m+1,n+1,-3} - 3Z^2H_{m+1,n+1,-5}\} \\
& + \frac{1}{2}d_{02}\{H_{m,n+2,-3} - 3Z^2H_{m,n+2,-5}\}] \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{3.2.31}$$

$$\begin{aligned}
G_{XX}^{mn} & \simeq [-d_{10}\{H_{m,n,-3} - 3X^2H_{m,n,-5} + 6XH_{m+1,n,-5} \\
& \quad - 3H_{m+2,n,-5}\} \\
& - d_{20}\{H_{m+1,n,-3} - 3X^2H_{m+1,n,-5} + 6XH_{m+2,n,-5} \\
& \quad - 3H_{m+3,n,-5}\} \\
& - d_{11}\{H_{m,n+1,-3} - 3X^2H_{m,n+1,-5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 6XH_{m+1,n+1,-5} - 3H_{m+2,n+1,-5}\}] \\
& + \dots \\
G_{XY}^{mn} & \simeq [-d_{01}\{-3XYH_{m,n,-5} + 3YH_{m+1,n,-5} \\
& \quad + 3XH_{m,n+1,-5} - 3H_{m+1,n+1,-5}\} \\
& - d_{11}\{-3XYH_{m+1,n,-5} + 3YH_{m+2,n,-5} \\
& \quad + 3XH_{m+1,n+1,-5} - 3H_{m+2,n+1,-5}\} \\
& - d_{02}\{-3XYH_{m,n+1,-5} + 3YH_{m+1,n+1,-5} \\
& \quad + 3XH_{m,n+2,-5} - 3H_{m+1,n+2,-5}\}] \\
& + \dots \\
G_{XZ}^{mn} & \simeq -3Z\{XH_{m,n,-5} - H_{m+1,n,-5}\} \\
& + [-3d_{10}\{(-XH_{m+1,n,-5} + H_{m+2,n,-5}) \\
& \quad + 5Z^2(XH_{m+1,n,-7} - H_{m+2,n,-7})\} \\
& - 3d_{01}\{(-XH_{m,n+1,-5} + H_{m+1,n+1,-5}) \\
& \quad + 5Z^2(XH_{m,n+1,-7} - H_{m+1,n+1,-7})\} \\
& - \frac{3}{2}d_{20}\{(-XH_{m+2,n,-5} + H_{m+3,n,-5}) \\
& \quad + 5Z^2(XH_{m+2,n,-7} - H_{m+3,n,-7})\} \\
& - 3d_{11}\{(-XH_{m+1,n+1,-5} + H_{m+2,n+1,-5}) \\
& \quad + 5Z^2(XH_{m+1,n+1,-7} - H_{m+2,n+1,-7})\} \\
& - \frac{3}{2}d_{02}\{(-XH_{m,n+2,-5} + H_{m+1,n+2,-5}) \\
& \quad + 5Z^2(XH_{m,n+2,-7} - H_{m+1,n+2,-7})\}] \\
& + \dots \\
G_{YX}^{mn} & \simeq [-d_{10}\{-3XYH_{m,n,-5} + 3YH_{m+1,n,-5} \\
& \quad + 3XH_{m,n+1,-5} - 3H_{m+1,n+1,-5}\} \\
& - d_{20}\{-3XYH_{m+1,n,-5} + 3YH_{m+2,n,-5} \\
& \quad + 3XH_{m+1,n+1,-5} - 3H_{m+2,n+1,-5}\} \\
& - d_{11}\{-3XYH_{m,n+1,-5} + 3YH_{m+1,n+1,-5} \\
& \quad + 3XH_{m,n+2,-5} - 3H_{m+1,n+2,-5}\}] \\
& + \dots \\
G_{YY}^{mn} & \simeq [-d_{01}\{H_{m,n,-3} - 3Y^2H_{m,n,-5} \\
& \quad + 6YH_{m,n+1,-5} - 3H_{m,n+2,-5}\} \\
& - d_{11}\{H_{m+1,n,-3} - 3Y^2H_{m+1,n,-5} \\
& \quad + 6YH_{m+1,n+1,-5} - 3H_{m+1,n+2,-5}\} \\
& - d_{02}\{H_{m,n+1,-3} - 3Y^2H_{m,n+1,-5} \\
& \quad + 6YH_{m,n+2,-5} - 3H_{m,n+3,-5}\}] \\
& + \dots \\
G_{YZ}^{mn} & \simeq -3Z\{YH_{m,n,-5} - H_{m,n+1,-5}\} \\
& + [-3d_{10}\{(-YH_{m+1,n,-5} + H_{m+1,n+1,-5}) \\
& \quad + 5Z^2(YH_{m+1,n,-7} - H_{m+1,n+1,-7})\} \\
& - 3d_{01}\{(-YH_{m,n+1,-5} + H_{m,n+2,-5}) \\
& \quad + 5Z^2(YH_{m,n+1,-7} - H_{m,n+2,-7})\} \\
& - \frac{3}{2}d_{20}\{(-YH_{m+2,n,-5} + H_{m+2,n+1,-5})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +5Z^2(YH_{m+2,n,-7}-H_{m+2,n+1,-7}) \\
& -3d_{11}\{(-YH_{m+1,n+1,-5}+H_{m+1,n+2,-5}) \\
& \quad +5Z^2(YH_{m+1,n+1,-7}-H_{m+1,n+2,-7})\} \\
& -\frac{3}{2}d_{02}\{(-YH_{m,n+2,-5}+H_{m,n+3,-5}) \\
& \quad +5Z^2(YH_{m,n+2,-7}-H_{m,n+3,-7})\} \\
& +\dots \\
G_{ZX}^{mn} \approx & [-d_{10}\{-3Z(XH_{m,n,-5}-H_{m+1,n,-5})\} \\
& -d_{20}\{-3Z(XH_{m+1,n,-5}-H_{m+2,n,-5})\} \\
& -d_{11}\{-3Z(XH_{m,n+1,-5}-H_{m+1,n+1,-5})\} \\
& +\dots \\
G_{ZY}^{mn} \approx & [-d_{01}\{-3Z(YH_{m,n,-5}-H_{m,n+1,-5})\} \\
& -d_{11}\{-3Z(YH_{m+1,n,-5}-H_{m+1,n+1,-5})\} \\
& -d_{02}\{-3Z(YH_{m,n+1,-5}-H_{m,n+2,-5})\} \\
& +\dots \\
G_{ZZ}^{mn} \approx & \{H_{m,n,-3}-3Z^2H_{m,n,-5}\} \\
& +[-d_{10}\{9ZH_{m+1,n,-5}-15Z^3H_{m+1,n,-7}\} \\
& -d_{01}\{9ZH_{m,n+1,-5}-15Z^3H_{m,n+1,-7}\} \\
& -\frac{1}{2}d_{20}\{9ZH_{m+2,n,-5}-15Z^3H_{m+2,n,-7}\} \\
& -d_{11}\{9ZH_{m+1,n+1,-5}-15Z^3H_{m+1,n+1,-7}\} \\
& -d_{02}\{9ZH_{m,n+2,-5}-15Z^3H_{m,n+2,-7}\} \\
& +\dots
\end{aligned} \tag{3.2.32}$$

3.3 関数 H_{mnk} の計算法

(3.2.28)式で定義された関数 H_{mnk} の計算は、関数 $H(M,N,K)=\iint_{S_1'} \frac{(X-X')^M(Y-Y')^N}{\rho^K} dX' dY'$

(3.3.1)

を定義して

$$\begin{aligned}
H_{mnk} = & \frac{-1}{4\pi} \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} X^{m-r} (-1)^r \left[\sum_{s=0}^n \binom{n}{s} Y^{n-s} (-1)^s H(r,s,-k) \right], \\
\binom{n}{r} = & \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{3.3.2}
\end{aligned}$$

から計算する。ここに ρ は(3.2.25)式で定義されている。

3.4 関数 $H(M,N,K)$ 計算の漸化式

(3.3.1)式で定義された関数 $H(M,N,K)$ を計算するには、以下の漸化式を利用する。ただし、以下においては、パネル平面 S_i' の形状は多辺形と仮定する。

$$H(M+2,N,K) = \frac{M+1}{K-2} H(M,N,K-2)$$

$$+ \sum \frac{1}{K-2} F_\xi(M+1,N,K-2) \tag{3.4.1}$$

$$\begin{aligned}
H(M,N+2,K) = & \frac{N+1}{K-2} H(M,N,K-2) \\
& + \sum \frac{1}{K-2} F_\eta(M,N+1,K-2) \tag{3.4.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(K-M-N-2)H(M,N,K) = & KZ^2H(M,N,K+2) \\
& + \sum F_\xi(M+1,N,K) + \sum F_\eta(M,N+1,K) \tag{3.4.3}
\end{aligned}$$

ここに \sum は多辺形パネル S_i' の各辺についての総和を表し、また

$$F_\xi(M,N,K) = \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{(X-X_{12})^M(Y-Y')^N}{\rho \Big|_{X'=X_{12}}} dY' \tag{3.4.4}$$

$$F_\eta(M,N,K) = - \int_{X_1}^{X_2} \frac{(X-X')^M(Y-Y_{12})^N}{\rho \Big|_{Y'=Y_{12}}} dX' \tag{3.4.5}$$

$$X_{12} = X_{12}^0 + X_{12}^1 Y' \tag{3.4.6}$$

$$Y_{12} = Y_{12}^0 + Y_{12}^1 X' \tag{3.4.7}$$

である。ここに $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$ は辺12の両端点の座標である。

次に関数

$$I_\xi(m,k) = \int_{Y_1}^{Y_2} Y'^m \sqrt{a_X Y'^2 + b_X Y' + c_X} dY' \tag{3.4.8}$$

$$I_\eta(m,k) = \int_{X_1}^{X_2} X'^m \sqrt{a_Y X'^2 + b_Y X' + c_Y} dX' \tag{3.4.9}$$

