船舶技術研究所報告　第26巻　第2号　研究報告（平成元年3月）

数式処理システム REDUCE を用いた大撓みの摂動法解析

青木　元也*

Large deflection analysis by perturbation method using symbolic manipulation system REDUCE

By
Genya AOKI

Abstract

A perturbation procedure for large deflection analysis is presented as an application of a symbolic manipulation system to structural mechanics. The calculated results are compared with the behaviors obtained by finite element method. The accuracy of solutions by perturbation method is discussed considering the relation between the number of terms and the quantity of deflection. The main conclusions are as follows.

(1) A symbolic manipulation system makes it possible to present the non−linear behavior of a thin plate in an equation. This characteristic is an advantage of symbolic manipulation to finite element method which needs incremental calculations.

(2) In case of large deflection analysis by perturbation method, considerations must be taken as to the applicable range of the solutions.

1. まえがき

数式処理システムとは，計算機によって数式の計算を記号のままで行うシステムのことであり，人工知能の応用の一環として開発された。記号処理に適した計算機環境の充実に伴って，いくつかの数式処理システムが一般に使用されており，その中で REDUCE, muMATH, MACSYMA,SMP 等の名前が知られている。

数式処理は，数値処理に比べて抽象度が高く，得られた計算結果についての見通しが良い。また，数式は知識ベースを記述し，操作するのに適していると考えられる。著者は知識工学の構造解析／設計への適用法に関して基礎的な研究を行っているが，本報告では数式処理システム REDUCE について検討を加えた。

数式処理システムの構造解析への適用例としては，アーチの座屈解析[1]，円板の大撓み解析[2]，有限要素剛性マトリックスの数式表示[3]等が見られる。ここでは，文献2）と同様に，円板の大撓みについての摂動法による解析を検討した。文献2）と異なる主な点は，一般的な境界条件を取り扱い得るようにしたこと，および非線形有限要素法解との比較により摂動解の項数とその適用範囲との関係を明かにしたことである。

2. 数式処理システム REDUCE の概要

REDUCE は1960年代に米国スタンフォード大学の A. C. Hearn 教授によって LISP 言語を用いて開発

* 構造強度部
原稿受付：平成元年1月10日

された。その後，同教授はユタ大学を経てランド社に移ったが，その間に最初の Version 1.0 から現在の Version 3.3 まで改良が加えられてきた。REDUCE の機能についての詳細な解説は専門書[4)]に譲り，ここでは本報告に関連する機能だけを極く簡単に説明する。

不定積分 ∫ fdx は INT (f, x)で表され，例えば INT (log (x) , x)によって x (logx－1)が得られる。微分 df/dx は DF (f , x)と表し，DF (x ＊＊ 10, x)から $10x^9$ が得られる。代入分は SUB (x＝a, f)であり，例えば SUB (X＝a, b ＊ X ＊＊ 2＋c ＊ X＋d)から ba^2+ca+d が与えられる。方程式の求解には SOLVE (f, x)が用いられ，f (x)＝0 の解 x が求まる。係数の探索は COEFF (f, x, c)であり，f 式の x^i の係数が c (i)に格納される。FOR I:＝a STEP b UNTIL c SUM F (I)は F (a) ＋F (a＋b) ＋F (a＋2b) ＋・・・・・・・＋F (c)を表す。OPERATOR および ARRAY は演算子および配列を宣言するために用いられる。頻繁に用いられる手続きは PROCEDURE 文によって記述することができる。

3．円板の大撓み問題

円板が Fig. 1 に示すように等分布荷重を受ける場合の大撓み問題について考える[5)]。中心から r の位置における面外撓みおよび半径方向変位を w および u で表わすと，半径方向膜応力 σ_r および円周方向膜応力 σ_t はそれぞれ次式で与えられる。

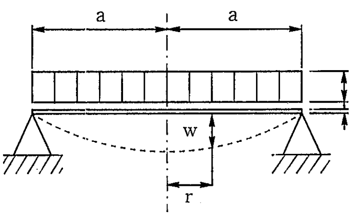

Fig. 1 Uniformly loaded circular plate

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{du}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\nu\frac{u}{r}\right\} \tag{1}$$

$$\sigma_t=\frac{E}{1-\nu^2}\left\{\frac{u}{r}+\nu\frac{du}{dr}+\frac{\nu}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2\right\} \tag{2}$$

ここで，E, ν はそれぞれヤング率，ポアソン比である。モーメントの釣合いおよび半径方向の力の釣合いから次式が得られる。

$$D\left(\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right)=t\sigma_r\frac{dw}{dr}+\frac{qr}{2} \tag{3}$$

$$\sigma_r-\sigma_t+r(d\sigma_r/dr)=0 \tag{4}$$

ここで，t は板厚，D は $Et^3/12(1-\nu^2)$, q は分布荷重の大きさである。

（3）および（4）式に（1）および（2）式を代入して，円板の半径を a, $p=qa^4/Dt$ とすると次式が得られる。

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\left(\gamma\frac{dw}{dr}\right)\right\}=\frac{6}{t^2}\frac{dw}{dr}\left\{\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+2\left(\frac{du}{dr}+\nu\frac{u}{r}\right)\right\}+\frac{tr}{2a^4}p \tag{5}$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru)\right\}=-\frac{dw}{dr}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1-\nu}{2r}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2 \tag{6}$$

Fig.1 に示す境界条件，すなわち外周において単純支持で面内変位を拘束した場合の条件は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}&r=0\ \text{において}\quad dw/dr=0,\ u=0\\&r=a\ \text{において}\quad u=0,\ w=0,\\&\qquad\qquad\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}=0\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

すなわち，円板の大撓み問題では，（5）および（6）式の非線形微分方程式を（7）式の様な境界条件の下で解くことになる。

4．摂動法による解析

円板の中心における撓みを w_o とし，これを板厚 t で除して無次元化した値 $s=w_o/t$ を摂動パラメータとして，面外撓み w，半径方向変位 u および無次元荷重 p が以下のように級数展開できるものとする。

$$\left.\begin{aligned}&w=sw_1(r)+s^3w_3(r)+s^5w_5(r)+\cdots\\&u=s^2u_2(r)+s^4u_4(r)+s^6u_6(r)+\cdots\\&p=sp_1+s^3p_3+s^5p_5+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

ここで，u は撓みの方向によって符号が変わらないの

で，sの偶関数となっている。また，次式が条件として加わる。

$$w_1(0)=t,\ \ w_i(0)=0\ \ (i\neq 1) \qquad (9)$$

（8）式を（5）および（6）式に代入する。それらの式は，sの値の如何によらず成立することから，両辺におけるsの各次数の項を等置することによって以下の式が得られる。

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_1}{dr}\right)\right\}=\frac{tr}{2a^4}p_1$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_2)\right\}=-\frac{dw_1}{dr}\frac{d^2w_1}{dr^2}-\frac{1-\nu}{2r}\left(\frac{dw_1}{dr}\right)^2$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_3}{dr}\right)\right\}=\frac{6}{t^2}\frac{dw_1}{dr}\left\{\left(\frac{dw_1}{dr}\right)^2\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{du_2}{dr}+\nu\frac{u_2}{r}\right)+\frac{tr}{2a^4}p_3\right.$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_4)\right\}=-\left(\frac{dw_1}{dr}\frac{d^2w_3}{dr^2}-\frac{dw_3}{dr}\frac{d^2w_1}{dr^2}\right)$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw_5}{dr}\right)\right\}=\frac{6}{t^2}\frac{dw_3}{dr}\left\{\left(\frac{dw_1}{dr}\right)^2+2\left(\frac{du_2}{dr}+\nu\frac{u_2}{r}\right)\right\}$$

$$+\frac{12}{t^2}\frac{dw_1}{dr}\left(\frac{du_4}{dr}+\nu\frac{u_4}{r}\right)+\frac{tr}{2a^4}p_5$$

$$\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ru_6)\right\}=-\left(\frac{dw_1}{dr}\frac{d^2w_5}{dr^2}+\frac{dw_5}{dr}\frac{d^2w_1}{dr^2}\right)$$

$$-\frac{1-\nu}{2r}\left(\frac{dw_3}{dr}\right)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (10)$$