を定義すると、 $F_\xi(M,N,K), F_\eta(M,N,K)$ は $I_\xi(m,k), I_\eta(m,k)$ の線形結合で表される。

$I_\xi(m,k), I_\eta(m,k)$ を計算するには次の公式を利用する。

$$I(m,k) = \int X^m \sqrt{aX^2 + bX + c} dX \tag{3.4.10}$$

$$\begin{aligned}
I(m,k) = & \frac{1}{(m+k+1)a} \{X^{m-1} \sqrt{aX^2 + bX + c} \\
& - \frac{(2m+k)b}{2} I(m-1,k) - (m-1)cI(m-2,k)\}, \\
& (m+k \neq -1) \tag{3.4.11}
\end{aligned}$$

$$I(m,k) = aI(m+2,k-2) + bI(m+1,k-2) + cI(m,k-2) \tag{3.4.12}$$

$$\begin{aligned}
I(0,k) = & \frac{2(2aX+b)}{(k+2)(b^2-4ac)} \sqrt{aX^2 + bX + c} \\
& + \frac{4(k+3)a}{(k+2)(b^2-4ac)} I(0,k+2), (k \neq -2) \tag{3.4.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(0,-1) = & \frac{1}{\sqrt{a}} \log |2aX + b + 2\sqrt{a(aX^2 + bX + c)}|, \\
& (a > 0) \tag{3.4.14}
\end{aligned}$$

3.5 低次パネル法

パネル法の中で最も低次の単純なパネルの場合を本節に示す。

まず、未知関数等をパネル S_i 内で一定と仮定し、

$$\left. \begin{aligned} \mu &= m_{00} \quad (m=n=0) \\ \sigma &= s_{00} \quad (m=n=0) \end{aligned} \right\} (3.5.1)$$

次に、パネル S_i の形状を平面と仮定し、

$$Z' \equiv Z_B(X', Y') = 0, \quad d_{10} = d_{01} = d_{20} = d_{11} = d_{02} = 0 \quad (3.5.2)$$

とする。このとき(3.2.29)~(3.2.32)式から

$$\left. \begin{aligned} G_{0X}^{mn} &= G_{0Y}^{mn} = 0 \\ G_{0Z}^{mn} &= ZH_{0,0,-3} \end{aligned} \right\} (3.5.3)$$

$$H_0^{mn} = H_{0,0,-1} \quad (3.5.4)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{XX}^{mn} &= G_{XY}^{mn} = G_{YX}^{mn} = G_{YY}^{mn} = G_{ZX}^{mn} = G_{ZY}^{mn} = 0 \\ G_{XZ}^{mn} &= -3Z\{XH_{0,0,-5} - H_{1,0,-5}\} \\ G_{YZ}^{mn} &= -3Z\{YH_{0,0,-5} - H_{0,1,-5}\} \\ G_{ZZ}^{mn} &= H_{0,0,-3} - 3Z^2H_{0,0,-5} \end{aligned} \right\} (3.5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} H_X^{mn} &= -\{XH_{0,0,-3} - H_{1,0,-3}\} \\ H_Y^{mn} &= -\{YH_{0,0,-3} - H_{0,1,-3}\} \\ H_Z^{mn} &= -ZH_{0,0,-3} \end{aligned} \right\} (3.5.6)$$

となり、従って

$$\Phi_{D_i} = -m_{00}ZH_{0,0,-3} \quad (3.5.7)$$

$$\Phi_{S_i} = s_{00}H_{0,0,-1} \quad (3.5.8)$$

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_{D_i} &= -m_{00}[-3Z\{XH_{0,0,-5} - H_{1,0,-5}\}\mathbf{I} \\ &\quad -3Z\{YH_{0,0,-5} - H_{0,1,-5}\}\mathbf{J} \\ &\quad + \{H_{0,0,-3} - 3Z^2H_{0,0,-5}\}\mathbf{K}] \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

$$\begin{aligned} \nabla \Phi_{S_i} &= s_{00}[-\{XH_{0,0,-3} - H_{1,0,-3}\}\mathbf{I} \\ &\quad -\{YH_{0,0,-3} - H_{0,1,-3}\}\mathbf{J} \\ &\quad -ZH_{0,0,-3}\mathbf{K}] \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

となる。

上式の値を求めるには、次の計算式を用いればよい。

次式の導出は附録に示してある。

$$H(0, 0, 1) = \sum \{R_{12}Q_{12} + |Z|J_{12}\} - |Z|\Delta\theta$$

$$H(0, 0, 3) = \frac{\text{sgn}(Z)}{Z} [-\sum J_{12} + \Delta\theta]$$

$$H(1, 0, 3) = \sum S_{12}Q_{12}$$

$$H(0, 1, 3) = -\sum C_{12}Q_{12}$$

$$H(0, 0, 5) = \frac{1}{3Z^2} [H(0, 0, 3)$$

$$+ \sum \frac{R_{12}}{(R_{12})^2 + Z^2} \left\{ \frac{s_2}{\rho_2} - \frac{s_1}{\rho_1} \right\}]$$

$$H(1, 0, 5) = \frac{1}{3} \sum \frac{S_{12}}{(R_{12})^2 + Z^2} \left\{ \frac{s_2}{\rho_2} - \frac{s_1}{\rho_1} \right\}$$

$$H(0, 1, 5) = -\frac{1}{3} \sum \frac{C_{12}}{(R_{12})^2 + Z^2} \left\{ \frac{s_2}{\rho_2} - \frac{s_1}{\rho_1} \right\} \quad (3.5.11)$$

ここにパネル形状は多角形であり、 \sum は各辺に沿う積分の総和を意味している。(Fig.3) 添字 1, 2 は頂点 1

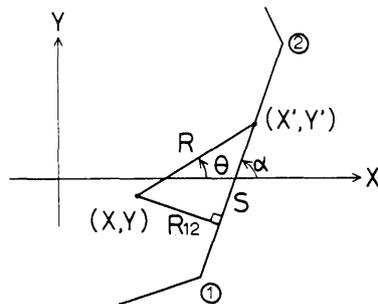


Fig.3 Integration over a side of a polygon

から頂点 2 までの意味である。また、辺の順序は、 θ 積分の積分方向に従って、 Z 軸の正側から X, Y 面を見て反時計回りにとる。また、

$$\left. \begin{aligned} Q_{12} &= \log |(\rho_2 + s_2)/(\rho_1 + s_1)| \\ J_{12} &= \arctan\{|Z|s_2/R_{12}\rho_2\} - \arctan\{|Z|s_1/R_{12}\rho_1\} \\ R_{12} &= S_{12}((X' - X) + C_{12}(Y' - Y)) \\ s &= C_{12}(X' - X) + S_{12}(Y' - Y) \\ C_{12} &= (X_2 - X_1)/d_{12}, \quad S_{12} = (Y_2 - Y_1)/d_{12} \\ d_{12} &= \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \\ \rho_1 &= \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + Z^2} \\ \rho_2 &= \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2 + Z^2} \\ \Delta\theta &= \begin{cases} 2\pi & \text{点}(X, Y, 0) \text{ がパネル内部の場合} \\ 0 & \text{点}(X, Y, 0) \text{ がパネル外部の場合} \end{cases} \end{aligned} \right\} (3.5.12)$$

である。 R_{12} は点 (X', Y') が辺 12 上にある限り一定で、点 (X, Y) が辺 12 の左側のとき正、右側のとき負となる。 s の (X', Y') も辺 12 上にあるが、その値は X' 又は Y' の関数である。

4. プロペラ解析への応用

4.1 境界条件

第 2.4 節の境界積分方程式を再記すると、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\Phi - \Phi_\infty) + \frac{1}{4\pi} \iint_S (\Phi - \Phi_\infty) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{WT} (\Phi_{T_U} - \Phi_{T_L}) \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \end{aligned}$$

$$= -\Phi_s - \Phi_{w-wT} \quad (4.1.1)$$

$$\Phi_s = \frac{-1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial n'} - \frac{\partial \Phi_\infty}{\partial n'} \right\} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (4.1.2)$$

$$\Phi_{w-wT} = \frac{1}{4\pi} \iint_{w-wT} \Delta \Phi_w \frac{\partial}{\partial n'} \left(\frac{1}{r} \right) dS \quad (4.1.3)$$

である。

上式において、 $\partial \Phi / \partial n'$ 、 $\partial \Phi_\infty / \partial n'$ は境界条件から与えられるが、それを本節において示す。

第2章においては慣性系の空間固定座標 x, y, z を用い、第3章においてはパネル固定座標 X, Y, Z を用いたが、第4章においてはプロペラ固定座標を用い、それを改めて x, y, z 座標とし、Fig.4の方向に定義する。

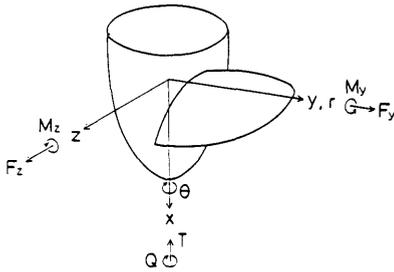


Fig.4 Coordinate system and definition of forces and moments

直角座標系 x, y, z と同時にプロペラ軸を中心とした円柱座標系 x, r, θ も定義しておく。プロペラ翼の半径 r における基準螺旋線のピッチを $2\pi p$ とすると、半径 r における翼断面形状は基準螺旋線に沿って計った \bar{x} 座標とそれに直角方向の \bar{z} 座標を用いて表すことができる (Fig.5)。

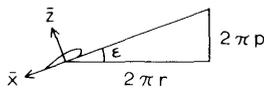


Fig.5 Helical pitch angle

プロペラ翼のレーキとスキューに対応させて、翼オフセット原点の r 軸に対する相対位置を (x_0, θ_0) とするとオフセット座標 (\bar{x}, \bar{z}) と x, y, z 座標の関係は y 軸を $\theta=0$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \bar{x} \sin \varepsilon - \bar{z} \cos \varepsilon \\ r\theta &= r\theta_0 + \bar{x} \cos \varepsilon + \bar{z} \sin \varepsilon \\ y &= r \cos \theta \end{aligned} \right\} (4.1.4)$$

(492)

$$z = r \sin \theta$$

となる。

プロペラの作動状態は、 x 軸の負の方向に速度 U で進みながら x 軸の負の向きに角速度 Ω で回転しているものとする。(Fig.6)

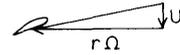


Fig.6 Inflow velocity vector

プロペラ形状が

$$B(x, y, z) = 0 \quad (4.1.5)$$

で与えられたとすると、プロペラ翼面の単位法線ベクトル $\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$ は

$$n_x = \frac{\partial B}{\partial x} / R_n, \quad n_y = \frac{\partial B}{\partial y} / R_n, \quad n_z = \frac{\partial B}{\partial z} / R_n$$

$$R_n = \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial z} \right)^2} \quad (4.1.6)$$