最初の1次に関する式から，与えられた境界条件によって，p_1およびw_1が求まる。つぎの2次に関する式では，右辺はいま求めたw_1から定まるので，u_2が求められる。さらに3次に関する式から，概知のw_1, u_2および境界条件を用いてw_3が定まる。このようにして，sの高次の項が順次求められる。

上に述べた手順に従って，REDUCEによるプログラムを作成した。そのリストは付録に示したが，プログラムの流れはFig.2のようになる。この図で，前半では（10）式の微分方程式群を導出しており，後半では与えられた境界条件を用いてそれらの微分方程式を解いて，（8）式における$w_i(r)$, $u_i(r)$, p_iを順次求めている。

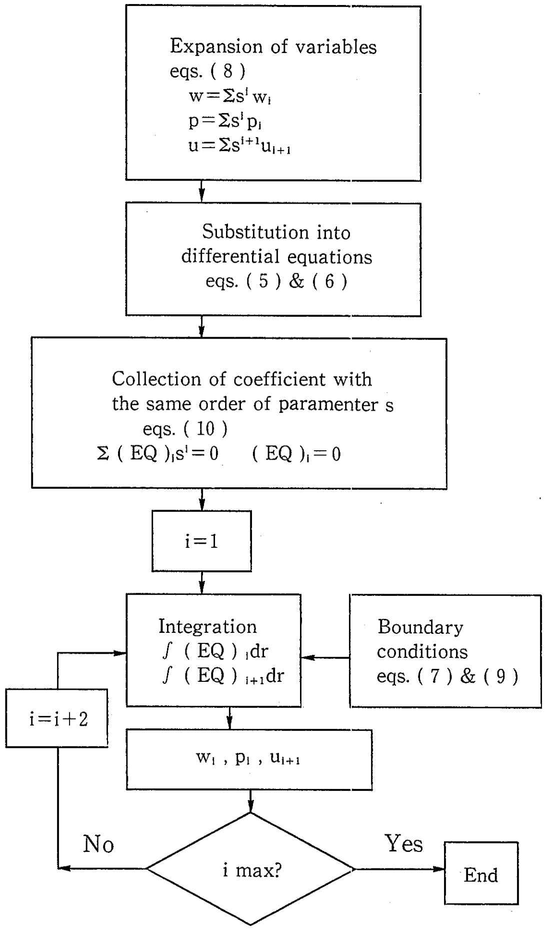

Fig. 2 Program flow

摂動法による計算結果と比較する目的で，有限要素法による大撓み計算も行った。計算モデルは Fig.3に示されており，使用したプログラムはMARCである。軸対称シェル要素を用い，大撓み効果を考慮に入れて荷重増分計算によって変形を求めた。

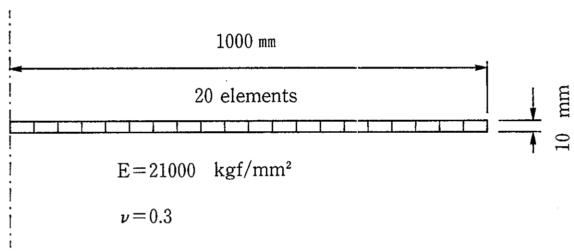

Fig. 3 Model for finite element calculation

また，支持条件および荷重条件が計算結果に及ぼす影響をみるために，前に述べた計算条件と異なった条件についても計算を行った。すなわち，境界条件としては周辺における面内変位を自由とした場合であり，このときには（7）式の r=a における境界条件は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} & w=0, \\ & \frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}=0, \\ & \frac{du}{dr}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\nu\frac{u}{r}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

また荷重条件としては中央に集中荷重 P を受ける場合であり，このときには（5）式における荷重項が $tp/2a^2r$ となる。ここで，$p=Pa^2/\pi Dt$ である。

5. 計算結果および考察

計算結果のうち，中央位置での撓み量と荷重との関係を，それぞれの計算条件について Fig. 4～Fig. 6 に示す。摂動法による級数解が正解に収束するのは，摂動パラメータが小さい範囲のときであるが，これが大きい範囲でも近以解として役立つ式があるかどうかを見るために，ここでは摂動パラメータ s が比較的大きい範囲まで示した。Fig. 4 は周辺単純支持で面内変位を拘束した円板が等分布荷重を受ける場合，Fig. 5 は前述の条件から周辺における面内変位拘束を除いた場合，Fig. 6 は Fig. 4 と同じ支持条件に対して中央に集中荷重を受ける場合である。各図において，実線で示す曲線が有限要素法による計算結果であり，これを本報告では正解と考えた。また，線形解は実線の直線，3次項までの解は破線，5次項までの解は点線，7次項までの解は一点鎖線（Fig. 4 のみ）でそれぞれ示されている。

Fig.4 の条件についての摂動法計算結果のうち，（8）式の p および w についての3次までの項をそれぞれ以下に示す。

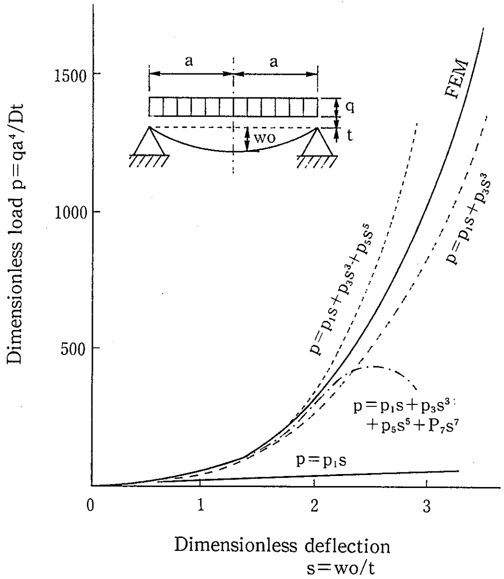

Fig. 4 Load-deflection curves for uniform load with constraint of in-plane displacement