で与えられる。この具体形は附録に示された様に計算すれば得られる。

プロペラ翼の運動速度ベクトルを

$$\mathbf{V} = -U \mathbf{i} - \Omega \mathbf{i} \times \mathbf{r} \quad (4.1.7)$$

と書くと、境界条件は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n'} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} = -\{U n_x - \Omega z n_y + \Omega y n_z\} \quad (4.1.8)$$

となる。ここに $\mathbf{r} = y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ は境界条件を与える点の位置ベクトルである。定常作動状態の場合は U, Ω 一定であり、過渡状態の場合は、 U, Ω は時間の関数として変動する。

また、船尾伴流の速度ベクトルを

$$\mathbf{W} = w_x \mathbf{i} + w_y \mathbf{j} + w_z \mathbf{k} \quad (4.1.9)$$

と書くと、境界条件は

$$\frac{\partial \Phi_\infty}{\partial n'} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = w_x n_x + w_y n_y + w_z n_z \quad (4.1.10)$$

となる。

均一流中の場合は $\mathbf{W} = 0$ である。不均一流中の場合一般に空間に固定された分布であるので、 \mathbf{W} は本章のプロペラ固定座標系からは Ωt で時間的に回転してゆく。更に、空間に固定された分布自体が時間的に変動する場合も \mathbf{W} でシミュレートすることができる。

4.2 圧力と流体力

ポテンシャル場、速度場が定まると、圧力は第2.1節の式に従って計算できる。また、それを積分すると流体力を求めることができる。

本章においてはプロペラ翼に固定した座標を用いているので、圧力は

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q_r^2 + gy + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2 = C(t) \quad (4.2.1)$$

から計算する。ここに y 軸を鉛直上方にとり ρ は流体密度、 g は重力加速度、

$$\left. \begin{aligned} q_r &= |\mathbf{v} - \mathbf{V}| \\ V &= |\mathbf{V}| \end{aligned} \right\} (4.2.2)$$

である。無限前方の値に添字 0 を付けると

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q_r^2 + gy + \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} V^2 = \frac{p_0}{\rho} + gy_0 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \quad (4.2.3)$$

であり

$$\begin{aligned} C_p &= \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho V^2} \\ &= 1 - \frac{q_r^2}{V^2} - \frac{2g}{V^2} (y - y_0) - \frac{2}{V^2} \cdot \frac{\partial(\Phi - \Phi_0)}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

更に、 p_0 、 y_0 、 Φ_0 として着目点の p_∞ 、 y_∞ 、 Φ_∞ を用いると

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V^2} = 1 - \frac{q_r^2}{V^2} - \frac{2}{V^2} \cdot \frac{\partial(\Phi - \Phi_\infty)}{\partial t} \quad (4.2.5)$$

となる。

1 パネル S_i が流体から受ける力 \vec{f}_{si} は上述の p を用いて

$$\vec{f}_{si} = - \iint_{S_i} n p dS \doteq - n p S_i \quad (4.2.6)$$

である。ここに、上記の最後の式においては、 \mathbf{n} 、 p ともにパネルの代表値であり、 S_i はパネルの面積である。

$$S_i = H(0, 0, 0) = \sum \frac{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}{2} \quad (4.2.7)$$

ここに \sum は各辺に対する総和を表す。

スラスト T 、トルク Q の値は

$$T = \sum_i (-\mathbf{i}) \cdot \vec{f}_{si} = \sum_i p \cdot S_i (\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}) = \sum_i p \cdot S_i n_x \quad (4.2.8)$$

$$\begin{aligned} Q &= \sum_i (\mathbf{i} \times \mathbf{r}) \cdot \vec{f}_{si} = \sum_i -p S_i (\mathbf{i} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} \\ &= \sum_i -p S_i \{ \mathbf{i} \times (\mathbf{y}\mathbf{j} + \mathbf{z}\mathbf{k}) \} \cdot \mathbf{n} \\ &= \sum_i -p S_i \{ \mathbf{y}\mathbf{k} - \mathbf{z}\mathbf{j} \} \cdot \mathbf{n} = \sum_i -p S_i \{ y n_z - z n_y \} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

ここに \sum_i は全パネルの総和を表す。

プロペラシャフトフォース $F_y \cdot F_z$ とモーメント M_y

M_z の値は

$$F_y = \sum_i \mathbf{j} \cdot \vec{f}_{si} = \sum_i -p S_i (\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}) = \sum_i -p S_i \cdot n_y \quad (4.2.10)$$

$$F_z = \sum_i \mathbf{k} \cdot \vec{f}_{si} = \sum_i -p S_i (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) = \sum_i -p S_i n_z \quad (4.2.11)$$

$$M_y = \sum_i [z \mathbf{i} \cdot \vec{f}_{si} - x \mathbf{k} \cdot \vec{f}_{si}] = \sum_i -p S_i \{ z n_x - x n_z \} \quad (4.2.12)$$

$$\begin{aligned} M_z &= \sum_i [y(-\mathbf{i}) \cdot \vec{f}_{si} + x \mathbf{j} \cdot \vec{f}_{si}] \\ &= \sum_i -p S_i \{ -y n_x + x n_y \} \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

無次元表示は慣例に従って

$$\begin{aligned} K_T &= \frac{T}{\rho n^2 D^4} = \frac{\sum_i p S_i n_x}{\rho (\Omega/2\pi)^2 (2r_0)^4} = \frac{\sum_i \frac{1}{2} \rho V^2 C_p S_i n_x}{\rho (\Omega/2\pi)^2 (2r_0)^4} \\ &= \sum_i \frac{1}{2} \left\{ J^2 + \pi^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\} C_p \frac{S_i}{(2r_0)^2} n_x \end{aligned} \quad (4.2.14)$$

$$K_{F_y} = \frac{F_y}{\rho n^2 D^4} = - \sum_i \frac{1}{2} \left\{ J^2 + \pi^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\} C_p \frac{S_i}{(2r_0)^2} n_y \quad (4.2.15)$$

$$K_{F_z} = \frac{F_z}{\rho n^2 D^4} = - \sum_i \frac{1}{2} \left\{ J^2 + \pi^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\} C_p \frac{S_i}{(2r_0)^2} n_z \quad (4.2.16)$$

$$\begin{aligned} K_Q &= \frac{Q}{\rho n^2 D^5} = \frac{\sum_i -p S_i \{ y n_z - z n_y \}}{\rho (\Omega/2\pi)^2 (2r_0)^5} \\ &= \sum_i - \frac{1}{2} \left\{ J^2 + \pi^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\} C_p \frac{S_i}{(2r_0)^2} \frac{y n_z - z n_y}{2r_0} \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

$$\begin{aligned} K_{M_y} &= \frac{M_y}{\rho n^2 D^5} = \frac{\sum_i -p S_i \{ z n_x - x n_z \}}{\rho (\Omega/2\pi)^2 (2r_0)^5} \\ &= \sum_i - \frac{1}{2} \left\{ J^2 + \pi^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\} C_p \frac{S_i}{(2r_0)^2} \frac{z n_x - x n_z}{2r_0} \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

$$\begin{aligned} K_{M_z} &= \frac{M_z}{\rho n^2 D^5} = \frac{\sum_i -p S_i \{ -y n_x + x n_y \}}{\rho (\Omega/2\pi)^2 (2r_0)^5} \\ &= \sum_i - \frac{1}{2} \left\{ J^2 + \pi^2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right\} C_p \frac{S_i}{(2r_0)^2} \frac{-y n_x + x n_y}{2r_0} \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

ここに、 n はプロペラ回転数、 D は直径、 r_0 は半径、 $J = U/nD$ は前進定数である。

4.3 後流渦の変形

プロペラ固定座標から見た流速は

$$\begin{aligned} \mathbf{v} - \mathbf{V} &= \nabla \Phi - \mathbf{V} \\ &= \nabla \Phi_D + \nabla \Phi_S + \nabla \Phi_W + \nabla \Phi_\infty - \mathbf{V} \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

で表されるので、この値を用いて渦の流出位置を決め

る。

V , $\nabla\Phi_\infty$ は、流速の主要項であり、入力として与えられる。 $\nabla\Phi_D$, $\nabla\Phi_S$, $\nabla\Phi_W$ は、攪乱項であり、前章の方法により計算される。

流速の計算値は、パネル内の所定の位置で与えられるので、パネルエッジの流向は内挿計算が必要となる。

5. 結 言

プロペラ翼を揚力体とみなし、その周りの3次元ポテンシャル流を、パネル法によって数値的に解析する計算法を展開した。

本論においては、パネル法の一般的な計算法を示したが、数値計算は低次パネル法で行う予定である。計算結果は続報で示したい。本論の計算法は、極めて単純な方法であり、汎用性の高いものとする。将来は、プロペラ流場のシミュレーション等に活用したい。

本計算法の特徴は、数値計算の精度を上げることによって、厳密解に限りなく近付くことができる点である。高次パネル法に対して、本論の結果を利用することができるが、別の機会に発表したい。

参 考 文 献

- 1) 花岡達郎, “プロペラ理論と揚力面理論”, 船研報告 Vol. 14, No. 5, Sept. 1977
- 2) 凌志浩, 佐々木康夫, 高橋通雄, “境界要素法の直接法によるプロペラまわりの三次元流れ解析 (第1報: 均一流中の計算)” 日本造船学会論文集, Vol. 157, June 1985
- 3) Hess, J. L., and Valarezo, W. O., “Calculation of Steady Flow About Propellers Using a Surface Panel Method,” J. Propulsion and Power, Vol. 1, No. 6 (Nov.-Dec., 1985)
- 4) Koyama, K., Kakugawa, A. and Okamoto, M., “Experimental Investigation of Flow Around a Marine Propeller and Application of Panel Method to the Propeller Theory,” 16th Symposium on Naval Hydrodynamics, Berkeley, July 1986.
- 5) Hunt, B., “The Panel Method for Subsonic Aerodynamic Flows: A Survey of Mathematical Formulations and Numerical Methods and an Outline of the New British Aerospace Scheme,” Computational Fluid Dynamics, edited by Kollmann, W., Hemisphere Publish-

ing Corp., 1978.