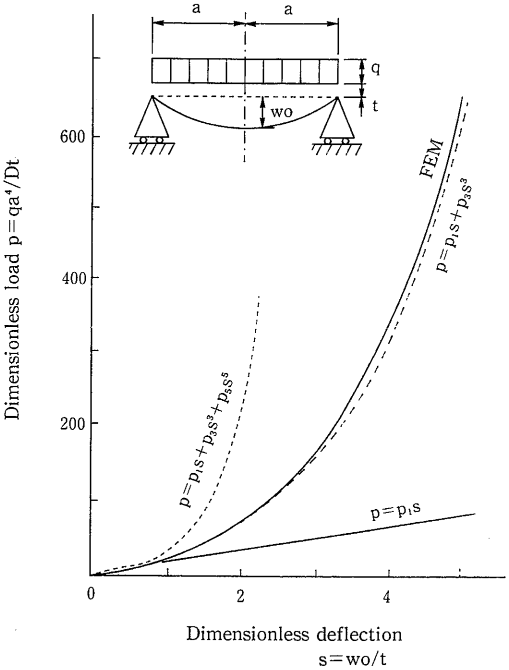

Fig. 5 Load-deflection curves for uniform load with free in-plane displacement

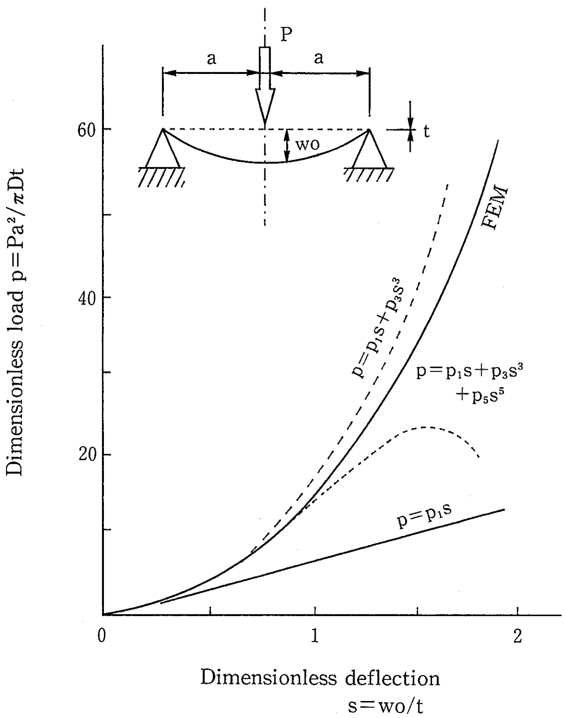

Fig. 6 Load-deflection curves for concentrated load with constraint of in-plane displacement

$$p_1=64(1+\nu)/(5+\nu) \tag{11}$$

$$p_3=8(87249+47111\nu+3566\nu^2-3198\nu^3-895\nu^4 -73\nu^5)(1+\nu)/45(5+\nu)^4 \tag{12}$$

$$w_1=\{1-(1+\nu)(r/a)^2/(5+\nu)\}\times\{1-(r/a)^2\}t \tag{13}$$

$$\begin{aligned}w_3=&\{(35916+16332\nu-9424\nu^2-6336\nu^3\\&-1212\nu^4-76\nu^5)-(23985+13687\nu-8002\nu^2\\&-6846\nu^3-1583\nu^4-121\nu^5)(r/a)^2+(3115\\&+2533\nu-2438\nu^2-2474\nu^3-677\nu^4-59\nu^5)\\&\times(r/a)^4-(260+392\nu-112\nu^2-376\nu^3\\&-1480\nu^4-16\nu^5)(r/a)^6+(10+22\nu+4\nu^2\\&-20\nu^3-14\nu^4-2\nu^5)(r/a)^8\}\{1-(r/a)^2\}\\&\times(r/a)^2(1+\nu)t/360(5+\nu)^4\end{aligned} \tag{14}$$

また、Fig. 6 の場合について同様に以下に示す。

$$p_1=16(1+\nu)/(3+\nu) \tag{15}$$

$$p_3=(35465+28389\nu+5242\nu^2-2710\nu^3 -1395\nu^4-191\nu^5)(1+\nu)/54(3+\nu)^4 \tag{16}$$

$$w_1=\{1-(r/a)^2+2(1+\nu)(r/a)^2\log(r/a) /(3+\nu)\}t \tag{17}$$

$$\begin{aligned}w_3=&[(579960+2351727\nu+384191\nu^2+3106788\nu^3\\&+1035668\nu^4-279238\nu^5-433334\nu^6\\&-196572\nu^7-47236\nu^8-6065\nu^9-329\nu^{10})\\&+(957555+3639168\nu+5632893\nu^2+4537832\nu^3\\&+1910614\nu^4+226824\nu^5-179630\nu^6\\&-105928\nu^7-26841\nu^8-3496\nu^9-191\nu^{10})\\&\times\log(r/a)+\{(-695466-2810295\nu-4503033\nu^2\\&-3383532\nu^3-685584\nu^4+859086\nu^5\\&+825066\nu^6+347652\nu^7+81810\nu^8+10449\nu^9\\&+567\nu^{10})+(347733+1579014\nu+2867157\nu^2\\&+250970\nu^3+779706\nu^4-476604\nu^5\\&-603774\nu^6-284472\nu^7-72495\nu^8-9882\nu^9\\&-567\nu^{10})\log(r/a)\}(r/a)^2+\{(115506\\&+458568\nu+661122\nu^2+276744\nu^3\\&-350084\nu^4-579848\nu^5-391732\nu^6\\&-151080\nu^7-34574\nu^8-4384\nu^9-238\nu^{10})\\&+(-157464-694008\nu-1135296\nu^2-637632\nu^3\\&+460944\nu^4+1008144\nu^5+755136\nu^6\\&+313344\nu^7+76104\nu^8+10152\nu^9+576\nu^{10})\\&\times\log(r/a)+(72900+353808\nu+650268\nu^2\\&+457920\nu^3-175896\nu^4-584352\nu^5\\&-490248\nu^6-219456\nu^7-56556\nu^8-7920\nu^9\\&-468\nu^{10})(\log(r/a))^2+(-11664-62208\nu\\&-128304\nu^2-110592\nu^3+12384\nu^4+115200\nu^5\\&+112032\nu^6+55296\nu^7+15408\nu^8+2304\nu^9\\&+144\nu^{10})(\log(r/a))^3\}(r/a)^4](r/a)^2t\\&/432(2187+7290\nu+10206\nu^2+7938\nu^3\\&+3780\nu^4+1134\nu^5+210\nu^6+22\nu^7+\nu^8)\end{aligned} \tag{18}$$

Fig. 4～Fig. 6 における有限要素法による計算値との比較において，摂動法による高次項までの解は，摂動法の適用外である大きい摂動パラメータの範囲では正解から離れてきているのが見られる。しかし，撓み

が比較的小さい範囲を拡大してみると，例えば Fig. 4 に対しては Fig. 7 に示すようになる。この図から摂動パラメータが小さい範囲では，摂動法による解の項数を増やすほど有限要素法による解に近づいているのがみられる。したがって，摂動法を用いる場合には摂動パラメータの大きさについて留意しなければならないことがわかる。しかし，ここで行った円板の大撓み解析に関しては，摂動法による 3 次項までの解が比較的大きな撓みの範囲まで実用的な近似式として用いることができるといえる。

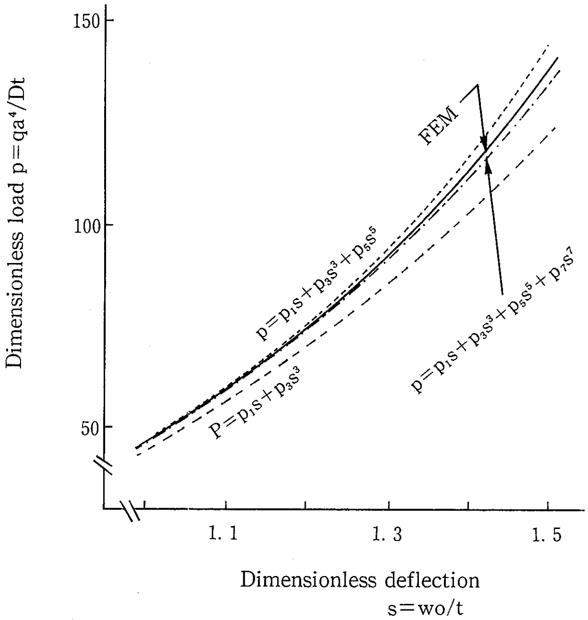

Fig. 7 Enlarged load-deflection curves of Fig. 4

6. あ と が き

数式処理システム REDUCE を用いて，円板の大撓みについての摂動法による解析を行った。また，それと比較する目的で，非線形有限要素法による計算も行った。その結果得られた主な結論をまとめると次のようになる。

（1） 数式処理システムを用いると構造物の非線形挙動が式として与えられる。これは，増分計算の必要な有限要素法に対して，大きな利点となる。

（2） 構造物の非線形挙動を摂動解により表わす場合に，項数を適当に定めれば摂動パラメータが大きい範囲でも適用可能な近似式を得ることができる。

REDUCE (Version 3. 0)を用いたプログラムの作成およびその実行はテクトロニクス TEK 4406 で行った。有限要素法の計算は船舶技術研究所の中央電子計算機 ACOS－910 システムを用いた。また，この研究は科学技術庁の科学技術振興調整費による重点基礎研究課題として行ったものである。

参 考 文 献

1） N. Rizzi and A. Tatone:Symbolic manipulation in buckling and postbuckling analysis, Computers & Structures, Vo1. 21, No. 4, 1985.