- 6) Morino, L. and Kuo, C. C., “Subsonic Potential Aerodynamics for Complex Configurations: A General Theory,” AIAA J., Vol. 12, No. 2, Feb. 1974.
- 7) Maskew, B., “Prediction of Subsonic Aerodynamic Characteristics: A case for Low-Order Panel Method,” J. Aircraft, Vol. 19, No. 2, Feb. 1982.
- 8) Johnson, F. T., “A General Panel Method for the Analysis and Design of Arbitrary Configurations in Incompressible Flows,” NASA CR-3079, May 1980.
- 9) Ebihara, M., “A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems (1) Theoretical Basis,” Tech. Rep. of National Aerospace Laboratory (Japan), TR-240T, July 1971
- 10) 柳沢三憲, “境界要素法を用いた亜音速流中の三次元揚力物体の空力特性の計算,” 航空宇宙技術研究所報告, TR-835, Sept. 1984

附録 A パネル座標

附録 A においては、パネル平面の作成法、パネル座標の決定法、及び基準座標系からパネル座標系への変換法について記す。

境界積分面を分割して作られたパネル形状は一般に幾つかの角を持った平面に近い曲面である。この曲面を良く近似する平面内に X , Y 軸をとり、 X , Y 軸に直交し流体側に向いた方向に Z 軸をとる。 X , Y , Z 軸は右手系の直角座標とする。これをパネル座標と呼ぶことにする。パネル平面 X , Y 面に投影されたパネル曲面の形状を多角形と近似し、各頂点はパネル曲面の頂点から投影されたものとする。従って、一般にパネル平面は多角形である。具体的なパネル分割は物体の形状に合わせて適宜行う。この時出来たパネル形状は3頂点(三角パネル)又は4頂点(四角パネル)を持つものとする。

A1. パネル平面 (X , Y 面) の決定

パネル平面は、パネル曲面を良く近似するものが好ましい。パネル平面の決定は、その平面内に含まれる1点の座標 (x_0, y_0, z_0) と、その平面に直交し、流体側を向く単位ベクトル

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k}$$

の決定によってなされる。ここに \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} はそれぞれ

x 軸, y 軸, z 軸方向の単位ベクトルである。即ち, パネル平面 (XY 面) を基準座標系で表わすと

$$n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)+n_z(z-z_0)=0$$

である。

点 (x_0, y_0, z_0) の位置には任意性があるが, パネルの境界条件を与える標点为好ましく, パネルの重心や Null Point を採用する。

三角パネルの場合, パネル平面は 3 頂点を含む平面とする。3 頂点を ABC とすると

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= x_{AB}\mathbf{i} + y_{AB}\mathbf{j} + z_{AB}\mathbf{k} \\ &= (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k} \\ \overline{BC} &= x_{BC}\mathbf{i} + y_{BC}\mathbf{j} + z_{BC}\mathbf{k} \\ &= (x_C - x_B)\mathbf{i} + (y_C - y_B)\mathbf{j} + (z_C - z_B)\mathbf{k} \\ \vec{n} &= \overline{AB} \times \overline{BC} \\ &= (y_{AB}z_{BC} - z_{AB}y_{BC})\mathbf{i} + (z_{AB}x_{BC} - x_{AB}z_{BC})\mathbf{j} \\ &\quad + (x_{AB}y_{BC} - y_{AB}x_{BC})\mathbf{k}\end{aligned}$$

からパネルの法線ベクトル \vec{n} が得られる。ただし, ABC はパネルを流体側から見て反時計回りに名付ける。

結局次式が得られる。

$$\begin{aligned}\bar{n}_x &= (y_A - y_B)(z_B - z_C) - (z_A - z_B)(y_B - y_C) \\ \bar{n}_y &= (z_A - z_B)(x_B - x_C) - (x_A - x_B)(z_B - z_C) \\ \bar{n}_z &= (x_A - x_B)(y_B - y_C) - (y_A - y_B)(x_B - x_C) \\ n_x &= \bar{n}_x / \sqrt{(\bar{n}_x)^2 + (\bar{n}_y)^2 + (\bar{n}_z)^2} \\ n_y &= \bar{n}_y / \sqrt{(\bar{n}_x)^2 + (\bar{n}_y)^2 + (\bar{n}_z)^2} \\ n_z &= \bar{n}_z / \sqrt{(\bar{n}_x)^2 + (\bar{n}_y)^2 + (\bar{n}_z)^2} \\ x_0 &= (x_A + x_B + x_C) / 3 \\ y_0 &= (y_A + y_B + y_C) / 3 \\ z_0 &= (z_A + z_B + z_C) / 3\end{aligned}$$

四角パネルの場合, 4 頂点は一般に同一平面内に含まれるとは限らないので, 三角パネルの様に単純ではない。4 頂点を流体側から見て反時計回りに ABCD と名付ける。ABCD は一般に同一平面内にはないが, 各辺の中点を結ぶと平行四辺形となり, その辺は対角線 AC, BD に平行である。その平行四辺形を含む面をパネル平面にとると次式を得る。

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= x_{AC}\mathbf{i} + y_{AC}\mathbf{j} + z_{AC}\mathbf{k} \\ &= (x_C - x_A)\mathbf{i} + (y_C - y_A)\mathbf{j} + (z_C - z_A)\mathbf{k} \\ \overline{BD} &= x_{BD}\mathbf{i} + y_{BD}\mathbf{j} + z_{BD}\mathbf{k} \\ &= (x_D - x_B)\mathbf{i} + (y_D - y_B)\mathbf{j} + (z_D - z_B)\mathbf{k} \\ \vec{n} &= \overline{AC} \times \overline{BD} \\ &= (y_{AC}z_{BD} - z_{AC}y_{BD})\mathbf{i} + (z_{AC}x_{BD} - x_{AC}z_{BD})\mathbf{j} \\ &\quad + (x_{AC}y_{BD} - y_{AC}x_{BD})\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{n}_x &= (y_A - y_C)(z_B - z_D) - (z_A - z_C)(y_B - y_D) \\ \bar{n}_y &= (z_A - z_C)(x_B - x_D) - (x_A - x_C)(z_B - z_D) \\ \bar{n}_z &= (x_A - x_C)(y_B - y_D) - (y_A - y_C)(x_B - x_D) \\ n_x &= \bar{n}_x / \sqrt{(\bar{n}_x)^2 + (\bar{n}_y)^2 + (\bar{n}_z)^2} \\ n_y &= \bar{n}_y / \sqrt{(\bar{n}_x)^2 + (\bar{n}_y)^2 + (\bar{n}_z)^2} \\ n_z &= \bar{n}_z / \sqrt{(\bar{n}_x)^2 + (\bar{n}_y)^2 + (\bar{n}_z)^2} \\ x_0 &= (x_A + x_B + x_C + x_D) / 4 \\ y_0 &= (y_A + y_B + y_C + y_D) / 4 \\ z_0 &= (z_A + z_B + z_C + z_D) / 4\end{aligned}$$

上式からパネル平面が決定するので, パネル座標を決めれば, 座標変換により 4 頂点 ABCD のパネル平面への投影点 A', B', C', D' の座標は自動的に計算できるが, ここに表示式を示しておく。

$$\begin{aligned}\overline{AA'} &= \left(\frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2} \{ (x_B - x_A)n_x + (y_B - y_A)n_y + (z_B - z_A)n_z \} \mathbf{n} \\ \overline{BB'} &= \left(\frac{1}{2} \overline{BC} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2} \{ (x_C - x_B)n_x + (y_C - y_B)n_y + (z_C - z_B)n_z \} \mathbf{n} \\ \overline{CC'} &= \left(\frac{1}{2} \overline{CD} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2} \{ (x_D - x_C)n_x + (y_D - y_C)n_y + (z_D - z_C)n_z \} \mathbf{n} \\ \overline{DD'} &= \left(\frac{1}{2} \overline{DA} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \\ &= \frac{1}{2} \{ (x_A - x_D)n_x + (y_A - y_D)n_y + (z_A - z_D)n_z \} \mathbf{n}\end{aligned}$$

A2. パネル座標 (XYZ 座標) の決定

前述の過程でパネル平面と標点が決まったので,

$$n_x(x-x_0)+n_y(y-y_0)+n_z(z-z_0)=0$$

となり, パネル座標の Z 軸が決定された。

次に条件を付加して X, Y 軸を決定するとパネル座標が完成する。条件の与へ方によって色々のパネル座標ができる。但しいずれの場合にも, X, Y, Z 軸は右手直交座標系とし, Z 軸はパネル平面に直交し, 流体側を向くものとする。

以下の解析において, x, y, z 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とし, X, Y, Z 軸方向の単位ベクトルを $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ とし

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= A_{xx}\mathbf{i} + A_{xy}\mathbf{j} + A_{xz}\mathbf{k} \\ \mathbf{J} &= A_{yx}\mathbf{i} + A_{yy}\mathbf{j} + A_{yz}\mathbf{k} \\ \mathbf{K} &= A_{zx}\mathbf{i} + A_{zy}\mathbf{j} + A_{zz}\mathbf{k}\end{aligned}$$

と書く。但し

$$A_{zx} = n_x, \quad A_{zy} = n_y, \quad A_{zz} = n_z$$

である。

A 2.1 X 軸を, y 成分零, x 軸の正の方向にとる場合。 x 軸の方向に進む翼の解析等に利用できる。

$$\mathbf{I} = A_{xx}\mathbf{i} + A_{xy}\mathbf{j} + A_{xz}\mathbf{k}$$

において

$$A_{xy} = 0$$

$$A_{xx}n_x + A_{xy}n_y + A_{xz}n_z = 0$$

$$A_{xx}^2 + A_{xy}^2 + A_{xz}^2 = 1$$

であるから, $A_{xx} > 0$ を考慮して

$$A_{xx} = \frac{\text{sgn}(n_z)n_z}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}}, \quad A_{xy} = 0, \quad A_{xz} = -\frac{\text{sgn}(n_z)n_x}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}}$$

となる。

$$\mathbf{K} = A_{zx}\mathbf{i} + A_{zy}\mathbf{j} + A_{zz}\mathbf{k} = n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{J} = A_{yx}\mathbf{i} + A_{yy}\mathbf{j} + A_{yz}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{K} \times \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} &= [n_x\mathbf{i} + n_y\mathbf{j} + n_z\mathbf{k}] \times [n_z\mathbf{i} - n_x\mathbf{k}] \frac{\text{sgn}(n_z)}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} \\ &= \frac{\text{sgn}(n_z)}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}} [-n_y n_x \mathbf{i} + (n_z^2 + n_x^2) \mathbf{j} - n_y n_z \mathbf{k}] \end{aligned}$$

であるから

$$A_{yx} = -n_y n_x \frac{\text{sgn}(n_z)}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}}, \quad A_{yy} = (n_z^2 + n_x^2) \frac{\text{sgn}(n_z)}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}},$$

$$A_{yz} = -n_y n_z \frac{\text{sgn}(n_z)}{\sqrt{n_x^2 + n_z^2}}$$

A 2.2 Y 軸を, x 成分零, y 軸の正の方向にとる場合。

$$\mathbf{J} = A_{yx}\mathbf{i} + A_{yy}\mathbf{j} + A_{yz}\mathbf{k}$$

において

$$A_{yx} = 0$$

$$A_{yx} \cdot n_x + A_{yy} \cdot n_y + A_{yz} \cdot n_z = 0$$

$$A_{yx}^2 + A_{yy}^2 + A_{yz}^2 = 1$$

$$A_{yy} > 0$$

から

$$A_{yx} = 0, \quad A_{yy} = \frac{\text{sgn}(n_z)n_z}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}}, \quad A_{yz} = -\frac{\text{sgn}(n_z)n_y}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}}$$

となる。

$$\mathbf{I} = \mathbf{J} \times \mathbf{K}$$

$$= (A_{yx}\mathbf{i} + A_{yy}\mathbf{j} + A_{yz}\mathbf{k}) \times (A_{zx}\mathbf{i} + A_{zy}\mathbf{j} + A_{zz}\mathbf{k})$$

$$= (A_{yy}A_{zz} - A_{yz}A_{zy})\mathbf{i} + (A_{yz}A_{zx} - A_{yx}A_{zz})\mathbf{j} \\ + (A_{yx}A_{zy} - A_{yy}A_{zx})\mathbf{k}$$

$$= [(n_z^2 + n_y^2)\mathbf{i} - n_y n_x \mathbf{j} - n_z n_x \mathbf{k}] \frac{\text{sgn}(n_z)}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}}$$

であるから

$$A_{xx} = (n_y^2 + n_z^2) \frac{\text{sgn}(n_z)}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}},$$

$$A_{xy} = -n_y n_x \frac{\text{sgn}(n_z)}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}},$$

$$A_{xz} = -n_z n_x \frac{\text{sgn}(n_z)}{\sqrt{n_y^2 + n_z^2}}$$

A 2.3 X 軸を, \mathbf{r} ベクトル ($y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ ベクトル) に直交させる場合。第 4 章のプロペラの解析に利用できる。

$$\mathbf{I} = A_{xx}\mathbf{i} + A_{xy}\mathbf{j} + A_{xz}\mathbf{k}$$

において

$$A_{xx} \cdot 0 + A_{xy} \cdot y_0 + A_{xz} \cdot z_0 = 0$$

$$A_{xx} \cdot n_x + A_{xy} \cdot n_y + A_{xz} \cdot n_z = 0$$

$$A_{xx}^2 + A_{xy}^2 + A_{xz}^2 = 1$$

$$A_{xz} > 0$$

とすると

$$A_{xx} = \frac{\text{sgn}(n_x y_0)(n_y \cdot z_0 - n_z \cdot y_0)}{\sqrt{(n_y z_0 - n_z y_0)^2 + (n_x z_0)^2 + (n_x y_0)^2}}$$

$$A_{xy} = -\frac{\text{sgn}(n_x y_0)n_x \cdot z_0}{\sqrt{(n_y z_0 - n_z y_0)^2 + (n_x z_0)^2 + (n_x y_0)^2}}$$

$$A_{xz} = \frac{\text{sgn}(n_x y_0)n_x y_0}{\sqrt{(n_y z_0 - n_z y_0)^2 + (n_x z_0)^2 + (n_x y_0)^2}}$$

となる。

$$\mathbf{J} = \mathbf{K} \times \mathbf{I}$$

$$= (A_{zx}\mathbf{i} + A_{zy}\mathbf{j} + A_{zz}\mathbf{k}) \times (A_{xx}\mathbf{i} + A_{xy}\mathbf{j} + A_{xz}\mathbf{k})$$

$$= (A_{zy}A_{xz} - A_{zz}A_{xy})\mathbf{i} + (A_{zz}A_{xx} - A_{zx}A_{xz})\mathbf{j}$$

$$+ (A_{zx}A_{xy} - A_{zy}A_{xx})\mathbf{k}$$

$$= \text{sgn}(n_x y_0) \{ (n_y n_x y_0 + n_z n_x z_0)\mathbf{i}$$

$$+ (n_z(n_y z_0 - n_z y_0) - n_x^2 y_0)\mathbf{j}$$

$$+ (-n_x^2 z_0 - n_y(n_y z_0 - n_z y_0))\mathbf{k} \}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(n_y z_0 - n_z y_0)^2 + (n_x z_0)^2 + (n_x y_0)^2}}$$

であるから

$$A_{yx} = \frac{\text{sgn}(n_x y_0)(n_y n_x y_0 + n_z n_x z_0)}{\sqrt{(n_y z_0 - n_z y_0)^2 + (n_x z_0)^2 + (n_x y_0)^2}}$$

$$A_{yy} = \frac{\text{sgn}(n_x y_0)\{n_z(n_y z_0 - n_z y_0) - n_x^2 y_0\}}{\sqrt{(n_y z_0 - n_z y_0)^2 + (n_x z_0)^2 + (n_x y_0)^2}}$$

$$A_{yz} = \frac{\text{sgn}(n_x y_0)\{-n_x^2 z_0 - n_y(n_y z_0 - n_z y_0)\}}{\sqrt{(n_y z_0 - n_z y_0)^2 + (n_x z_0)^2 + (n_x y_0)^2}}$$

A3. 座標変換

パネル座標 X, Y, Z が前述の様に決定されると

$$\mathbf{I} = A_{xx}\mathbf{i} + A_{xy}\mathbf{j} + A_{xz}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{J} = A_{yx}\mathbf{i} + A_{yy}\mathbf{j} + A_{yz}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{K} = A_{zx}\mathbf{i} + A_{zy}\mathbf{j} + A_{zz}\mathbf{k}$$

の係数行列が与えられる。このときまた逆に

$$\mathbf{i} = A_{xx}\mathbf{I} + A_{yx}\mathbf{J} + A_{zx}\mathbf{K}$$

$$\mathbf{j} = A_{xy}\mathbf{I} + A_{yy}\mathbf{J} + A_{zy}\mathbf{K}$$

$$\mathbf{k} = A_{xz}\mathbf{I} + A_{yz}\mathbf{J} + A_{zz}\mathbf{K}$$

でもある。

そこでベクトル

$$\vec{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

$$\vec{o} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

$$\vec{A} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K}$$

において

$$\vec{a} = \vec{o} + \vec{A}$$

とすると

$$x = x_0 + A_{xx}X + A_{yx}Y + A_{zx}Z$$

$$y = y_0 + A_{xy}X + A_{yy}Y + A_{zy}Z$$

$$z = z_0 + A_{xz}X + A_{yz}Y + A_{zz}Z$$

$$A_{xx}(x - x_0) + A_{xy}(y - y_0) + A_{xz}(z - z_0) = X$$

$$A_{yx}(x - x_0) + A_{yy}(y - y_0) + A_{yz}(z - z_0) = Y$$

$$A_{zx}(x - x_0) + A_{zy}(y - y_0) + A_{zz}(z - z_0) = Z$$

となり、この式により、 $x, y, z \iff X, Y, Z$ の座標変換を行うことができる。

附録 B 関数 $H(0, 0, 1)$

$$H(0, 0, 1) = \iint \frac{1}{\rho} dX' dY'$$

ここに

$$\rho = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2 + Z^2} = \sqrt{R^2 + Z^2}$$

$$R = \sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y')^2}$$

と書き、円柱座標を用いて $dX' dY' = R d\theta dR$

とすると、

$$\begin{aligned} H(0, 0, 1) &= \iint_0^R \frac{R dR d\theta}{\sqrt{R^2 + Z^2}} \\ &= \iint_{|z|}^{\rho} d\rho d\theta \\ &= \int [\rho - |Z|] d\theta \\ &= \int \rho d\theta - |Z| \cdot \Delta\theta \end{aligned}$$

ここに

$$\Delta\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{点}(X, Y, 0) \text{ がパネル内部の場合} \\ 0 & \text{点}(X, Y, 0) \text{ がパネル外部の場合} \end{cases}$$

更に

$$\varphi_{12} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho d\theta$$

と書くと

$$H(0, 0, 1) = \sum \varphi_{12} - |Z| \cdot \Delta\theta$$

ここに \sum は多辺形の各辺の総和を意味する。

φ_{12} を計算するために、 ρ を θ で表すと、Fig. 3から

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{R^2 + Z^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{R_{12}}{\sin(\alpha - \theta)}\right)^2 + Z^2} \\ &= \operatorname{sgn}\{\sin(\theta - \alpha)\} \frac{\sqrt{R_{12}^2 + Z^2 \sin^2(\theta - \alpha)}}{\sin(\theta - \alpha)} \end{aligned}$$

となる。

ここで数学公式

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 x}}{\sin x} dx &= |a| \log \left| \frac{\sin x}{|a| \cos x + \sqrt{a^2 + b^2 \sin^2 x}} \right| \\ &\quad + |b| \arccos \frac{|b| \cos x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

を用いると

$$\varphi_{12} = \operatorname{sgn}\{\sin(\theta - \alpha)\}$$

$$\begin{aligned} &\left[|R_{12}| \log \left| \frac{\sin(\theta - \alpha)}{|R_{12}| \cos(\theta - \alpha) + \sqrt{R_{12}^2 + Z^2 \sin^2(\theta - \alpha)}} \right| \right. \\ &\quad \left. + |Z| \arccos \frac{|Z| \cos(\theta - \alpha)}{\sqrt{R_{12}^2 + Z^2}} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned}$$