2） 中村秀治，松井正一：薄板大たわみ問題の摂動解法への数式処理システムの適用，東大計算機センター REDUCE プログラミング資料 第四集，昭和 63 年・

3）菊地正紀，吉田耕司：数式処理の FEM プログラムへの応用，日本機械学会論文集（A 編)， 53 巻 495 号，昭和 62 年 11 月.

4） A. C. Hearn:REDUCE user's manual, Rand Publication, 1983.

5） S. Timoshenko and S. Woinowsky－Krieger: Theory of plates and shells, McGraw－Hill B. C. , 1959.

付録 プログラムのリスト

```
OPERATOR W, DW, DDW, U, DU, CW, CU, P,
WIO;
ARRAY WRH ( 8 ) , URH ( 8 ) ;
PROCEDURE NORDER ( I ) ;
BEGIN
INTW1:=INT ( WRH ( I ), R ) +CW ( I, 1 ) ;
INTW2:=INTW1 * R;
DW ( I ) :=INT ( INTW2, R ) /R;
DDW ( I ) :=DF ( DW ( I ) , R ) ;
MA:=SUB ( R=A, DDW ( I ) +DW ( I ) * V/R ) ;
SOLVE ( MA, CW ( I, 1 ) ) ;
CW ( I, 1 ):=SOLN (1, 1 );
W ( I ):=INT (DW ( I ), R ) +WIO ( I ) ;
```

```
WA:=SUB ( R=A, W ( I ) ) ;
SOLVE ( WA, P ( I ) );
P ( I ):=SOLN ( 1, 1 );
INTU1:=INT (URH ( I+1 ) , R ) +CU ( I, 1 ) ;
INTU2:=INTU1 * R;
U ( I+1 ):=INT (INTU2, R ) /R;
UA:=SUB ( R=A, U ( I +1 ) ) ;
SOLVE ( UA, CU ( I, 1 ) ) ;
CU ( I, 1 ) :=SOLN ( 1, 1 ) ;
DU ( I+1 ):=DF (U ( I+1 ) , R ) ;
WRITE "END OF ORDER ", I;
END;
OFF SOLVEWRITE ;
DWW:=FOR I:=1 STEP 2 UNTIL 7 SUM ( S * *
I * DW ( I ) ) ;
DDWW:=FOR I:=1 STEP 2 UNTIL 7 SUM ( S *
* I * DDW ( I ) ) ;
UU:=FOR I:=2 STEP 2 UNTIL 8 SUM ( S * * I
* U ( I ) ) ;
DUU:=FOR I:=2 STEP 2 UNTIL 8 SUM ( S * * I
* DU ( I ) ) ;
PP:=FOR I:=1 STEP 2 UNTIL 7 SUM ( S * * I *
P ( I ) ) ;
EQ1:=6 * DWW * ( DWW * * 2+2 * (DUU+V
* UU/R ) ) T * * 2+T * R * PP/2/A * * 4$
EQ2:=-DWW * DDWW- ( 1-V ) * DWW * *
2/2/R$
DENEQ1:=DEN ( EQ1 )$
DENEQ2:=DEN ( EQ2 )$
COEFF ( NUM ( EQ1 ) , S, WRH ) ;
COEFF ( NUM ( EQ2 ) , S, URH ) ;
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL 8 DO <<
WRH ( I ) :=WRH ( I ) /DENEQ1;
URH ( I ) :=URH ( I ) /DENEQ2; >>;
WIO ( 1 ) :=T;
WIO ( 3 ) :=O;
WIO ( 5 ) :=O;
WIO ( 7 ) :=O;
WRITE "READY TO START !!";
;END;
```