となる。

次に

$$\sin(\theta - \alpha) = -\sin(\alpha - \theta) = -R_{12}/R$$

$$\cos(\theta - \alpha) = \cos(\alpha - \theta) = s/R$$

$$\operatorname{sgn}\{\sin(\theta - \alpha)\} = -\operatorname{sgn}(R_{12})$$

を考慮して上式を整理する。

まず

$$\begin{aligned} &\frac{\sin(\theta - \alpha)}{|R_{12}| \cos(\theta - \alpha) + \sqrt{R_{12}^2 + Z^2 \sin^2(\theta - \alpha)}} \\ &= \frac{-\operatorname{sgn}(R_{12})}{s + \rho} \end{aligned}$$

となるから、 φ_{12} の前半の項を $\varphi_{12}^{\frac{1}{2}}$ と書くと

$$\begin{aligned} \varphi_{12}^{\frac{1}{2}} &= -R_{12} \log \left| \frac{-\operatorname{sgn}(R_{12})}{s + \rho} \right|_{\theta_1}^{\theta_2} \\ &= R_{12} \log \left| \frac{\rho_2 + s_2}{\rho_1 + s_1} \right| \end{aligned}$$

また、

$$\rho_1^2 - s_1^2 = \rho_2^2 - s_2^2 = R_{12}^2 + Z^2$$

であるから

$$\frac{\rho_2 + s_2}{\rho_1 + s_1} = \frac{\rho_1 - s_1}{\rho_2 - s_2} = \frac{\rho_2 + s_2 + \rho_1 - s_1}{\rho_1 + s_1 + \rho_2 - s_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2 + d_{12}}{\rho_1 + \rho_2 - d_{12}}$$

であり、従って、

$$\varphi_{12}^{\frac{1}{2}} = R_{12} \log \left| \frac{\rho_1 + \rho_2 + d_{12}}{\rho_1 + \rho_2 - d_{12}} \right|$$

となる。

また、数学公式

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{1-x^2}$$

を用いると

$$\arccos \frac{|Z| |\cos(\theta - \alpha)|}{\sqrt{R_{12}^2 + Z^2}} = \frac{\pi}{2} - \arctan \left\{ \frac{|Z| \cdot s}{|R_{12}| \cdot \rho} \right\}$$

であるので, φ_{12} の後半の項を φ_{12}^2 と書くと

$$\begin{aligned} \varphi_{12}^2 &= \left[-\operatorname{sgn}(R_{12}) \cdot |Z| \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{|Z| \cdot s}{|R_{12}| \cdot \rho} \right) \right\} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \\ &= |Z| \left\{ \arctan \left(\frac{|Z| |s_2|}{R_{12} \rho_2} \right) - \arctan \left(\frac{|Z| |s_1|}{R_{12} \rho_1} \right) \right\} \end{aligned}$$

または, 変形して

$$\varphi_{12}^2 = |z| \arctan \left\{ \frac{R_{12} |Z| |(\rho_1 s_2 - \rho_2 s_1)|}{\rho_1 \rho_2 R_{12}^2 + Z^2 s_1 s_2} \right\}$$

とも書ける。

以上から, 結局, 次式が得られる。

$$H(0, 0, 1) = \sum \{ R_{12} Q_{12} + |Z| |J_{12}| \} - |Z| \Delta \theta$$

$$Q_{12} = \log \left| \frac{\rho_2 + s_2}{\rho_1 + s_1} \right| = \log \left| \frac{\rho_1 + \rho_2 + d_{12}}{\rho_1 + \rho_2 - d_{12}} \right|$$

$$J_{12} = \arctan \left(\frac{|Z| |s_2|}{R_{12} \rho_2} \right) - \arctan \left(\frac{|Z| |s_1|}{R_{12} \rho_1} \right)$$

$$= \arctan \left\{ \frac{R_{12} |Z| |(\rho_1 s_2 - \rho_2 s_1)|}{\rho_1 \rho_2 R_{12}^2 + Z^2 s_1 s_2} \right\}$$

$$R_{12} = S_{12}(X' - X) - C_{12}(Y' - Y)$$

$$s = C_{12}(X' - X) + S_{12}(Y' - Y)$$

$$C_{12} = (X_2 - X_1)/d_{12}, \quad S_{12} = (Y_2 - Y_1)/d_{12},$$

$$d_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$\rho_1 = \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2 + Z^2},$$

$$\rho_2 = \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2 + Z^2}$$

$$\Delta \theta = \begin{cases} 2\pi & \text{点}(X, Y, 0) \text{ がパネル内部の場合} \\ 0 & \text{点}(X, Y, 0) \text{ がパネル外部の場合} \end{cases}$$

ここに, \sum は多辺形の各辺の総和を意味する。

附録 C 関数 $H(0, 0, 3)$

第3.4節の漸化式

$$\begin{aligned} &(K - M - N - 2)H(M, N, K) \\ &= KZ^2 H(M, N, K+2) + \sum F_\epsilon(M+1, N, K) \\ &\quad + \sum F_\gamma(M, N+1, K) \end{aligned}$$

において, $M=0, N=0, K=1$ とおくと

$$-H(0, 0, 1) = Z^2 H(0, 0, 3) + \sum F_\epsilon(1, 0, 1) + \sum F_\gamma(0, 1, 1)$$

これを用いると

$$\begin{aligned} H(0, 0, 3) &= \frac{1}{Z^2} [-H(0, 0, 1) - \sum F_\epsilon(1, 0, 1) \\ &\quad - \sum F_\gamma(0, 1, 1)] \end{aligned}$$

まず $F_\epsilon(1, 0, 1)$ の計算式を求める。定義から

$$\begin{aligned} F_\epsilon(1, 0, 1) &= \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{X - X_{12}}{\rho} \Big|_{X'=X_{12}} dY' \\ &= \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{X - X_{12}}{\sqrt{(X - X_{12})^2 + (Y - Y')^2 + Z^2}} dY' \\ &= (X - X_{12}^0) I_\epsilon(0, -1) - X_{12}^1 I_\epsilon(1, -1) \end{aligned}$$

更に, $I(m, k)$ の漸化式

$$I(1, -1) = \frac{1}{a} \left\{ \sqrt{aX^2 + bX + c} - \frac{b}{2} I(0, -1) \right\}$$

を用いると

$$\begin{aligned} F_\epsilon(1, 0, 1) &= -X_{12}^1 \frac{1}{a} \sqrt{aY'^2 + bY' + c} \Big|_{Y_1}^{Y_2} \\ &\quad + \left\{ (X - X_{12}^0) + X_{12}^1 \frac{b}{2a} \right\} I_\epsilon(0, -1) \end{aligned}$$

ここに

$$\begin{aligned} aY'^2 + bY' + c &= (X - X_{12})^2 + (Y - Y')^2 + Z^2 \\ &= \{1 + (X_{12}^1)^2\} Y'^2 - 2\{Y + X_{12}^1(X - X_{12}^0)\} Y' \\ &\quad + \{(X - X_{12}^0)^2 + Y^2 + Z^2\} \end{aligned}$$

$$\text{即ち } a = 1 + (X_{12}^1)^2, \quad b = -2\{Y + X_{12}^1(X - X_{12}^0)\},$$

$$c = (X - X_{12}^0)^2 + Y^2 + Z^2$$

このとき

$$\begin{aligned} &(X - X_{12}^0) + X_{12}^1 \frac{b}{2a} \\ &= (X - X_{12}^0) - X_{12}^1 \frac{Y + X_{12}^1(X - X_{12}^0)}{1 + (X_{12}^1)^2} \\ &= \frac{(X - X_{12}^0) - X_{12}^1 Y}{1 + (X_{12}^1)^2} \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} F_\epsilon(1, 0, 1) &= \frac{X_{12}^1}{1 + (X_{12}^1)^2} \sqrt{aY'^2 + bY' + c} \Big|_{Y_1}^{Y_2} \\ &\quad + \frac{(X - X_{12}^0) - X_{12}^1 Y}{1 + (X_{12}^1)^2} I_\epsilon(0, -1) \end{aligned}$$

更に

$$\begin{aligned} I_\epsilon(0, -1) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \log |2aY' + b| \\ &\quad + 2\sqrt{a(aY'^2 + bY' + c)} \Big|_{Y_1}^{Y_2} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} aY' + \frac{1}{2}b &= \{1 + (X_{12}^1)^2\} Y' - \{Y + X_{12}^1(X - X_{12}^0)\} \\ &= Y' - Y - X_{12}^1 \{X - X_{12}^0 - X_{12}^1 Y\} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} I_\epsilon(0, -1) &= \frac{1}{\sqrt{1 + (X_{12}^1)^2}} \\ &\quad \cdot \log \left| \frac{(Y_2 - Y) + X_{12}^1(X_2 - X) + \sqrt{1 + (X_{12}^1)^2} \rho_2}{(Y_1 - Y) + X_{12}^1(X_1 - X) + \sqrt{1 + (X_{12}^1)^2} \rho_1} \right| \end{aligned}$$

更に第3.5節で用いた次の定義による変数を用いる。

$$d_{12} = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}$$

$$C_{12} = \frac{X_2 - X_1}{d_{12}} = \frac{X_{12}^1}{\sqrt{1 + (X_{12}^1)^2}}$$

$$S_{12} = \frac{Y_2 - Y_1}{d_{12}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (X_{12}^1)^2}}$$

$$R_{12} = S_{12}(X' - X) - C_{12}(Y' - Y)$$

$$s = C_{12}(X' - X) + S_{12}(Y' - Y)$$

$$Q_{12} = \log \left| \frac{\rho_2 + s_2}{\rho_1 + s_1} \right|$$

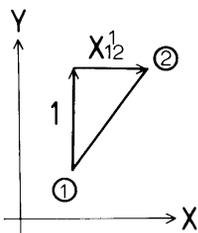


Fig. 7 Definition of coefficient X_{12}^1

このとき

$$\frac{(X - X_{12}^0) - X_{12}^1 Y}{1 + (X_{12}^1)^2}$$

$$= \frac{X - X_{12}^0 - X_{12}^1 Y' + X_{12}^1 Y' - X_{12}^1 Y}{1 + (X_{12}^1)^2}$$

$$= \frac{(X - X') - X_{12}^1 (Y - Y')}{1 + (X_{12}^1)^2}$$

$$= S_{12} \{ S_{12}(X - X') - C_{12}(Y - Y') \}$$

$$= -S_{12} R_{12}$$

であるから

$$F_\varepsilon(1, 0, 1) = -S_{12} C_{12} (\rho_2 - \rho_1) - S_{12} R_{12} I_\varepsilon(0, -1),$$

$$I_\varepsilon(0, -1) = S_{12} \log \left| \frac{S_{12}(Y_2 - Y) + C_{12}(X_2 - X) + \rho_2}{S_{12}(Y_1 - Y) + C_{12}(X_1 - X) + \rho_1} \right|$$

$$= S_{12} \log \left| \frac{s_2 + \rho_2}{s_1 + \rho_1} \right|$$

$$= S_{12} \log \left| \frac{\rho_1 + \rho_2 + d_{12}}{\rho_1 + \rho_2 - d_{12}} \right|$$

$$= S_{12} Q_{12}$$

次に、同様にして $F_7(0, 1, 1)$ を計算する。

$$F_7(0, 1, 1) = - \int_{X_1}^{X_2} \frac{Y - Y_{12}}{\rho |_{Y'=Y_{12}}} dX'$$

$$= - \int_{X_1}^{X_2} \frac{Y - Y_{12}}{\sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y_{12})^2 + Z^2}} dX'$$

$$= - [(Y - Y_{12}^0) I_7(0, -1) - Y_{12}^1 I_7(1, -1)]$$

$$= - \left[- Y_{12}^1 \frac{1}{a} \sqrt{aX'^2 + bX' + c} \Big|_{X_1}^{X_2} \right. \\ \left. + \left\{ (Y - Y_{12}^0) + Y_{12}^1 \frac{b}{2a} \right\} I_7(0, -1) \right]$$

ここに、

$$aX'^2 + bX' + c = (X - X')^2 + (Y - Y_{12})^2 + Z^2$$

$$= \{1 + (Y_{12}^1)^2\} X'^2 - 2\{X + Y_{12}^1(Y - Y_{12}^0)\} X' \\ + \{X^2 + (Y - Y_{12}^0)^2 + Z^2\}$$

即ち

$$a = 1 + (Y_{12}^1)^2, \quad b = -2\{X + Y_{12}^1(Y - Y_{12}^0)\}, \\ c = X^2 + (Y - Y_{12}^0)^2 + Z^2$$

このとき

$$F_7(0, 1, 1) = - \left[- \frac{Y_{12}^1}{1 + (Y_{12}^1)^2} \sqrt{aX'^2 + bX' + c} \Big|_{X_1}^{X_2} \right. \\ \left. + \frac{(Y - Y_{12}^0) - Y_{12}^1 X}{1 + (Y_{12}^1)^2} I_7(0, 1) \right]$$

$$I_7(0, -1) = \frac{1}{\sqrt{1 + (Y_{12}^1)^2}}$$

$$\cdot \log \left| \frac{(X_2 - X) + Y_{12}^1(Y_2 - Y) + \sqrt{1 + (Y_{12}^1)^2} \rho_2}{(X_1 - X) + Y_{12}^1(Y_1 - Y) + \sqrt{1 + (Y_{12}^1)^2} \rho_1} \right|$$

ここで、変数 C_{12} , S_{12} …等を用いると、

$$C_{12} = \frac{X_2 - X_1}{d_{12}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (Y_{12}^1)^2}}$$

$$S_{12} = \frac{Y_2 - Y_1}{d_{12}} = \frac{Y_{12}^1}{\sqrt{1 + (Y_{12}^1)^2}}$$

$$\frac{(Y - Y_{12}^0) - Y_{12}^1 X}{1 + (Y_{12}^1)^2} = \frac{(Y - Y') - Y_{12}^1(X - X')}{1 + (Y_{12}^1)^2}$$

$$= C_{12} \{ C_{12}(Y - Y') - S_{12}(X - X') \}$$

$$= C_{12} R_{12}$$

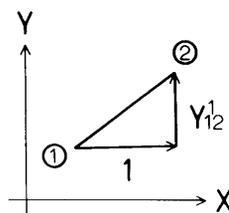


Fig. 8 Definition of coefficient Y_{12}^1

従って

$$\begin{aligned} F_7(0, 1, 1) &= -[-C_{12}S_{12}(\rho_2 - \rho_1) + C_{12}R_{12}I_7(0, -1)], \\ I_7(0, -1) &= C_{12} \log \left| \frac{C_{12}(X_2 - X) + S_{12}(Y_2 - Y) + \rho_2}{C_{12}(X_1 - X) + S_{12}(Y_1 - Y) + \rho_1} \right| \\ &= C_{12} \log \left| \frac{S_2 + \rho_2}{S_1 + \rho_1} \right| \\ &= C_{12} \log \left| \frac{\rho_1 + \rho_2 + d_{12}}{\rho_1 + \rho_2 - d_{12}} \right| \\ &= C_{12}Q_{12} \end{aligned}$$

以上から

$$\begin{aligned} F_8(1, 0, 1) + F_7(0, 1, 1) \\ &= -S_{12}C_{12}(\rho_2 - \rho_1) - S_{12}R_{12}I_8(0, -1) \\ &\quad - [-C_{12}S_{12}(\rho_2 - \rho_1) + C_{12}R_{12}I_7(0, -1)] \\ &= -S_{12}R_{12}I_8(0, -1) - C_{12}R_{12}I_7(0, -1) \\ &= -S_{12}^2R_{12}Q_{12} - C_{12}^2R_{12}Q_{12} \\ &= -R_{12}Q_{12} \end{aligned}$$

また、附録 B から

$$H(0, 0, 1) = \sum \{R_{12}Q_{12} + |Z|J_{12}\} - |Z|\Delta\theta$$

であるから

$$\begin{aligned} H(0, 0, 3) &= \frac{1}{Z^2} [-H(0, 0, 1) - \sum F_8(1, 0, 1) \\ &\quad - \sum F_7(0, 1, 1)] \\ &= \frac{1}{Z^2} [-\sum |Z|J_{12} + |Z|\Delta\theta] \\ &= \frac{\text{sgn}(Z)}{Z} [-\sum J_{12} + \Delta\theta] \end{aligned}$$

特別に、 $Z=0$ のときは極限值 $Z \rightarrow 0$ をとって

$$ZH(0, 0, 3) = \text{sgn}(Z)\Delta\theta$$

となる。これは、標点 (X, Y, Z) がパネル S_i 上にあるとき、流体側と揚力体内側とで、 $ZH(0, 0, 3)$ には $2\Delta\theta$ の飛躍があることを示している。これは、本文の (2.4.1) 式を具体的に示したことになる。この特異性は Φ_{Dl} 及び $\nabla\Phi_{Sl}$ に表れる。但し、積分方程式 (2.4.2), (3.1.2) 等の左辺は $\Phi_{D+} - \mu$ の形となっていることを付記しておく。

附録 D 関数 $H(1, 0, 3)$, $H(0, 1, 3)$

漸化式

$$\begin{aligned} H(M+2, N, K) &= \frac{M+1}{K-2} H(M, N, K-2) \\ &\quad + \sum \frac{1}{K-2} F_8(M+1, N, K-2) \end{aligned}$$

において、 $M=-1, N=0, K=3$ とおくと

$$H(1, 0, 3) = \sum F_8(0, 0, 1)$$

ここで第3.4節の諸式を用いて

$$\begin{aligned} F_8(0, 0, 1) &= \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{1}{\sqrt{(X-X_{12})^2 + (Y-Y')^2 + Z^2}} dY' \\ &= I_8(0, -1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| 2aY' + b + 2\sqrt{a(aY'^2 + bY' + c)} \right| \Big|_{Y_1}^{Y_2} \end{aligned}$$

ここに

$$aY'^2 + bY' + c = (X - X_{12})^2 + (Y - Y')^2 + Z^2$$

であり、附録 C の場合と全く同様にして

$$I_8(0, -1) = S_{12}Q_{12}$$

となる。従って

$$H(1, 0, 3) = \sum S_{12}Q_{12}$$

次に、漸化式

$$\begin{aligned} H(M, N+2, K) &= \frac{N+1}{K-2} H(M, N, K-2) \\ &\quad + \sum \frac{1}{K-2} F_7(M, N+1, K-2) \end{aligned}$$

において、 $M=0, N=-1, K=3$ とおくと

$$H(0, 1, 3) = \sum F_7(0, 0, 1)$$

ここで第3.4節の諸式を用いて

$$\begin{aligned} F_7(0, 0, 1) &= - \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{\sqrt{(X-X')^2 + (Y-Y_{12})^2 + Z^2}} dX' \\ &= -I_7(0, -1) \end{aligned}$$

附録 C と全く同様にして

$$I_7(0, -1) = C_{12}Q_{12}$$

となる。従って

$$H(0, 1, 3) = \sum (-C_{12}Q_{12})$$

附録 E 関数 $H(0, 0, 5)$

漸化式

$$\begin{aligned} (K-M-N-2) H(M, N, K) \\ &= KZ^2 H(M, N, K+2) \\ &\quad + \sum F_8(M+1, N, K) + \sum F_7(M, N+1, K) \end{aligned}$$

において、 $M=0, N=0, K=3$ とおくと

$$H(0, 0, 5) = \frac{1}{3Z^2} [H(0, 0, 3)$$

$$- \sum \{F_8(1, 0, 3) + F_7(0, 1, 3)\}]$$

附録 C と同様な方法によりこれを計算する。まず

$F_8(1, 0, 3)$ は定義から

$$\begin{aligned} F_8(1, 0, 3) &= \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{X - X_{12}}{\sqrt{(X - X_{12})^2 + (Y - Y')^2 + Z^2}} dY' \\ &= (X - X_{12})I_8(0, -3) - X_{12}I_8(1, -3) \end{aligned}$$

更に、 $I(m, k)$ の漸化式より

$$I(1, -3) = \frac{1}{-a} \left\{ \sqrt{aY'^2 + bY' + c}^{-1} - \frac{-b}{2} I(0, -3) \right\}$$

であるから

$$F_{\xi}(1, 0, 3) = \frac{X_{12}^{\frac{1}{2}}}{a} \frac{1}{\sqrt{aY'^2 + bY' + c}} \Big|_{x_1}^{y_2} - \left\{ (Y - Y_{12}^0) + Y_{12}^{\frac{1}{2}} \frac{b}{2a} \right\} I_{\eta}(0, -3) \\ + \left\{ (X - X_{12}^0) + X_{12}^{\frac{1}{2}} \frac{b}{2a} \right\} I_{\xi}(0, -3)$$

となる。ここに

$$aY'^2 + bY' + c = (X - X_{12})^2 + (Y - Y')^2 + Z^2$$

であり，附録 C と全く同様にして

$$F_{\xi}(1, 0, 3) = \frac{X_{12}^{\frac{1}{2}}}{1 + (X_{12}^{\frac{1}{2}})^2} \frac{1}{\sqrt{aY'^2 + bY' + c}} \Big|_{x_1}^{y_2} \\ + \frac{(X - X_{12}^0) - X_{12}^{\frac{1}{2}} Y}{1 + (X_{12}^{\frac{1}{2}})^2} I_{\xi}(0, -3)$$

更に

$$F_{\xi}(1, 0, 3) = S_{12} C_{12} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) - S_{12} R_{12} I_{\xi}(0, -3)$$

となる。

また $I_{\xi}(0, -3)$ も第 3.4 節の式から

$$I_{\xi}(0, -3) = \frac{4aY' + 2b}{-(b^2 - 4ac)} \frac{1}{\sqrt{aY'^2 + bY' + c}} \Big|_{x_1}^{y_2}$$

ここで， a, b, c の定義から

$$b^2 - 4ac = -4 \{ [(X - X') - X_{12}^{\frac{1}{2}}(Y - Y')]^2 + \{1 + (X_{12}^{\frac{1}{2}})^2\} Z^2 \} \\ = -4 \{ [1 + (X_{12}^{\frac{1}{2}})^2] \{ [S_{12}(X - X') - C_{12}(Y - Y')]^2 + Z^2 \} \} \\ = -4a \{ (R_{12})^2 + Z^2 \}, \\ b = -2 \{ (Y - Y') + X_{12}^{\frac{1}{2}}(X - X') + \{1 + (X_{12}^{\frac{1}{2}})^2\} Y' \} \\ = -2a \{ -S_{12}s + Y' \}$$

ここに

$$-S_{12} s + Y' = -S_{12} s_1 + Y_1 = -S_{12} s_2 + Y_2$$

である。

従って

$$I_{\xi}(0, -3) = \frac{1}{(R_{12})^2 + Z^2} \left\{ \frac{Y_2}{\rho_2} - \frac{Y_1}{\rho_1} \right\} \\ + \frac{S_{12}s_1 - Y_1}{(R_{12})^2 + Z^2} \left\{ \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right\} \\ = \frac{1}{(R_{12})^2 + Z^2} \left\{ \frac{Y_2}{\rho_2} - \frac{Y_1}{\rho_1} \right\} \\ + \frac{1}{(R_{12})^2 + Z^2} \left\{ \frac{S_{12}s_2 - Y_2}{\rho_2} - \frac{S_{12}s_1 - Y_1}{\rho_1} \right\} \\ = \frac{S_{12}}{(R_{12})^2 + Z^2} \left\{ \frac{s_2}{\rho_2} - \frac{s_1}{\rho_1} \right\}$$

が得られる。

次に $F_{\eta}(0, 1, 3)$ も定義から

$$F_{\eta}(0, 1, 3) = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{Y - Y_{12}}{\sqrt{(X - X')^2 + (Y - Y_{12})^2 + Z^2}} dX' \\ = - \{ (Y - Y_{12}^0) I_{\eta}(0, -3) - Y_{12}^{\frac{1}{2}} I_{\eta}(1, -3) \} \\ = - \frac{Y_{12}^{\frac{1}{2}}}{a} \frac{1}{\sqrt{aX'^2 + bX' + c}} \Big|_{x_1}^{x_2}$$

ここに

$$aX'^2 + bX' + c = (X - X')^2 + (Y - Y_{12})^2 + Z^2$$

であり，

$$F_{\eta}(0, 1, 3) = \frac{-Y_{12}^{\frac{1}{2}}}{1 + (Y_{12}^{\frac{1}{2}})^2} \frac{1}{\sqrt{aX'^2 + bX' + c}} \Big|_{x_1}^{x_2} \\ - \frac{(Y - Y_{12}^0) - Y_{12}^{\frac{1}{2}} X}{1 + (Y_{12}^{\frac{1}{2}})^2} I_{\eta}(0, -3)$$

更に

$$F_{\eta}(0, 1, 3) = -C_{12} S_{12} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) - C_{12} R_{12} I_{\eta}(0, -3)$$

また， $I_{\eta}(0, -3)$ は

$$I_{\eta}(0, -3) = \frac{4aX' + 2b}{-(b^2 - 4ac)} \frac{1}{\sqrt{aX'^2 + bX' + c}} \Big|_{x_1}^{x_2}$$

ここで， a, b, c の定義から

$$b^2 - 4ac = 4 \{ [X + Y_{12}^{\frac{1}{2}}(Y - Y_{12}^0)]^2 \\ - 4 \{ [1 + (Y_{12}^{\frac{1}{2}})^2] \{ X^2 + (Y - Y_{12}^0)^2 + Z^2 \} \} \\ = -4 \{ (Y - Y_{12}^0)^2 + Z^2 + (Y_{12}^{\frac{1}{2}})^2 X^2 \\ + (Y_{12}^{\frac{1}{2}})^2 Z^2 - 2XY_{12}^{\frac{1}{2}}(Y - Y_{12}^0) \} \\ = -4 \{ (Y - Y_{12}^0 - Y_{12}^{\frac{1}{2}} X)^2 + \{1 + (Y_{12}^{\frac{1}{2}})^2\} Z^2 \} \\ = -4 \{ [(Y - Y') - Y_{12}^{\frac{1}{2}}(X - X')]^2 + \{1 + (Y_{12}^{\frac{1}{2}})^2\} Z^2 \} \\ = -4 \{ [1 + (Y_{12}^{\frac{1}{2}})^2] \{ [C_{12}(Y - Y') - S_{12}(X - X')]^2 + Z^2 \} \} \\ = -4a \{ (R_{12})^2 + Z^2 \}, \\ b = -2 \{ X + Y_{12}^{\frac{1}{2}}(Y - Y_{12}^0) \} \\ = -2 \{ (X - X') + Y_{12}^{\frac{1}{2}}(Y - Y') + X' + (Y_{12}^{\frac{1}{2}})^2 X' \} \\ = -2 \{ [1 + (Y_{12}^{\frac{1}{2}})^2] \{ C_{12}^{\frac{1}{2}}(X - X') + C_{12} S_{12}(Y - Y') + X' \} \} \\ = -2a \{ -C_{12} s + X' \}$$

ここに

$$-C_{12} s + X' = -C_{12} s_1 + X_1 = -C_{12} s_2 + X_2$$

である。

従って

$$I_{\eta}(0, -3) = \frac{1}{(R_{12})^2 + Z^2} \left(\frac{X_2}{\rho_2} - \frac{X_1}{\rho_1} \right) \\ + \frac{C_{12}s_1 - X_1}{(R_{12})^2 + Z^2} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \\ = \frac{1}{(R_{12})^2 + Z^2} \left(\frac{X_2}{\rho_2} - \frac{X_1}{\rho_1} \right) \\ + \frac{1}{(R_{12})^2 + Z^2} \left(\frac{C_{12}s_2 - X_2}{\rho_2} - \frac{C_{12}s_1 - X_1}{\rho_1} \right) \\ = \frac{C_{12}}{(R_{12})^2 + Z^2} \left(\frac{s_2}{\rho_2} - \frac{s_1}{\rho_1} \right)$$

以上を用いると

$$F_{\xi}(1, 0, 3) + F_{\eta}(0, 1, 3) = -S_{12} R_{12} I_{\xi}(0, -3) \\ - C_{12} R_{12} I_{\eta}(0, -3)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-R_{12}}{(R_{12})^2 + Z^2} \left\{ \frac{s_2}{\rho_2} - \frac{s_1}{\rho_1} \right\} \\
 \text{従って} \quad H(0, 0, 5) &= \frac{1}{3Z^2} \left[H(0, 0, 3) \right. \\
 &\quad \left. - \sum \frac{-R_{12}}{(R_{12})^2 + Z^2} \left\{ \frac{s_2}{\rho_2} - \frac{s_1}{\rho_1} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

附録 F 関数 $H(1, 0, 5)$, $H(0, 1, 5)$

漸化式

$$\begin{aligned}
 H(M+2, N, K) &= \frac{M+1}{K-2} H(M, N, K-2) \\
 &\quad + \sum \frac{1}{K-2} F_\epsilon(M+1, N, K-2)
 \end{aligned}$$

において, $M=-1, N=0, K=5$ とおくと

$$\begin{aligned}
 H(1, 0, 5) &= \sum \frac{1}{3} F_\epsilon(0, 0, 3) \\
 &= \sum \frac{1}{3} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{1}{\rho^3} dY' \\
 &= \sum \frac{1}{3} I_\epsilon(0, -3)
 \end{aligned}$$

ここで $I_\epsilon(0, -3)$ は附録 E の結果を用いて

$$I_\epsilon(0, -3) = \frac{S_{12}}{(R_{12})^2 + Z^2} \left\{ \frac{s_2}{\rho_2} - \frac{s_1}{\rho_1} \right\}$$

漸化式

$$\begin{aligned}
 H(M, N+2, K) &= \frac{N+1}{K-2} H(M, N, K-2) \\
 &\quad + \sum \frac{1}{K-2} F_\eta(M, N+1, K-2)
 \end{aligned}$$

において, $M=0, N=-1, K=5$ とおくと

$$\begin{aligned}
 H(0, 1, 5) &= \sum \frac{1}{3} F_\eta(0, 0, 3) \\
 &= -\sum \frac{1}{3} \int_{X_1}^{X_2} \frac{1}{\rho^3} dX' \\
 &= -\sum \frac{1}{3} I_\eta(0, -3)
 \end{aligned}$$

ここで, $I_\eta(0, -3)$ は附録 E の結果を用いて

$$I_\eta(0, -3) = \frac{C_{12}}{(R_{12})^2 + Z^2} \left(\frac{s_2}{\rho_2} - \frac{s_1}{\rho_1} \right)$$